Matrizen:

$A(C+D)=AC+AD \qquad (AB)C=A(BC)$

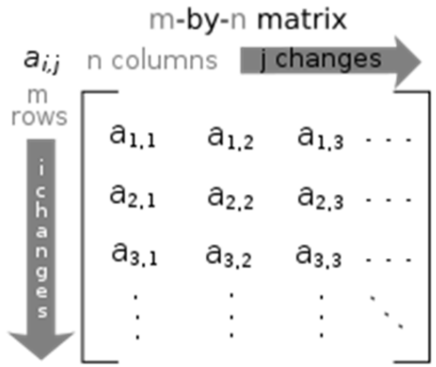
$(A+B)C=AC+BC \qquad AB \neq BA$

$(A+B)^T=A^T+B^T \qquad A\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}A$

$(AB)^T=B^TA^T \qquad A^{-1}A=\boldsymbol{I}$

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T \qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$a^{(j)}$: *j-te Spalte* $\qquad a^{[i]}$: *i-te Zeile*



Reguläre Matrix (gegensatz singulär):

- *Ax=b ist für jedes b lösbar (nur 1 Lsg.)*
- *Ax=0 hat nur die triviale lösung x=0*
- *det(A) ≠0*
- *Rang(A)=n*

Adjunkte Matrix:

$\widetilde{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\det(M_{\boldsymbol{ji}})$ $\qquad M_{uv}$: *A ohne Zeile u und Spalte v (Minor)*

Bsp:

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1\cdot\det(d) & -1\cdot\det(b) \\ -1\cdot\det(c) & 1\cdot\det(a) \end{pmatrix}$

Inverse Matrix:

$Ax=b \leftrightarrow A^{-1}b=x \qquad AA^{-1}=\boldsymbol{I}$ $\qquad$ *(A muss regulär sein)*

$A^{-1}=1/\det(A)\cdot\widetilde{A}$

oder Gaus-Jordan Algorithmus:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-3} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boldsymbol{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{2} \\ \uparrow \\ \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} = A^{-1}$$

Orthogonale Matrix:

- $A^TA=\boldsymbol{I}$ *(definition orthogonal)*
- $A^{-1}=A^T$
- $AA^T=A^TA$
- *Zeilen- bzw. Spalten-Vektoren stehen senkrecht aufeinander + normiert*
- $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

LR-Zerlegung:

Löst Ax=b für viele b. PA=RL → löse Ly=Pb für y → löse Rx=y für x

Bsp $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *:*

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \boldsymbol{-2} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante*:*

Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$*, dann ist* $\det(A)$ $(=|A|)$*:*

- $n=1; A=(a) \rightarrow \det(A)=a$
- $n=2; A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \det(A)=ad-cb$
- $n=3; A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \det(A)=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh$
- $n=\mathbb{N};\ A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \det(A)=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$
  - *det(A)=det(A^T)* $\quad$ *det(AB)=det(A)·det(B)*
  - *Vertauscht man zwei Zeilen, so wechselt das Vorzeichen*
  - *Zeilen miteinander addieren ändert die determinante nicht*
  - *det(·· α·$a^{[k]}$ ··) = α·det(·· $a^{[k]}$ ··) ; det(·· $a^{[k]}$+$b^{[k]}$ ··)= det(·· $a^{[k]}$··) +det(·· $b^{[k]}$ ··)*
  - *Zwei linear abhängige Zeilen → det(A)=0*
  - *Eine Nullzeile → det(A)=0*

- $det\begin{pmatrix} a_{1,1} & * \\ 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$ *(Dreiecksmatrix)*
- *det(A)=det(P)·det(R)* *(für LR-Zerlegung)*

Symmetrische Matrix:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *heisst symmetrisch, falls* $A^T = A$*, dann gilt:*

- *Alle EW von A sind Reell*
- *A ist Halbeinfach und also Diagonalisierbar*
- *EV zu verschiedenen EW von A sind orthogonal zueinander*
- *A besitzt eine Orthogonale Eigenbasis*

Ähnliche Matrizen:

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, dann heisen diese ähnlich wenn für* $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *regulär gilt:*
$B = T^{-1}AT$

Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische polynom und dieselben EW.

Vektorraum:

Sei V ein Vektorraum mit definierter Addition und Multiplikation mit Skalar:

- $\forall u, v \in V: \quad u + v = v + u$
- $\forall u, v, w \in V: \quad (u + v) + w = u + (v + w)$
- $\exists \vec{0} \in V;\ \forall u \in V: \quad u + \vec{0} = u$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V: \quad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
- $\forall u \in V: \quad 1 \cdot u = u$

Untervektorräume*:*

Eine nichtleere Teilmenge U eines VR V heisst Untervektorraum wenn:

- $\forall a, b \in U: \quad a + b \in U$
- $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U$

Lineare Abbildungen:

V, W reelle Vektorräume. $F: V \to W$*. Falls* $\forall\ x, y \in V$ *und* $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$*:*

F(x+y) = F(x) + F(y) *F(α·x) = α·F(x)*

Eigenwerte, Eigenvektoren:

- $\lambda \in \mathbb{C}$ *heist Eigenwert der Matrix A, wenn* $\exists\ v \in \mathbb{C}^n \neq \vec{0}$*, so dass* $A \cdot v = \lambda \cdot v$
- *Ist λ Eigenwert von A, so heisst jedes* v *mit* $A \cdot v = \lambda \cdot v$ *Eigenvektor von A zu λ*
- *Der Eigenraum zu einem λ ist der Vektorraum all seiner v.*
- *Algebraische Vielfachheit von λ: # gleicher λ-s aus Berechnung.*
- *Geometrische Vielfachheit von λ: Dim(Eigenraum)*
- $1 \leq geom.vf. \leq alg.vf. \leq n$
- *Wenn* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *parweise verschiden, dann sind EV linear unabhängig*

Bsp. EW:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \det(A - \boldsymbol{I} \cdot \lambda) = 0 \ \to\ -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 15\lambda + 25 = 0$$
$$\to (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 5)^2 = 0 \to\ \lambda_1 = 1\ (Alg.vf. = 1), \quad \lambda_{2,3} = -5\ (Alg.vf. = 2)$$

Bsp. EV:

$$\lambda_1 = 1\ \to\ (A - \boldsymbol{I} \cdot 1) \cdot v = 0\ \ \leftrightarrow\ \ Kern(A - \boldsymbol{I} \cdot 1)$$
$$\to \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot v = 0 \ \to Gauss \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$x_3 = \alpha\,, \qquad x_2 = x_3 = \alpha\ \to\ E_{\lambda_1} = span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \ \left(Dim\left(E_{\lambda_1}\right) = 1 \to\ Geom.vf. = 1\right)$$

Norm:

Sei V ein VR. Eine Norm auf V ist eine Abbildung: $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R},\ \ v \to \|v\|$

- $\forall v \in V: \|v\| \geq 0\ und\ \|0\| = 0$
- $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
- $\forall v, w \in V: \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Induzierte Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *(siehe Skalarprodukt)*

Konvergenz durch Norm: $\lim_{n\to\infty}\|v - v_n\| = 0\ \leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} v_n = v$

Bsp. in V:

- $\|v\|_2 = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + \cdots}$ *(euklidische norm)*

- $\|v\|_p = (|v_1|^p + |v_2|^p + |v_3|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}}$ *(p-norm)*
- $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_1|, |v_1|, \dots\}$ *(max-norm)*

Bsp in C([a,b])

- $\|f\|_{L\infty} = max\{|f(x)|: a \leq x \leq b\}$ *(maximaler ausschlag)*
- $\|f\|_{Lp} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$ *(durchschn. ausschlag)*

Bsp in $\mathbb{R}^{m\times n}$:

- $\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j} {a_{i,j}}^2\right)^{1/2}$ *(Hilbert-Schmidt-Norm)*
- $\|A\|_{SM} = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$ *(Spalten-Max-Norm)*
- $\|A\|_{ZM} = \|A^T\|_{SM}$ *(Zeilen-Max-Norm)*

Skalarprodukt:

Sei V ein VR. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ *heisst Skalarprodukt falls:*

- $\forall x, y, z \in V: \langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \;\; und \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
- $\forall x, y \in V: \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- $\forall x \in V: \langle x, x\rangle \geq 0 \; und \; \langle 0,0\rangle = 0$

Bsp.:

- $\mathbb{R}^n$: $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$
- $C([a,b])$: $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$
- $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k}\cdot y_k$ *(bed. für* $\mathbb{C}$ *skal.prd.:* $\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ *)*

Darstellungsmatrix:

F: lineare Abbildung von V nach W mit Basen B und C.

Vektorraum	V	→	W
Basisvektoren	$b_1, b_2 \dots b_n$	→	$c_1, c_2 \dots c_m$
Vektor	x	→	$y = F(x)$
	„x" bezüglich B	→	*„y" bezüglich C*
	$[x]_B = (x_1 \dots x_n)$	→	$[y]_C = (y_1 \dots y_n)$

Darstellungsmatrix $A = ([F(b_1)]_C,\ [F(b_2)]_C,\ \dots\ ,\ [F(b_n)]_C)$

$[y]_C = A \cdot [x]_B$

Bsp. $P(x) \in P_2 \xrightarrow{F} (2-x)\cdot P'(x) \in P_2$: $\quad (B = C = P_2)$

$b_1 = 1, \quad b_2 = x, \quad b_3 = x^2 \qquad A = ([F(b_1)]_B, [F(b_2)]_B, [F(b_3)]_B)$

$F(b_1) = F(1) = 0 \quad F(b_2) = F(x) = 2 - x \quad F(b_3) = F(x^2) = 4x - 2x^2$

$$[0]_B = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad [2-x]_B = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \quad [4x-2x^2]_B = \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} \;\to\; A = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\0 & -1 & 4\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Zusammengesetzte Abbildungen:

$x \;\to F(x) \;\to G(F(x)) = G^\circ F(x)[x]_B \;\to A[x]_B \;\to B(A[x]_B) = BA\cdot[x]_B$

Basiswechsel für Matrizen:

T: Übergangsmatrix von B nach C. $[x]_C = T\cdot[x]_B \qquad T = ([b_1]_C, \dots, [b_n]_C)$

S: Übergangsmatrix von C nach B. $[x]_B = S\cdot[x]_C \qquad S = T^{-1} = ([c_1]_B, \dots, [c_n]_B)$

$[A]_C = T[A]_BT^{-1} = S^{-1}[A]_BS \qquad [A]_B = S[A]_CS^{-1} = T^{-1}[A]_CT$

Orthogonalisierungsverfahren:

Basisvektoren eines Unterraums → Orthogonale Basisvektoren desselben UR

In $\mathbb{R}^m$ *bilden die Vektoren* $w_1, \dots, w_n$ *einen Unterraum*

$v_1 = w_1 \qquad (= \frac{w_1}{|w_1|}$ *für Orthonormal* $)$

$$v_2 = w_2 - \frac{\langle v_1, w_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot v_1$$

$$v_3 = w_3 - \frac{\langle v_1, w_3\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot v_1 - \frac{\langle v_2, w_3\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}\cdot v_2$$

$$v_n = w_n - \frac{\langle v_1, w_n\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\cdot v_1 - \frac{\langle v_2, w_n\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}\cdot v_2 - \dots - \frac{\langle v_{n-1}, w_n\rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1}\rangle}\cdot v_{n-1}$$

Kern, Bild:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*, dan gilt:*

- *Kern* $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$
- *Bild (Im)* $A = \{b \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^n,\ s.d.\ Ax = b\}$
- *Bild (Im)* $A = span\{a^{(1)}, \dots,\ a^{(k)}\}$ $\quad a^{(i)}$*: i-te unabhängige Spalte von A*

- *Kern(A) ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$, Bild(A) ist Unterraum von $\mathbb{R}^m$*
- $Dim(Kern(A)) + Dim(Im(A)) = n$
- $Dim\big(Im(A)\big) = Dim\big(Im(A^T)\big) = Rang(A)$
- $Im(A) \perp Kern(A)$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$*:*

$Bild(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ *(linear unabhängige Spalten)*

$Kern(A): \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \rightarrow Kern(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Eigenbasis, Einfach, Halbeinfach, Diagonalisierbar:

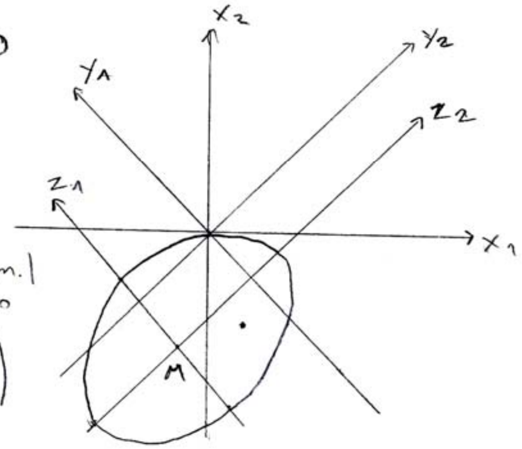
- *Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann existiert eine Eigenbasis von A wenn ∑ #geom.vf. = n*
  Eigenbasis: E_{λ_1} & … & E_{λ_n} (normiert und orthogonalisiert bei $E_{\lambda_{1,2,..}}$)
- *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst Einfach, falls ∀ EW alg.vf. = 1 hat.*
- *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst halbeinfach, falls ∀ EW alg.vf. = geom.vf.*
- *$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst diagonalisierbar, falls $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$(regulär) existiert mit:*
  $T^{-1}AT = diag(\dots) \quad (regulär \leftrightarrow \det(T) \neq 0)$
- *A einfach → A halbeinfach ↔ ∃ Eigenbasis ↔ A diagonalisierbar*
- *A symmetrisch ↔ T orthogonal ↔ $T^{-1} = T^T$*

$$T = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ E_{\lambda_1} & \cdots & E_{\lambda_n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1 \rightarrow E_{\lambda_1} = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}, E_{\lambda_2} = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(T) = 5\ (diag.bar.) \rightarrow D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Hauptachsen Transformation:



$2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 12x_1 + 24x_2 = 0$

$x^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} x + (12, 24)\, x = 0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$

$\rightarrow E_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ E_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ |norm.| + ortho

$T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

${}^{T}TAT = D \qquad x = Ty$

$y^T D y + (12,24)\, T y = 0 \qquad [M]_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [M]_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$[M]_x = T\,[M]_y = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow y_1^2 + 6y_2^2 + \frac{6}{\sqrt{3}} y_2 = 0$

$y_1^2 + 6(y_2 + \sqrt{3})^2 - 30 = 0$

$y + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = z$

$\hookrightarrow z_1^2 + 6z_2^2 - 30 = 0$

$\frac{z_1^2}{30} + \frac{z_2^2}{5} = 1$