$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ableitung von f[-1]: $(f^{-1})' = 1/\left(f'\left(f^{-1}(x)\right)\right)$

Lineare Ersatzfunktion: : $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Zwischenwertsatz: $f(a) \leq m \leq f(b) \;\rightarrow\; \exists\, \xi \in [a, b]\; mit\; f(\xi) = m$

Satz von Lagrange: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \qquad \xi \in (a, b)$

Satz von L'Hopital: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$ für $\frac{0}{0}$ & $\frac{\infty}{\infty}$

f''(x): f''>0, konvex, links gekrümmt; f''<0, konkav, rechts gekrümmt

Asymptote: $\lim_{x\to\infty} f(x) - a(x) = 0$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Tangenten/Normalen-Steigung: $\vec{t} = \dot{r} = \binom{\dot{x}}{\dot{y}} \quad \vec{n} = \binom{-\dot{y}}{\dot{x}}$

Tangentengerade: $T(s) = r(t_0) + t \cdot \dot{r}(t_0)$

Bogenlängen-param.: $\rho(s) = r\left(S^{-1}(s)\right) \quad S(t) = \int_0^t |\dot{r}(\tau)|\, d\tau$

Krümmung: $k_r(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$ (krümmungsrichtung = f'' oben)

Evolute: $OM_t = \vec{r}(t) + {}^{1}\!/_{k_r(t)} \cdot \vec{m}(t)$; $\vec{m}(t) = \binom{-\dot{y}}{\dot{x}} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Satz von Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}$

Integrabilitätsbedingung: $f_x = \varphi, f_y = \psi \;\rightarrow \varphi_y = \psi_x$ (Fläche zusammenhäng.!)

Linearisierung: $L(x, y) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$

Kettenregel: $f\!: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x, y\!: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t)\right) = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt}$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Satz von Schwarz: $f_{xyz} = f_{yxz} = f_{zxy} = \cdots$

Integrabilitätsbedingung: $f_{xy} = \varphi_y = \psi_x \,, f_{zx} = \varphi_z = \chi_x \,, f_{zy} = \psi_z = \chi_y$

Kettenregel: $f\!: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\; \varphi\!: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\; \frac{df\left(\varphi(t)\right)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta \varphi_x} \cdot \frac{d\varphi_x}{dt} + \frac{\delta f}{\delta \varphi_y} \cdot \frac{d\varphi_y}{dt} + \frac{\delta f}{\delta \varphi_y} \cdot \frac{d\varphi_z}{dt}$

Gradient: $\nabla f(x, y, z) = \left(\, f_x(x, y, z)\,,\; f_y(x, y, z)\,,\; f_z(x, y, z)\,\right)$

Richtungsableitung: $D_{\vec{e}} f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{e}$

Linearisi.: $L(p) = f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) + f_z(p_0)(z - z_0) + f(p_0)$

$Coord\ Transf.$

Koord. wechsel: $\tilde{F}(u, v) = F\left(x(u, v), y(u, v)\right) \quad F(x, y) = \tilde{F}\left(u(x, y), v(x, y)\right)$

Partielle Ableit.: $F_x = \tilde{F}_u \cdot u_x + \tilde{F}_v \cdot v_x$

Laplace Operator: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = div(grad(f))$

Jacobi-Matrix: $\frac{\delta(x,y)}{\delta(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ Flächen-verzerrung bei (x,y)->(u,v) = det(jacobi)

Flächenintegral: $dF = dxdy = \rho d\rho d\varphi = \left|\det \frac{\delta(x,y)}{\delta(u,v)}\right|\; dudv$

$(x, y, z) \to (u, v)\!: dF = |\vec{r_u} \times \vec{r_v}| dudv \qquad \left(\rho, \varphi, z(\rho, \varphi)\right)\!: dF = |\vec{r_\rho} \times \vec{r_\varphi}| d\rho d\varphi$

Volumenintegral: $dV = dxdydz = rd\varphi drdz = r^2 \sin\theta\; drd\varphi d\theta$

$\mathbb{R}^{2,3} \to \mathbb{R}^{2,3}$

Gradient: $grad(f) = \nabla f = \left(\, f_x,\; f_y\,,\; f_z\,\right)$

Divergenz: $div(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\delta v_1}{\delta x} + \frac{\delta v_2}{\delta y} + \frac{\delta v_2}{\delta z}$

Rotation: $rot(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\delta v_3}{\delta y} - \frac{\delta v_2}{\delta z}\,,\; \frac{\delta v_1}{\delta z} - \frac{\delta v_3}{\delta x}\,,\; \frac{\delta v_2}{\delta x} - \frac{\delta v_1}{\delta y}\right)$

Divergenzsatz: $Flow = \iint_{\delta B} \vec{v} \cdot \vec{n}\;\, dO = \iiint_B div(\vec{v})\; dV$

Quellen: $div(\vec{v})$ >0: Quelle <0:Senke =0:Quellfrei

Wirbel: $rot(\vec{v}) = 0$ (wirbelfrei)

Wegarbeit: $A = \int_K \vec{v}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{v}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\; dt$

Satz von Strokes: $\int_{\delta S} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{v}) \cdot \vec{n}\; dO$

Potentialfeld (konservativ): $rot(\vec{v}) = 0$; $\vec{v} = grad(f)$