Memo
Master 2 IA

LAURENT Thomas

Années: 2018 - 2019

Contents

Part I

Probabilité

Chapter 1

Introduction au Probabilités

Dans un premier temps les probabilités fréquentiste qui est plus général, un exemple simple est le lancer d'une pièce de monnaies non triqué dont on n'a prit soigneusement d'ignorer tout tombé sur la tranche de la pièce, il y a 50% de chance que la pièce tombe sur Pile ou sur Face. on dit aussi $\frac{1}{2}$ ou .5.
Lancer une pièce est prit comme un événement:

	Pile	Face
Un lancé	.5	.5

Dans un second temps les probabilités subjectif où les variable choisit sont

indépendant d'un individu à un autre, on peut prendre "quelle est la probabilité qu'une maison s'effondre".

On construit une probabilité en répétant la même un même événement puis en notant un ensemble de résultats:

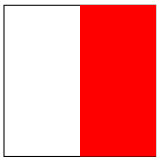
$$P(A) = limite_{x \to +\infty} \frac{n_A}{n}$$

où n le nombre de lancé total et n_A le nombre de lancé où A est tombé en résultat

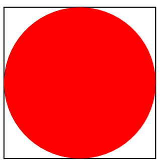
Mais en pratique ∞ n'est pas faisable donc nous prenons un n un très grand nombre mais inférieur à l'infini.

1.1 Mesure de probabilité

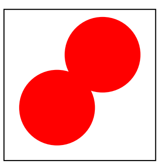
Vous devez lancer des fléchettes sur un carré, vous ne rater aucun tire (toutes les flèches arrive dans ce carré):



Il y a $\frac{1}{2}$ chance que la flèche touche le coté rouge.



Il y a $\frac{\pi}{4}$ chance que la flèche touche le coté rouge.



Via un raisonnement similaire aux intégrales nous allons découper la grille en pixels, les pixels rouges et blanc. $\frac{nombredepixelrouge}{nombredepixeltotal}$

1.2 Variable aléatoire

Une variable x est dite aléatoire si elle est soumise à l'incertitude (au hasard). Dans le cas d'un lancé de pièce non truqué, $X_1 = 0$(pile), $X_2 = 1$ (face).

1.2.1 Probabilité de manière axiomatique

Une distribution de probabilité est une fonction P qui a un événement A lui associe un réelle borné entre 0 et 1. La probabilité sans incertitude (celle qu'on n'est sur quelle va se produire) est égal à 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Si deux événements A et B en exclusion mutuelle ($\nexists x \in A \cap B$) on n'a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

1.2.2 Variables aléatoire discrète

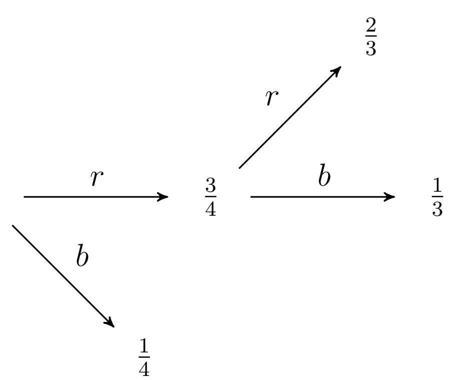
Soit x une variable discrète prennent une valeur dans un ensemble X fini. on note $x = \mathrm{x} \in X$ et noté $P(x = \mathrm{x})$.

$$P(x) \geq 0$$

$$\sum_{x \in X} P(X) = 1$$

1.3 Probabilités conditionnelle

Prenons le tirage de 4 billes, 3 rouges et 1 bleu: $\omega = \{r, r, r, b\}$.
Le but est de tirer la seconde bille (sachant que la première na pas était remise) sachant que la première boule tiré est une rouge.



S'écrit comme

$$P(B2|B1 = r) = \frac{P(B1B2)}{P(B2)}$$

$P(B1B2)$ se dit probabilité Jointe.
$P(B2)$ se dit probabilité marginal.

Si $B1$ et $B2$ sont deux événement indépendant alors

$$P(B2|B1 = r) = P(B1, B2)$$

Dans le cas où on remet la balle tiré en jeu:

$$P(B2 = r) = P(B2 = r, B1 = r) + P(B2 = r, B1 = b)$$

1.4 Autres règles

Règle de bayes:

$$P(x_i|y_i) = \frac{P(y_i|x_i) * p(x_i)}{p(y_i)}$$

Règle de chainage:

$$P(x_1, x_2, x_3, ...x_n] = p(x_1) * p(x_2|x_1) * ... * p(x_n|x_{n-1}..x_1)$$

Distribution conditionnel:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y => P(x|y)$$

1.5 Exemples

Année	Sexe	#	%
M1	M	25	25/55
M1	F	4	4/55
M2	M	25	25/55
M2	F	1	1/55

$P(sexe = M) = P(Sexe = MetAnnee = M1) + P(Sexe = MetAnnee = M2) = 50/55$
$P(Annee = M2|sexe = M) = P(Sexe = MetAnnee = M2)/P(Sexe = M) = \frac{25}{55}/\frac{50}{55} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

A	B	$P(AB)$
a_1	b_1	.1
a_2	b_1	.15
a_1	b_2	.3
a_2	b_2	.45

- $P(a_1) = .40$
- $P(a_1|b_1) = .4$
- $P(a_1|b_2) = .4$
- $P(a_2) = .60$
- $P(a_2|b_1) = .6$
- $P(a_2|b_2) = .6$

1.6 Probabilité Matricielle

nous avons:

$P(X_1 = r) = \frac{3}{4}$

$P(X_1 = b) = \frac{1}{4}$

$P(X_2 = b|X_1 = r) = \frac{1}{3}$

$P(X_2 = b|X_1 = b) = 0$

On peut calculer:

$P(X_2 = r|X_1 = r) = 1 - P(X_2 = b|X_1 = r) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(X_2 = r|X_1 = b) = 1 - P(X_2 = b|X_1 = b) = 1 - 0 = 1$

Une représentation matricielle pourrait être:

$1rouge$	$1blue$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

	$1rouge$	$1blue$
$2rouge$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$2blue$	1	0

$2rouge$	$2blue$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Le tableau de gauche indique la probabilité lors du premier tirage, le tableau à droite lors du second tirage et au milieu la probabilité jointe.
Le tableau de droite peut être obtenue en faisant le produit des deux autres.
A noté que la somme de chaque lignes horizontal doit être égal à 1.

Part II

Fouille de donnée

Chapter 2

Rappel

2.1 Logarithmes en base 2

$Log_2(\frac{x}{y}) = Log_2(x) - Log_2(y)$
$Log_2(x * y) = Log_2(x) + Log_2(y)$

Chapter 3

Pré traitement des données

3.1 Nettoyage des données

3.1.1 Caractéristiques descriptives

Moyenne (espérance) : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Ecart moyen : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$

Variance : $v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Ecart type : $\alpha x := \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - \bar{x}^2}$

Médiane : Valeur se trouvant au milieu de données ordonnées

Mode :Valeur la plus fréquente

Amplitude :min, max

3.2 Normalisation

Min-max : $v_n = \frac{v - v_{min}}{v_{max} - v_{min}}$

Min-max dans l'intervalle [A,B]: $v_n = \frac{v - v_{min}}{v_{max} - v_{min}} * (B - A) + A$

Z-Score : $v_n = \frac{v - moyenne}{ecart_t ype}$

Decimal scaling : $v_n = \frac{v}{100^j}$

Chapter 4

Classification

4.1 Évaluation des classifieurs

4.1.1 Matrice de confusion

Percent of correct classification :

PCC(%) $: = \frac{N_c}{N_t} * 100$

N_c : nombre d'instances correctement classées

N_t : nombre d'instances testées ($N_t = |D_{test}|$)

Exemple:

:

_	c1	c2	c3	c4
c1	0	1	0	0
c2	1	60	0	1
c3	0	1	23	0
c4	1	0	7	5

Taux d'erreurs : 100-PCC

PCC(%) $= \frac{0+60+23+5}{100} * 100 = 88\%$

Coût d'erreur $= \sum_1^n cout(class_{reelle}, classe_{predite})$

coût d'erreur moyen $= \frac{coutderreur}{N_{erreurs}}$

$Rappel(C_i) = \frac{N_{c\_i}}{N_{t\_i}} * 100 \;\; (Horizontal) \; Ex : Rappel(C_3) = (23/24)\%$

$Precision(C_i) = \frac{N_{c\_i}}{N_i} * 100 \;\; (Vertical) \; Ex : Precision(C_3) = (23/30)\%$

Chapter 5

Arbre de décision

5.1 critères de sélection C4.5

Construction d'un arbre de décision C4.5 La construction d'un arbre de décision avec C4.5 passe par deux phases:

Phase d'expansion : La construction se fait selon l'approche descendante et laisse croître l'arbre jusqu'à sa taille maximale.

Phase d'élagage : Pour optimiser la taille l'arbre et son pouvoir de généralisation, C4.5 procède à l'élagage (pour supprimer les sous-arbres qui ne minimisent pas le taux d'erreurs)

Approche de construction d'un AD : Partitionner récursivement les données en sous-ensembles plus homogènes ... jusqu'à obtenir des partitions qui contiennent des objets qui appartiennent majoritairement à la même classe.
=¿ Théorie de l'information pour caractériser le degré de mélange, homogénéité, impureté, incertitude...

Théorie de l'information : Théorie mathématique ayant pour objet l'étude du contenu informationnel d'un message.
Applications en codage, compression, sécurité...

Entropie : Mesure la quantité d'incertitude dans une distribution de probabilités.

5.1.1 Entropie

Entropie : Mesure la quantité d'incertitude (manque d'information) dans une distribution de probabilités. Soit X une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $DX = x1, .., xn$. Soit P la distribution de probabilités associée à X.

$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) * log_2(p(x_i))$

Par convention, quand $p(x) = 0, 0 * log(0) = 0$

Exemple:

X	P(X)
x_1	1/3
x_2	1/3
x_3	1/3

$H(X) = -p(x_1) * log_2(p(x_1)) - p(x_2) * log_2(p(x_2)) - p(x_3) * log_2(p(x_3))$

$H(X) = -3(\frac{1}{3} * log_2(\frac{1}{3})) = log_2(3) = 1.58$

Autre exemples:

$[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}] : H(X) = 1.5$

$[1, 0, 0] : H(X) = 0$

$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : H(X) = 1$

Propriétés:

$H(X) >= 0$

$H(X)$ est maximale pour une distribution uniforme (toutes les valeurs sont équiprobables).

Entropie conjointe : L'entropie conjointe de deux variables aléatoires X et Y est l'incertitude relative à ces deux variables conjointement.

$Entropie(X, Y) = -\sum_{i,j=1}^{n} p(x_i, y_i) * log_2(p(x_i, y_i))$

Exemple : $[0.2, 0.1, 0.3, 0.4] : H(X, Y) = 1.85$

5.1.2 Gain d'information

Soit le data suivant, avec ClientSatisfait la variable de classe:

Mémoire	AutonomieBatterie	Prix	ClientSatisfait
$<= 4$	longue	$<= 150$	Oui
> 4	longue	> 150	Oui
> 4	longue	$<= 150$	Oui
$<= 4$	longue	> 150	Oui
> 4	longue	> 150	Oui
> 4	courte	> 150	Oui
$<= 4$	courte	> 150	Non
$<= 4$	courte	> 150	Non
> 4	courte	$<= 150$	Oui
$<= 4$	courte	$<= 150$	Non
$<= 4$	moyen	$<= 150$	Non
> 4	moyen	$<= 150$	Non
$<= 4$	moyen	> 150	Oui
> 4	moyen	> 150	Oui
> 4	moyen	$<= 150$	Non

Le $Gain\ information$ appliqué sur la colonne AutonomieBatterie (AB) serait:

$$Gain(AB) = Entropie(AB) - \frac{5}{15}\ Entropie(Longue) - \frac{5}{15}\ Entropie(Courte) - \frac{5}{15}\ Entropie(Moyen)$$

$$Entropie(AB) = -3(\frac{5}{15} * log_2(\frac{5}{15}))$$

$$Entropie(Longue) = 0$$

$$Entropie(Courte) = \frac{2}{5} * log_2(\frac{2}{5}) - \frac{3}{5} log_2(\frac{3}{5})$$

$$Entropie(Moyen) = \frac{3}{5} log_2(\frac{3}{5}) - \frac{2}{5} * log_2(\frac{2}{5})$$

5.1.3 Gain Ratio

$$Gainratio(AB) = \frac{Gain(AB)}{Entropie(AB)}$$

5.2 critères d'arrêt

5.2.1 Critères d'arrêt

Si tout les objets d'une partition appartiennent à une même classes

Si il n'y a plus aucun attributs à tester

si le nœud est vide (càd feuille de l'arbre)

Absence d'apport informationnel (le grain est négatif ou nul)

5.2.2 critères d'arrêt: Paramètre utilisateur

Nombre d'objets minimum par feuille

Taille, profondeur de l'arbre

Temps de construction de l'arbre

Chapter 6

Réseau bayésiens

6.1 Classifieur bayésiens

Nuage	$p(N)$
N=$\perp$	N=$\top$
0.5	0.5

Arroseur	$P(A \mid N)$	
N	A=$\perp$	A=$\top$
$\perp$	0.8	0.2
$\top$	0.2	0.8

Pluie	$P(P \mid N)$	
N	P=$\perp$	P=$\top$
$\perp$	0.99	0.1
$\top$	0.6	0.4

Pelouse	*Mouille*	$P(M \mid A,P)$	
A	P	M=$\perp$	M=$\top$
$\perp$	$\perp$	0.9	0.1
$\perp$	$\top$	0.2	0.8
$\top$	$\perp$	0.2	0.8
$\top$	$\top$	0.05	0.95

Calculer $P(N=\top, P=\top, A=\perp, M=\top)$

$= P(N=\top) * P(P=\top|N=\top) * P(A=\perp|N=\top, P=\top) * P(M=\top|N=\top, P=\top, A=\perp)$

$= .5 * .4 * \frac{P(N=\top,P=\top)P(A=\perp)}{P(N=\top,P=\top)} * \frac{P(N=\top,P=\top,A=\perp)*P(M=\top)}{P(N=\top,P=\top,A=\perp)}$

$= .5 * .4 * 1 *$

6.2 Construction et classification avec des réseaux Bayésiens

Soit le jeu de donnée suivant:

	Couleur	Type	Origine	volée
1	rouge	sport	locale	oui
2	rouge	sport	locale	non
3	rouge	sport	locale	oui
4	jaune	sport	locale	non
5	jaune	sport	importée	oui
6	jaune	4x4	importée	non
7	jaune	4x4	importée	oui
8	jaune	4x4	locale	non
9	rouge	4x4	importée	non
10	rouge	sport	importée	oui

6.2.1 Construction d'un réseau bayésien naïf

soit la variable de classe nommé "Volée":

Volee	$\top$	$\bot$
X	5/10	5/10

Couleur	$\top$	$\bot$
rouge	3/5	2/5
jaune	2/5	3/5

Type	$\top$	$\bot$
Sport	4/5	2/5
4x4	1/5	3/5

Origine	$\top$	$\bot$
Locale	2/5	3/5
Importee	3/5	2/5

6.2.2 Règle de classification bayésienne

$$classes = max \begin{cases} P(Volee = \top | Rouge, 4x4, Importee) \\ P(Volee = \bot | Rouge, 4x4, Importee) \end{cases}$$

6.2.3 Règle de décision

$P(V|CTO) = P(VCTO)$ car indépendantes

$= P(C|v) * P(T|V) * P(O|V) * P(V)$

6.2.4 Observation de classe

Avec l'observation suivante (Rouge, 4x4, Importée) la classe associée à cette observation est:

$P(Volee = Non, Rouge, 4x4, Importee) = P(Rouge|Non)*P(4x4|Non)* P(Importee|Non) * P(Non)$

$= 2/5 * 3/5 * 2/5 * 1/2$

$P(Volee = Oui, Rouge, 4x4, Importee) = P(Rouge|Oui) * P(4x4|Oui) * P(Importee|Oui) * P(Oui)$

$=$

Avec l'observation incomplète suivante (Jaune, Sport) la classe associée à cette observation est:

$P(Volee = Non, Jaune, Sport) = P(Jaune|Non)*P(Sport|Non)*\sum P(\theta|Non)* P(Non)$

$= 2/5 * 4/5 * 1 * 1/2$

$P(Volee = Oui, Jaune, Sport) = P(Jaune|Oui)*P(Sport|Oui)*\sum P(\theta|Oui)* P(Oui)$

$=$

Chapter 7

Clustering

7.1 Approche par le Partitionnement

Soit

une table à segmenter T = 2,4,6,7,8,11,13

une fonction de distance d() = Distance euclidienne

k = 3

3 clusters au hasard $C_1 = 2$, $C_2 = 4$, $C_3 = 6$

Pour chaque cluster C_i, initialiser C_i^{center} à la moyenne de tout les élément de C_i.
Pour chaque éléments hors cluster calculer la distance D(), entre tout les C_i^{center} et l'élément courant, puis placer cette élément dans le C_i ayant le résultat le plus petit.
Puis recommencer tant qu'il existe pas une redondance.

7.2 Approche hiérarchiques

Initialisation Au départ, chaque object forme un cluster.

Refaire Regrouper la paire de cluster les plus proche selon D() et mettre à jour la matrice de similarité.

Cas d'arrêt il ne reste plus qu'un cluster ou le nombre k de cluster est atteint.

La mesure de la similarité se fait via la fonction de comparaison D() qui peut par exemple être le MIN,MAX,Centre du groupe,Moyenne du groupe,...

7.2.1 Exemple avec la fonction d = MIN

Soit la matrice de similarité ci dessous, avec la condition distance d'arrêt inférieur ou égal à 4.
On commence par trouve l'indice le plus petit pour en suite fusionner:
(Avec d(P3,{P1,P2}) = min(d(P3,P1), d(P3,P2)) = min(7,5) = 5

	P1	P2	P3	P4
P1	0			
P2	1	0		
P3	7	5	0	
P4	2	3	6	0

	{P1,P2}	P3	P4
{P1,P2}	0		
P3	5	0	
P4	2	6	0

	{P1,P2,P4}	P3
{P1,P2,P4}	0	
P3	5	0

Chapter 8

ItemSet mining

8.1 Itemsets

Support(D) Le nombre de fois ou D est un sous ensemble de l'itemsset.

Couverture(D) Les indices de lignes où une D est un sous ensemble de l'itemset.

Fréquence(D) Le support divisé par le nombre total d'itemset.

	itemsets
1	{A,B,C,D}
2	{A,B,C}
3	{C,D}
4	{C,E,A}

Support(A) 3

Support(A,C) 3

Couverture(D) {1,3}

Fréquence(C) $\frac{4}{4}$

8.2 Règles d'association

Support(X=>Y) Le nombre de fois ou X $\cup$ Y est un sous ensemble de l'itemsset.

	itemsets
1	{A,B,C,D}
2	{A,B,C}
3	{C,D}
4	{C,E,A}

Support(A=>B) 2

Support(AC=>E) 1

8.3 Apriori

Soit le tableau suivant, Calculer IF (avec une marge minimum de 2):

	itemsets
1	{A,B,C,D}
2	{A,B,C}
3	{C,D}
4	{C,E,A}

I_1 { A=3 , B=2, C=4, D=2, E=1 }

F_1 { A, B, C, D }

C_2 { AB=2 , AC=3 , AD=1 , BC=2 , BD=1 , CD=2 }

F_2 { AB, AC, BC, CD }

C_3 { ABC=2 , ABD=1 , ACD=1 }

F_3 { ABC }

IF { A, B, C, D, AB, AC, BC, CD, ABC }

Part III

Apprentissage automatique par la pratique

Chapter 9

Rappel

9.1 Matrices et calcules sur les Matrices

9.1.1 Addition

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 1+7 & 0+5 \\ 1+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

9.1.2 Multiplication

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \end{array}$$

$(1 * 5) + (2 * 7) = 19$

9.1.3 Transposer

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

9.1.4 Inverse

Soit une matrice 2x2 comme : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Soit Determinant D = ad - bc

Si D != 0 alors il existe une matrice inverse égal à : $\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Chapter 10

Algorithms Learn a Mapping From Input to Output

10.1 linear ML algorithms

Simplifier les processus d'apprentissage et réduire la fonction sur ce qu'on connait

Soit : B0 + B1X1 + B2X2 + B3X3 = 0

Où B0,B1,B2,B3 sont les coefficients présent sur l'axe des ordonnées.

Et X1,X2,X3 sont les valeurs en Input.

10.2 Supervised machine learning

L'apprentissage supervisé peut se diviser en 2 partis

Classification : Quand les variables en sortie sont des Classe $(Vert, Carre, Homme)$

Regression : Quand les variables en sortie sont des valeur numérique $(euro, poids, quantites)$

10.3 Unsupervised machine learning

Les problèmes de l'apprentissage non supervisé sont:

Clustering : L'art de faire des paquet d'éléments qui ont des points commun, comme regrouper les clients par paquet de choses qu'ils ont le plus en commun.

Association : Associer des règles d'apprentissage pour décrire une portion du data, comme une personne qui a acheté un item A et qui est aussi tenté par acheter un item B

10.4 semi-supervised machine leaning

L'apprentissage semi supervisé c'est avoir un bonne quantité de données en input X, et un peu de data avec le label Y.

10.5 Overview of dias and variance

La prédiction des erreurs pour les algorithmes sont regroupé en 3 points:

Bias Error : Simplifier l'hypothèse fait par le modèls pour faire une fonction d'apprentissage plus facile.

Variance Error : Et la quantité estimé par la fonction visé qui changera via un différent ensemble de data utilisé.

Irreductible Error : Ne peut pas être réduit

Chapter 11

Overfitting and Underfitting

11.1 Overfitting

L'overfitting intervient lorsque le modèle sur apprend des connaissances, Lorsque l'on sur apprend nous prenons en compte les points plus éloigné de la droite de la fonction.
On peut illustrer l'overfitting en codant un algorithme qui prend en compte les points bleu et rouges de la figure *ap-linear-regression_1* ce dessous.

11.2 Underfitting

C'est l'inverse de l'overfitting, pas assez de données pour pouvoir généraliser le base de connaissance.

Chapter 12

Model Selection

12.1 Train Test Split

S'applique à de très gros dataset.
Sépare les listes $xset$ et $yset$ en $train$, $test$ sous liste.
Les ensemble de retours $xtrain, ytrain$ et $xtest, ytest$ ont le même nombres de lignes et la taille.
La taille des ensembles $test$ sont une proportion de la taille du set multiplié par la paramètre $text_{s}ize$.

```
from sklearn.model_selection import train_test_split

xtrain, xtest, ytrain, ytest = train_test_split(xset, yset, test_size=0.1, random_state=0)
```

sklearn.model_selection.train_test_split

Paramètres

xset,yset Souvent de type $pandas.DataFrame$.

test_size *float btw 0 & 1* le nombre de rows que $xtest, ytest$ contiendra en proportion de la taille des entrées.

random_state *Integer* la graine utilisé pour les générateurs de nombre aléatoire.

shuffle *Boolean* Mélanger ou pas les sets avant la séparation.

Retourné

arrays

12.2 Cross validation

S'applique à un jeu de donné de taille moyenne.
La séparation d'un jeu de donnée d'entrainement et de test peuvent donner par hasard des jeux de données non représentatifs.
Pour éviter ce cas, il est nécessaire de reproduire plusieurs fois la procédure puis de moyenner les résultats retournée.
Chaque étape de la cross validation va retournée 2 ensemble (respectivement égaux au indices de $train, test$:

```
from sklearn.model_selection import KFold

kf = KFold(n_splits=10, shuffle=True)
for trainI, testI in kf.split(xset):
    xtrain, xtest = xset[trainI], xset[testI]
    ytrain, ytest = yset[trainI], yset[testI]
```

Exemple simple d'un instance $KFold(n\_split = 3, shuffle = False)$ sur un dataSet de taille 15.
Les éléments en rouge seront les éléments sélectionné dans les ensembles de $test$ et les éléments en noir seront les $train$:

k=1 *A*,*B*,*C*,*D*,*E*,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O

k=2 A,B,C,D,E,*F*,*G*,*H*,*I*,*J*,K,L,M,N,O

k=3 A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,*K*,*L*,*M*,*N*,*O*

sklearn.model_selection.KFold

Paramètres

n_split *Integer* Nombre de split à effectuer

shuffle *Boolean* Mélanger ou pas les sets avant la séparation.

Retourné

arrays

12.3 Leave one out

S'applique à des dataset de petite taille.
Pour chaque item du dataset, le prendre en tant que *test* et le reste en tant que *train*.

```
from sklearn.model_selection import LeaveOneOut
loo = LeaveOneOut()

for train_index, test_index in loo.split(X):
    X_train, X_test = X[train_index], X[test_index]
    y_train, y_test = y[train_index], y[test_index]
```

12.4 Matrice de confusion, Précision, Pecall, F1

Tout ces paramètres indique la consistance de la dataSet, ils sont calculé via une matrice de confusion:

```
from sklearn.metrics import confusion_matrix
print(confusion_matrix(ytrain, ypredicted))
>> array([[tn,  fp],
          [fn,  tp]])

tn, fp, fn, tp = confusion_matrix(ytrain,ypredicted).ravel()
```

sklearn.metrics.confusion_matrix

Paramètres

y_true *array* les y valides.

y_pred *array* les y qui ont était prédit via un classifier.

Retourné

arrays

Méthodes

ravel() *arrays* retourne les index dans l'ordre de leurs position:

- **tn** les vrai négatifs
- **fp** les faux positifs
- **fn** les faux négatifs
- **tp** les vrai positifs

Les Précision, Recall, F1 peuvent être calculé depuis le tableau de sortie qu'offre *confusion_matrix*, mais il existe des méthodes permettent de le faire à notre place:

```
from sklearn.metrics import precision_recall_fscore_support

prf = precision_recall_fscore_support(ytest, ypredicted)
print(zip(["Precision", "Recal", "F1", "Support"], [numpy.mean(row) for row in prf]))
{"Precision": _, "Recal": _, "F1": _, "Support": _}
```

sklearn.metrics.precision_recall_fscore_support

Paramètres

y_true *array* les y valides.

y_pred *array* les y qui ont était prédit via un classifier.

Retourné

arrays

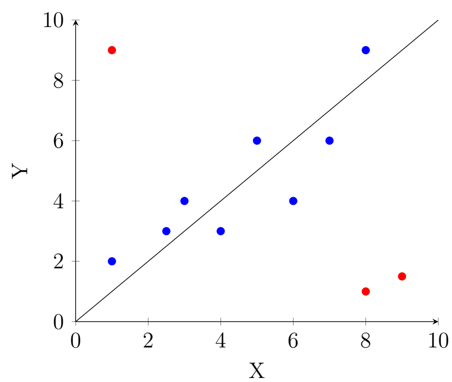
Chapter 13

Linear Algorithms

Soit X l'ensemble des variables indépendantes sur l'axe des l'abscisse et Y l'ensemble des variable dépendantes sur l'axe des ordonnée.

13.1 Régression linéaire

Étant donné un plan à deux dimensions où l'abscisse contient les point d'entrée X et l'ordonnée contient les points de sortie Y, et un nouage de points précédaient acquitté de tout point éloigné du nuage.



Avec : y = $\beta_0 + \beta_1 x$

Pour un hyperPlan (3d) : y = $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$

$P - I_n$: y = $\beta_0 + \beta_1 x_1 + ...\beta_n x_n$

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression

reg = LinearRegression().fit(xtrain, ytrain)
reg.score(xtest, ytest)
reg.predict(xtest)
```

sklearn.linear_model.LinearRegression

Méthodes

fit(X,y) *pandas.DataFrame* Apprend le modèle avec les data X et y.

predict(X) *pandas.DataFrame* Test l'apprentissage avec les données X et retourne le y généré.

score(X,y) *pandas.DataFrame* Retourne le coefficient de prédiction en comparent les y généré avec le y en paramètre.

13.2 Least squares linear regression

Calculer la régression linéaire avec la méthode Least squares:
Soit:

X $= [1, 2, 3, 4, 5]$ les variables indépendantes d'axe abscisse

Y $= [2, 4, 5, 4, 5]$ les variables dépendantes d'axe ordonnée

Calculons $y = \beta_0 + \beta_1 x$

Calcule de la moyenne de X et Y:

Xm $= \sum x_i \in X = 3$

Ym $= \sum y_i \in Y = 4$

Toutes ligne de régression doivent passer par le point (Xm,Ym).
Calculer tout les écarts des $x_i \in X$ par rapport à Xm (resp Y):

X	Y	$X - Xm$	$Y - Ym$	$(X - Xm)^2$	$(X - Xm)(Y - Ym)$
1	2	-2	-2	4	4
2	4	-1	0	1	0
3	5	0	1	0	0
4	4	1	0	1	0
5	5	2	1	4	2

$Calculer \beta_1$:

$\beta_1 = \frac{\sum (X-Xm)(Y-Ym)}{\sum (X-Xm)^2} = \frac{6}{10} = .6$

$\beta_0 : Ym = \beta_0 + \beta_1 * Xm : 4 = \beta_0 + .6 * 3 : 4 = \beta_0 + 1.8 : \beta_0 = 2.2$

13.3 Gradient Descent

Soit:

X $= [1, 2, 4, 3, 5]$

Y $= [1, 3, 3, 2, 5]$

i = une variable qui itère les éléments de X et Y en bouclant à l'infini.

Une initialisation comme:

$\beta_0 = 0$

$\beta_1 = 0$

α = donnée en énoncé (pour l'exemple égal à 0.01)

Et des fonctions définit tel que:

error $= (\beta_0 + \beta_1 * X[i]) - Y[i]$

$\beta_{0_{+1}} = \beta_0 - \alpha * error$

$\beta_{1_{+1}} = \beta_1 - \alpha * error * X[i]$

En appliquant l'algorithme des calcules des β_i:

i	$X[i]$	$Y[i]$	$error$	β_0	β_1
0	1	1	-1	0.01	0.01
1	2	3	-2.97	0.06	0.03
2	4	3	-1.77	0.18	0.06
3	3	2	-1.61	0.22	0.08
4	5	5	-4.35	0.44	0.12
0	1	1	-0.42	0.45	0.13
1	2	3	-2.28	0.49	0.49

13.4 Logistic Regression

13.4.1 Logistic function

Soit:

t $\in \Re[0,1]$ égal à $\beta_0 + \beta_2 * x$

La fonction de logique de régression, les valeur d'entrée X sont combiné en utilisant les coefficient de valeur pour prédire une sortie Y. Cette sortie sera une valeur binaire.

$p(x) \;=\frac{1}{1+e^{-(P-In)}}$

Note : $p(x)$ peut être interprété comme une fonction de probabilité $P(X) = P[Y = 1|X)$.

$\beta_0 + \beta_1 * x \;= ln(\frac{P(x)}{1-P(x)})$ aussi appelé odds.

```
from sklearn.linear_model import LogisticRegression

c = LogisticRegression().fit(xtrain,ytrain)
c.predict(xtest)
c.score(xtest, ytest)
```

sklearn.linear_model.LogisticRegression

Méthodes

fit(X,y) *pandas.DataFrame* Apprend le modèle avec les data X et y.

predict(X) *pandas.DataFrame* Test l'apprentissage avec les données X et retourne le y généré.

score(X,y) *pandas.DataFrame* Retourne le coefficient de prédiction en comparent les y généré avec le y en paramètre.

13.5 Linear Discriminant Analysis

L'analyse discriminante linéaire fait partie des techniques d'analyse discriminante prédictive, il s'agit de prédire l'appartenance d'un individu à une classe prédéfinie à partir de ses caractéristiques mesurées à l'aide de variables prédictives.
A notre disposition, un échantillon de n observations réparties dans $\Bbbk$ groupes d'effectifs $n_{\Bbbk}$.

Noté Y les variables prédire $\{y1, ...y_{\Bbbk}\}$

J variables prédictives $X = (X_1, ...X_j)$

$\mu_{\Bbbk}$ la moyenne (ou *mean* en anglais) valant $lambda(list) - > \frac{\sum list[i]}{taille(list)}$

σ^2 la variance de toutes les classes $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_{\Bbbk})^2}{n - \Bbbk}$

la fonction discriminante pour la classe $\Bbbk$ **avec** x **donné** $D_{\Bbbk}(x) = x * \frac{\mu_{\Bbbk}}{\omega^2} - \frac{\mu_{\Bbbk}^2}{2x\omega^2} + ln(P(k))$

Où $P(k)$ vaut la probabilité appliqué aux valeurs de Y

13.5.1 bayésien rules

L'objectif est de produire une règle d'affection $X(\omega) \rightarrow Y(\omega)$ qui permet de prédire, pour une observation ω donné, sa valeur associé de Y à partir des valeurs prises par X. via une probabilité

$$P(Y = y_{\Bbbk}) = \frac{P(Y=y_{Bbbk}) * P(X|Y=y_{\Bbbk})}{\sum_{i=1}^{\Bbbk} P(Y=y_i) * P(X|Y=y_i)}$$

Où $P(Y = y_{\Bbbk})$ est la probabilité à *priori* d'appartenance à une classe

$P(X|Y = y_{\Bbbk})$ représente la fonction de densité des X conditionnellement à la classe $y_{\Bbbk}$

Chapter 14

Non linear algorithm

14.1 Classification and régression tree

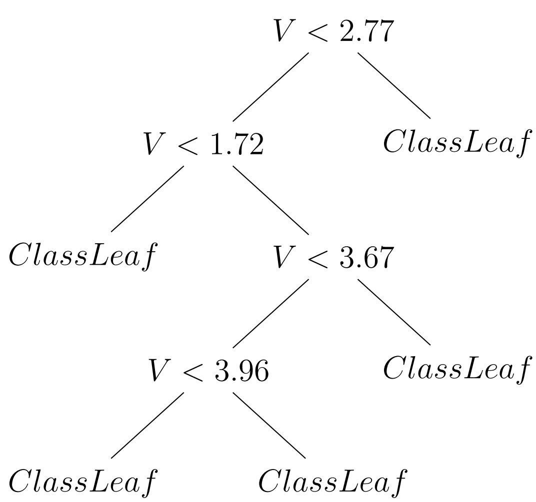
Soit:

$$G = \sum_{k=1}^{n} p_k * (1 - p_k)$$

$$V = 2.67$$

X_1	X_2	Y
2.77	2.33	0
1.72	01.78	0
3.67	03.36	0
3.96	4.67	0

Soit un arbre de décision ayant comme fils gauche des Yes et fils droit des No par rapport à la condition *split*.
Si la valeur $V < X1_i$ alors on crée un fils gauche, sinon on crée un fils droit:



Soit d'une façon plus calculatoire:

$G\ =$

$left(X1_1) * (1 - left(X1_1))\ +$	$X1_1 = 2.77$
$right(X1_1) * (1 - right(X1_1))\ +$	$= 0$ car $V < 2.77 \rightarrow$ Left
$left(X1_2) * (1 - left(X1_2))\ +$	$= 0$ car $1.72 <$ V $\rightarrow$ Right
$right(X1_2) * (1 - right(X1_2))\ +$	$X1_2 = 1.72$
$left(X1_3) * (1 - left(X1_3))\ +$	$X1_1 = 3.67$
$right(X1_3) * (1 - right(X1_3))\ +$	$= 0$ car $V < 3.67 \rightarrow$ Left
$left(X1_4) * (1 - left(X1_4))\ +$	$X1_1 = 3.96$
$right(X1_4) * (1 - right(X1_4))\ +$	$= 0$ car $V < 3.96 \rightarrow$ Left

```python
from sklearn.tree  import DecisionTreeRegressor

c = DecisionTreeRegressor().fit(xtrain,ytrain)
c.predict(xtest)
c.score(xtest, ytest)
```

sklearn.tree.DecisionTreeRegressor

Méthodes

fit(X,y) *pandas.DataFrame* Apprend le modèle avec les data X et y.

predict(X) *pandas.DataFrame* Test l'apprentissage avec les données X et retourne le y généré.

score(X,y) *pandas.DataFrame* Retourne le coefficient de prédiction en comparent les y généré avec le y en paramètre.

14.2 K moyen

Le K moyen demande une heuristique de type métrique pour comparé les distances entre poins.
Par exemple:

Distance euclidienne $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i, b_i)^2}$

```
from sklearn.neighbors import KNeighborsClassifier

c = KNeighborsClassifier(n_neighbors=2).fit(xtrain,ytrain)
c.predict(xtest)
c.score(xtest, ytest)
```

sklearn.neighbors.KNeighborsClassifier

Paramètres

n_neighbors *Integer* le nombre de clusters

Méthodes

fit(X,y) *pandas.DataFrame* Apprend le modèle avec les data X et y.

predict(X) *pandas.DataFrame* Test l'apprentissage avec les données X et retourne le y généré.

score(X,y) *pandas.DataFrame* Retourne le coefficient de prédiction en comparent les y généré avec le y en paramètre.

14.3 Support vector machines

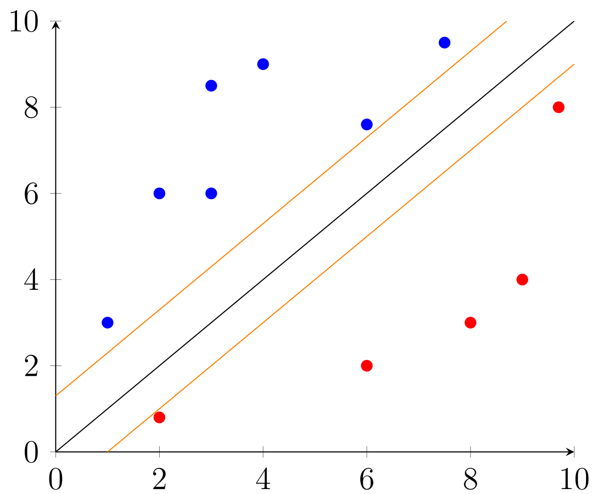
14.3.1 Margin classifier

Soit les points:

Blue Une *ClassA*

Rouge Une *ClassB*

Le support vector machines cherche un hyperplan (de couleur noir) pouvant départager les deux classes, Il en existe une infinité d'hyperplan qui peuvent les départager, donc introduisons un autre concept, celui de l'hyperplan qui maximise la séparation entre les deux classes (les droites *Oranges* appelé *Margin*.



14.3.2 Soft margin classifier

Dans le cadre du Soft margin, il n'existe pas de margin séparent les deux classes,il faut donc chercher la droite qui minimise l'erreur. Soit un ensemble de données divisé en trois parties:

Tranning Set sont les données qui seront utiliser pour l'apprentissage

Test Set les données qui sont utiliser pour vérifier la satisfesabilité de l'algorithme

Tunning Set appeler C qui sera le taux de violation de la margin accepté

Soit $C = \{0.1, 1, 10\}$ les longueurs que peut prendre la margin et:

	longeur de la margin	$F1$ *Score*
C_0	0.1	80%
C_1	1	85 % La meilleur borne
C_1	10	85 %

```
from sklearn.svm import SVC

c = SVC().fit(xtrain,ytrain)
c.predict(xtest)
c.score(xtest, ytest)
```

sklearn.svm.SVC

Méthodes

fit(X,y) *pandas.DataFrame* Apprend le modèle avec les data X et y.

predict(X) *pandas.DataFrame* Test l'apprentissage avec les données X et retourne le y généré.

score(X,y) *pandas.DataFrame* Retourne le coefficient de prédiction en comparent les y généré avec le y en paramètre.

Part IV

Outils formel

Chapter 15

Logique classique des propositions

15.1 Vocabulaire

Déduction $\models \alpha$ ssi$\neg\alpha$ est contradictoire

Absurde ϕ est contradictoire ssi $\neg\phi$ est valide

DAG : Un graphe dirigé acyclique

Taille(Arbre) $= \{toutlessymboles + connecteurs\}$

Var(Arbre) $= \{Touteslesfeuilles\}$

Sous formules(Arbres) $= \{T + \cup_{i=0}^{k} SousFormules(Arbre_i)\}$

Interprétation : ω de $PROP_{ps}$ est une application de PS dans 0.1

Sémantique : $\|\phi\|(\omega)$ d'une formule ϕ de $PROP_{ps}$ dans l'interprétation ω est une élément de 0.1 définit inductive ment par:

$si\phi \in PS$ alors $\|\phi\|(\omega) = \omega(\phi)$

$si\phi = cX_1...X_n$ alors $\|\phi\|(\omega) = C_F(\|x_1\|(\omega)...\|x_n\|(\omega))$

ω **satisfait** ϕ noté $\omega \models \phi$ ssi $\|\phi\|(\omega) = 1$

Lorsque $\omega \models \phi$ on dit que ω est un modèle de ϕ

on note $\eta(\phi)$ l'ensemble des modèles de ϕ

$\omega \in PROP_{ps}$ **est valide** noté $\models \phi$, ssi toute interprétation $\omega dePROP_{ps}$ satisfait ϕ

$phi \equiv \psi$ sont logiquement équivalents ssi $phi \models \psi$ et $psi \models \phi$

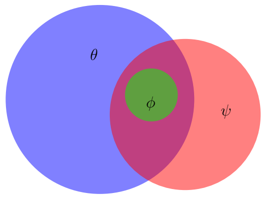
15.2 Propriétés de l'opérateur Models

Réflexivité : $\phi \models \phi$

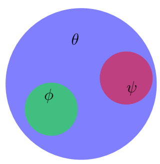
Équivalence à gauche : si $\phi \equiv \theta$ et $\phi \models \psi$ alors $\theta \models \psi$

Affaiblissement à droite (transitivité) : si $\phi \models \psi$ et $\psi \models \theta$ alors $\phi \models \theta$

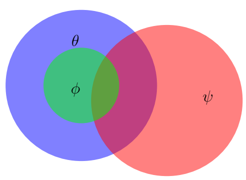
Coupure : si $\phi \wedge \psi \models \theta$ et $\phi \models \psi$ alors $\phi \models \theta$



Ou : $\phi \lor \psi \models \theta$ ssi $\phi \models \theta$ et $\psi \models \theta$



Monotonie : si $\phi \models \theta$ alors $\phi \land \psi \models \theta$



15.3 Ensemble de connecteurs fonctionnellement complet

On dit qu'un ensemble est fonctionnellement complet si avec que les connecteurs de cette ensemble on peut exprimer toutes les formules d'un monde.

$\{\neg, \wedge\}$ est fonctionnellement complet pour la logique propositionnel classique

Il en va de même pour $\{\neg, \vee\}, \{vrai, \wedge, \bigoplus\}, \{\neg, \Rightarrow\} ou \{NAND\}$

Suppression des fils équivalent : Soit un arbre D ayant comme sous arbre plus d'une fois le nœud $\alpha = (\top X \top)$, α peut être remplacé par $(\top)$ tout en concevant les modèles de D.

fusion des nœuds : Soit un arbre D ayant comme sous arbre les nœuds (aBc) et $(a`B`c`)$ et $a = a`, b = b`, c = c`$ alors on peut faire relier les deux branches menant vers ces nœuds vers le même sous arbre.

15.4 Preuve par induction structurelle sur un ensemble de connecteurs non fonctionnellement complet

Soit $\forall P \in \{\wedge, \vee\}_{ps}$, vérifier P:

Cas de base $\varphi \in PS$: $1^{\rightarrow}(\varphi) = 1$ donc $1^{\rightarrow}$ constitue un modèle de φ

Étape inductive :

φ **s'écrit** : $[\alpha \wedge \beta]$ ou $[\alpha \vee \beta]$

Avec $\alpha, \beta \in \{\wedge, \vee\}_{ps}$

Par hypothèse d'induction, $\alpha et \beta$ vérifient P.

Il ne reste plus qu'a montrer que φ vérifie P.

$\|\alpha \vee \beta\|(1^{\rightarrow}) = \vee \models (\|\alpha\|(1^{\rightarrow}), \|\beta|](1^{\rightarrow})) = \vee \models (1, 1) = 1$

$\|\alpha \wedge \beta\|(1^{\rightarrow}) = \wedge \models (\|\alpha\|(1^{\rightarrow}), \|\beta\|(1^{\rightarrow})) = \wedge \models (1, 1) = 1$

donc $x \wedge \neg x$ ne vérifie pas P : $[|x \wedge \neg x|](1^{\rightarrow}) = 0$

15.5 Décomposition de Shannon

On note $\phi[x \leftarrow 0)$ la formule obtenue en substituant dans ϕ la constante faux à toutes les occurrences du symbole propositionnel x.

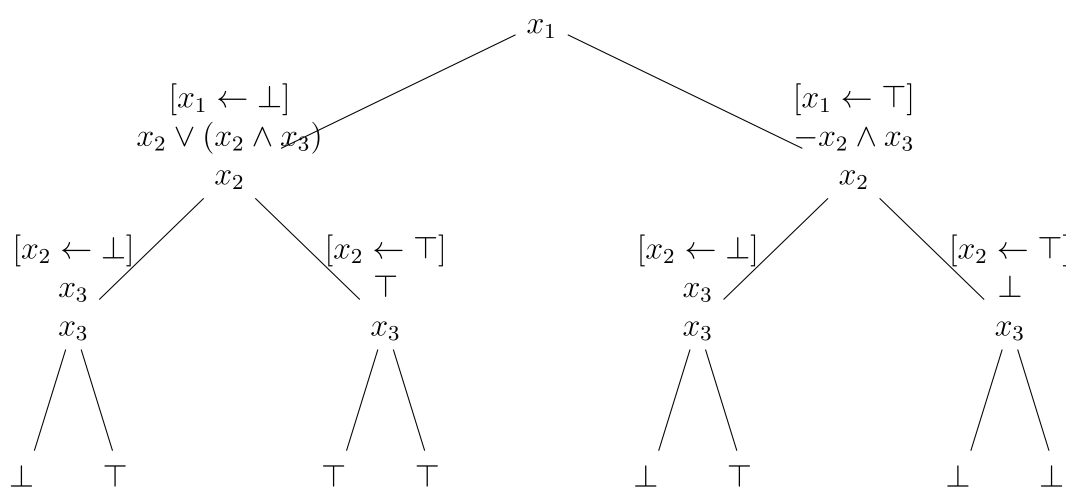
On note $\phi[x \leftarrow 1)$ la formule obtenue en substituant dans ϕ la constante vrai à toutes les occurrences du symbole propositionnel x.

La décomposition de Shannon de ϕ suivant x est la formule:

$(\neg x \wedge \phi[x \leftarrow 0]) \vee (x \wedge \phi[x \leftarrow 1])$

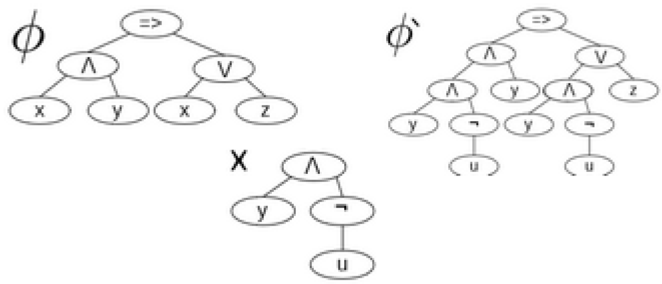
15.6 Arbre de Shannon, ROBDD

Étant donnée un ordre strict total $x_1 < x_2 < x_3$ sur $Var(\phi) = \{x_1, ...X_n\}$
Et une formule $\phi = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x2 \wedge x_3)$



L'ensemble des modèles de ϕ sont toutes les interprétation où la feuille vaut la valeur T.

15.6.1 Remplacement ou vérifonctionnalité



$\phi \equiv \phi^{`}$ quelque soit la valeur de x (vrai ou faux).

15.6.2 Substitution

Soit un arbre D ayant comme nœud un sous arbre du type infixe $\alpha = (x \Rightarrow y)$ et un sous arbre de substitution $\beta = (\neg x \Rightarrow \neg y)$
$(D^{`} = D_{\alpha \leftarrow \beta} \equiv D)$

15.7 Notion de impliquant premier

Les impliquant premier sont des sous formules des formules original tel que ces sous formules soit plus petite que la formule d'origine elle conserve les même modèles:
En circuit combinatoire les algo sont appelé Table de Karnaugh ou Quine-McCluskey.

15.7.1 Table de Karnaugh

Appliquer l'algorithme avec la formule S = $\neg ab\neg cd + a\neg b\neg c\neg d + b\neg d$

S	$\neg a\neg b$	$\neg ab$	ab	$a\neg b$
$\neg c\neg d$	X	X	X	X
$\neg cd$		X	X	
cd		X	X	
$c\neg d$	X	X	X	X

les impliquant premier de S sont $b\neg d$

15.7.2 Calcule arithmétique

En logique, les impliquant premier sont calculer que à partir d'une formule en mode CNF transposé en DNF et ensuite détransposé en CNF.

$\phi = (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg b \wedge c)$

$\phi = (a \vee \neg b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (c \vee c)$

$\phi = (a \vee \neg b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee \neg b) \wedge c$

$\phi = (a \vee \neg b) \wedge c$

$\phi = (a \wedge c) \vee (\neg b \wedge c)$ sont les impliquant premier.

Via une table de Karnaugh:

ϕ	$\neg a \neg b$	$\neg a b$	ab	$a \neg b$
$\neg c$				
c	X		X	X

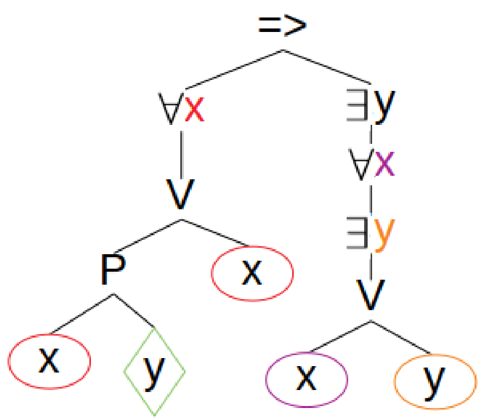
Égal à $(a \wedge c) \vee (\neg b \wedge c)$.

Chapter 16

Logique classique et prédicat du premier ordre

16.1 Syntaxe via les arbres

$\phi =$



16.1.1 Occurrences libre

Une occurrence libre est une variable n'ayant aucun quantificateur associé de son noeud à la racine de l'arbre.
par exemple le noeud y ayant un comme contour un losange vert est une occurrence libre, elle sera instancié que lors de l'interprétation de ϕ.

16.1.2 Occurrences liée

Une occurrence liée est une variable ayant un quantificateur associé, comme:

la variable x entouré d'un rond rouge est définit via le quantificateur $\forall x$ présent dans ces noeuds parent

la variable x entouré d'un rond violet est définit par le quantificateur de ces parents $\forall x$

la variable y entouré d'un rond orange via le quantificateur $\exists y$

A noté que les x entouré d'un rond de couleurs rouge sont diffèrent des x entouré avec un rond orange, donc on peut tout bien renommer les x de

couleur orangé en z sans changer le sens de ϕ.
Les occurrences liée se lient sur leur premier père le définissant, comme le y orange qui se définit que sur le $\exists y$ le plus proche de lui.

16.1.3 Occurrences quantifié

Les occurrences quantifié sont toutes les variable positionné derrière un quantificateur, celle ci montre comme dans la logique classique, le $\forall$ (où quelque soit) ou $\exists$ (où il existe au moins un).
On peut noter que sur la figure ci dessus il y a un $\exists y$ qui n'est pas associé à un y en feuille, on peut s'en débarrasser sans changer le sens de ϕ.

16.1.4 Vocabulaire

Formule fermée est une formule de $FORM_L$ qui ne contient aucune variable libre.

Formule instanciée est une formule qui ne contient aucune occurrence libre ou liée de symbole de variable

16.2 Sémantique

Soit t un terme de $TERM_L$, la sémantique de t dans l'interprétation de I pour l'assignation X_i noté $[|t|](I)(X_i)$ est l'élément de D_i défini inductivement.

$\phi =$

$$\begin{tikzcd} & & = \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & + \arrow[dl] \arrow[dr] & & y \\ x & & 2 & \end{tikzcd}$$

$=\ \in \Re$ d'arriter 2

$+\ \in \Im$ d'arriter 2

$2\ \in \Im$ d'arriter 0

$X, Y\ \in X$

Avec une interprétation tel que:

$D_i\ = \mathbb{N}$

$+_1\ = \mathbb{N}$ x $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$2_i\ = 3$

Avec une assignation tel que:

$X_i\ :\ X \to \mathbb{N}$

$x \to 5$

$y \to 10$

On peut calculer cette sous formule en appliquant chaque terme dans l'interprétation I pour un assignent X_i:
$\|x+2\|(I)(X_i) = +_i(\|x\|(I)(X_i), \|2\|(I)(X_i)) = +_i(5,3) = 8$
$\|\phi\|(I)(X_i) = =_i (8,10) = 0(faux)$

$\psi =$

$$\begin{tikzcd}
& & \exists x \arrow[d] & \\
& & = \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& + \arrow[dl] \arrow[dr] & & y \\
x & & 2 &
\end{tikzcd}$$

$\|\psi\|(I)(X_i)[x \leftarrow 7]) =$
$=_i (+_i(\|x\|(I)(X_i[x \leftarrow 7]), 3), \|y\|(I)(X_i[x \leftarrow 7])) =$
$=_i (+_i(7,3), 10) =$
$=_i (10,10) = 1(vrai)$

Le quantificateur $\forall$ ou $\exists$ est plus prioritaire que les variables assigné dans X_i.

Soit ϕ la formule ϕ ci dessus, la formule interprété avec deux assignations différente:

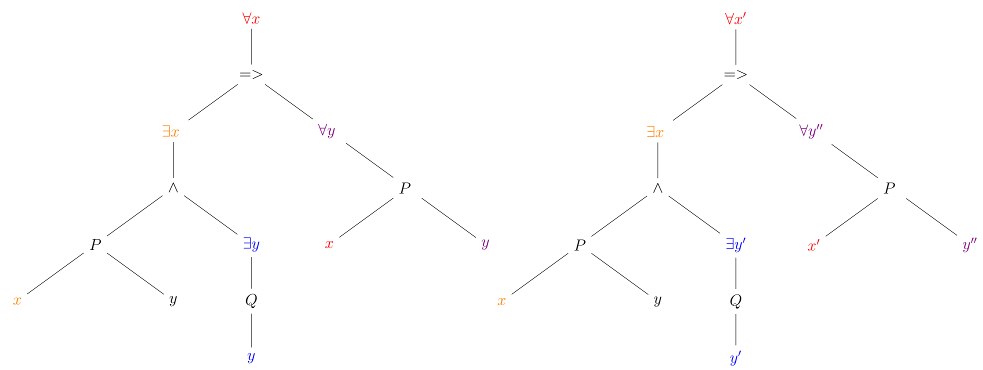
$X_i^1 \;\; x \to 5, y \to 10$

$X_i^2 \;\; x \to 6, y \to 10$

L'interprétation de ϕ avec X_i^1 est équivalent à ϕ avec X_i^2 car le symbole de quantification $\exists$ est plus prioritaire que les assignations.

16.3 Formule polie

Une formule polie est une formule qui pour un nom de variable x, ne porte pas plusieurs significations. Pour se faire il suffit de renommer les variables. La formule de gauche n'est pas sous forme polie, mais celle de droite l'ai:



16.4 Équivalences remarquables

Pour tout $\phi, \psi \in FORM_L$ et $x, y \in X$

Dualité $\forall x\phi \equiv \neg\exists x\neg\phi$

$\forall x(\phi \wedge \psi) \equiv (\forall x\phi) \wedge (\forall x\psi)$

$\exists x(\phi \vee \psi) \equiv (\exists x\phi) \vee (\exists x\psi)$

Si x n'est pas libre dans ψ et Q = $\forall$ ou $\exists$ alors :

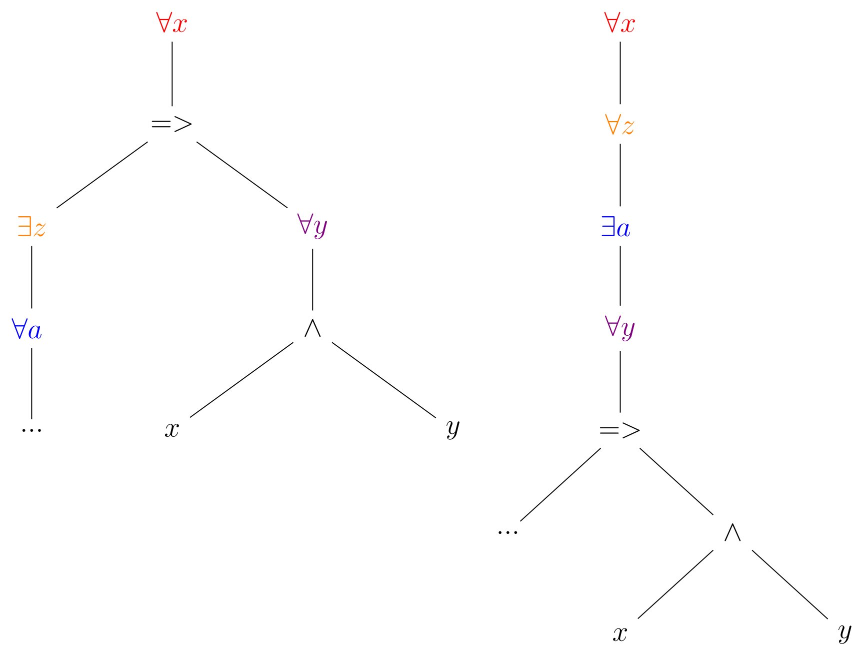
$$Qx\phi \equiv \phi$$
$$Qx(\phi \wedge \psi) \equiv (Qx\phi) \wedge \psi)$$
$$Qx(\phi \vee \psi) \equiv (Qx\phi) \vee \psi)$$

$\forall x\forall y\phi \equiv \forall y\forall x$

$\exists x\exists y\phi \equiv \exists y\exists x$

16.5 Forme Prénexe

La mise en forme prénexe se fait en transformant la formule en forme polie puis en remontant tout les quantificateurs en haut de l'arbre en fessant attention que lorsqu'on remonte un quantificateur par de la une négation, on applique le duel sur le quantificateur, Et aussi il faut garder l'ordre des quantificateur par rapport à la profondeur de leur sous arbre:
(Rappel que $A => B \equiv \neg A \vee B$):



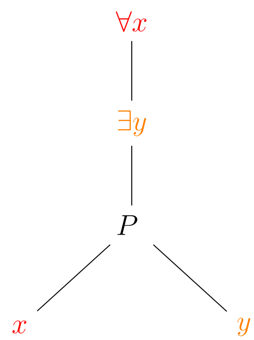
La partie contenant tout les quantificateurs s'appelle le Prefix et la partie sans quantificateurs s'appelle la Matrice.

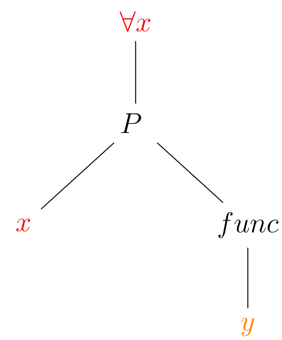
Si dans la formule ci dessus on aurait changé le $=>$ par un $\vee$ (ou autre chose sans signe de négation) les quantificateurs de couleur *orange* et *bleu* ne serait pas "dualisé", mais conserveront l'ordre de leurs profondeur.

Pareil si on remplace dans la formule le $=>$ par un $\vee$ (ou autre chose sans signe de négation) et on s'intéresse exclusivement au quantificateur *orange* et *violet*, $(\{\exists z, \vee, \forall y\})$ l'ordre de parcourt des sous arbres n'a aucune importance sur l'arbre final, (GRD) ou (DRG).

16.6 Scalénisation

Soit la formule suivante, scaléniser une formule c'est pour tout quantificateurs $\exists y$ dépendant d'un quantificateur $\forall x$, y peut se déduire via une fonction:





16.7 Forme propositionnelle

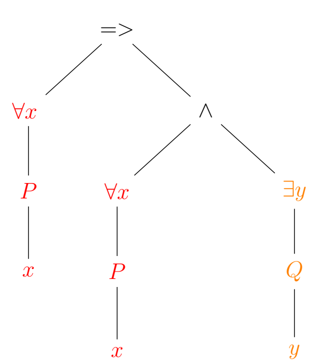
L'ensemble $SFP(\phi)$ des sous-formules premières de $\phi \in FORM_L$ est défini inductivement par:

Si ϕ est un atome ou une formule du type $\forall\psi$ ou $\exists\psi$ alors $SFP\phi) = \{\phi\}$

Si ϕ est une formule du type $\neg\psi$ alors $SFP(\phi) = SFP(\psi)$

Si ϕ est une formule du type $\psi \wedge \theta$ ou $\psi \vee \theta$ ou $\psi => \theta$ alors $SFP(\phi) = SFP(\psi) \cup SFP(\theta)$

Si la formule propositionnelle ϕ est propositionnellement valide alors ϕ est valide



$SFP(\phi) = \{$ formules de couleur *rouge*, formules de couleur *orange*$\}$, ϕ est propositionnellement équivalent à $A => (A \vee B)$ qui est propositionnellement valide donc ϕ est valide

Chapter 17

Calculabilité et Machine de Turing

Soit une machine de turing M un quadruplet M = K,$\sum$,δ,s)

K ensemble fini d'état

s $\in$ K état initial

$\sum$ ensemble fini de symboles supposé disjoint de K et de deux symboles:

- $\triangleright$ marque de début
- $\sqcup$ séparateur ou fin de ruban

δ :(K x $\sum$) x (($K \cup \{yes, no, \uparrow\}$) x $\sum$ x $\{\leftarrow, \rightarrow, -\}$)

- $\{yes, no\}$ état acceptable
- $\{\leftarrow, \rightarrow, -\}$ mouvement de la tête de lecture

17.1 Machines de Turing

Une machine de Turing:

non déterministe est une machine qui pour un état n donné peut dériver sur deux état $n+1$ diffèrent (un état est aussi appelé une configuration, une dérivation peu aussi s'appeler une transition).

Déterministe est une machine qui pour un état n donné n'a qu'une seul possibilité de transition (autrement dit il n'y a que 1 seul $n+1$ unique.

Décideur est une machine qui pour un mot $x \in L$ termine avec l'indice *yes* ou *no*.

Accepteur est une machine qui pour un mot$x \in L$ termine avec l'indice *yes* ou $\uparrow$ (boucle).

17.1.1 Machine de Turing universel

Prend un couple M((i,x)) et l'exécute M_i(x).

17.2 RE, coRE et R

Un langage Récursif (R) pour tout $L \in R$ on peut trouver une Machine de Turing M déterministe qui décide L.
$\forall x \in (\sum \neg\{-\})*$, si $x \in L$ alors $M(x) = yes$ sinon $M(x) = no$.

Un langage récursivement énumérable (RE) pour tout $L \in RE$ on peut trouver une Machine de Turing M déterministe qui accepte L.
$\forall x \in (\sum \neg\{-\})*$, si $x \in L$ alors $M(x) = yes$ sinon $M(x) = \uparrow$.

(coRE) sont tout les $\{L \in \rho artie(\sum \neg\{-\})*)$ tel que $L^- \in RE\}$

Remarque: $R \subseteq RE \cap coRE$

17.2.1 Preuve de R est inclue dans RE

Montrer que $L \in RE$ revient à pour une Machine de Turing Déterministe MT tel que MT accepte L lui associer une output différent.
Si on sait qu'il existe un décideur $Mr \in R$, alors construire un accepteur $Ma \in RE$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \uparrow \\
Ma \arrow[r] & Mr \arrow[ur, "\text{no}"] \arrow[dr, "\text{yes}"] & \\
 & & yes
\end{tikzcd}$$

17.2.2 Preuve de R est inclue dans coRE

Montrer que $L \in coRE$ revient à pour une Machine de Turing Déterministe MT tel que MT reconnait L lui associer une output différent.
Si on sait qu'il existe un reconnait $Mr \in R$, alors construire un accepteur $Ma \in coRE$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \uparrow \\
Ma \arrow[r] & Mr \arrow[ur, "\text{no}"] \arrow[dr, "\text{yes}"] & \\
 & & no
\end{tikzcd}$$

17.3 Problème de l'arrêt

$T(i, x, n)$ i représente un indice de Machine
Vérifier si i décide un programme Si:

No $\rightarrow$ FAUX

YES faire tourner $M_i(x)$ sur n étapes.
Soit $M - i(x)$ s'arrête avant les n étapes $\rightarrow$ VRAI sinon FAUX

17.4 réduction fonctionnel

On dit que $L_1 \leq_f L_2$ si il existe une réduction fonctionnel comme:

$f\ \ L_1 \rightarrow L_2$: $x \rightarrow f(x)$

17.4.1 Exemple de réduction fonctionnel

Soit $L = \{(i, j)$ tel que i et h sont des indices de machine déterministes telles que pour tout mot d'entrée x, on n'a $M_i(x) =\uparrow$ et $M_j(x) \neq\uparrow\}$

Montrer que L est RE-difficile revient à prouver $HALTING \leq_f L$

f (i,x) $\rightarrow$ (j,k):

(i,x) $\in$ HALTING ssi $M_i(x) \neq\uparrow$
(j,k) $\in$ L ssi $M_j(y) =\uparrow$ et $M_k(y) \neq\uparrow$, $\forall y$.

$$\begin{cases} M_j(y) & boucle \\ M_k(y) & M_i(x) \end{cases}$$

Montrer que L est coRE-difficile revient à prouver $\neg HALTING \leq_f L$

f (i,x) $\rightarrow$ (j,k):

(i,x) $\in \neg$ HALTING ssi $M_i(x) \neq\uparrow$
(j,k) $\in$ L ssi $M_j(y) \neq\uparrow$ et $M_k(y) =\uparrow$, $\forall y$.

$$\begin{cases} M_j(y) & y \\ M_k(y) & M_i(x) \end{cases}$$

Part V

Recherche Opérationnel

Chapter 18

Introduction à la PL

Construire une modèle linéaire, c'est donc:

identifier les variables de décision du problème

déterminer : la fonction objectif du modèle

déterminer : les contraintes du modèle

18.1 Modèle linéaire continus à 2 variables

Soit le modèle linéaire suivantes:

Déterminer $(x, y) \in \Im^2$

Minimisant $z = 1000x + 1200y$

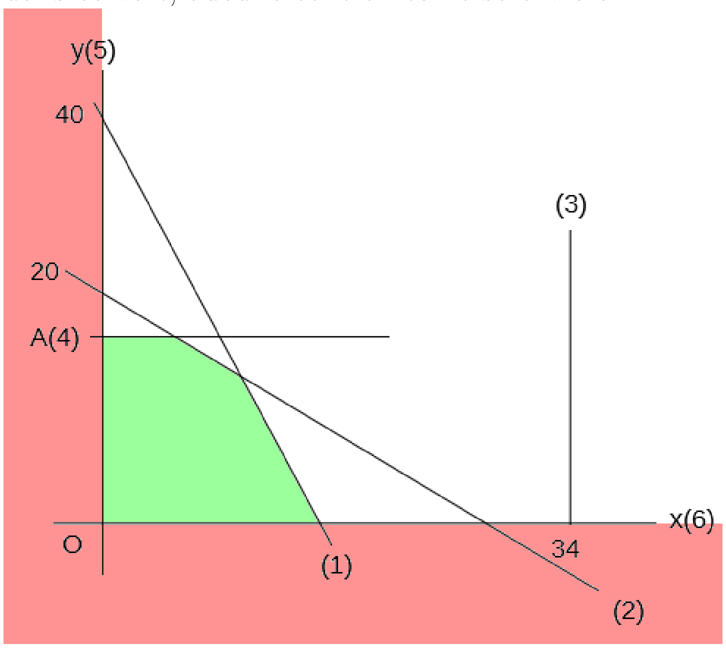
sous les contraintes :

$$(1) 8x + 4y \leq 160$$
$$(2) 4x + 6y \leq 120$$
$$(3) x \leq 34$$
$$(4) y \leq 14$$
$$(5) 0 \leq x$$
$$(6) 0 \leq y$$

18.1.1 Recherche de solutions

Après avoir tracé graphiquement tout les points:
Pour chaque contrainte, tracer la droite et repérer le demi plan des solution: exemple pour (5) et (6), x et y doivent être supérieurs ou égal à 0, d'où le demi plan des solution sont toutes les valeurs positives.
La partie En vert représente la région admissible, quelque soit le point choisis

dans ce vert, aucune contrainte ne sera violé.



18.1.2 recherche de la solution optimal

Changer l'équation z tel que z soit égal à 0

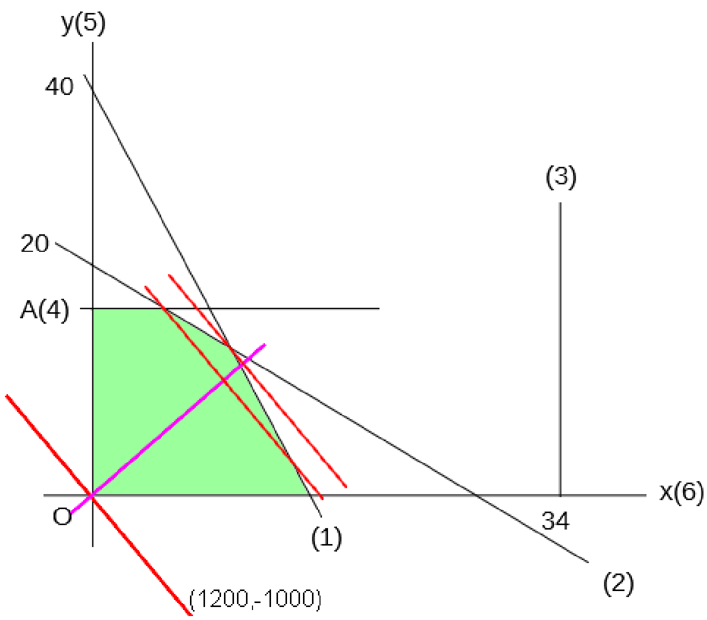
$$z \;= 1000x + 1200y = 0 = 1000 * (1200) + 1200 * (-1000)$$

Traçons la droite $(0, 0)$, $(1200, -1000)$

Un point extrême : est un point se trouvant sur l'intersection de 2 contraintes et étant dans la zone admissible.

L'altitude : est la droite (rouge) la plus haute touchant un point extrême, ce point sera le vecteur (x, y) le plus optimal pour z.

Les droites rouges doivent être toutes parallèles.



Dans cette exemple le point (15,10) est le point extrême maximal pour l'équation z.

Chapter 19

Le simplexe

Soit le modèle linéaire suivantes:

Déterminer $(x, y) \in \Im^2$

Maximisant $Z = 3x + 7y$

sous les contraintes :

(1) $-x + y \leq 3$
(2) $y \leq 8$
(3) $2x - y \leq 28$
(5) $0 \leq x$
(6) $0 \leq y$

19.1 Initialisation du simplexe

Pour chaque expression du type (1)(2)(3) intégrer un e_i pour la transformer en équation.
On appel les e_1 des variables d'accumulation, Ce qui fait

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \Im^5$

Maximisant $Z = 3x + 7y$

sous les contraintes :

(1) $-x + y + e_1 = 3$
(2) $y + e_2 = 8$
(3) $2x - y + e_3 = 28$
(5) $0 \leq x$
(6) $0 \leq y$
(7) $e_1, e_2, e_3 \geq 0$

19.2 Canonicité du modèle

Soit les valeurs (pour la première itération)

Hors Base (x, y)

Base (e_1, e_2, e_3)

Un modèle est canonique que si:

si toutes les variables de Base ne sont pas dans Z.

19.3 Solution admissible

(1) $-x + y + e_1 = 3$

(2) $x - e_1 + e_2 = 5$

(3) $3x - e_1 + e_3 = 25$

Variable hors base $= x, e_1$

Variable Base $= y, e_2, e_3$

Avec comme solution admissible $A\ Deduire(x, y, e_1, e_2, e_3)$

Pour toute variable présente dans l'ensemble $Hors\ base$ la valeur admissible est égal à 0
Donc solution admissible = $(0, y, 0, e_2, e_3)$
Les 3 dernières valeurs sont les résultat des équations (soit 3, 5 et 25).
Pour chaque équation nous lisons les termes de droit à gauche et ignorons ceux qui sont dans l'ensemble $Hors\ Base$:
Donc solution admissible = $(0, 3, 0, 5, 25)$

19.4 Exemple simple Premier itération

19.4.1 Choix de la variable entrante

Gain marginale prendre la variable non négatif ayant le plus haut coefficient.

(x, y) sont deux choix possible, le tout est de choisir une bonne heuristique, comme celle du meilleur gain marginale, ou via la comparaison (en mode graphique):
Y sera choisit, donc Y sera notre variable entrante.

19.4.2 Choix de la variable sortante

Pour chaque résultat d'équation, le diviser par sa valeur de Y (le résultat devant être positif sinon l'ignorer)

$-x + y + e_1 = 3$ donne $\frac{3}{1} = 3$ (1 car $y = 1 * y$)

$y + e_2 = 8$ donne $\frac{8}{1} = 8$

$2x - y + e_3 = 28$ donne $\frac{28}{1} = 28$

Prendre le minimum des variables, donc se sera 3.
la variable présente dans la Base sera prise comme variable sortante, dans notre cas e_1.

19.4.3 pivotage

On choisis l'équation associé à la variable e_1 pour définir la variable entrante y.
On n'a:

$$y = \frac{1}{1} * (x - e_1 + 3)$$

Puis on crée les nouvelles équations via le nouveau y:

$Z = 3x + 7y$ devient

$$Z = 3x + 7(x - e_1 + 3)$$
$$Z = 10x - 7e_1 + 27$$

$x - e_1 = 3$ est déjà normalisé

$y + e_2 = 8$ devient

$$8 = x - e_1 + 3 + e_2$$
$$5 = x - e_1 + e_2$$

$2x - y + e_3 = 28$ devient

$$28 = 2x + (x - e_1 + 3) + e_3$$
$$25 = 3x - e_1 + e_3$$

19.4.4 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \Im^5$

Maximisant $Z = 10x - 7e_1 + 21$

Variables hors base x, e_1

Variables de Base y, e_2, e_3

Solution admissible $(0, 3, 0, 5, 25)$ et Z = 21

(1) $-x + y + e_1 = 3$

(2) $x - e_1 + e_2 = 5$

(3) $3x - e_1 + e_3 = 25$

(5) $0 \leq x$

(6) $0 \leq y$

(7) $e_1, e_2, e_3 \geq 0$

A ne pas oublier de vérifier la canonicité du modèle.

19.5 Exemple simple Seconde itération

19.5.1 Choix de la variable entrante

X sera choisit, donc X sera notre variable entrante.

19.5.2 Choix de la variable sortante

$\frac{5}{1} = 5$

$\frac{25}{3} = 8.3$

Prendre le minimum des variables, donc se sera 5, donc e_2.

19.5.3 pivotage

$x = \frac{1}{1} * (e_1 - e_2 + 5)$

Puis on crée les nouvelles équations via le nouveau y:

$Z = 10x - 7e_1 + 27$ devient

$$\begin{aligned} Z &= 10(e_1 - e_2 + 5) - 7e_1 + 27 \\ Z &= 3e_1 - 10e_2 + 71 \end{aligned}$$

$-x + y + e_1 = 3$ devient

$$\begin{aligned} 3 &= -(e_1 - e_2 + 5) + y + e_1 \\ 8 &= y + e_2 \end{aligned}$$

$3x - e_1 + e_3 = 25$ devient

$$\begin{aligned} 25 &= 3(e_1 - e_2 + 5) - e_1 + e_3 \\ 10 &= 2e_1 - 3e_2 + e_3 \end{aligned}$$

19.5.4 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \Im^5$

Maximisant $Z = 3e_1 - 10x + 71$

Variables hors base e_2, e_1

Variables de Base y, x, e_3

Solution admissible $(5, 8, 0, 0, 10)$ et Z = 71

(1) $y + e_2 = 8$

(2) $x - e_1 + e_2 = 5$

(3) $2e_1 - 3e_2 + e_3 = 10$

(5) $0 \leq x$

(6) $0 \leq y$

(7) $e_1, e_2, e_3 \geq 0$

A ne pas oublier de vérifier la canonicité du modèle.

19.6 Exemple simple, troisième itération

19.6.1 Variable entrante et sortante

La variable entrante sera e_1

La variable sortante sera e_3 car:

$\frac{8}{0}$ est NULL, $\frac{5}{1}$ car négatif, $\frac{10}{2} = 5$

19.6.2 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \Im^5$

Maximisant $Z = 86 - \frac{11}{2}e_2 - \frac{3e_3}{2}$

Variables hors base e_2, e_3

Variables de Base y, x, e_1

Solution admissible $(10, 8, 5, 0, 0)$ et Z = 86

(1) $-\frac{1}{2}e_2 + \frac{e_3}{2} + e1 = 10$

(2) $e_2 + y = 8$

(3) $e_1 - \frac{3}{2}e_2 + \frac{e_3}{2} = 5$

(5) $0 \leq x$

(6) $0 \leq y$

(7) $e_1, e_2, e_3 \geq 0$

19.7 Exemple simple, dernière itération

Stop car e_2 et e_3 sont inférieur à 0 dans Z.

Chapter 20

Simplexe à deux phases

Soit le modèle suivant:

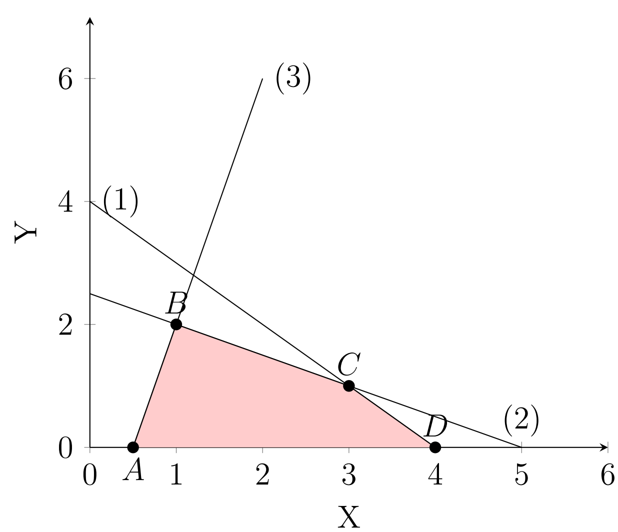
Déterminer $(x, y) \in \Im^2$

Maximisant $Z = 2x + 3y$

sous les contraintes :

(1) $x + y \leqslant 4$
(2) $x + 2y \leqslant 5$
(3) $4x - y \geqslant 2$
(4-5) $x, y \geqslant 0$

Lorsque le sens de l'équation est $\leqslant$ il faut ajouter une variable e_i, dans le cas des équations $\geqslant$ il faut ajouter une variable d'excédant a dans la contrainte concerné et instaurer Z à $-a$
La représentation graphique ci dessous:



20.1 Première phase du simplexe à deux phases

Pour toutes expression sous la forme $A \geqslant -i$, multiplier les deux coté par -1 et inverser le signe pour obtenir des équations positif.
Si une contrainte est jugé redondante, alors elle peut être éliminé sans changer

le modèle.
Le modèle ci dessus n'est pas canonique, donc nous allons exprimer Z en fonction de l'équation portant le symbole a:

20.1.1 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3, a) \in \Im^5$

Maximisant $Z = -a = 4x - y - e_3 - 2$ $\%oldZ = 2x + 3y$

Variables hors base x, y, a

Variables de Base e_1, e_2, e_3

Solution admissible $(0, 0, 4, 5, 0, 2)$ et Z $= -2$

(1) $x + y + e_1 = 4$

(2) $x + 2y + e_2 = 5$

(3) $4x - y - e_3 + a = 2$

(4-5) $x, y, e_i, a \geqslant 0$

Ce modèle est canonique.

20.2 Premier phase du simplexe à deux phases, première itération

20.2.1 Variable entrante et sortante

La variable entrante sera x

La variable sortante sera a car:

$\frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

20.2.2 pivotage

$x = \frac{1}{2} * (y + e_3 - a + 2) = \frac{y}{4} + \frac{e_3}{4} - \frac{a}{4} + \frac{1}{2}$

20.2.3 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3, a) \in \Im^5$

Maximisant $Z = -a$
$\%oldZ = 2x + 3y$

Variables hors base y, a

Variables de Base e_1, e_2, x

Solution admissible $(\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 0, 0)$ et Z = 0

(1) $\frac{5}{4}y + e_1 + \frac{e_3}{4} - \frac{a}{4} = \frac{7}{2}$

(2) $\frac{9}{4}y + e_2 + \frac{e_3}{4} - \frac{a}{4} = \frac{9}{2}$

(3) $x - \frac{y}{4} - \frac{e_3}{4} + \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$

(4-5) $x, y, e_i, a \geqslant 0$

20.3 Premier phase du simplexe à deux phases, seconde itération

Nous somme en présente d'un système optimal car Z à l'altitude 0.
Une solution admissible serait $(PG =)$:

$A(\frac{1}{2}, 0)$ est le point extrême correspondant:

$$y_A = 0$$
$$4x_A - y_A = 2$$

Comme $z = 0$ on passe en phase 2.

20.4 Seconde phase du simplexe à deux phases

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \Im^5$

Maximisant $Z = oldZ = 2x + 3y$

Variables hors base y

Variables de Base e_1, e_2, x

Solution admissible $(\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 0)$ et Z = 0

(1) $\frac{5}{4}y + e_1 + \frac{e_3}{4} = \frac{7}{2}$

(2) $\frac{9}{4}y + e_2 + \frac{e_3}{4} = \frac{9}{2}$

(3) $x - \frac{y}{4} - \frac{e_3}{4} = \frac{1}{2}$

(4-5) $x, y, e_i \geqslant 0$

On retire toutes les occurrences de a.
Le modèle n'est pas canonique car x est hors base, donc remplacer x dans Z car il est définit:
$Z = 2x + 3y = 2(\frac{y}{4} + \frac{e_3}{4} + \frac{1}{2}) + 3y = \frac{7}{2}y + \frac{e_3}{2} + 1$

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \Im^5$ et Z = 1

Maximisant $Z = \frac{7}{2}y + \frac{e_3}{2} + 1$

Variables hors base y, e_3

Variables de Base e_1, e_2, x

Solution admissible $(\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 0)$

(1) $\frac{5}{4}y + e_1 + \frac{e_3}{4} = \frac{7}{2}$

(2) $\frac{9}{4}y + e_2 + \frac{e_3}{4} = \frac{9}{2}$

(3) $x - \frac{y}{4} - \frac{e_3}{4} = \frac{1}{2}$

(4-5) $x, y, e_i \geqslant 0$

Ce modèle est canonique.

20.5 Seconde phase du simplexe à deux phases, première itération

20.5.1 Variable entrante et sortante

La variable entrante sera y

La variable sortante sera e_2 car:

$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{14}{5}, \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{4}} = 2, \leqslant 0$

20.5.2 pivotage

$y = \frac{4}{9} * (-e_2 - \frac{e_3}{4} + \frac{9}{2}) = -\frac{4}{9}e_2 - \frac{e_3}{9} + 2$

20.5.3 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \Im^5$

Maximisant $Z = -\frac{14}{9}e_2 + \frac{e_3}{9} + 8$

Variables hors base e_2, e_3

Variables de Base e_1, y, x

Solution admissible $(1, 2, 1, 0, 0)$

et Z = 8

(1) $x - \frac{5}{9}e_2 + \frac{e_3}{9} = 1$

(2) $y + \frac{4}{9}e_2 + \frac{e_3}{9} = 2$

(3) $x + \frac{e_2}{9} - \frac{2}{9}e_3 = 1$

(4-5) $x, y, e_i \geqslant 0$

Ce modèle est canonique.

20.6 Seconde phase du simplexe à deux phases, seconde itération

20.6.1 Variable entrante et sortante

La variable entrante sera e_3

La variable sortante sera e_1 car:

$\frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$, $\frac{2}{\frac{1}{9}} = 18$, $\leqslant 0$

20.6.2 pivotage

$e_3 = 9(-e_1 + \frac{5}{9}e_2 + 1) = -9e_1 + 5e_2 + 9$

20.6.3 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \Im^5$

Maximisant $Z = -e_1 - e_2 + 9$

Variables hors base e_2, e_1

Variables de Base e_3, y, x

Solution admissible $(3, 1, 0, 0, 9)$ et Z = 9

(1) $9y + 5e_2 + e_3 = 9$

(2) $y - e_1 + e_2 = 1$

(3) $x + 2e_1 - e_2 = 3$

(4-5) $x, y, e_i \geqslant 0$

Ce modèle est canonique.

20.7 Seconde phase du simplexe à deux phases, troisième itération

Il n'existe pas de variable entrante car e_1 et $e_3 \leqslant 0$

Part VI

Représentation des connaissances et raisonnement

Chapter 21

Logique propositionnel

21.1 Vocabulaire

Les *Logiquespropositionnel* sont définit via les symboles suivant:
$\top, \bot, C, \neg C, C \wedge C, C \vee C, C \Rightarrow C$

Littéral est un atome ou la négation d'un atome

Clause est une disjonction de littéraux

Cube est une conjonction de littéraux

CNF est une forme normal conjonctive (une conjonction de clauses)

DNF est une forme normal disjonctive (une disjonction de cubes)

21.2 cohérence d'un ensemble de clauses

Soit K un ensemble de clauses pouvant être réduit via les axiomes:

$x \vee x \vee y_1 \vee ...y_n \equiv x \vee y_1 \vee ...y_n$

$x \vee \neg x \vee y_1 \vee ...y_n \equiv \text{`}top$

$x \vee \top \equiv \top$

$x \vee \bot \equiv x$

Si K est vide alors K est cohérente

Si $\bot \in$ K alors K est incohérente

$K_{x \leftarrow \top}$ est le résultat du remplacement des occurrences de x par $\top$

$K_{x \leftarrow \bot}$ est le résultat du remplacement des occurrences de x par $\bot$

Chapter 22

Introduction à la logique de description

22.1 Attributive Language with Complement

Les ALC sont définit via les symboles suivant:
$\top, \bot, C, \neg C, C \sqcap C, C \sqcup C, \forall r.C, \exists r.C$

22.1.1 Propriétés

Pour toutes les interprétations $\iota = \langle \Delta^I, .^I \rangle$, et pour tout $C, D \in \ell_{ALC}$:

$(\neg\neg C)^I = C^I$

$(\neg(C \sqcap D))^I = (\neg C \sqcup \neg D)^I$

$(\neg(C \sqcup D))^I = (\neg C \sqcap \neg D)^I$

$(\neg\forall r.C)^I = (\exists r.\neg C)^I$

$(\neg\exists r.C)^I = (\forall r.\neg C)^I$

$\exists r.\bot \equiv \bot$

$\forall r.\top \equiv \top$

22.2 Logique de description

Définit via les symboles suivant:
$\ell_{ALC}, C \sqsubseteq C, \sqsupseteq C$

22.2.1 Sémantique

$\iota \Vdash C \sqsubseteq D \ (\iota satisfait C \sqsubseteq D)$ si $C^I \subseteq D^I$

$\iota \Vdash C \equiv D \ \ \iota \Vdash C \sqsubseteq D$ et $\iota \Vdash C \sqsupseteq D$

22.2.2 Assertions

$a : C$ a est une instance de C

$(a, b) : r$ a et b sont attaché avec la relation r

22.3 TBoxes et ABoxes

Soit une base de connaissance $KB = \langle T, A \rangle$ où:

$$T = \begin{cases} EmpStud \equiv Student \sqcap Employee \\ Student \sqcap \neg Employee \sqsubseteq \neg \exists pays.Tax \\ EmpStud \sqcap \neg Parent \sqsubseteq \exists pays.Tax \\ EmpStud \sqcap Parent \sqsubseteq \neg \exists pays.Tax \\ \exists worksFor.Company \sqsubseteq Employee \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} ibm : Company \\ mary : Parent \\ john : EmpStud \\ (john, ibm) : workFor \end{cases}$$

22.3.1 Subsumption

D'après la TBoxes et la ABoxes ci dessus, dire que A subsume B c'est dire que A est plus spécifique que B:

Does $EmpStud$ subsume $Student \sqcap Employe$? : yes

Does $Student \sqcap Parent$ subsume $EmpStud \sqcap Parent$? : yes

Does $\exists pays.\bot$ subsume $EmpStud$? : No

22.3.2 Classification

Les schémas de classification aide pour trouver les subsumptions:

$$\begin{tikzcd} & EmpStud \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\ Student & & Employes & Tax & Company & Parent \end{tikzcd}$$

22.3.3 Instance checking

On n'a

ibm est une instance de $Company$

$mary$ est une instance de $Parent$

$john$ est une instance de $EmpStud, Student, Employee$

$john$ n'est pas une instance de $\neg Parent$

$(john, ibm)$ est une instance de $workFor$

22.3.4 Retrieval

$Student$ $?\{john\}$

$\neg\exists pays.Tax$ $?\{mary\}$

$\neg(\neg Employes \sqcap \exists pays.Tax)$ $?\{john, mary\}$

$\forall worksFor.Company$ $?\{\}$

$Employee \sqcup \forall pays.\neg Tax \sqcup Company$ $?\{ibm, john, mary\}$

$\neg Tax \sqcup \exists pays.\bot \sqcup \forall workdFor.\forall pays.\top$ $?\{ibm, john, mary\}$

22.3.5 Equivalance of concept

Are $Student \sqcap Employee \sqcap \neg EmpStud$ **and** $\exists worksFor.\bot$ équivalent? Yes

Are $Student \sqcap \forall worksFor.\neg Company$ **and** $Student \sqcap \neg Employee$ équivalent? No

22.3.6 Concept satisfiability

$EmpStud \sqcap Parent \sqcap \exists pays.\top$ satisfiable? Yep

$\neg\forall worksFor.\neg Company \sqcap \neg Employee$ satisfiable? No

$Employee \sqcap Company$ satisfiable ? Yep

22.3.7 ABox consistency

Is $A_2 = A \cup \{john : \exists worksFor.\neg Company\}$ consistent wrt T ? : Yes

Is $A_3 = A \cup \{mary : \exists pays.Tax\}$ consistent wrt T ? : No

22.3.8 Réduction et consistance

Soit $KB = \langle T, A\rangle, C, D \in \iota_{ALC}, a \in I$ and $a^{‘}$ new in KB

Concept subsumption wrt T : $KB \models C \sqsubseteq D$ ssi $\langle T, A \cup \{a^{‘} : C \sqcap \neg D\}\rangle$ est inconsistant

Instance chacking : $KB \models a : C$ ssi $\langle T, A \cup \{a : \neg C\}\rangle$ est inconsistant

Concept satisfiability wrt T : C est satisfiable wrt T ssi $\langle T, A \cup \{a^{‘} : C\}\rangle$ est consistent

$KB \models EmpStud \sqcap Parent \sqsubseteq \neg\exists pays.Tax \sqcap Employee$?
$KB \cup \{a : EmpStud \sqcap Parent \sqcap (\exists pays.Tax \sqcup \neg Employee)\} \models \bot$?, for a new

$KB \models john : Student \sqcap \exists empBy.\top$?
$KB \cup \{john : \neg(Student \sqcap \exists empBy.\top)\} \models \bot$?

Is $EmpStud \sqcap \neg\exists pays.Tax$ **satisfiable wrt** KB ?
$KB \cup \{a : EmpStud \sqcap \neg\exists pays.Tax \not\models \bot$?, for a new

Chapter 23

Méthode des Tableau pour les ALC

23.1 Pre processing

23.1.1 Réécriture

Réécrite chaque:

$C \sqsubseteq D$ dans T en $\top \sqsubseteq \neg C \sqcup D$

$A \sqsubseteq \exists r.B$ en $\top \sqsubseteq \neg A \sqcup \exists r.B$

Changer la KB en NNF ($\neg$ occurs only in front of concept names)

$\neg\neg C \ \rightarrow C$

$\neg(C \sqcap D) \ \rightarrow \neg C \sqcup \neg D$

$\neg(C \sqcup D) \ \rightarrow \neg C \sqcap \neg D$

$\neg(\exists r.C) \ \rightarrow \forall r.\neg C$

$\neg(\forall r.C) \ \rightarrow \exists r.\neg C$

23.1.2 Vocabulaire

Blocage/Blocking l'apparition d'une boucle infini dans le déroulement de l'algorithme

Clash Quand il existe une contradiction d'un noeud feuille vers l'un de ses ascendant

23.1.3 Règles d'expansion

$\sqsubseteq_T -$ rule

Si $a : C \in A, \top \sqsubseteq D \in T$ **et** $a : D \notin A$ alors
$A := A \cup \{a : D\}$

$\sqcap-$ rule

Si $a : C \sqcap D \in A$ **et** $\{a : C, a : D \nsubseteq A$ alors
$A := A \cup \{a : C, a : D\}$

$\sqcup-$ rule

Si $a : C \sqcup D \in A$ **et** $\{a : C, a : D\} \cap A = \varnothing$ alors
$A := A \cup \{a : E\}$, for some $E \in \{C, D\}$

$\exists-$ rule

Si $a : \exists R.C \in A$ **et il n'y a pas de** b **st** $\{(a, b) : R, b : C\} \subseteq A$ **et**
a **n'est pas en en blocage** alors
$A := A \cup \{(a, c) : R, c : C\}$, for c new in A

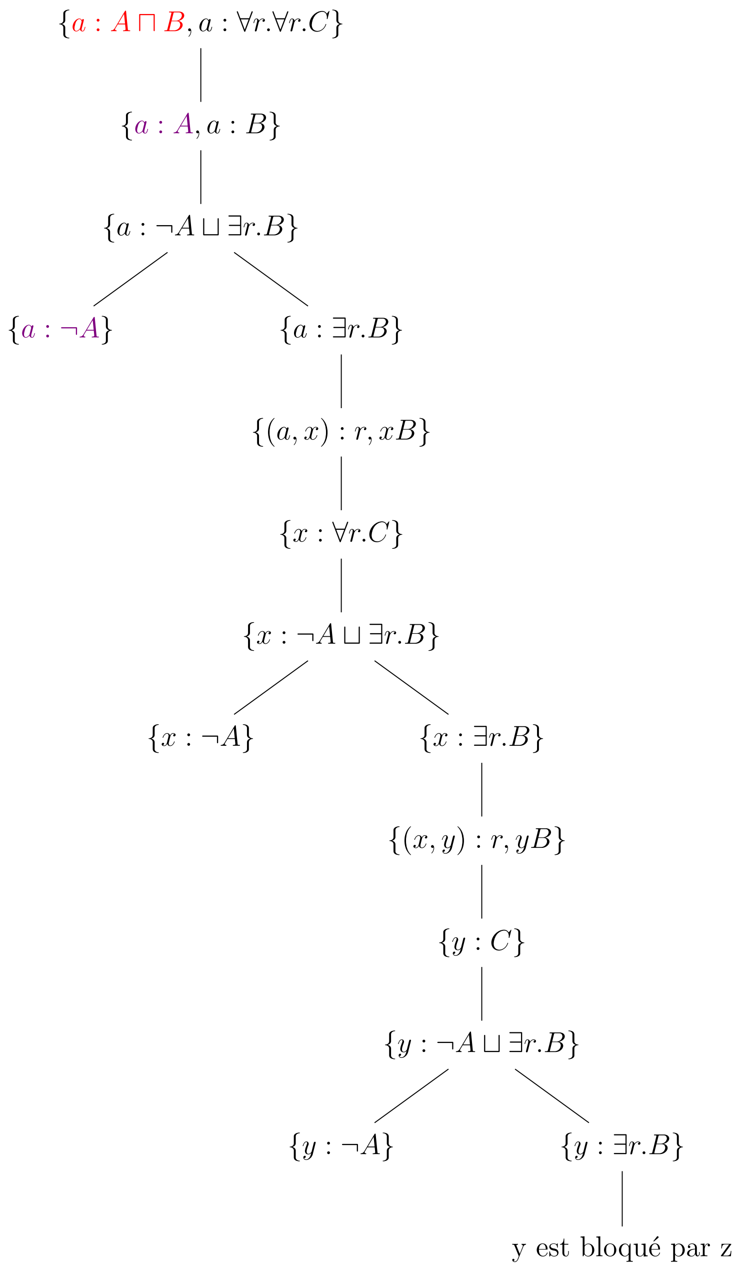
$\forall-$ rule

Si $\{a : \forall R.C, (a, b) : R\} \subseteq A$ **et** $b : C \notin A$ alors
$A := A \cup \{b : C\}$

23.2 Exemple

$T = \{A \sqsubseteq \exists r.B\} \equiv \{\top \sqsubseteq \neg A \sqcup \exists r.B\}$

$A = \{a : A \sqcap B, a : \forall r.\forall r.C\}$



23.3 Exemple 2

$$T = \{A \sqsubseteq \exists r.B\} \equiv \{\top \sqsubseteq \neg A \sqcup \exists r.B\}$$

$$A = \{a : A \sqcap B, a : \forall r.(A \sqcap \forall r.A)\}$$

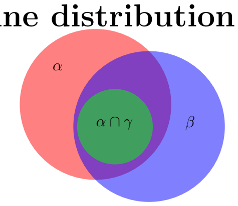
- $\{a : A \sqcap B, a : \forall r.(A \sqcap \forall r.A)\}$
  - $\{a : A, a : B\}$
    - $\{a : \neg A \sqcup \exists r.B\}$
      - $\{a : \neg A\}$
      - $\{a : \exists r.B\}$
        - $\{(a,x) : r, xB\}$
          - $\{x : A \sqcap \forall r.A\}$
            - $\{x : A, x : \forall r.A\}$
              - $\{x : \neg A \sqcup \exists r.B\}$
                - $\{x : \neg A\}$
                - $\{x : \exists r.B\}$
                  - $\{(x,y) : r, yB\}$
                    - $\{y : A \sqcap \forall r.A\}$
                      - $\{y : A, y : \forall r.A\}$
                        - $\{y : \neg A \sqcup \exists r.B\}$
                          - $\{y : \neg A\}$
                          - $\{y : \exists r.B\}$
                            - $...InfinitLoop...$

Chapter 24

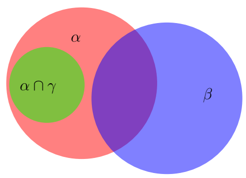
Logique presque tout

Soit le nouvelle opérateur binaire $\Subset$ disent pour *presque tout* A est dans B.

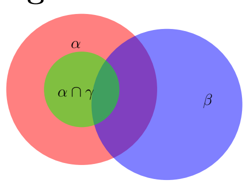
Bonne distribution :



Mauvaise distribution :



Cas général :



24.1 Système P

Réflexivité :

Almost all : $\alpha \mathrel{|\!\sim} \alpha$

ensembliste : $A \Subset A$

Équilibrage à gauche :

Almost all : Si $\models \alpha \Leftrightarrow \beta$ et $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$ alors $\beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$

ensembliste : Si $A = B$ et $A \Subset C$ alors $B \Subset C$

Équilibrage à droite :

Almost all : Si $\alpha \models \beta$ et $\gamma \mathrel{|\!\sim} \alpha$ alors $\gamma \mathrel{|\!\sim} \beta$

ensembliste : Si $A \subseteq B$ et $C \Subset A$ alors $C \Subset B$

Coupure :

Almost all : Si $(\alpha \wedge \beta) \mathrel{|\!\sim} \gamma$ et $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ alors $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$

ensembliste : Si $(A \cap B) \Subset C$ et $A \Subset B$ alors $A \Subset C$

Monotonie :

Almost all : Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ et $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$ alors $\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$

ensembliste : Si $A \Subset B$ et $A \Subset C$ alors $(A \cap B) \Subset C$

Ou :

Almost all : Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$ et $\beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$ alors $\alpha \vee \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$

ensembliste : Si $A \Subset C$ et $B \Subset C$ alors $(A \cup B) \Subset C$

24.1.1 Exemple

Soit:

Q : être québécoises

C : être canadiens

F : le fait de parler français

A : le fait de parler anglais

S : le fait d'aimer le sirop d'érable

Presque tout les canadiens ne parlent pas le français : $C \mid\!\backsim \neg F$

Presque tout les québécois parlent le français : $Q \mid\!\backsim F$

Les québécois aiment le sirop d'érable : $Q \Rightarrow S \equiv Q \mid\!\backsim S$

Les québécois sont canadiens $Q \Rightarrow C \equiv Q \mid\!\backsim C$

Presque tout les québécois canadiens parlent le français

Nous avons $Q \mid\!\backsim C$ et $Q \mid\!\backsim F$
Avec la monotonie on obtient $Q \wedge C \mid\!\backsim F$

Presque tout les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais

Avec $Q \wedge C \mid\!\backsim F$
Par ailleurs nous avons $F \models F \vee A$
Alors via l'équilibrage à droite $Q \wedge C \mid\!\backsim F \vee A$

24.2 Tolérance du Système P

Soit la basse de connaissance:

$\Delta \quad C \Rightarrow \neg F$

$Q \Rightarrow F$

$W \quad Q \Rightarrow S$

$Q \Rightarrow C$

Pour une formule de type $A \Rightarrow B$ dans Δ dire si il existe une interprétation qui vérifie $A \Rightarrow B$ et qui satisfait chacune des règles de Δ et W

Pour la formule $C \Rightarrow \neg F$ est satisfait

$\Delta \quad C^1 \Rightarrow \neg F^0$

$Q^0 \Rightarrow F^0$

$W \quad Q^0 \Rightarrow S^s$

$Q^0 \Rightarrow C^1$

Pour la formule $Q \Rightarrow F$ n'est pas satisfait

$\Delta \quad C^1 \Rightarrow \neg F^1 \equiv \neg\top \vee \bot$

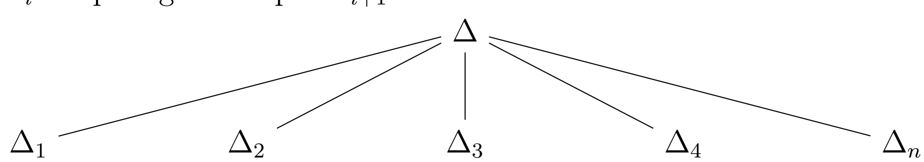
$Q^1 \Rightarrow F^1$

$W \quad Q^1 \Rightarrow S^s$

$Q^1 \Rightarrow C^1$

24.3 Stratification du système P

Δ stratifiable (ou cohérente) c'est le fait de pouvoir diviser Δ en Δ_i.
Δ_i est plus général que Δ_{i+1}



Si $\alpha \rightarrow \beta$ est une conséquences de Δ, alors $\{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \cup \Delta$ est incohérente. A chaque tour dans Δ appliquer la tolérances et si il y a une interprétation, bouger la formule dans Δ_i, Si Δ_i est vide alors ce n'est pas stratifiable, si Δ est vide alors c'est stratifiable.

24.4 Exemple de stratification possible

24.4.1 Initialisation

$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F\}$

$W = \{Q => S, Q => C\}$

$\alpha \rightarrow \beta = (Q \wedge C) \rightarrow \neg F$

24.4.2 Première itération

On n'a:

$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F\}$

$W = \{Q => S, Q => C\}$

$\Delta_1 = \{\}$

Pour $C^1 \rightarrow \neg F^0$ est toléré par l'algorithme donc transféré dans Δ_1 à la fin du tour:

$\Delta = \{C^1 \rightarrow \neg F^0, Q^0 \rightarrow F^0, (Q^0 \wedge C^1) \rightarrow F^0\}$

$W = \{Q^0 => S^s, Q^0 => C^1\}$

$\Delta_1 = \{\}$

Pour $Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F$ ne sont pas toléré par l'algorithme:

$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F\}$

$W = \{Q => S, Q => C\}$

$\Delta_1 = \{\}$

24.4.3 Seconde itération

On n'a:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F\} \\ W &= \{Q => S, Q => C\} \\ \Delta_1 &= \{C \rightarrow \neg F\} \\ \Delta_2 &= \{\} \end{aligned}$$

Pour $Q \rightarrow F$ et $(Q \wedge C) \rightarrow F$ sont toléré donc seront transféré dans Δ_2 à la fin du tour:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\} \\ W &= \{Q => S, Q => C\} \\ \Delta_1 &= \{C \rightarrow \neg F\} \\ \Delta_2 &= \{Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F\} \end{aligned}$$

Δ est vide donc $\{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \cup \Delta$ est stratifiable.

24.5 Exemple de stratification non possible

24.5.1 Initialisation

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F\}$$

$$W = \{Q => S, Q => C\}$$

$$\alpha \rightarrow \beta = (Q \wedge C) \rightarrow (F \vee A)$$

24.5.2 Première itération

On n'a:

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)\}$$

$$W = \{Q => S, Q => C\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

Pour $C^1 \rightarrow \neg F^0$ est toléré par l'algorithme donc transféré dans Δ_1 à la fin du tour:

$$\Delta = \{C^1 \rightarrow \neg F^0, Q^0 \rightarrow F^0, (Q^0 \wedge C^1) \rightarrow (\neg F^0 \wedge \neg A^a)\}$$

$$W = \{Q^0 => S^s, Q^0 => C^1\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

Pour $Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)$ ne sont pas toléré par l'algorithme:

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)\}$$

$$W = \{Q => S, Q => C\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

24.5.3 Seconde itération

On n'a:

$$\Delta = \{Q \to F, (Q \wedge C) \to (\neg F \wedge \neg A)\}$$

$$W = \{Q => S, Q => C\}$$

$$\Delta_1 = \{C \to \neg F\}$$

$$\Delta_2 = \{\}$$

Pour $Q \to F$ et $(Q \wedge C) \to (\neg F \wedge \neg A)$ ne sont pas toléré:

$$\Delta = \{Q \to F, (Q \wedge C) \to (\neg F \wedge \neg A\}$$

$$W = \{Q => S, Q => C\}$$

$$\Delta_1 = \{C \to \neg F\}$$

$$\Delta_2 = \{\}$$

Δ_2 est vide donc $\{\alpha \to \neg\beta\} \cup \Delta$ n'est pas stratifiable.

Chapter 25

Logique de description DL Lite

25.1 Opérateurs

Pour une *ABox*:

$\neg$ négation

$\exists$ Rôle $\rightarrow$ Concept

$$\begin{matrix} (A & ,B) \\ (C & ,D) \end{matrix} \ \exists \rightarrow \ \begin{matrix} (A) \\ (C) \end{matrix}$$

$^{\neg}$ Rôle $\rightarrow$ Rôle

$$\begin{matrix} (A & ,B) \\ (C & ,D) \end{matrix} \ ^{\neg} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} (B & ,A) \\ (D & ,C) \end{matrix}$$

25.2 Requêtes

25.2.1 Grounded query

Sous la forme $(\wedge_{i=1}^{n} A_i(a)) \wedge (\wedge_{i=1}^{m} P_j(a,b))$

Avec A_1 des concepts et P_i des rôles.

Exemple : $Student(Jean) \wedge Teacher(Paul) \wedge ... \wedge HasSupervisor(Jean, Paul)$

25.2.2 Conjonctives Query

Sous la forme $q = \{x | \exists y.conj1(x,y) \wedge conj2(Bob,y) \wedge conj3(y)\}$

Si x donne une liste non vide alors c'est une réponse de type *array*

Sinon c'est une sortie de type *boolean*

25.3 Fermetures négatives

Sur DL-Lite_{core} Tout les axiomes négatifs de la $TBox$ sont dans $cln(T)$

si $B_1 \sqsubseteq B_2 \in T$ and $B_2 \sqsubseteq \neg B_3 \in T$ alors $B_1 \sqsubseteq \neg B_3 \in T$

si $B_1 \sqsubseteq B_2 \in T$ and $B_3 \sqsubseteq \neg B_2 \in T$ alors $B_1 \sqsubseteq \neg B_3 \in T$

Avec les règles ce dessus dérivons les *negated closure*:

DL-Lite_{core} **TBox**	$cln(T)$
$Teacher \sqsubseteq \neg Student$	$Teacher \sqsubseteq \exists HasSupervisor$
$Teacher \sqsubseteq \exists TeachesTo$	$\exists HasSupervisor^{\neg} \sqsubseteq \neg Student$
$\exists TeachesTo^{\neg} \sqsubseteq Student$	$\exists TeachesTo^{\neg} \sqsubseteq \neg Teacher$
$Student \sqsubseteq \exists HasSupervisor$	
$\exists HasSupervisor^{\neg} \sqsubseteq Teacher$	

25.4 Gestion des contraintes et MultiABox

25.4.1 Expansion

Note o_{cl}, Qui va agrandir la ABox avec les axiomes de la TBox

$TBox$	$ABox$
$\exists P \sqsubseteq B$	A(a)
$A \sqsubseteq B$	P(c,b)
$A \sqsubseteq \neg C$	$B(a)$
	$B(c)$

La MultiABox M est composé que d'une ABox.
$B(a)$ est ajouté grâce au second axiome
$B(c)$ est ajouté grâce au premier axiome

25.4.2 Spliting

Note o_{incl}, Qui va Séparer les conflits en créant plusieurs ABox

$TBox$	$MultiAboxs($ $ABox_1,$	$ABox_2$ $)$
$C \sqsubseteq \neg B$	B(a)	C(e)
	C(a)	B(e)
	B(b)	B(b)

$o_{incl} = \{\{B(a), B(b)\}, \{B(b), C(a)\}, \{C(a)\}, \{C(e)\}, \{B(e)\}\}$

25.4.3 Selection

Note o_{card}, Qui crée une nouvelle ABox contenant tout les ABox ayant le plus haut cardinal

$TBox$	$ABox_1$	$ABox_2$	$ABox_3$
$C \sqsubseteq \neg B$	P(c,b)	C(a)	B(c)
	B(a)	B(b)	

$o_{incl} = \{ABox_1, Abox_2\}$

25.4.4 Modifieurs

$o_{cl}(o_{cl}(M)) = o_{cl}(M)$

$o_{incl}(o_{incl}(M)) = o_{incl}(M)$

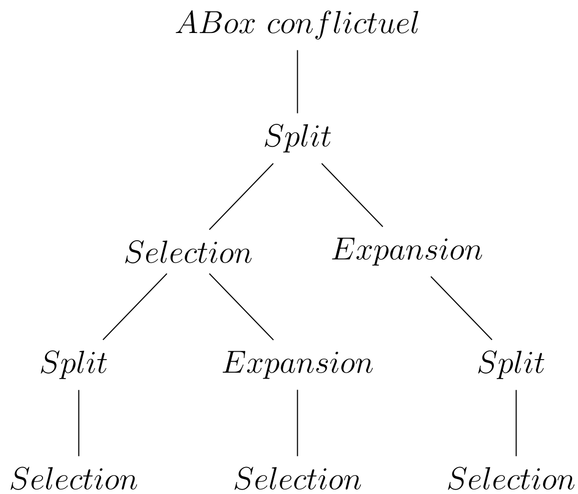
$o_{card}(o_{card}(M)) = o_{card}(M)$

$o_{cl}(O_d(O_{cl}(M)) = o_d(o_{cl}(M))$

$o_{incl}(O_d(O_{incl}(M)) = o_d(o_{incl}(M))$

$_d = \{incl, card, cl\}$

25.4.5 Complex modifieurs



25.4.6 Décision avec plusieurs ABox

Universal Inférence : Si toutes les ABox répondent la réponse R, alors R sera retourné

Existencial Inférence : Si au moins une ABox retourne T, alors R sera retourné

Safe inférence : Faire l'intersection de toutes les ABox puis calculer le résultat

Mogority inférence : Si plus de la moiter des ABox répondent avec le résultat R, alors R sera prise

Base inférence : Si plus de α ABox répondent avec le résultat R, alors R sera prise

La différence entre la Safe inférence et l'Universal inférence:

Soit $TBox = \{A \sqsubseteq \neg B, A \sqsubseteq E, B \sqsubseteq E\}$, $ABox = \{A(a), B(a)\}$
Via la résolution des contraintes on obtient:
$A_1 = \{A(a)\}, A_2 = \{B(a)\}$
avec comme $x = E(a)$

Pour la stratégie $\forall$

$(T, A_1) \models E(a) \rightarrow OUI$

$(T, A_2) \models E(a) \rightarrow OUI$

Conclusion OUI

Pour la stratégie $Safe$

$(T, (A_1 \cap A_2)) \models E(a)$

$\varnothing \models E(a) \rightarrow NON$

Conclusion NON

Chapter 26

Complexité

26.1 Analyse de complexité pour D(M1,Safe)

Une approche naïf non satisfiable serait de:

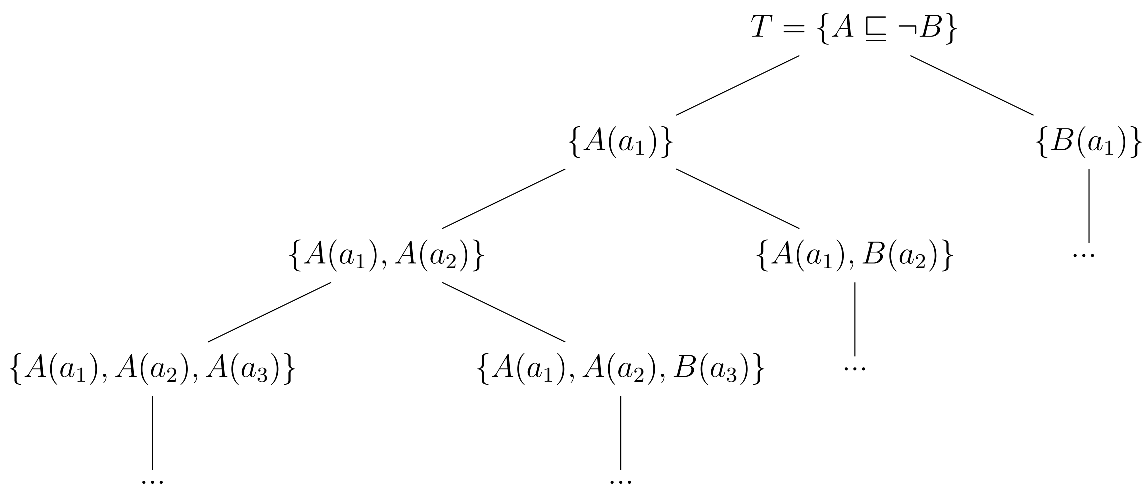
(1) Calculer les $R_1 ... R_n$ après avoir appliqué le $modifiersplitting$

(2) Calculer l'intersection des R_i

Un cas extrême pour résoudre le problème

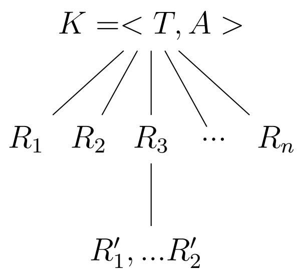
$T \ = \{A \sqsubseteq \neg B\}$

$A \ = \{A(a_1), B(a_1), ...A(a_n), B(a_n)\}$



Complexité $O(2^n)$

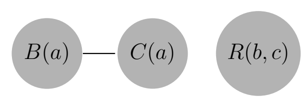
26.2 Analyse de la complexité pour D(M2,Forall)



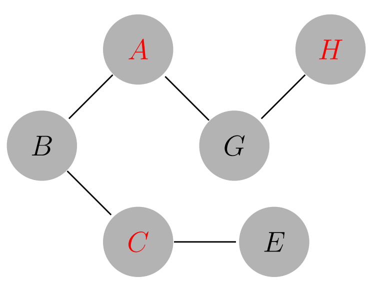
Splitting et Selection selon le cardinal le plus haut:
$R'_1, ...R'_r$

Soit la transformation de ce problème vers un problème dont la complexité est connue, Prenons K-MIS qui est similaire à ce problème de Splitting et Selection:

$$K =< T, A >$$
$$T = \{B \sqsubseteq \neg C\}$$
$$A = \{B(a), C(a), R(b, c)\}$$



Soit le nouveau graph, effectuer la transformation inverse du K-MIS vers DLlite.
Soit K-MIS un problème NP-Complet qui consiste à déterminer le nombre maximum de nœuds tel que ces nœuds une fois colorié ne sont pas adjacent à un autre nœud colorié, K=3 dans l'exemple ci dessous



Concept $= \{A, B, C, E, G, H\}$, Individu $= \{e\}$, Role $= \{\}$

$$TBox = \{H \sqsubseteq \neg G, A \sqsubseteq \neg H, B \sqsubseteq \neg A, C \sqsubseteq \neg B, E \sqsubseteq \neg C\}$$

$$ABox = \{A(e), B(e), C(e), E(e), G(e), H(e)\}$$

$$Cln(T) = T$$

Part VII

Théories de la Décision

Chapter 27

Théorie de la décision

La problématique est celle d'un agent qui doit prendre la meilleure décision, parmi un ensemble de choix possibles (actes), qui selon l'état du monde, mèneront à des conséquences (résultats/outcomes) différentes.

Soient A = $\{a_1, ..., a_k\}$ les actes possibles
Soient S = $\{s_1, ..., s_m\}$ les états du mondes
Soient C = $\{c_1, ..., c_n\}$ les conséquences
On n'a donc A x $S \rightarrow C$
Le but est de trouver le a_i qui permet d'obtenir les meilleurs conséquences c_j.

On distingue 3 type de théories de la décision:

Décisions sous certitude il n'y a qu'une état du monde.

Décision dans l'incertain il y a plusieurs états du monde.

Décision dans le risque il y a plusieurs états du monde, dont on connait la probabilité.

train	voiture
10	20

Décision sous certitude

	train	voiture
Normal	10	20
Bouchon	10	0

Décision dans incertitude

		train	voiture
Normal	80%	10	20
Bouchon	20%	10	0

Décision dans le risque

27.1 Décision dans l'incertain

27.1.1 Critère de Laplace

Choisir l'acte dont la conséquence moyenne est la meilleure.

$argmax_{a \in A} \sum_{s \in S} \frac{1}{|A|} * u(a(s))$

27.1.2 Critère de Wald

Choisir l'acte dont la pire conséquence est la meilleure (maximum).

$argmax_{a \in A}\ min_{s \in S}\ u(a(s))$

27.1.3 Critère d'Hurwicz

Meilleur compromis entre meilleure et pire conséquences ($a \in [0, 1]$)

$argmax_{a \in A}\ (\alpha * min_{s \in S}\ u(a(s))) + ((1 - \alpha) * u(a(s)))$

27.1.4 Min Max Regret

Choisir l'acte dont on regrettera le moins les conséquences

$argmax_{a \in A}\ max_{s \in S}\ R(a, s)$ avec $R(a, s) = max_{b \in A} u(b(s)) - u(a(s))$

27.1.5 Example

Actes	Etats	du	monde				
	s_1	s_2	s_3	$Laplace$	$Wald$	$Hurwicz_{.5}$	$MinMaxRegret$
a_1	55_{21}	10_{12}	13_{13}	26	10	34	21
a_2	40_{36}	19_3	22_4	27	19	31	36
a_3	30_{48}	20_0	26_0	26	22	28	46
a_4	76_0	2_{20}	0_{26}	26	0	38	26

27.1.6 Différents cadres d'incertitude

Décision dans le risque (incertitude probabiliste) : MinMax Regret

Décision dans l'incertain (incertitude qualitative) : Prade

Décision sous incertitude stricte : Wald, Hurwicz

Décision sous ignorance total : Konieczny, Marquis

Chapter 28

Théorie des jeux

28.1 Jeux sous forme stratégique

Un jeu sous forme stratégique est défini par:

un ensemble $N = \{1, ..., n\}$ de joueurs

pour chaque joueurs i un ensemble de stratégies $S_i = \{s_1, ..., S_{n_i}\}$

pour chaque joueurs i une fonction de valuation u_i : S_1 x ... x $S_n \rightarrow R_i$ qui pour un ensemble de stratégies associe les gains du joueur i

On notera:

s un profil de stratégies $\{s_1, ..., s_n\}$ où $\forall i s_i \in S_i$

s_{-i} le profil s des stratégies autre que celle du joueurs i

S l'espace des stratégies

28.1.1 utilité

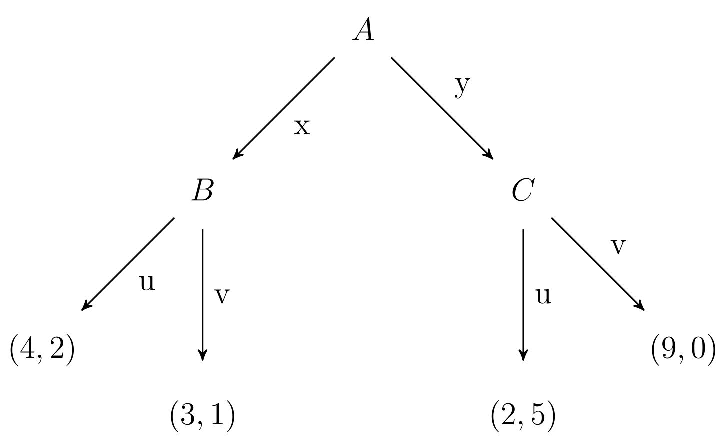
On appelle utilité la mesure de chaque situation aux yeux de l'agent, celle ci n'est si une mesure du gain matériel, monétaire, etc, mais une mesure subjective du contentement de l'agent.

28.1.2 jeux sous forme extensive et stratégique

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

Forme stratégique

x et y étant les choix représenté par le joueur 1.
u et v étant les choix représenté par le joueur 2.
Si le joueur 1 choisis x et le joueur 2 v alors le joueur 1 gagnera 3 et le joueur 2 gagnera 1.



Forme Extensive

28.1.3 Élimination de stratégies dominées

Une stratégie s_i est (strictement) dominé pour le joueur i si il existe une stratégie s_i' telle que pour tout profil s_{-i}

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Une stratégie faiblement dominé est sous la forme:

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

	u	v
x	4,2	$3,1$
y	2,5	$9,0$

	u	v
x	4,2	$3,1$
y	$2,5$	$9,0$

Le profil (4,2) est sélectionné donc Joueur 1 gagnera 4 et Joueur 2 gagnera 2.

28.1.4 Équilibre de Nash

Un jeu peut avoir plusieurs ou aucun équilibre de Nash.

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	$1,1$	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Deux équilibre de Nash sont interchangeable si la permutation des termes gauche garde l'équilibre de Nash actif.

Voici un cas particulier:

	u	v
x	2,1	0,0
y	0,0	1,2

Deux équilibre de Nash sont présent $(2,1)$ et $(1,2)$. Comme il y a une hésitation entre les deux cas, alors l'utilisation du flip coin est envisageable:

$$u_1(<(x,1/2),(y,1/2)>) = 1/2 * 2 + 1/2 * 0 = 1$$

$$u_1(<(u,1/2),(v,1/2)>) = 1/2 * 0 + 1/2 * 1 = 1/2$$

28.1.5 Critère de Pareto

Soit la table:

	u	v
x	4,4	3,1
y	2,3	7,5

Pour u, x est meilleur que y

Pour v, y est meilleur que x

Pour x, u est meilleur que v

Pour y, v est meilleur que u

Un profil s domine un profil s' dans le sens de Pareto si pour tout les joueurs s est au moins meilleur que s' et que pour un joueur s est meilleur strictement que s'.
Un profil s domine strictement un profil s' dans le sens de Pareto si pour tout les joueurs s est meilleur que s'.

	u	v
x	4,4	3, 1
y	2, 3	7,5

(x,u) 4,4

(y,v) 7,5 est meilleur

28.1.6 Niveau de sécurité

Pour un tableau:

	u	v
x	9,9	0,8
y	8,0	7,7

Dans le cas d'un jeu avec des joueurs non rationnel, l'un des deux joueur peut duper l'autre et ainsi gagner 8 et faire gagner 0 à l'autre joueur.

On défini le niveau de sécurité d'une stratégie s_i pour le joueur i comme le gain minimum que peut apporter cette stratégie quel que soit le choix des autres joueurs.
On défini le niveau de sécurité d'un joueur i comme le niveau de sécurité maximal des stratégies de i.

Le meilleur choix serait de prendre (y,v) pour assurer un minimum de gain pour chaque personnes.

28.1.7 autres Stratégies

Jusque la nous avons utilisé que les stratégies pures, c'est à dire les option qui se présente au joueurs.
Une stratégies mixte est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.
Une stratégie local du joueur i est une distribution de probabilités p_i définit sur l'ensemble des stratégies pure du joueurs i.
Une stratégie comportemental du joueur i est un vecteur de stratégies locales du joueur i.

28.1.8 Équilibre de Nash en stratèges mixtes

Soit le problème:

		y	1-y
		f	c
x	f	2,1	0,0
1-x	c	0,0	1,2

Soit y, la probabilité avec laquelle le joueur 2 jour f, quelle est la meilleure réponse du joueur 1?:

$$u_1(<(f,y),(c,1-y)>) = y*2+(1-y)*0 = 2y$$

$$u_1(<(f,y),(c,1-y)>) = y*0+(1-y)*1 = 1-y$$

Donc:

Si $2y > 1-y$ avec $(y > 1/3)$, la meilleur réponse du joueur 1 est de jouer f

Si $2y < 1-y$ avec $(y < 1/3)$, la meilleur réponse du joueur 1 est de jouer c

Si $2y = 1-y$ avec $(y = 1/3)$, le joueur 1 peut jouer l'un ou l'autre.

Soit x, la probabilité avec laquelle le joueur 1 jour f, quelle est la meilleure réponse du joueur 2?:

$$u_1(<(f,x),(c,1-x)>) = x*1+(1-x)*0 = x$$

$$u_1(<(f,x),(c,1-x)>) = x*1+(1-x)*0 = 2(1-x)$$

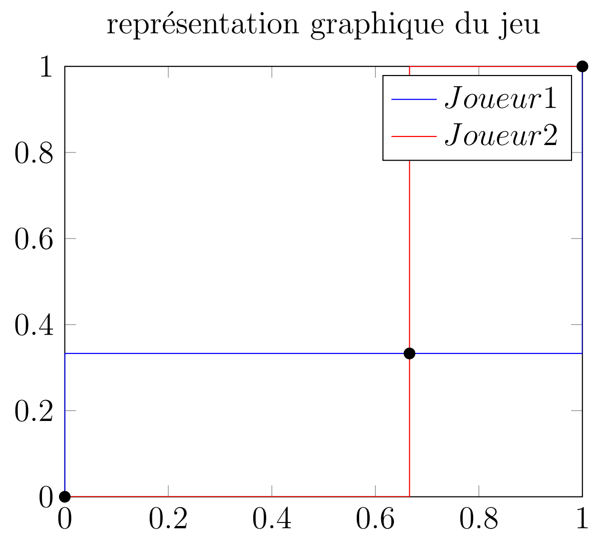
Donc:

Si $x > 2(1-x)$ avec $(x > 2/3)$, la meilleur réponse du joueur 2 est de jouer f

Si $x < 2(1-x)$ avec $(x < 2/3)$, la meilleur réponse du joueur 2 est de jouer c

Si $x = 2(1-x)$ avec $(x = 2/3)$, le joueur 2 peut jouer l'un ou l'autre.

28.1.9 Représentation graphique du jeu



28.1.10 Coopération

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

Que se passe t'il si les 2 joueurs peuvent communiquer avant de jouer?:

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Lorsque tout les joueurs peuvent observer un même événement aléatoire, ils peuvent alors s'accorder sur des équilibres corrélés.
Selon un accord prit via un flip coin, ou via une parution d'un évènement, si les deux joueurs se mette d'accord sur le fait de tirer f ou c, mais le joueur désavantagé peut ne pas jouer le choix prit, mais il s'expose à ne rien gagner.

28.1.11 Itération le dilemme des prisonniers

Deux personne sont arrêtées ensemble en possession d'armes à feu sont soupçonnés d'un délit fait en commun, Les policiers les séparent et disent à chacun:

> Si l'un des deux avoue et que l'autre ne dit rien, le premier est libéré et le second emprisonné 5 ans.
>
> Si les deux avouent, les deux iront 4 ans en prison.
>
> Si les deux ne disent rien alors ils seront emprisonné 2 ans.

Donnant le tableau suivant:

	P2 avoue	P2 rien
P1 avoue	4,4	0,5
P1 rien	5,0	2,2

Mais les valeurs inscrit ne représente pas le gain, donc il faut inverser les valeurs par rapport au maximum (5):

	P2 avoue	P2 rien
P1 avoue	1,1	5,0
P1 rien	0,5	3,3

Si le joueur 1 avoue et le joueur 2 ne dit rien alors le joueur 1 gagnera 5 ans et le joueur 2 gagner 0 ans (car il sera en prison).

28.1.12 DIP Itérations

Les joueurs se rencontrent plusieurs fois

A chaque itération les joueurs ont connaissances des coups précédents

ils ne connaissent pas les terme du jeu

le gain d'un joueur est le cumul des gains de chaque rencontre

Pour favoriser le coopération on ajoute la contrainte

$$X + T < 2R$$

	Coopérer	non coopérer
Coopérer	$R = 3$ récompense pour coopération mutuelle	$S = 0$ salaire de la dupe
non coopérer	$T = 5$ tentation à trahir	$P = 1$ punition pour la trahison mutuelle

28.1.13 Les Stratégies

Dans une rencontre les joueurs peuvent avoir plusieurs comportements diffèrent, appliquons les sur le problème DIP:

gentille le joueur sera gentil quitte à perdre

méchante le joueur ne laisse rien passé, tout doit être acquérir

par pattern suivre la même séquence de choix à l'infini

rancunière donnant donnant jusqu'à l'erreur de l'adversaire

lunatique aléatoirement

majoritaire gentille joue ce que l'autre joue

majoritaire méchante trahir

donnant donnant joue le coup précédent de l'autre

Quand on fait jouer ses stratégies dans le cadre d'un tournois on obtient les scores suivant:

place	stratégie	points
1	donnant donnant	42
2	majoritaire gentille	19
3	rancunière	4
4	lunatique	0

le top 3 n'est pas compliqué à déduire, se sont tous des stratégies adaptatif (qui s'adapte à l'adversaire).
le top 2 a un pouvoir pour pardonner l'adversaire donc un jugement moins punitif.
le top 1 est simple, il incarne la simplicité.
la gentillesse prime aussi.

28.2 Jeux répété

Soit un jeu $G = \{S, \{u_i\}i = 1, ...n\}$ où S est l'ensemble fini des profils stratégie et u_i est la fonction d'utilité du joueur i.
On note (G, T) le jeu répété obtenu en jouant T fois le jeu de base G, (G, ∞) correspond à un nombre infini de tour.

On peut également distinguer les jeux répété un nombre fini, mais indéfini de fois : à chaque tour, il y a une probabilité $1 - q$ que le jeu s'arrête.
Facteur d'actualisation: Lorsqu'un jeu est répété, il se peut que les gains obtenus à l'itération courante u_t soient plus/moins importants aux yeux de l'agent que les gains l'itération suivante u_{t+1}. Pour modéliser cela on peut utiliser un facteur d'actualisation ϕ:

$$u_t = \phi u_{t+1}$$

Le facteur d'actualisation $\phi = \frac{u_t}{u_{t+1}}$ représente donc l'attrait du joueur pour les gains actuels.

28.2.1 Jeux à deux joueurs à somme nulle

Dans le cas d'un jeu à somme nulle pour chaque case le joueur 1 va gagner la somme indiqué et le joueur 2 va perdre la somme indiqué:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	18	3	0	2
x_2	0	3	8	20
x_3	5	4	5	5
x_4	9	3	0	20

si le joueur 1 prend x_1 et le joueur 2 y_1 alors le joueur 1 gagnera 18 et le joueur 2 perdra 18.

Le joueur 1 tente de maximiser son niveau de sécurité:

$$v_x = max_i(min_j u(x_i, y_j))$$

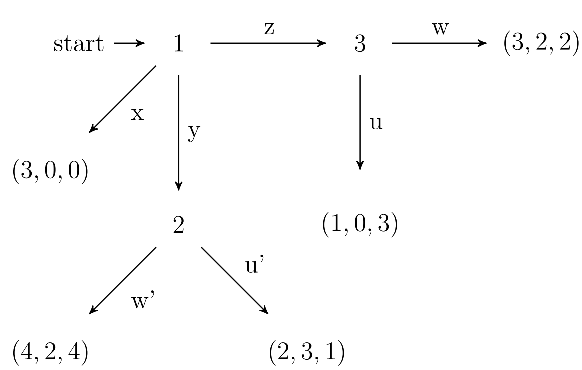
Le joueur 2 tente de minimiser le niveau de sécurité du joueur 1:

$$v_y = min_j(max_i u(x_i, y_j))$$

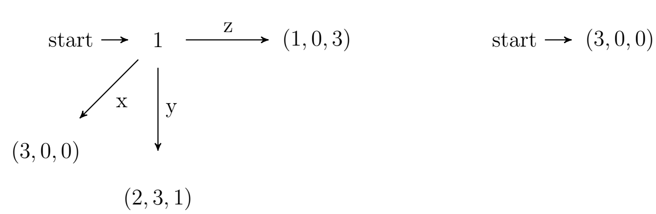
28.2.2 Jeu sous forme extensive

Un jeu se déroulant de la racine jusqu'à une feuille, le noeud indique quel joueur doit jouer, donc un ordre de passage est explicite.

Soit le jeu suivant sous forme d'arbre:



Via la récurrence à rebours, On remonte les noeuds optimaux de l'arbre vers la racine:

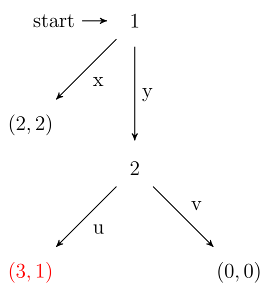


28.2.3 sous jeu

Un sous jeu d'un jeu sous forme extensive est un jeu composé d'un noeud (qui est un ensemble d'information singleton) de tous les noeuds successeurs de ce noeud, de tout les arcs reliant ces noeuds, et des unités associées à tout les noueds terminaux successeurs.
Le grand arbre ci dessus contient 3 sous jeux ayant comme racine (1,2,3).

28.2.4 Menaces non crédibles

Voici le même jeu sous forme de tableau et sous forme d'arbre



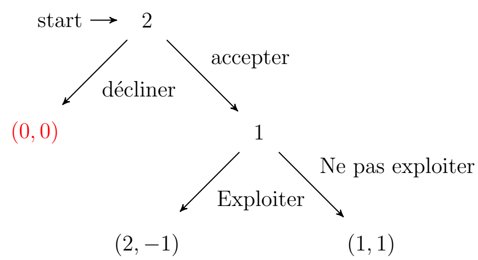
	u	v
x	(2,2)	(2, 2)
y	(3, 1)	(0,0)

L'équilibre de Nash de l'arbre indique que la meilleur stratégie (d'un point de vue rationnel) est $(3, 1)$ et via le tableau on obtient $\{(3, 1), (2, 2)\}$.
l'équilibre de Nash (xv) n'est pas crédible car il repose sur la menace non-crédible du joueur 2 de joueur v, autrement dit, dans le premier tour, si le joueur 1 joue x, le joueur 2 n'a aucun choix à faire, hors dans le tableau le joueur 2 peut proposer un choix.

Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un équilibre parfait en sous jeu si toute restriction du profil de stratégies à un sous jeu est un équilibre de Nash pour ce sous jeu.
Pour les jeux à informations parfaites, la notion d'équilibre parfait en sous jeu coïncide avec la notion de récurrence à rebours.

28.2.5 Promesse non crédible

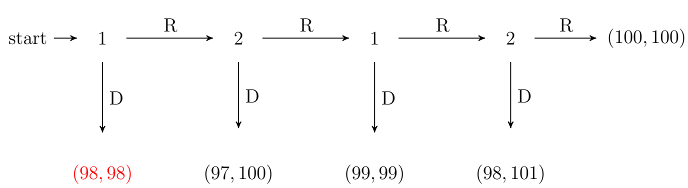
Soit un contrat pour travailler en entreprise, le joueur 2 étant vous et le joueur 1 étant l'entreprise:



Dans le cas d'un contrat non répété il est mieux de choisir $(0, 0)$, mais dans le cas d'un jeu répété si vous êtes le premier candidat et que vous acceptez le poste mais que vous vous faite exploiter, alors vous aller altérer les nouveaux candidats pour qu'ils choisis l'option de ne pas aller travailler la bas, donc l'entreprise ne devrait pas vous exploiter pour son bien.

28.2.6 Limite de la récurrence à rebours

Soit le jeu suivant, vous êtes le joueur 1:



Le calcule de l'équilibre de Nash nous donne $(98, 98)$ mais cette équilibre ne marche que si le joueur 2 est un robot / rationnel, si on indique que les somme sont des Millions d'euro, les choix seront bien plus différent, si les deux joueurs sont altruiste alors les deux vont gagner $(100, 100)$ si l'un des joueur est mauvais alors celui ci va aller le plus haut possible et choisir D juste en guise de dernier choix.

28.3 Jeux coopératifs à 2 joueurs

Chapter 29

Décision de groupe et théorie du vote

Soit un ensemble de candidats $X = \{a, b, c....\}$, un sous ensemble de X est noté un agenda.
Soit une relation d'ordre $<,>$ (réflexif, transitif, total) permettent de trier les éléments de X selon des critères.
Un ensemble d'individu est appelé un profil, chaque individu a le même poids.

On n'aura deux façon de procéder:

Déterminer la relation de préférence (l'ordre des candidats).

Déterminer le gagnant d'un vote. (faisable aussi via la première façon).

29.1 Vote entre 2 candidats

$A > B$ si le nombre d'individu qui préfèrent A et plus grande que le nombre d'individu qui préfèrent B.

Quatre propriété:

Domaine universel la méthode de vote donne un résultat quel que soit le profil.

Anonymat La méthode de vote traite tout les votant de la même manière.

Neutralité La méthode de vote traite tous les candidats de la me manière.

Monotonie Si un candidat est élu pour un profil donné, il sera forcément élu pour un profil modifié où ce candidat reçoit plus de vote.

29.2 Gagnant de Condorcet

Un gagnant de Condorcet A et un profil N si pour tout autre candidat $B \in$ N, le candidat A est majoritairement préféré à B.

$a >_1 b >_1 c$	Pour X = {a,b} a = 2, b = 1
$a >_2 c >_2 b$	Pour X = {a,c} a = 2, c = 1
$c >_3 b >_3 a$	a est un gagnant de Condorcet

Pour tout les profil, il existe qu'un gagnant, mais il peut en avoir aucun:

$a >_1 b >_1 c$	Pour X = {a,b} a = 2, b = 1
$b >_2 c >_2 a$	Pour X = {a,c} a = 1, c = 2
$c >_3 a >_3 b$	Pour X = {b,c} b = 2, c = 1

Une méthode de choisir le gagnant de Condorcet quand il existe est appelée Condorcet cohérente.

29.3 Scrutin majoritaire simple

Adapter le vote entre 2 candidats, soit 21 votants:

10: $a >_1 b >_1 c$

6: $b >_2 c >_2 a$

5: $c >_3 b >_3 a$

Résultat: a 10, b 6, c 5

Le candidat a est élu

Mais le problème et que plus de vote sont en faveur de b que de a, on parle de perdant de Condorcet (ou de vote pour le pire candidat).

29.4 Scrutin majoritaire à deux tour

Hors majorité absolu, le vote se fera via un scrutin à 2 tours:

10: $a >_1 b >_1 c$

6: $b >_2 c >_2 a$

5: $c >_3 b >_3 a$

Premier tour: a 10, b 6, c 5, le candidat c est éliminé

Second tour : a 10, b 11

Le candidat b est élu

Le scrutin majoritaire à deux tours est manipulable, il peut être profitable à un individu de mentir sur ses préférences.
Le scrutin majoritaire à deux tours est non-monotone et n'incite pas à la participation.
Le scrutin majoritaire à deux tours n'est pas séparable. l'union de ce même vote via deux circonscriptions différente ayant comme élu le même candidat ne garantit pas que ce même candidat sera élu lors de la fusion des circonscriptions.
Le scrutin majoritaire à deux tours permet la dictature de la majorité, si dans deux circonscriptions:

$51 : a > b > c ... > z$

$49 : z > b > c ... > a$

Le candidat a gagne via utilisation de la règle de dictature alors que le candidat b a 100% de vote sur le second choix de préférence.

29.5 Méthode de vote non rangées

Soit m candidats, Une méthode de vote non rangé (nonranking voting rule) est un sous ensemble non vide de $\{1, 2..., m-1\}$ représentent le nombre de candidats pour lesquels un individu peut voter.
Le candidat ayant le plus de voix est élus.

$\{1\}$ scrutin majoritaire simple

$\{2\}$ Chaque individu doit voter pour 2 candidats

$\{1, 2\}$ Chaque individu peut voter pour 1 ou 2 candidats

$\{m-1\}$ Chaque individu doit voter contre un candidat

$\{1, m-1\}$ Chaque individu doit voter pour un candidat ou contre un candidat

$\{1, 2, m-1\}$ Chaque individu doit voter pour autant de candidats qu'il veut. (vote par approbation)

C'est une méthode de vote la moins manipulable.

29.6 Méthode par scorage

Soit m candidats, une méthode de vote par scorage est défini par:

Soit une séquence non décroissent d'entiers: $s_0 \leq s_1 \leq ...s_{m-1}$ tel que $s_0 < s_{m-1}$.

Chaque individu doit fournir son ordre strict des candidats

Pour chaque individu on attribut s_0 au dernier candidat, s_1 à l'avant dernier ....

Le candidat ayant reçu le plus de points est élu.

La méthode de vote par scorage respecte les propriétés de Monotonie, Séparabilité, Continuité, Participation.
Le méthode de vote pas scorage n'est pas Condorcet cohérente.

29.7 Méthode de Condorcet cohérentes

29.7.1 Règle de Copeland

Le meilleur Candidat est celui qui bat tout les autres candidats:
Pour chaque candidats a lui attribuer la valeur +1 si un candidat b ($b \neq a$) est préféré à b -1 sinon.
Le candidat élu aura le plus le plus haut score de Copeland.

5: $a > b > c > d$

4: $b > c > d > a$

3: $d > c > a > b$

$$\begin{array}{ll}
(a,b) = (+1,-1) & (b,c) = (+1,-1) \\
(a,c) = (-1,+1) & (b,d) = (+1,-1) \\
(a,d) = (-1,+1) & (c,d) = (+1,-1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccccc|l}
cop(a) = & +1 & -1 & -1 & & & & =-1 \\
cop(b) = & -1 & & & +1 & +1 & & =+1 \\
cop(c) = & & +1 & & -1 & & +1 & =+1 \\
cop(d) = & & & +1 & & -1 & -1 & =-1
\end{array}$$

Les candidats b et c sont élus.

29.7.2 Règle de Kramer Simpson

Le meilleur candidat est celui qui engendra le moins de regret chez les votants: Pour chaque candidat $a \neq b$ calculer $N(a, b)$ le nombre d'individus préférant a à b.
Le score de Simpson est le minimum des $N(a, b)$, le candidat élu est celui qui a le plus de haut score de Simpson.

5: $a > b > c > d$

4: $b > c > d > a$

3: $d > c > a > b$

$(a, b) = (8, 4)$ $(b, c) = (9, 3)$
$(a, c) = (5, 7)$ $(b, d) = (9, 3)$
$(a, d) = (5, 7)$ $(c, d) = (9, 3)$

$$\begin{array}{r|cccccc|l} cop(a) = & 8 & 5 & 5 & & & & =5 \\ cop(b) = & 4 & & & 9 & 9 & & =4 \\ cop(c) = & & 7 & & 3 & & 9 & =3 \\ cop(d) = & & & 7 & & 3 & 3 & =3 \end{array}$$

Le candidat a est élu.

29.7.3 Règle du Tile break

En cas d'égalité, une règle annexe peut s'appliquer pour départager les élus. Lors des présidentielle on élit le candidat le plus vieux.

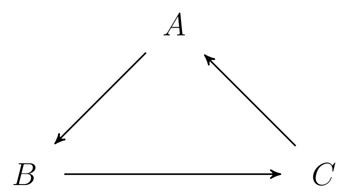
29.8 Graphe de majorité

La représentation graphique n'est pas transitif:

5: $a > b > c > d$

4: $b > c > d > a$

3: $d > c > a > b$



Un gagnant de Condorcet est un candidat qui a un arc vers tous les autres candidats.

Copeland : Le meilleur candidat est celui qui requiert le moins de suppression d'autre candidats pour devenir un gagnant de Condorcet.

Young : Le meilleur candidat est celui qui requiert le moins de suppression d'individus pour devenir un gagnant de Condorcet.

Dodgson : Le meilleur candidat est celui qui demande le poins de changement dans les préférences des individus.

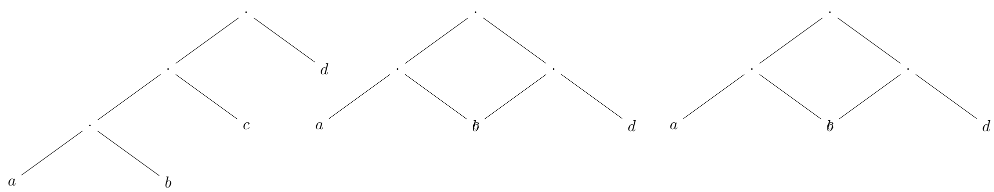
Kramer-Simpson : Le meilleur candidat et celui qui assure le moins de regret.

Kemeny : Le meilleur candidat et celui qui est rangé le plus haut dans la hiérarchie, une hiérarchie est construit via la relation de préférence $>$ la plus proche du profil.

Les règles de Copeland et de Kramer-Simpson sont monotones.
Aucune règles Condorcet cohérente ne peut satisfaire la séparabilité.
Aucune règles Condorcet cohérente ne peut satisfaire Participation.

29.9 Vote par comparaison successives

Le résultat dépend de l'ordre des comparaisons:



29.10 Vote simple transférable: méthode de Coombs

Chaque individu indique son ordre de préférence $>_i$. Pour n candidats, on fait $n-1$ tours (à moins d'avoir la majorité strict sur un candidat), à chaque tours on élimine le candidat qui a le poins de points. Si un candidat est éliminé, alors il sera supprimé de toutes les listes de préférences des individus.

Part VIII

Apprentissage

Chapter 30

Approche d'apprentissage par la logique

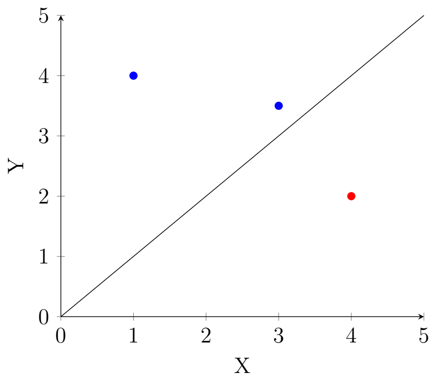
Une approche simple concernant l'apprentissage de problèmes dont le domaine de sortie est boolean serait de passer par la logique classique pour pouvoir simplifier la compréhension du problème.

30.1 Espace de Version

Pour un problème suivant:

A	B	C	D	accaptable?
1	1	1	0	oui
1	1	0	1	oui
0	1	1	1	non

D'où il suffirait d'une fonction donnant dans le domaine Boolean, associer un algorithme de classification simple:



Ayant comme points de couleurs *Rouge* les points donnant la valeur de vérité False et les points de couleurs *Blue* les point donnant la valeur de vérité True.
Mais ce ne serait pas donner un gros mode de résolution à un problème qui peut être simplifié?

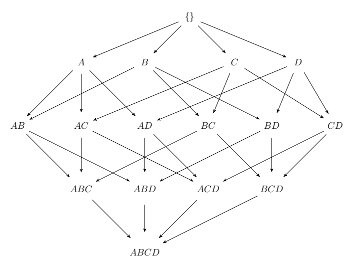
Pour les cas suivants:

- Faciliter la compréhension du problème
- Comprendre pourquoi une décision donné pour une entrée

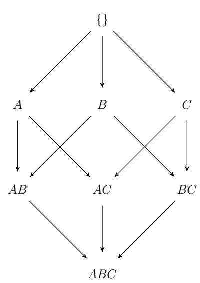
30.1.1 convergence des données

Dans le tableau d'acceptation on peut transformé la règle 3 en son dual via la Lois de De Morgan:

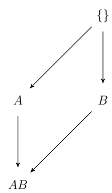
Et via un treillis de donnée pour chaque entré positif on peut compter le nombre d'occurrence de motif en faveur de l'acceptation de la ligne:



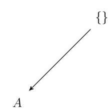
A	B	C	D	accaptable?
1	1	1	0	oui
1	1	0	1	oui
1	0	0	0	oui



A	B	C	D	accaptable?
1	1	1	0	oui
1	1	0	1	oui
1	0	0	0	oui



A	B	C	D	accaptable?
1	1	1	0	oui
1	1	0	1	oui
1	0	0	0	oui



A	B	C	D	accaptable?
1	1	1	0	oui
1	1	0	1	oui
1	0	0	0	oui

Par itération et réduction du treillis on sait que A et un attribut très discriminant, qui fait revenir le problème à seulement la valeur de A.

Chapter 31

Apprentissage statistique

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des fonctions $h \in H$ à qui pour une liste X à d dimension de domaine réelle associe un label y dans le domaine $[-1, +1]$. Un $x \in X$ peut être une couleur, un réelle, une chose négatif ou encore une mesure quelconque.

31.1 Classification binaire réalisable

Chaque entrée $x \in X$ est tirée aléatoirement et indépendamment selon une distribution de probabilité d qui est fixée mais inconnue de l'apprenant. Chaque sortie $y \in Y$ est calculé via la fonction cible $h* \in H$ qui est inconnue de l'apprenant.

31.1.1 Erreur de généralisation et d'entrainement

La performance d'une hypothèse $h \in H$ est calculé par le nombre d'erreurs que la fonction peut commettre en probabilité selon d:

$l_d(h) = P_{x\ d}[h(x) \neq h * (x)]$

En pratique, l'apprenant n'a accès qu'a une petite partit nommé $S \in X$ (qui peut contenir des doublons) dont les éléments dont générés aléatoirement via d, Le risque empirique de h par rapport à S est donné par :

$l_s(h) = \frac{1}{|S|}|\{x \in S : h(x) \neq h * (x)\}|$

Le nombre d'erreur moyen que fait h sur S

31.1.2 Processus d'apprentissage

Le processus d'apprentissage n'est pas si différent que dans la première partie du Memo:

Soit une distribution d, chaque requêtes vers d va choisir un échantillons aléatoirement pour crée un ensemble S qui va servir à faire apprendre h lors de la phase d'apprentissage, tester lors de la phase de teste et retenir les erreur vies les fonction d'analyse.

31.1.3 Incertitude de l'apprentissage

Il existe deux mesures de l'incertitude en apprentissage statistique

Paramètre de confiance qui donne la qualité de l'échantillonnage

Paramètre d'erreur qui donne un indice sur les bonnes prédictions futures

31.1.4 Modèle PAC réalisable

Une classe d(hypothèses H est dite PCA (probability approximately correct) s'il existe une fonction $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1,2.....\}$ telle que pour toute paire (ϕ(confiance),ψ(erreur)) pour toute distribution d sur X et toute fonction cible $h* \in H$:

> Après avoir observé un échantillon S de X tiré aléatoirement selon d, et de taille au moins $m(\phi, \psi)$.
>
> L'apprenant retourne une hypothèse $h \in H$, telle qu'avec une probabilité au moins $1 - \phi$, l'erreur de génération $l_d(h)$ est d'au plus ψ.

31.2 Classes d'hypothèses finies

Supposons $X = [0,1]^d$

> Toutes fonction $h : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ est appelée fonction booléenne.
>
> Une classe d'hypothèses booléennes est un sous ensemble H de $[[0,1]^d \rightarrow [0,1]]$.

31.2.1 Minimisation des erreurs empirique

Le principe est de trouver dans H l'hypothèse qui fait le moins d'erreurs sur l'échantillon S:

$$h_S \in argminL_S(h), h \in H$$

31.2.2 Théorème de PAC des classes finies

Toutes classe d'hypothèse H finie est PAC-apprenable avec une complexité d'échantillonnage

$$m(\phi, \psi) \leq \frac{ln(|H|/\phi)}{\psi}$$

31.3 Classification binaire agnostique

31.3.1 Régression agnostique

31.3.2 Apprentissage agnostique

31.3.3 Principe de minimisation de risque empirique

31.4 VC Dimension

31.4.1 Fonctions linéaires

31.4.2 Fonctions de croissance et VC-Dimension

31.4.3 Théorème fondamental de l'apprentissage statistique

31.4.4 VC-Dimensions Utiles

Chapter 32

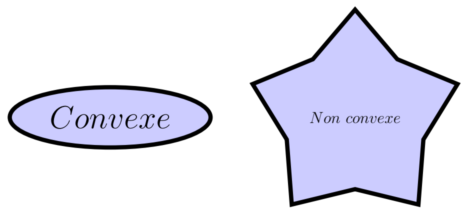
Apprentissage Online

L'apprentissage online est un jeu à somme nulle répétitif à deux joueur (théorème minmax ou équilibre de Nash), les joueurs sont l'environnement et le joueur.
L'apprenant reçoit une observation de l'environnement et donne une prédiction, et l'environnement va donner la vérification sur la prédiction.

32.1 Analyse convexe

32.1.1 Combinaison convexe

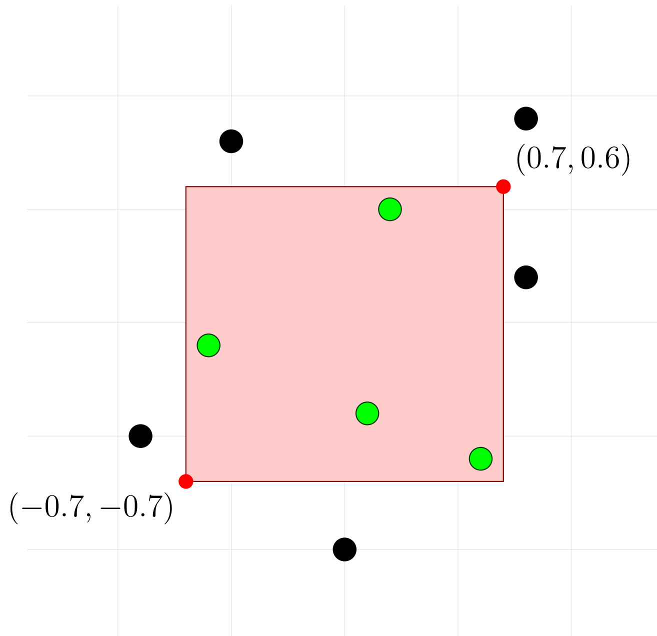
Une forme convexe est une forme pour qui n'importe quel droite dont les 2 points font partie de la forme est dans la forme.



32.1.2 Enveloppe convexe

L'enveloppe convexe d'une forme est la bordure

Si un espace d'application est convexe alors le problème est polynomial, sinon le problème est NP-complet.



Dans cette figure on calcule l'enveloppe en essayant de capturer tout les points vert, un carré de coordonné $(-0.7, -0.7)(0.7, 0.6)$ peut largement faire le boulot et résoudre le problème de classification.
Le calcule est polynomial (enfin même inférieur) car le calcul de la classification d'un point se fait en un 4 instructions simple:

$$classification = lambda\ x, y : -0.7 < x < 0.7\ and\ -0.7 < y < 0.6$$

Ce raisonnement est valide car il n'y a aucun point noir dans le rectangle rouge.

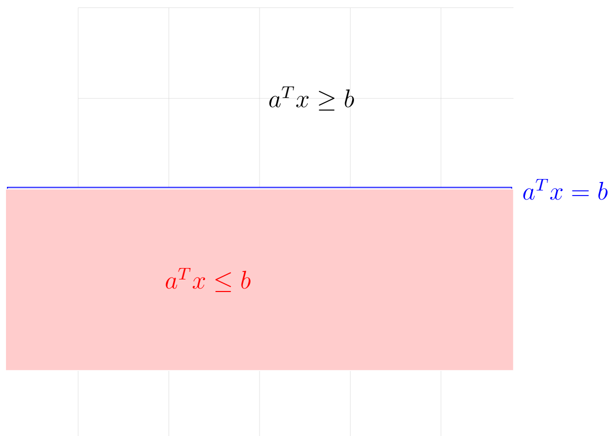
32.1.3 Theoreme de la séparation des hyperplan

Un hyperplan est un ensemble de points sous la forme (représenté en blue):

$$H = \{x|a^T x = b\}, a \neq 0 \; and \; b \in R$$

Un hyperespace est un ensemble de points sous le forme (représenté en rouge):

$$H = \{x|a^T x \leq b\}, a \neq 0 \; and \; b \in R$$

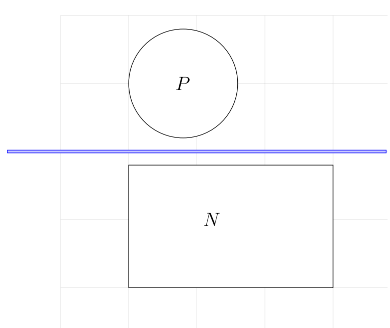


Soit P et N deux ensemble de points connexe tel qu'il n'existe aucune intersection, alors il existe une a ($\neq 0$) et un b tel que:

$$a^T x < b \forall x \in P \text{ and}$$

$$a^T x \geq b \forall x \in N$$

L'ensemble des $\{x|a^T x = b\}$ est l'hyperplan de séparation de P et N (et aussi une fonction linéaire de classification).



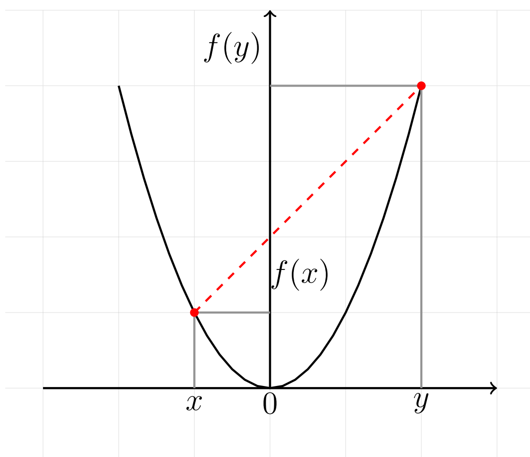
32.1.4 Fonction convexe et normes

Une fonction f est dite convexe si son domaine est un ensemble convexe:

$$\forall x, y \in dom(f), \theta \in [0,1]$$

$$f(\theta x + (1-\theta)x) \leq f(x) + (1-\theta)f(x)$$

Autrement dit (via la droite rouge), tout le domaine de la fonction est à l'intérieur de l'ensemble convexe de la fonction parabole:



e^{px} est convexe dans R $\forall p \in R$

$|x|^p$ est convexe dans R si $p \leq 1$

$xlogx$ est convexe dans R^+ (Entropie)

$||\vec{x}||_p$ Toutes les normes dans R^n sont convexe

La *norme* 1 est donné par la somme des coefficient sous forme absolu, on dit aussi le calcule de la distance de Manhattan:

$$||\vec{x}||_1 = |x_1| + ...|x_n|$$

La *norme* 2 est obtenu par le produit scalaire, elle est aussi utilisé pour calculer la distance entre 2 points dans un espace vectoriel:

$$||\vec{x}||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ...|x_n|^2}$$

La *norme* p est une généralisation de l'espace de fonction, si on prend $p = 2$ on se réduit au produit scalaire:

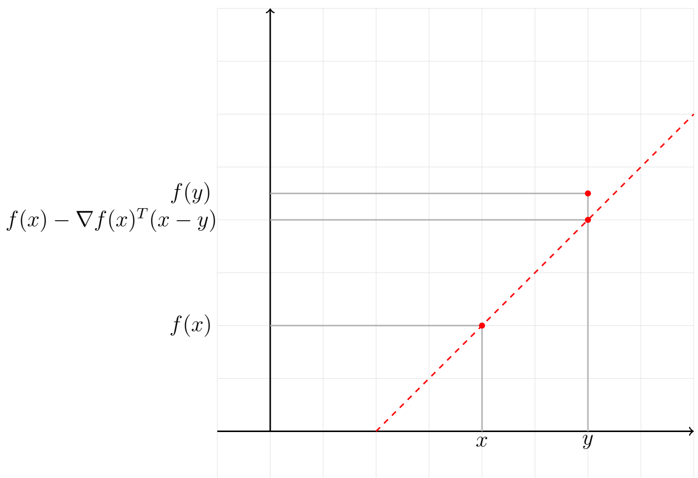
$$||\vec{x}||_p = (|x_1|^p + ...|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

La *norme* ∞:

$$||\vec{x}||_\infty = max(|x_1|, ...|x_n|)$$

32.1.5 Gradient

Soit $f : R^n \rightarrow R$ et x un point intérieur du domaine de f, Si on peut crée une tangente $\frac{\eth f(x)}{\eth x_i}$ (en rouge), on peut dire que f est différentiable (une dérivée existe) passant par x:



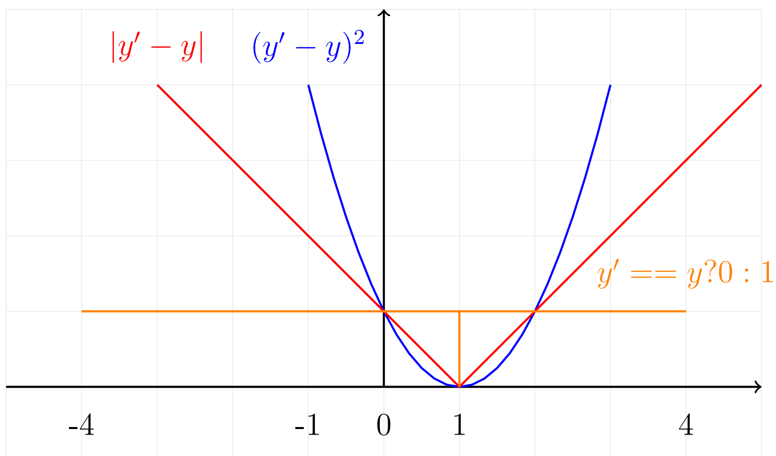
Si $f : R^n \rightarrow R$ est différentiable, alors f est convexe si et seulement si le domaine de f est convexe et $\forall x, y \in f$:

$$f(x) - f(y) \leq \nabla f(x)^T(x-y)$$

32.1.6 Fonction de Perte

Une fonction de perte est une fonction de R x $R \rightarrow R^{+}$ tel que pour un couple (y', y) d'une prédiction et d'une vrai réponse, comparer les deux valeurs et retourne si elle sont égal.

$$f(y', y) \rightarrow y' == y$$



La formule orange nommé $Zero - one$ qui n'est pas convexe et qui est la première au quel on pense:

$$f(y', y) \rightarrow y' == y?0 : 1$$

La formule rouge nommé *absolut* qui est convexe mais trop punitif pour les petites erreurs:

$$f(y', y) \rightarrow |y' - y|$$

La formule bleu nommé *quadratique* qui est convexe et minimise les petits erreurs mais maximise les grosses erreurs:

$$f(y', y) \rightarrow |y' - y|^2$$

32.2 Apprentissage par régression

La régression est un problème de minimisation:

Paramètre : Une fonction de mise à jour f

Initialisation $w_0 = 0$

Pour toutes les entrées :

- Recevoir l'observation x_t
- Faire une prédiction $y' = w_{t-1}^T x_i$
- Calculer la fonction de perte (y', y)
- Re apprendre le modèle en cas de mauvaise prédiction $w_t = f(w_{t-1})$

32.2.1 Gradient Descent

Initialisation $w_0 = 0$

Pour toutes les entrées :

- Recevoir l'observation x_t
- Faire une prédiction $y' = w_{t-1}^T x_i$
- Calculer la fonction de perte $(y'_t, y_t)^2$
- Re apprendre le modèle $w_t = w_{t-1} - \eta(y'_t - y_t)x_t$

32.3 Apprentissage par classification

Part IX

Problème de satisfaction de contraintes CSP

Chapter 33

Introduction et modèles

Une Solution d'un problème CSP est une assignation d'une valeur à chaque variables de P tel que toutes les contraintes de P soit satisfaite.

33.1 exemple simple

Trouver une assignation Minimal et Maximal pour chaque variables de P dans le problème suivant:

vars(P) $= w, x, y, z$

Dom(P)

Dom(w,x) $= \{1, 2, 3\}$

Dom(y,z) $= range(4)$

Contraintes

$w = x$

$x \leq y + 1$

$y > z$

$(x, z) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 3)\}$

Une solution serait:

Minimal $w = x = 1, y = 3, z = 2$

Maximal $w = x = z = 3, y = 4$

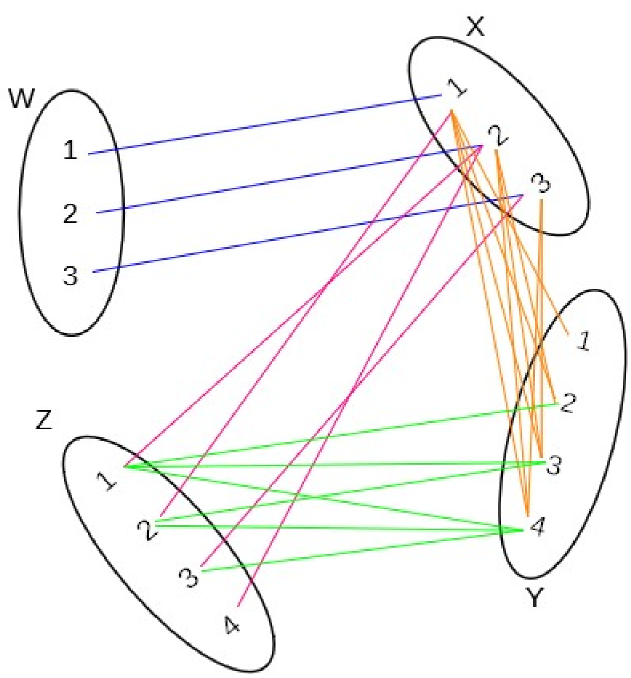
33.1.1 Graphe de contraintes

Chaque variable est un nœud et chaque contraintes est représenté par une arête entre les variables concerné.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & W \\ Z \arrow[rr, dash] & & Y \end{tikzcd}$$

33.1.2 Graphe de compatibilité

Représenter toutes variables avec des ensemble contenant toutes les valeur de leurs domaine puis relier chaque éléments de l'ensemble avec un autre tel que les contraintes ne soit pas violet:



Chapter 34

Filtrage

34.1 Filtrage du domaine via les contraintes

Un problème peut être définit comme une intersection de sous problème à qui un sous problème est représenté par un filtre du domaine des variable et une contrainte qui va réduire le domaine des variable à un étant de consistance peu importe les valeurs des variables.

Arc Consistency (AC) Tous les valeurs inconsistant sont identifié et retiré

Bound Consistency (BC) Les valeurs inconsistant sont les bornes des domaine et ils sont identifié et retiré

34.1.1 Exemple

$$\text{Contrainte } w + 3 = z$$

Avec

$$dom(w) = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$dom(z) = \{4, 5, 8\}$$

Avec un filtre AC:

$$dom(w) = \{1, 5\} \text{ et } dom(z) = \{4, 8\}$$

Avec un filtre BC:

$$dom(w) = \{1, 3, 4, 5\} \text{ et } dom(z) = \{4, 5, 8\}$$

34.2 Notion de Support

Soit c_{xyz} une contrainte tel que c_{xyz} égal:

$$dom(x, y) = \{a, b\} et dom(z) = \{b, c\}$$

On n'a $T = rel(c_{xyz})$ et V = $dom(x)$ x $dom(y)$ x $dom(z)$:

(z, b) a un support mais (z, c) n'en n'a pas

T		
a	a	a
a	b	b
a	c	c
b	a	a
b	b	b
c	a	a
c	c	c

V		
a	a	b
a	a	c
a	b	b
a	b	c
b	a	b
b	a	c
b	b	b
b	b	c

34.3 AC filtre AllDifferent

Soit un sudoku block avec la contrainte $allDifferent(w, x, y, z)$:

3	w	6
x	8	y
1	4	z

x = {5,7,9}

y = {7}

w = {2,5}

z = {2,5}

Dans ce cas, y contient un singleton, donc il sera trivialement résolut en affectant y = 7 et en suppriment tout les occurrences de 7 dans les autres variables:

3	w	6
x	8	7
1	4	z

x = {5,7,9}

w = {2,5}

z = {2,5}

nous pouvons construire le Hall sets suivant: $(w, z)vs(2, 5)$ et donc supprimer toutes les occurrences de 2 et 5 dans les autres variables:

3	w	6
9	8	7
1	4	z

x = {5,9}

w = {2,5}

z = {2,5}

Ce qui nous donne 2 solutions, (w=2,z=5) ou (w=5,z=2)

3	w	6
9	8	7
1	4	z

w = {2,5}

z = {2,5}

Soit un autre exemple plus complexe avec une contrainte $allDifferent(u, v, w, x, y, z)$ et un domaine $\{1, 2, 5, 6, 7, 9\}$:

u = {1,2}

v = {2,9}

w = {1,5,6}

x = {2,6}

y = {6,7,9}

z = {1,9}

On peut crée une Hall sets de taille 3 $(u, v, z) = (1, 2, 9)$ et éliminer toutes les occurrences de 1,2,9 dans les autres variables:

u = {1,2}

v = {2,9}

w = {5,6}

x = {6}

y = {6,7}

z = {1,9}

On peut affecter x à 6 et supprimer toutes les occurrences de 6 dans les autres variables:

u = {1,2}

v = {2,9}

w = 5

x = 6

y = 7

z = {1,9}

On obtient donc la tableau suivant qui pour n'importe quelle valeurs de u,v,w,x,y,z donne:

u	v	w	x	y	z
1	2	5	6	7	1
2	9				9

34.4 AC filtre Cardinalité

Une contrainte de cardinalité note $cardinality(X, Y, L, U)$ qui a X est l'ensemble des variables, Y le domaine des variables de X, (L_i, U_i) le range d'occurrences de la variable Y_i dans tout le modèle.
Si $(L_i = 1, U_i = 3)$ alors la variable Y_i ne pourra être présent de 1 à 3 fois maximum, si $(L_i = 2, U_i = 2)$ alors la variable Y_i devra être présent 2 fois.

Prenons:

X les agents {Peter,Paul,Mary,John,Bob,Mike,Julia}

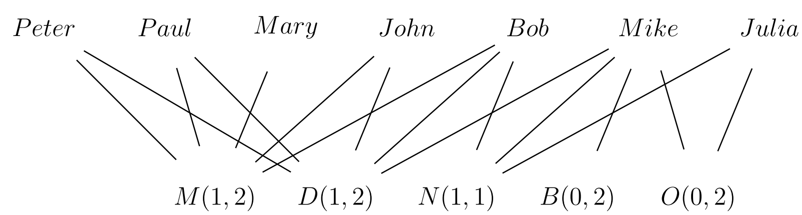
Y les activités {Morning (M),Day (D),Night (N),Backup (B),Off (O)}

L {1,1,1,0,0}

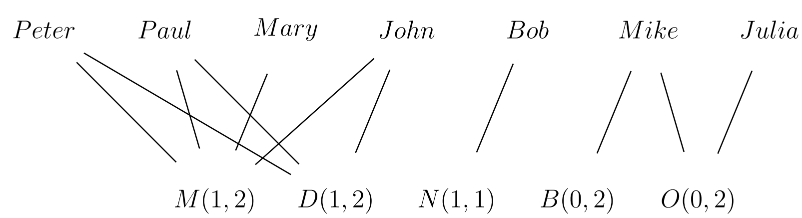
U {2,2,1,2,2}

Nous voudrons réduire ce genre de tableau suivant:

	Monday	Tuesday	Wendsday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
Peter	D	N	N	N	O	O	O
Paul	O	O	D	D	M	M	B
Mary	M	M	D	D	O	O	N



On peut assigner *Bob* à la tache N et assigner à $Julia$ la tache O, le reste sera des combinaison possible:



34.5 AC filtre Sum à une borne

Soit un filtre sum avec les variables (x, y, z, a, b, c) dans le domaine $range(1, 5)$ appliqué sur l'équation:

$$2x + 3y + 2z + a + 4b + 2c \geq 50$$

x	y	z	a	b	c
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4

Si le somme des maximums de chaque variable ne respecte pas la contrainte, alors il n'existe aucun assignement des variables tel que la contrainte serait satisfaite:

$$2 * 4 + 3 * 4 + 2 * 4 + 4 + 4 * 4 + 2 * 4 = 8 + 12 + 8 + 4 + 16 + 8 = 56 \geq 50$$

Pour chaque variables, enlever son impacte dans le résultat précédemment obtenue et refaire l'opération de dépilé avec les différents x tant que un x_i ne satisfait pas la contrainte:

Pour x:

$2 * 4 + 3 * 4 + 2 * 4 + 4 + 4 * 4 + 2 * 4 = 8 + 12 + 8 + 4 + 16 + 8 = 56 \geq 50$

$56 - 2 * 4 + 2 * 1 = 50 \geq 50$, donc $x = 1$ fonctionne

(pareil pour z,c)

Pour y:

$56 - 3 * 4 + 3 * 1 = 44 \geq 50$, donc $y = 1$ ne fonctionne pas

$56 - 3 * 4 + 3 * 2 = 50 \geq 50$, donc $y = 2$ fonctionne

Pour b:

$56 - 4 * 4 + 4 * 1 = 40 \geq 50$, donc $b = 1$ ne fonctionne pas

$56 - 4 * 4 + 4 * 2 = 44 \geq 50$, donc $b = 2$ ne fonctionne pas

$56 - 4 * 4 + 4 * 3 = 50 \geq 50$, donc $b = 3$ fonctionne

On obtient:

x	y	z	a	b	c
1		1	1		1
2	2	2	2		2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4

34.6 AC filtre avec Sum à deux bornes

Part X

Problème de satisfaction SAT

Chapter 35

définitions de base

35.1 Transformation NNF, CNF

Une forme NNF (Negative Normal Forme) est une formule donné avec uniquement les connecteurs logique $\wedge \vee \neg$.

en remplaçant les $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$:

$\phi \rightarrow \psi$ donne $\neg\phi \vee \psi$

$\phi \leftrightarrow \psi$ donne $(\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi)$

descendre les négations au niveau atomique:

$\neg(\phi \wedge \psi)$ donne $\neg\phi \vee \neg\psi$

$\neg(\phi \vee \psi)$ donne $\neg\phi \wedge \neg\psi$

$\neg\neg\phi$ donne ϕ

Une forme CNF (Normal Conjonctive Forme) est une conjonction de disjonctions de littéraux:

exemple : $(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B \vee D) \wedge (A \vee B)$

35.1.1 Transformation glouton

Toutes formules peut être réduite à CNF en appliquant récursivement la lois de DeMorgan:

$(\phi \wedge \psi) \vee \gamma$ donne $(\phi \vee \gamma) \wedge (\psi \vee \gamma)$

Mais rarement utilisé car la complexité est exponentielle dans le pire des cas.

35.1.2 Transformation via ajout de variables

Soit la formule suivante:

$$\neg((\neg(a \vee b)) \leftrightarrow (c \rightarrow d)) \rightarrow ((e1 \wedge e2 \wedge e3) \vee (f1 \wedge f2 \wedge f3) \vee (g1 \wedge g2 \wedge g3))$$

réduire en NNF:

$((a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge ((c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee ((e1 \wedge e2 \wedge e3) \vee (f1 \wedge f2 \wedge f3) \vee (g1 \wedge g2 \wedge g3))$

Appliquer la formule:
$((a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge ((c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \vee ((e1 \wedge e2 \wedge e3) \vee (f1 \wedge f2 \wedge f3) \vee (g1 \wedge g2 \wedge g3))$

$i \leftrightarrow (c \wedge \neg d)$

$j \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

$k \leftrightarrow (e1 \wedge e2 \wedge e3)$

$l \leftrightarrow (f1 \wedge f2 \wedge f3)$

$m \leftrightarrow (g1 \wedge g2 \wedge g3)$

donne:
$((a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (i \vee j) \vee (k \vee l \vee m)$

$n \leftrightarrow (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (i \vee j)$

ce qui donne:
$(n \vee k \vee l \vee m)$

Après distribution des nouvelles variables:

$(n \vee k \vee l \vee m) \wedge$
$i \leftrightarrow (c \wedge \neg d) \wedge$
$j \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b) \wedge$
$k \leftrightarrow (e1 \wedge e2 \wedge e3) \wedge$
$l \leftrightarrow (f1 \wedge f2 \wedge f3) \wedge$
$m \leftrightarrow (g1 \wedge g2 \wedge g3) \wedge$
$n \leftrightarrow (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (i \vee j)$

donne la formule CNF suivante:
$((n \vee k \vee l \vee m) \wedge (\neg i \vee c) \wedge (\neg i \vee \neg d) \wedge$
$(\neg j \vee \neg a) \wedge (\neg j \vee \neg b) \wedge (\neg k \vee e1) \wedge (\neg k \vee e2) \wedge (\neg k \vee e3) \wedge$
$(\neg l \vee f1) \wedge (\neg l \vee f2) \wedge \neg l \vee f3) \wedge (\neg m \vee g1) \wedge (\neg m \vee g2) \wedge \neg m \vee g3) \wedge$
$(\neg n \vee a \vee b \vee \neg c\ veed) \wedge (\neg n \vee i \vee j)$

35.2 Littéral et clause : classification

Soit la formule suivante avec les littéraux de couleur vert des littéraux équivalent à $\top$ et en bleu les littéraux équivalent à $\bot$:

$$(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee c \vee d)$$

Via déduction la clause:

$(a \vee \neg b)$ est falsifié

$(\neg a \vee b \vee \neg c)$ est satisfaite

$(a \vee c \vee d)$ est active

35.2.1 Clause active

Une clause active est unitaire si elle a exactement un littéral non affecté:

$(a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

est I une interprétation tel que I(a) = $\top$ et I(b) = $\bot$.

Dans ce cas, une cause unitaire admet qu'une seul solution pour être satisfaite:

$$a \wedge b \rightarrow \neg c$$

c doit être affecté à $\top$.

35.2.2 Littéral pure

Une variable est dite pure dans une formule si ses littéraux sont soit tous positif ou tous négatifs:

$$(a \vee c) \wedge (\neg a \vee c)$$

Chapter 36

Classes polynomiales

36.1 2-SAT

36.2 Horn-SAT

36.3 Horn-renommable