بنام خدا و برای خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی انرژی و فیزیک

پروژه پایانی درس CFD

مسئله ۱: Lid-driven cavity

نگارش

محمد رضا واعظی

استاد راهنما

دکتر حمید نادران

۱۴۰۰/۵/۸

فهرست مطالب

صفحه

۱ مقدمه

۱-۱ تعریف مسئله

مربعی به ضلع ۱ را در نظر بگیرید که تمام اضالع آن بجز ضلع باالا ساکن است. ضلع باالا سرعت افقی برابر ۱ به سمت راست دارد و سرعت عمودی آن صفر است. سیال درون مربع تراکم ناپذیر با چگالی ثابت است. مسئله را به ازای عدد رینولدز برابر ۱، ۱۰،۱۰۰ و ۵۰۰ حل و تحلیل کنید (راهنمایی: برای تغییر عدد رینولدز میتوانید ویسکوزیته سیال را تغییر دهید.) یکی از روشهای تراکمپذیری مصنوعی، روش ، روش تصویر یا روش تصحیح فشار را به دلخواه انتخاب کرده و پیاده کنید.

۲-۱ معادلات حاکم و شرایط مرزی

معادلات ۱-۱ معادله پیوستگی و ۱-۲ معادله مومنتوم برای سیال تراکم ناپذیر ویسکوز است. با فرض هم دما بودن معادله انرژی صرف نظر شده است.

$$\nabla.u = 0 \qquad \text{معادله ۱-۱}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \upsilon.\nabla^2 u \qquad \text{معادله ۱-۲}$$

۱-۲-۱ شرایط مرزی

برای هر یک از متغیر ها v و u باید در مرز ها شرایطی تعریف شود با فرض غیر لغزندگی(no-slip) برای سطوح و عمود بر سطح(normal) میتوان این شرایط مرزی را مطابق معادلات ۳-۱ و ۴-۱ مشاهده کرد.

$$No-slip \Rightarrow u(x,y) = \begin{cases} 0 & x=0,y \\ 0 & x=1,y \end{cases}$$
$$normal \Rightarrow v(x,y) = \begin{cases} 0 & x=0,y \\ 0 & x=1,y \end{cases} \qquad \text{معادله ۱-۳}$$

$$No-slip \Rightarrow u(x,y) = \begin{cases} 0 & y=0,x \\ 1 & y=1,x \end{cases}$$
$$normal \Rightarrow v(x,y) = \begin{cases} 0 & y=0,x \\ 0 & y=1,x \end{cases} \qquad \text{معادله ۱-۴}$$

۱-۳ مدلهای کمکی و شرایط مرزی(vorticity-stream function)

برای حل معادلات حاکم جریان تراکم ناپذیر و ویسکوز از روش vorticity-stream function کـه یـک روش متغیر های ثانویه است استفاده شده است. که عبارات و معـادلات کمکـی در معادلـه ۱-۵ تـا ۱-۸ عنوان شده است.[۱]

$$\omega = \nabla \times \bar{u}$$ معادله ۱-۵

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$ معادله ۱-۶

$$\nabla^2 \psi = -\omega$$ معادله ۱-۷

$$\overbrace{\frac{\partial \omega}{\partial t}}^{time.part} = -\overbrace{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}.\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}^{part1} + \upsilon\overbrace{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)}^{part2}$$ معادله ۱-۸

$$\upsilon = \frac{1}{\mathrm{Re}} O(\Delta x^2, \Delta t^3)$$

پ.ن: معادله ۸-۱ از بخش ۷.۱ مقاله [۱] برداشته شده است

۱-۳-۱ شرایط مرزی

طبیعی است که با تبدیل متغیر های اولیه به ثانویه باید شرایط اولیه را نیز تبدیل شـوند. مقـدار مشـتق جزئی تابع جریان که برابر سرعت است به عنوان شرایط مرزی تابع جریان تعریف می‌شـود. هـر کـدام از معادلات ۹-۱ و ۱۰-۱ به ترتیب برای جهت های افقی(x) و عمودی(y) از شرایط مرزی اولیه آورده شده است.

باید توجه داشت که مقدار $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ که n میتواند برابر x و y باشد بیانگر مقدار نیست و ما مقدار ψ در شرایط مرزی را برابر صفر در نظر گرفته ایم. همچنین مقدار $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 1$ شرایطی دارد که در گسسته سازی شرایط مرزی توضیح داده میشود. صفر فرض نکردن ψ برای شرایط مرزی در نقطه (y=۱,x) تاثیر کمی در محاسبات دارد اما در شرایط مرزی vorticity اثر گذار است.

شرایط مرزی برای ω (vorticity) مطابق روش Jensen تعریف شده است کـه روشـی مطـابق مطالـب کلاس دارد و از تشریح آن خود داری میشود و در بخـش گسســته سـازی (بخـش ۲-۳-۲) بـه صـورت گسسته و بر اساس ψ آورده شده است.

$$1-No-slip \Rightarrow u(x,y)=\begin{cases}0 & x=0,y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial y}=\psi=0 \\ 0 & x=1,y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial y}=\psi=0\end{cases}$$

معادله ۹-۱

$$2-normal \Rightarrow v(x,y)=\begin{cases}0 & x=0,y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial x}=\psi=0 \\ 0 & x=1,y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial x}=\psi=0\end{cases}$$

$$1-No-slip \Rightarrow u(x,y)=\begin{cases}0 & y=0,x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial y}=\psi=0 \\ 1 & y=1,x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial y}=1,\psi=-\Delta y\end{cases}$$

معادله ۱۰-۱

$$2-normal \Rightarrow v(x,y)=\begin{cases}0 & y=0,x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial x}=\psi=0 \\ 0 & y=1,x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial x}=\psi=0\end{cases}$$

۱-۳-۲ تبدیل vorticity و stream function به فشار و سرعت

در مقالات این تبدیل متغییر های ثانویه به اولیه عنوان نشده است و مطالب عنوان شده در این بخش از مطالب تدریس شده آورده شده است. بعد از بدست آوردن تابع جریان و vorticity باید آن ها را به متغیر های اولیه

برای بدست آوردن سرعت u و v از معادله ۶-۱ و تجزیه تابع جریان در آن استفاده شده است. بدست آوردن توضیع فشار باید از معادله دو بعدی ۲-۱ گرادیان گرفت مطابق معادله ۱۰-۱. این کار باعث

میشود تا دو معادله در دو بعد به یک معادله با مجهول فشار تبدیل شود. مطابق مطالب کلاس ساده شده معادله ۱-۱۰ در معادله ۱-۱۱ آورده شده است.

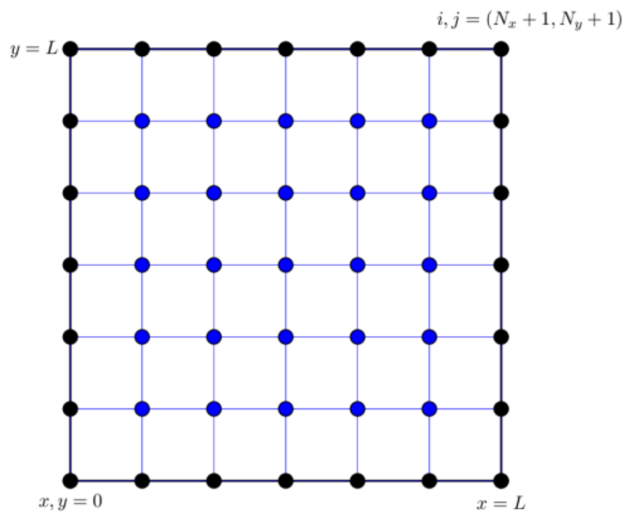
$$\nabla.\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{u}.\nabla\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\upsilon.\nabla^2\vec{u}\right]$$ **معادله ۱-۱۱**

$$\nabla^2 P=-2\times(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})}{\partial y}\right],\quad \upsilon=\frac{1}{\mathrm{Re}}$$ **معادله ۱-۱۲**

۲ حل عددی

۲-۱ شبکه محاسباتی

با توجه به دامنه کارتزین (مربعی بودن تمام مرز ها) و حل با روش تفاصل محدود، شبکه محاسباتی به صورت مربعی و بر اساس دستگاه مختصات کارتزین مطابق شکل ... استفاده شده است.



۲-۲ روش عددی

برای تجزیه هر بخش از معادلات حاکم بر اساس روش $\omega-\psi$ که در معادلات ۱-۷ و ۱-۸ عنوان شده است ما از روشی استفاده کرده ایم به آن هایی که از مقالات دیده استفاده شده این جا شرح داده شده است. باقی بخش ها (در صورت خطی بودن) جدول ... استفاده شده است.

جدول ۱-۲ جدول تجزیه تفاضل محدود با دقت مرتبه ۲ برای عبارات خطی[۲]

$\delta_x \psi_{i,j}$	$(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})/2h_x$
$\delta_y \psi_{i,j}$	$(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})/2h_y$
$\delta_{x^2} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j})/h_x^2$
$\delta_{y^2} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1})/h_y^2$
$\delta_{x^3} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i+2,j} - 2\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i-1,j} - \psi_{i-2,j})/2h_x^3$
$\delta_{y^3} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i,j+2} - 2\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j-2})/2h_y^3$
$\delta_{x^2 y} \psi_{i,j}$	$((\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) - 2(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) + (\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}))/2h_y h_x^2$
$\delta_{xy^2} \psi_{i,j}$	$((\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) - 2(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + (\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}))/2h_x h_y^2$
$\delta_{x^4} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i+2,j} - 4\psi_{i+1,j} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j})/h_x^4$
$\delta_{y^4} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i,j+2} - 4\psi_{i,j+1} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j-2})/h_y^4$
$\delta_{x^2 y^2} \psi_{i,j}$	$((\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j-1}) - 2(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) + (\psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i-1,j} + \psi_{i-1,j-1}))/h_x^2 h_y^2$

۲-۲-۱ راگه-کوتا (Runge-Kutta):

ما برای تجزیه بخش زمانی معادله حاکم(معادله...) از این پیکره پندی تجزیه استفاده کرده ایم راگه-کوتا مرتبه سوم برای گسسته سازی عبارت زمانی در معادله گرما استفاده می کنیم .ما از همان طرح تفـاوت مرکزی مرتبه دوم برای عبارت فضایی استفاده می کنیم .خطای برش این تقریب عددی معادله حرارتی $O(\Delta t^3)$است .با استفاده از سه مرحله از مرحله زمانی t^n به t^{n+1} حرکت می کنیم .ادغام زمـانی معادلـه حرارت با استفاده از طرح رانگ-کوتا مرتبه سوم در معادلات ۱-۲ تا ۴-۲ آورده شده است.[۳]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a$$ معادله ۲-۱

$$u_i^{(1)} = u_i^{(n)} + \Delta t(A)$$ معادله ۲-۲

$$u_i^{(2)} = \frac{3}{4}u_i^{(n)} + \frac{1}{4}u_i^{(1)} + \Delta t(A)$$ معادله ۲-۳

$$u_i^{(3)} = \frac{1}{3}u_i^{(n)} + \frac{2}{3}u_i^{(1)} + \frac{2}{3}\Delta t(A)$$ معادله ۲-۴

۲-۲-۲ ژاکوبین:

معادله ۵-۲ بخشی از معادله حاکم عنوان شده در ۸-۱ است که بخشی غیر خطی در این معادلات است و برای تجزیه آن از ژاکوبین استفاده شده است. این طرح عددی دارای خاصیت بقای انرژی، آنستروفی و

تقارن چولگی است و از ناپایداری های محاسباتی ناشی از برهمکنش های غیرخطی جلوگیری می کند .
این طرح عددی دقت مرتبه دوم دارد و در معادلات ۵-۲ تا ۹-۲ آورده شده است.[۴]

$$J(\omega,\psi)=(\frac{\partial\psi}{\partial y}.\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}.\frac{\partial\omega}{\partial y})$$ معادله ۵-۲

$$J(\omega,\psi)=\frac{J_1(\omega,\psi)+J_2(\omega,\psi)+J_3(\omega,\psi)}{3}$$ معادله ۶-۲

$$J_1(\omega,\psi)=\frac{1}{4.\Delta x.\Delta y}\times\left[(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j})(\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1})-(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})(\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j})\right]$$ معادله ۷-۲

$$J_2(\omega,\psi)=\frac{1}{4.\Delta x.\Delta y}\times\begin{bmatrix}\omega_{i+1,j}(\psi_{i+1,j+1}-\psi_{i+1,j-1})-\omega_{i-1,j}(\psi_{i-1,j+1}-\psi_{i-1,j-1})\rightarrow\\ \rightarrow-\omega_{i,j+1}(\psi_{i+1,j+1}-\psi_{i-1,j+1})+\omega_{i,j-1}(\psi_{i+1,j-1}-\psi_{i-1,j-1})\end{bmatrix}$$ معادله ۸-۲

$$J_3(\omega,\psi)=\frac{1}{4.\Delta x.\Delta y}\times\begin{bmatrix}\omega_{i+1,j+1}(\psi_{i+1,j+1}-\psi_{i+1,j})-\omega_{i-1,j-1}(\psi_{i-1,j}-\psi_{i,j-1})\rightarrow\\ \rightarrow-\omega_{i-1,j+1}(\psi_{i,j+1}-\psi_{i-1,j})+\omega_{i+1,j-1}(\psi_{i+1,j}-\psi_{i,j-1})\end{bmatrix}$$ معادله ۹-۲

۲-۲-۳ حل معادله پواسون

دو روش مختلف برای پیاده سازی حل کننده سریع پواسون برای دامنه تناوبی وجود دارد. یک راه این است که FFT ها را مستقیماً روی معادله پواسون انجام دهیم که دقت طیفی را به ما می دهد. روش دوم این است که ابتدا معادله پواسون را گسسته می کنیم و سپس FFT ها را روی معادله گسسته اعمال می کنیم. رویکرد دوم همان ترتیب مکانی دقت را به ما می دهد که طرح عددی مورد استفاده برای گسسته سازی استفاده می شود. ما از طرح اختلاف مرکزی مرتبه دوم ارائه شده در معادله ۱۱-۲ برای توسعه یک حل کننده مستقیم پواسون استفاده می کنیم.

جایی در معادلات ۱۰-۲ و ۱۱-۲ که Δx و Δy فاصله شبکه در جهت‌های x و y است و $f_{i,j}$ عبارت مرجع در مکان‌های شبکه گسسته است .اگر معادله (۸۳) را در هر نقطه شبکه بنویسیم، سیستمی از معادلات خطی به دست می آید .برای شرط مرزی دیریکله، فرض می کنیم که مقادیر $u_{i,j}$ زمانی در دسترس هستند که (x_i , y_j) یک نقطه مرزی باشد.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi=f$$ معادله ۲-۱۰

$$\frac{(u_{i+1,j}-2\times u_{i,j}+u_{i-1,j})}{\Delta x^2}+\frac{(u_{i,j+1}-2\times u_{i,j}+u_{i,j-1})}{\Delta y^2}=f_{i,j}$$ معادله ۲-۱۱

تبدیل فوریه یک تابع فضایی را به اجزای سینوس و کسینوس آن تجزیه می کند. خروجی تبدیل فوریه تابعی در حوزه فرکانس آن است. با استفاده از تبدیل فوریه معکوس می توانیم تابع را از حوزه فرکانس آن بازیابی کنیم. ما از تابع و تبدیل فوریه آن در حوزه گسسته استفاده می کنیم که تبدیل فوریه گسسته (DFT) نامیده می شود.[۱]

۲-۳ گسسته سازی معادلات و شرایط مرزی

گسسته سازی معادلات

برای گسسته سازی معادله ۱-۷ و ۱-۸ ابتدا مقدار اولیه ایی برای ω با توجه به مقادیر مرزی و معادلات ۱-۹ و ۱-۱۰ فرض میکنیم و سپس با حل معادله پواسون (۱-۷) مقدار ψ را بر اساس ω بدست آورد بعد با مقادیر ψ و ω بخش ۱ را با استفاد از ژاکوبین (بیان شده در زیر فصل ۲-۲-۲) و بخش ۲ را با استفاده از تجزیه مرکزی عنوان شده در جدول ۱-۲ برای هر نقطه تجزیه میکنیم تا سمت راست معادله ۱-۸ را برای هر نقطه بدست آورید و بعد سمت عبارت بدست آمده را به عنوان a در معادله ۱-۲ فرض و با استفاده از تجزیه رانگه-کوتا گام زمانی بعدی را برای ω بدست آورد و از ω جدید به همین ترتیب در زمان جلو میرویم. با رسیدن به شرایط گام زمانی که بدون تغییر و ثابت به شرایط پایا رسیده ایم.

دقت رانگه-کوتا دقت زمانی(دقت مرتبه ۳) و تجزیه بخش ۱ (دقت مرتبه ۲) و بخش ۲ (دقت مرتبه ۲) دقت مکانی حل را مشخص میکند. به این ترتیب دقت معادلات تجزیه شده حداقل $O(\Delta x^2, \Delta t^3)$ است.

گسسته سازی شرایط مرزی

برای گسسته سازی باید به دقت تجزیه معادلات توجه داشته و طبق قضیه .... حداقل ۱ مرتبه از دقت معادلات کم تر باشد به همین منظور ما برای شرایط مرزی از روش .... که دقت مرتبه ۲ دارد استفاده

کردیم که در معادلات ۲-۱۲ و ۲-۱۳ عنوان شده است[۵]. این معادلات در کنار شرایط مرزی که بـرای ψ بیان شده است مقادیر ψ و ω در مرز ها را بیان می‌کند.

$$\omega_{i,1}=\frac{1}{2.\Delta y}\times[7\times\psi_{i,1}-8\times\psi_{i,2}+\psi_{i,3}-6\times\Delta y\times u_0]+O(\Delta y^2)$$ معادله ۲-۱۲

$$\omega_{i,ny+1}=\frac{1}{2.\Delta y}\times[7\times\psi_{i,ny+1}-8\times\psi_{i,ny}+\psi_{i,ny-1}-6\times\Delta y\times u_0]+O(\Delta y^2)$$ معادله ۲-۱۳

شرایط مرزی ψ در معادله پواسون در معادلات ۱-۹ و ۱-۱۰ بیان شده است و بیان کردیم کـه عبـارت $\frac{\partial\psi}{\partial y}=1,\psi=-\Delta y$ را در این بخش توضیح میدهیم. ما با تجزیه مرکزی و فرض صفر برای مقـدار ψ در نیم فاصله مقادیر ψ در مرز را بدست می آوریم.[۲]

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{i,ny+1}=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\psi_{i,ny+2}-\psi_{i,ny+1}}{\Delta y}=1\\ \psi_{i,ny+\frac{1}{2}}=0\end{cases}\quad\Rightarrow\psi_{i,ny+1}=-\Delta y$$ معادله ۲-۱۴

معادلات تبدیل $\omega-\psi$ به P-v-u

بعد از محاسبه ی $\omega-\psi$ که متغییر های ثانویه هستند آن ها را به متغیر هـای اولیـه P-v-u تبـدیل کنیم. ابتدا از روی ψ مقادیر سرعت u و v را با تجزیه مرکز معادله ۱-۶ از روی جدول ۱-۲ بدست مـی آوریم سپس با استفاده از مقادیر سرعت و تجزیه معادله ۱-۱۲ با استفاده از جـدول ۲-۱ عبـارت مرجـع معادله پواسون فشار بدست می آوریم. سپس با حل معادله پواسون فشار با شرایط مرزی دریکله توضـیع فشار را بدست می آوریم.

۳ پارامترهای حل و دامنه

برای این مسئله مطابق صورت عدد رینولدز به عنوان متغیر حل عنوان شده است و تحلیل حساسیت بـر اساس آن انجام شده است.

Re : عدد رینولدز کمیت بدون یکای مهمی است که در مکانیک سیالات برای پیش‌بینی الگوی جریان از آن استفاده می‌شود. این عدد نسبت نیروی لختی به نیروی گرانروی می‌باشد. در اعداد رینولدز پایین تمایل جریان به داشتن الگویی آرام و لایه ای می باشد، در حالیکه در اعداد رینولدز بالا جریان به حالت آشفته در می‌آید. عدد رینولدز کاربردهای فراوانی از قبیل جریان مایع داخل لوله تا جریان هوا روی بال هواپیما دارد. از عدد رینولدز برای پیش‌بینی گذر جریان از آرام به آشفته استفاده می‌شود و هم‌چنین در پیش‌بینی و تعیین جریان در اطراف یک مدل ماکت و کوچک با مدل اندازه اصلی و بزرگ کاربرد دارد.

و مقدار آن از ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۵۰۰ تغییر می‌دهیم.

ω : گردابه یک میدان شبه بردار است که حرکت چرخشی محلی یک پیوستار را در نزدیک ی نقطه ای توصیف می کند همانطور که توسط ناظری که در آن نقطه قرار دارد و همراه با جریان حرکت م ی کند مشاهده می شود.

ψ : تابع جریان است که عنوان متغیر ثانویه برای حل معادله نویر-استوکس در حالت تراکم ناپذیر استفاده شده است.

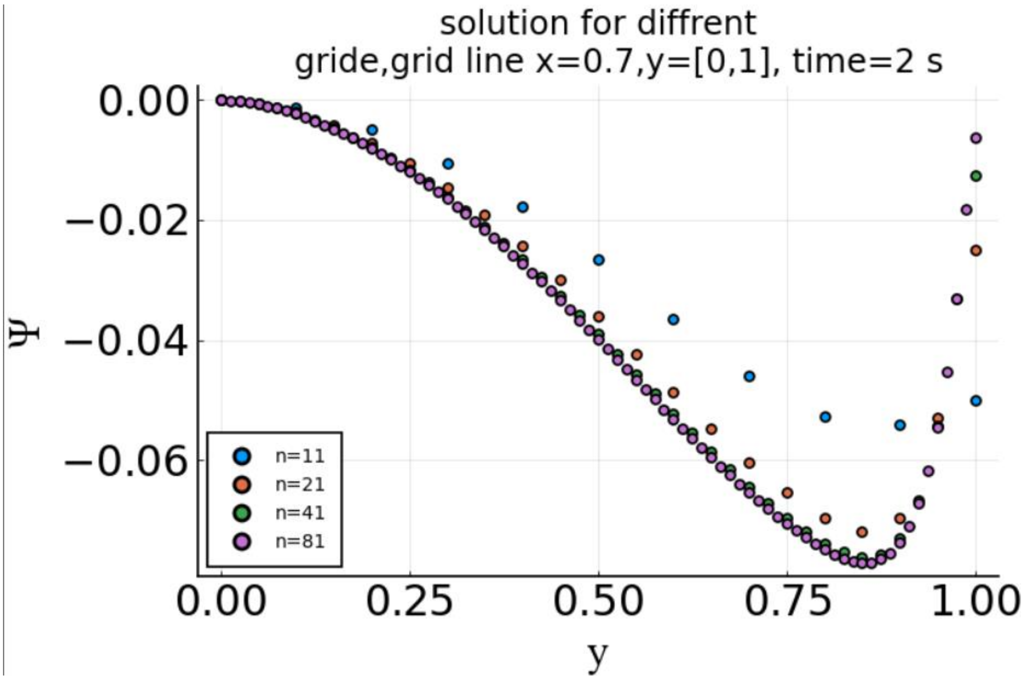
u : سرعت در راستای افق (x) است.

v : سرعت در راستای عمود (y) است.

۴ آنالیز خطا

برای تحلیل خطا و بررسی همگرایی مطابق گفته های کلاس و تمرین های قبل عمل میکنم برای این که مسئله دو بعدی است یک خط از مش بندی منظم (dx=dy) را در نظر میگیریم (ما x=۰٫۷ را در نظر گرفتیم) و سپس به در آن خط به بررسی خطای پیاپی (successive Error) میپردازیم. سپسش در نمودار ... شیب لگاریتمی خطا پیاپی بر اساس h (فاصله مش ها) بدست می آوریم همان طور که انتظار داریم دقت مکانی تجزیه حدود مرتبه ۲ است.

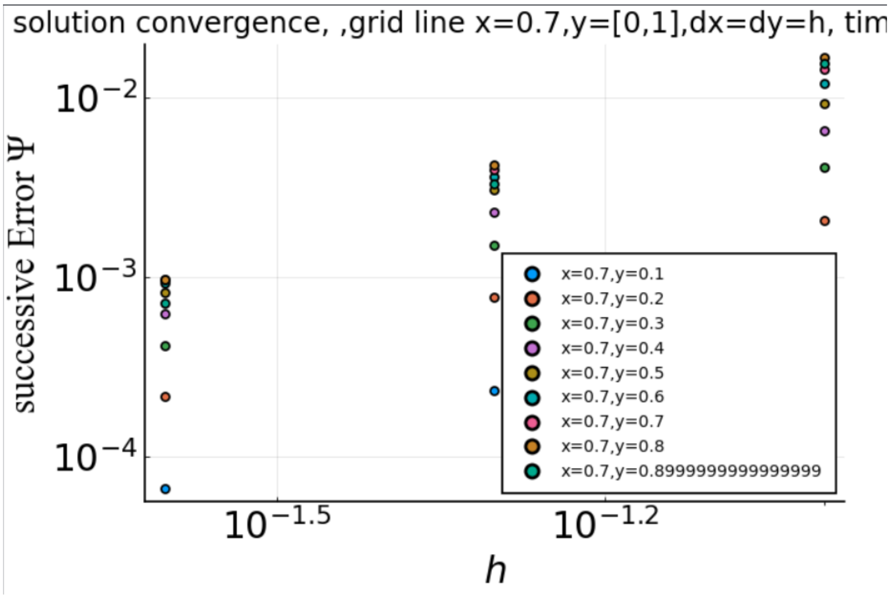
٤-۱ تحلیل استقلال از شبکه محاسباتی



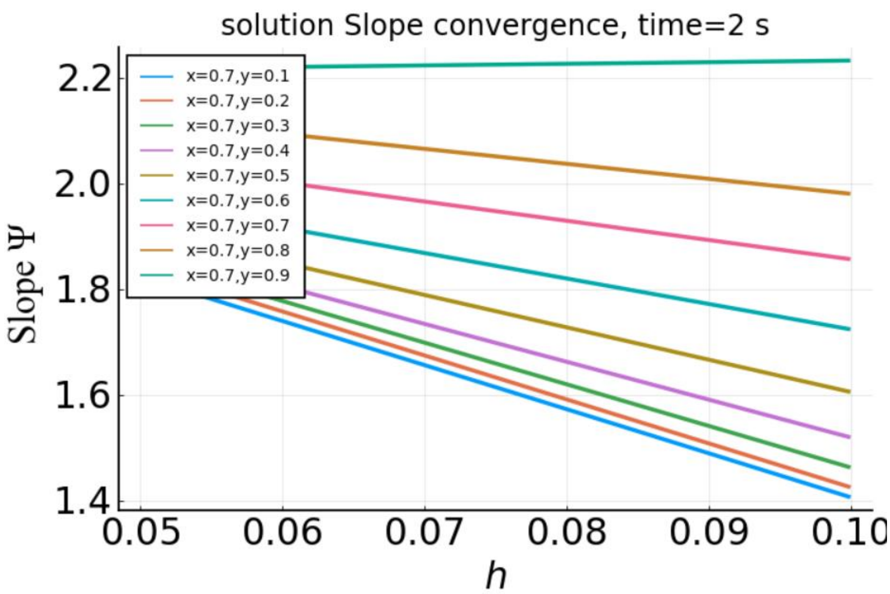
رسم توضیحی ۱-۴ رسم نقاط محاسبه برای خط x=۰٫۷ برای تقسیم بندی محاسبانی مختلف (n تعداد نقاط محاسبانی برای هر بعد)

٤-۱-۱ همگرایی در گام مکانی (شبکه مکانی)

همانطور که گفته شد برای بررسی همگرایی و کاهش خطا با کاهش فاصله مش ها در نمودار های ۲-۴ و ۳-۴ قابل مشاهده است.



رسم توضیحی ۲-۴ خطای پیاپی برای یک خط مش در x=۰،۷ و h=dx=dy



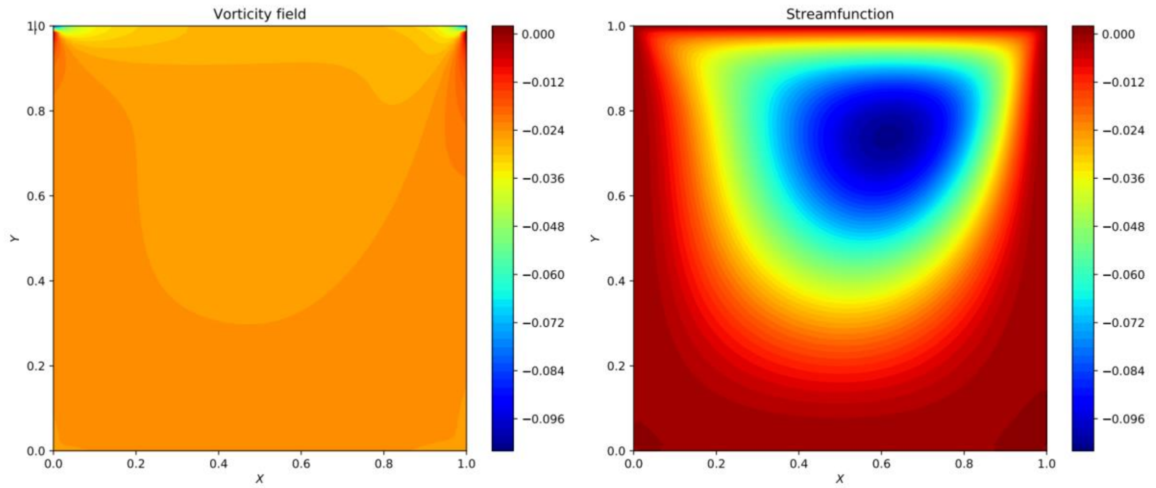
رسم توضیحی ۳-۴ شیب لگاریتمی خطای پیاپی برای یک خط مش در =x۰.۷ و h=dx=dy

٤-١-٢ استقلال محاسبات نسبت به گام زمان

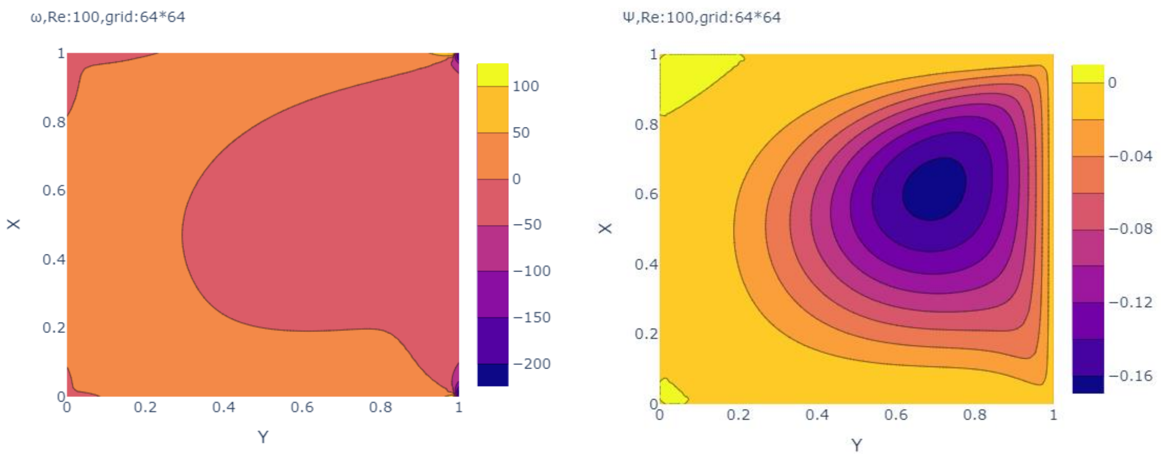
این مسئله برای شرایط پایا است اما چون ما از حل زمانی و گذرا به حالت پایا رسیده ایم این تحلیل خطا نیز مهم میشود. که در زیر نمودار های آن قابل مشاهدا است و همان طور که پیشبینی شد بود دقت زمانی مرتبه ۳ بدست می دهد.

۵ صحت سنجی نتایج با نتایج مقالات

شکل ۱-۵ نتایج مقاله برای رینولدز برابر ۱۰۰ و مش بندی ۶۴ *۶۴ و زمان از تا ۱۰ ثانیه مطابق شکل زیر بدست آورده است و با این مشخصات ما کد را حل کرده و شکل ۲-۵ آورده ایم همان طور کـه قابـل مشاهده است این نتایج نزدیکی زیادی به هم دارند.

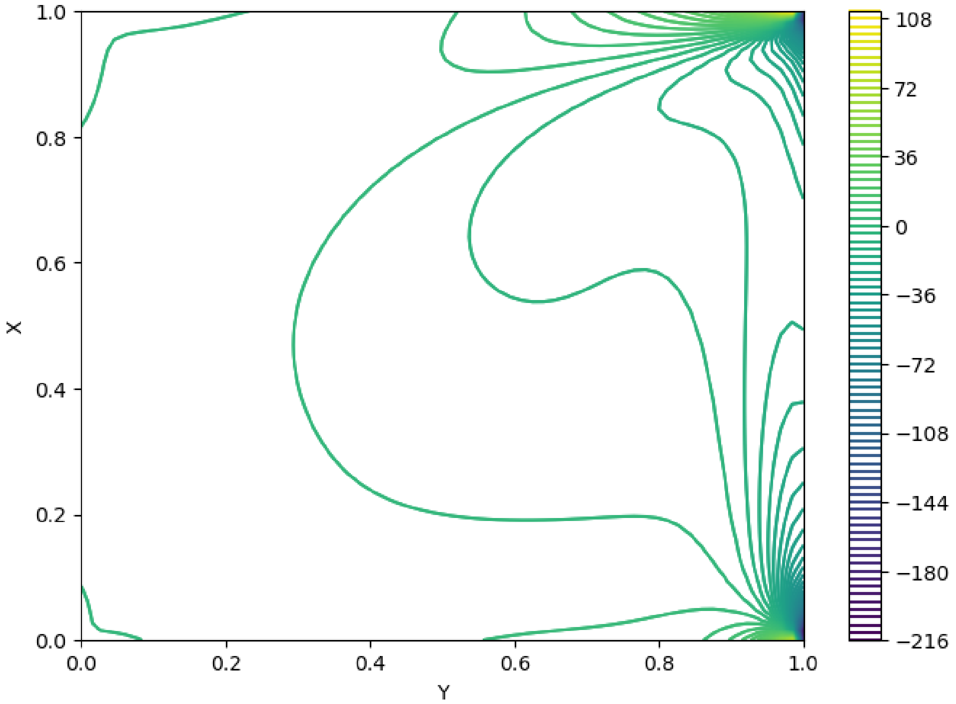


رسم توضیحی ۱-۵ تابع جریان و گردابی در مقاله مرجع



رسم توضیحی ۲-۵ تابع جریان و گردابی در کد نوشته شده (دقت شود در کد محور عمودی جهت x است)

برای آن که در نمودار رسم شده با PlotJs (رسم توضیحی ۵-۲) جزئیات کمتری دارد جریان گردابـی را در شکل ۵-۳ با جزئیات بیشتر رسم شده است.

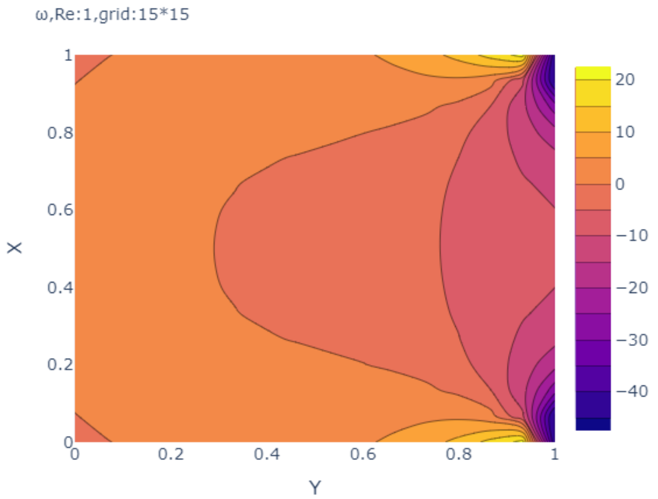


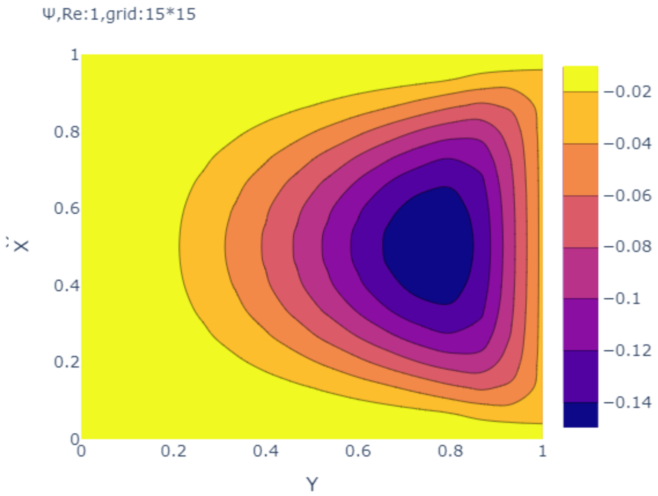
رسم توضیحی ۳-۵ جریان گردابی برای مش ۶۴*۶۴ و **Re**=۱۰۰، رسم شده با **PyPlot**

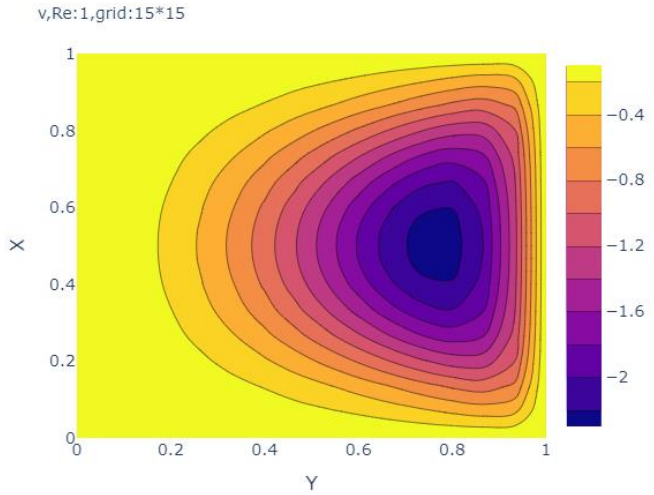
٦ آشکارسازی جریان و بحث درباره آن

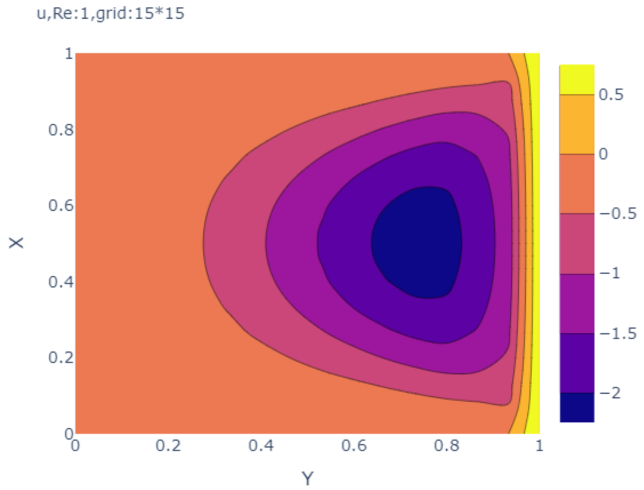
پارامتر مسئله در صورت عدد رینولدز بیان شده است و نتایج متغیر های اولیه و ثانویه برای هر عدد رینولدز در این بخش به صورت کانتور آورده شده است.

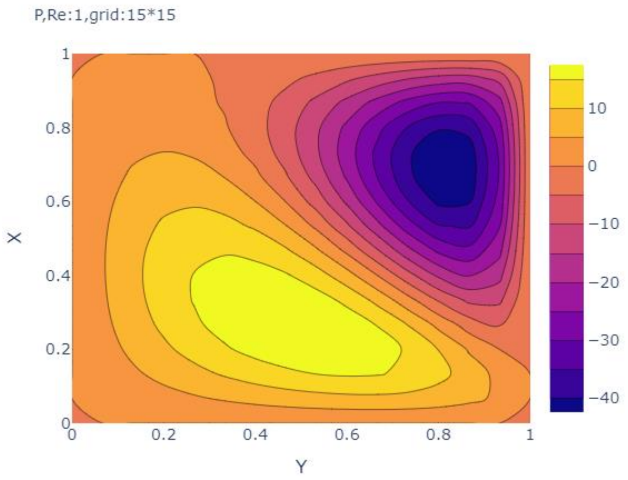
٦-۱ **Re**=۱


ω,Re:1,grid:15*15
X
Y

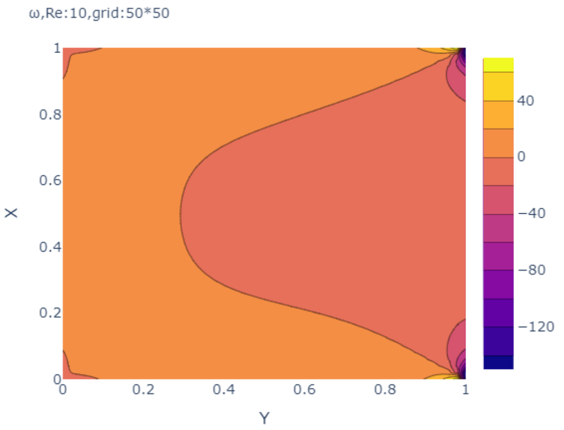

Ψ,Re:1,grid:15*15
X
Y

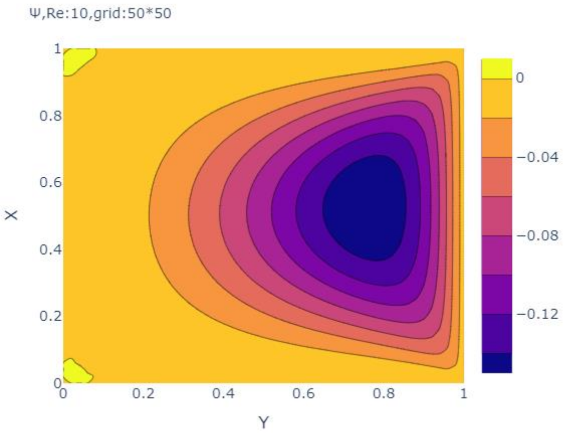

v,Re:1,grid:15*15
X
Y

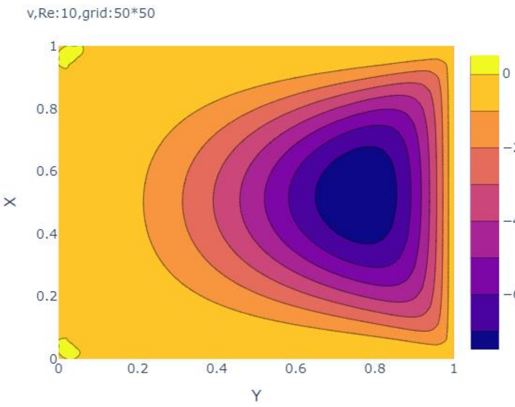

u,Re:1,grid:15*15
X
Y

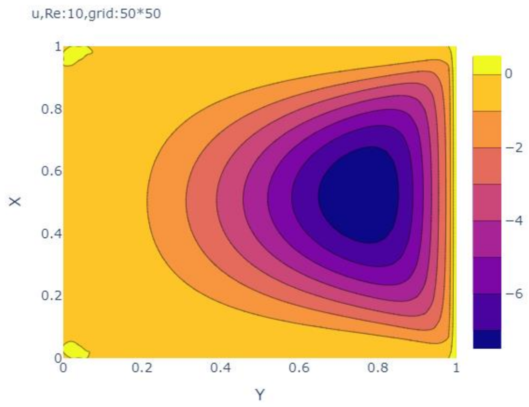

P,Re:1,grid:15*15
X
Y
10
0
−10
−20
−30
−40

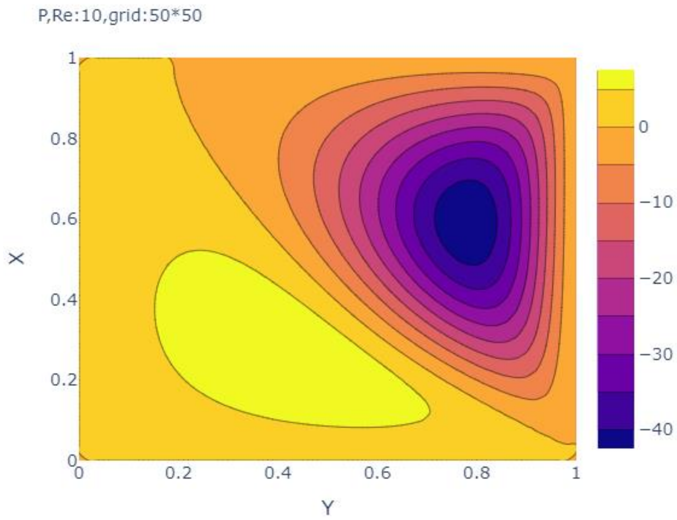
۲-۶ Re=۱۰


ω,Re:10,grid:50*50
X
Y
40
0
−40
−80
−120

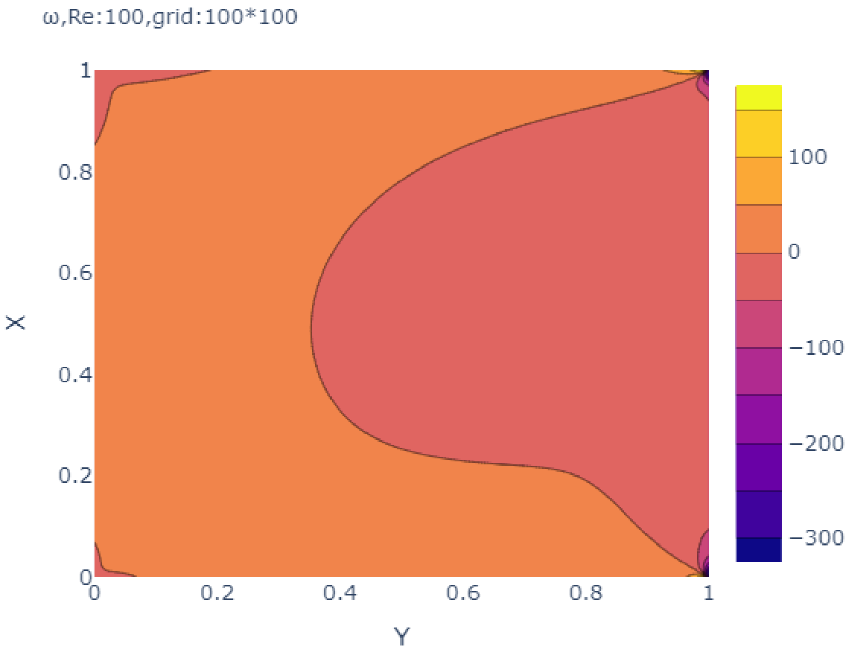

Ψ,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
−0.04
−0.08
−0.12

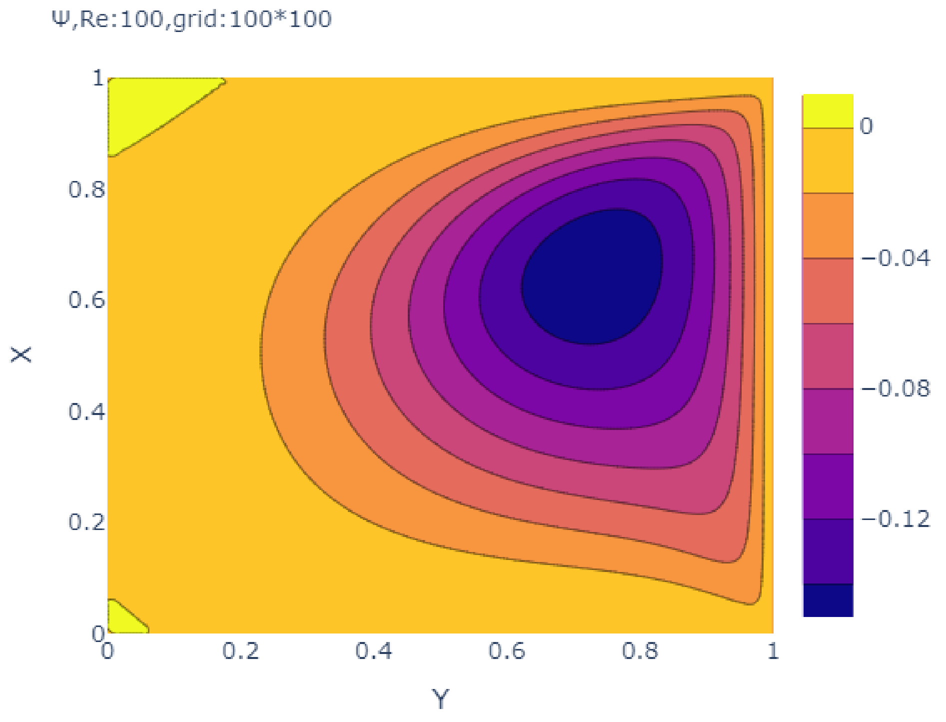

v,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
−2
−4
−6

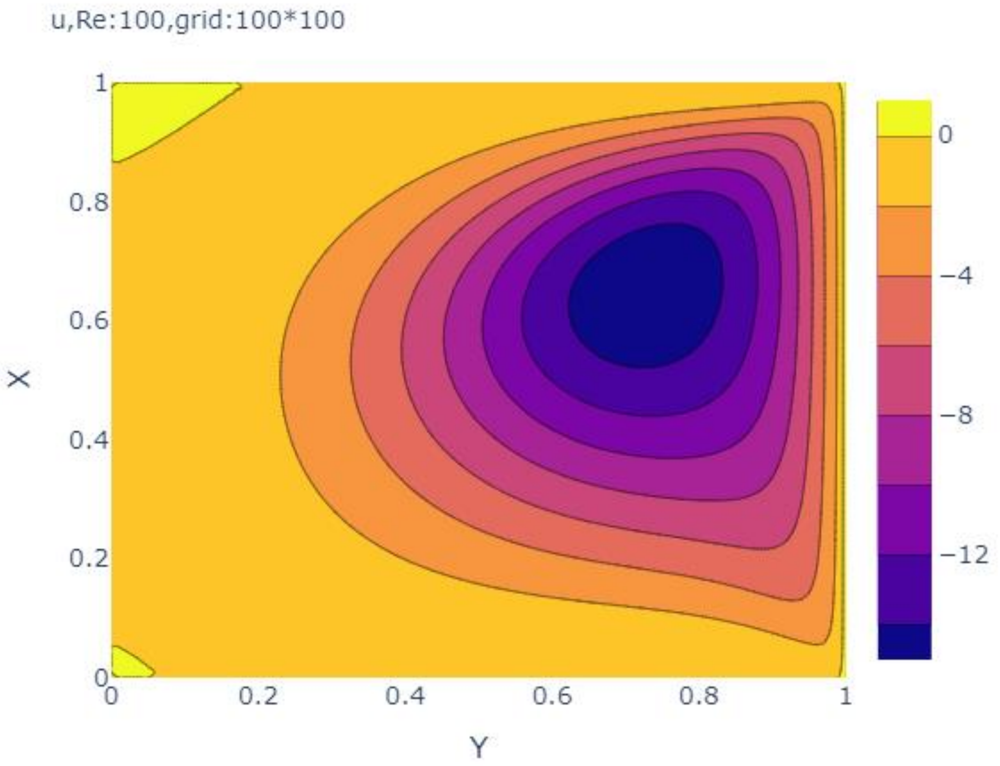

u,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
−2
−4
−6

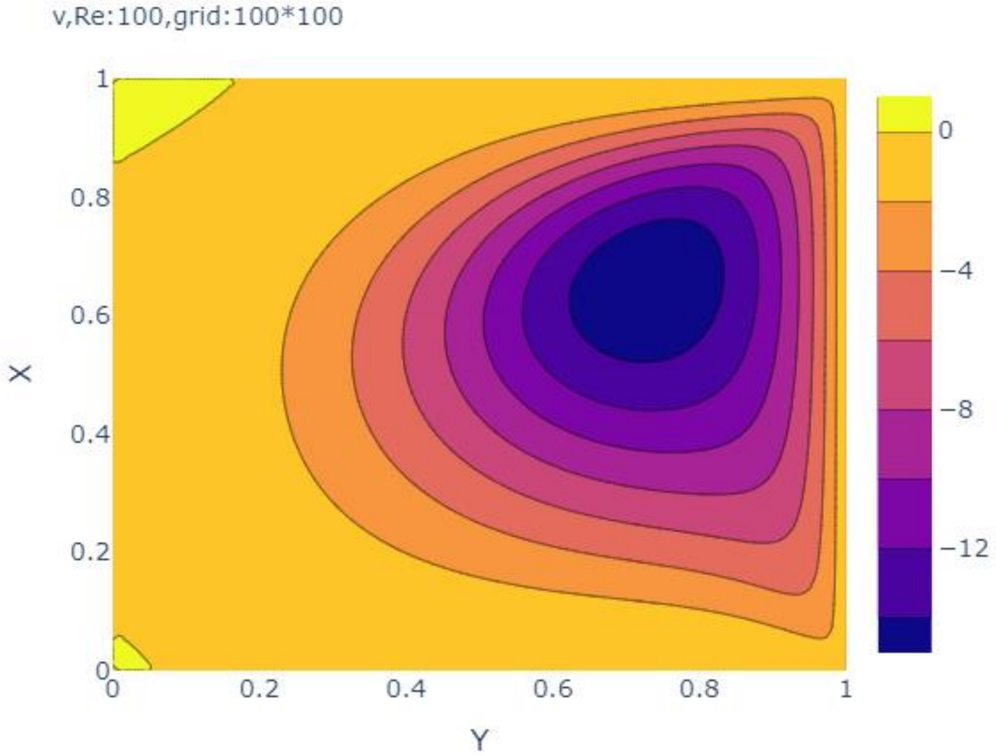

P,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
−10
−20
−30
−40

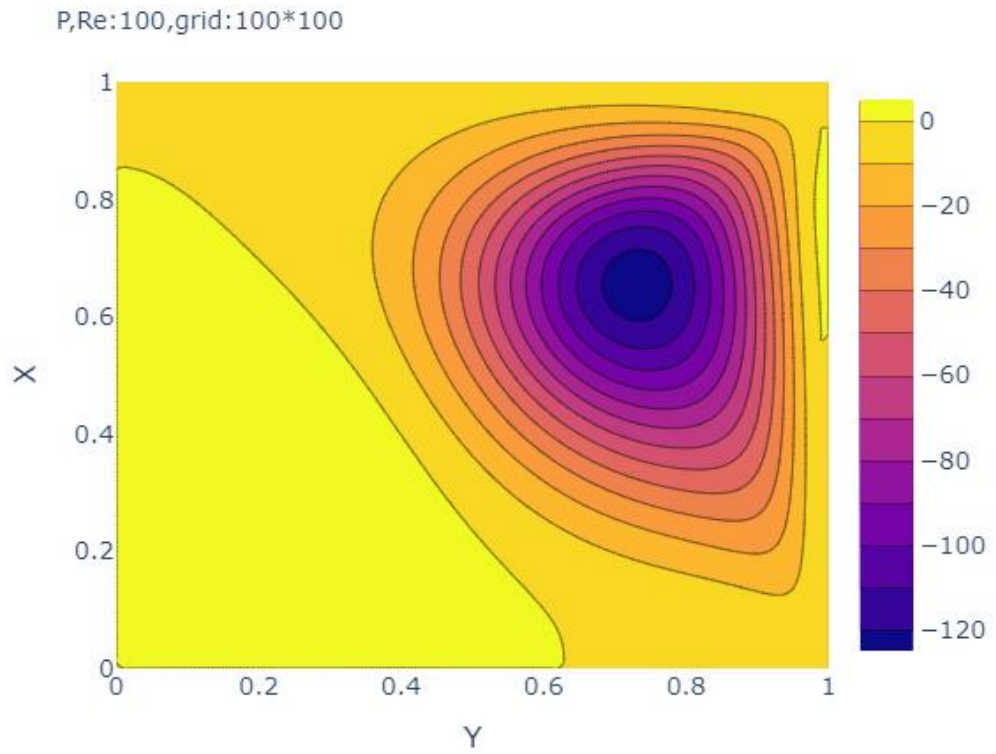
۶-۳ Re=۱۰۰


ω,Re:100,grid:100*100
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
100
0
−100
−200
−300

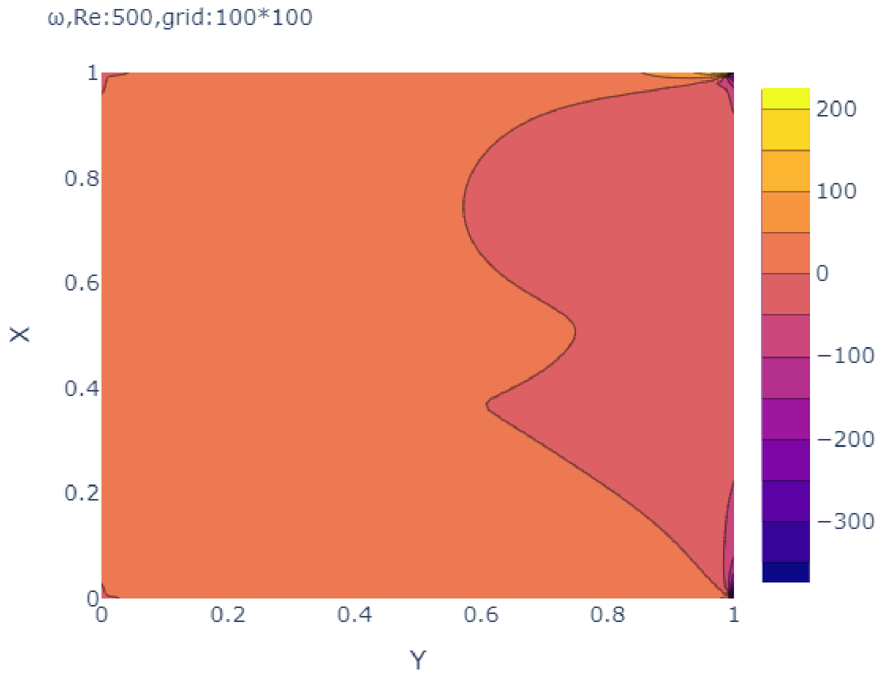

Ψ,Re:100,grid:100*100
1
0.8
0.6
X
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
0
−0.04
−0.08
−0.12

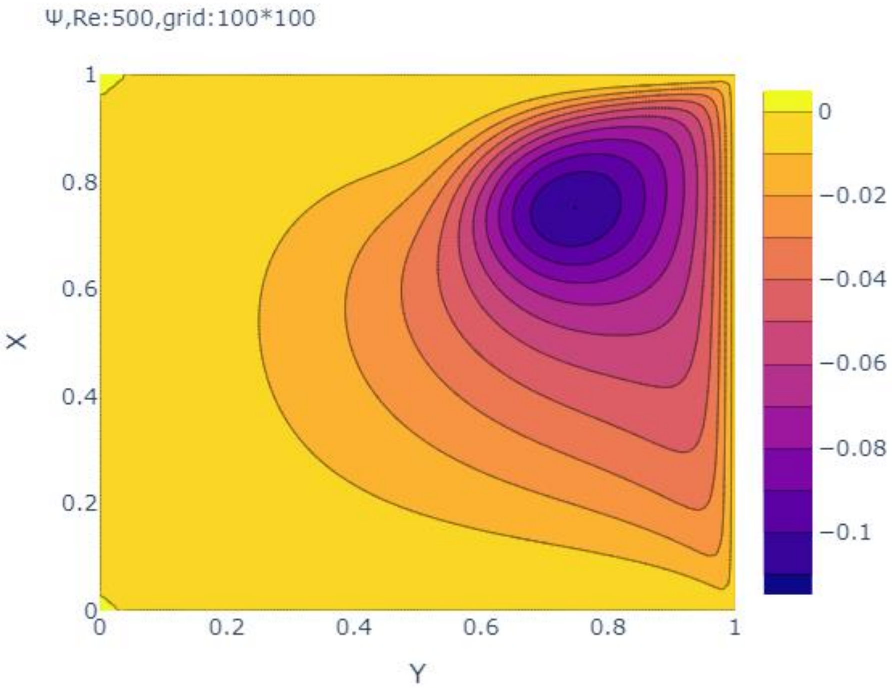

u,Re:100,grid:100*100
1
0.8
0.6
X
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
0
−4
−8
−12


v,Re:100,grid:100*100
1
0.8
0.6
X
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
0
−4
−8
−12

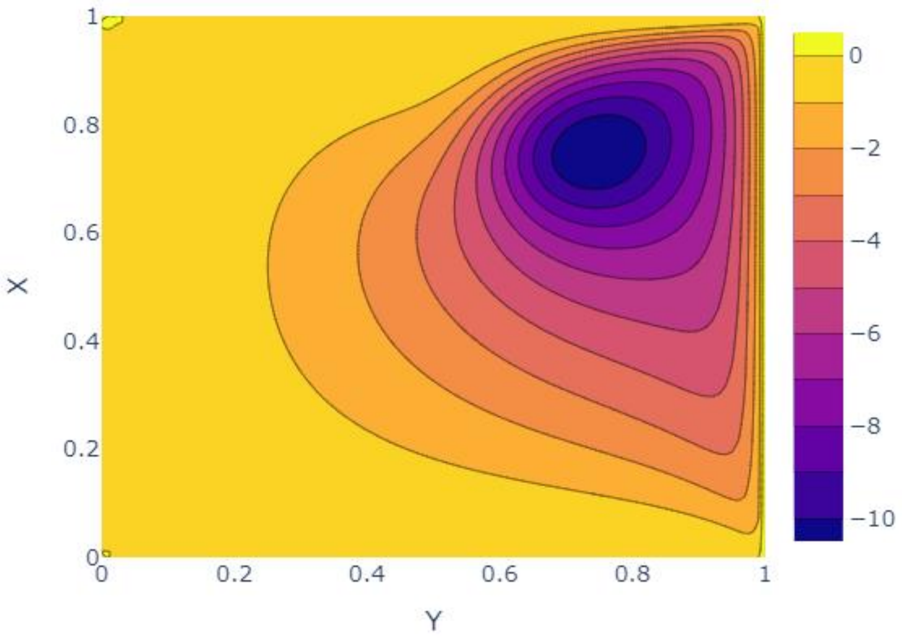

P,Re:100,grid:100*100
1
0.8
0.6
X
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120

۶-۴ Re=۵۰۰

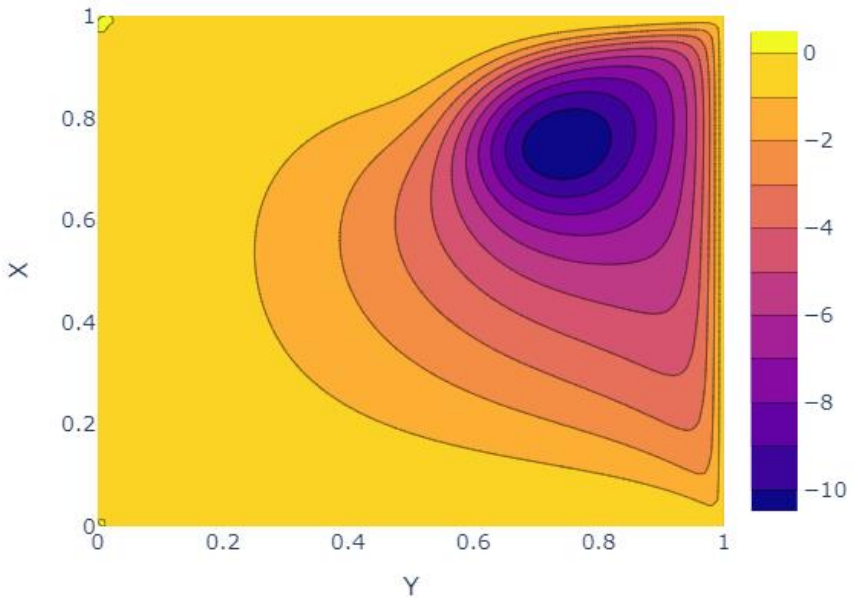

ω,Re:500,grid:100*100
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
200
100
0
−100
−200
−300


Ψ,Re:500,grid:100*100
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
X
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Y
0
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.1

u,Re:500,grid:100*100

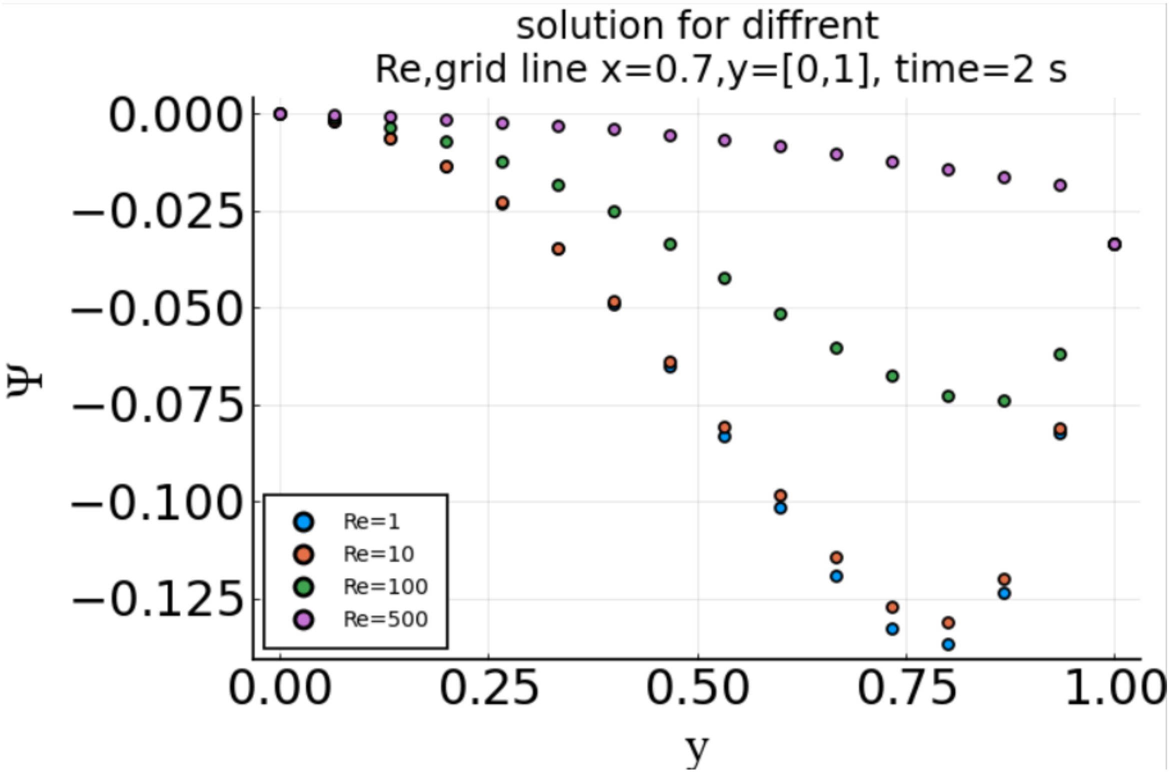


v,Re:500,grid:100*100



۷ تحلیل حساسیت پاسخ به پارامترهای روش عددی

نسبت به عدد Re برای یک سطر مشخص



۸ سخن پایانی درباره حل و کدها (Github)

منابع و مراجع

۱. Pawar, S. and O. San, *CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics.* Fluids, ۲۰۱۹. ٤(۳): p. ۱٥۹.

۲. Poochinapan, K., *Numerical Implementations for 2D Lid-Driven Cavity Flow in Stream Function Formulation.* ISRN Applied Mathematics, ۲۰۱۲. ۲۰۱۲: p. ۸۷۱٥۳۸.

۳. Gottlieb, S. and C.-W. Shu, *Total variation diminishing Runge-Kutta schemes*. Mathematics of computation, ۱۹۹۸. ٦۷(۲۲۱): p. ۷۳-۸٥.

٤. Arakawa, A., *Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I.* Journal of computational physics, ۱۹۹۷. ۱۳٥(۲): p. ۱۰۳-۱۱٤.

٥. Cassel, K. *Boundary Conditions for Vorticity-Streamfunction Formulation of the Navier-Stokes Equations*. ۲۰۲۲; Available from: https://www.youtube.com/watch?v=٥۰i۷rNJXfEg.