بنام خدا و برای خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی انرژی و فیزیک

پروژه پایانی درس CFD

مسئله ۱: Lid-driven cavity

مسئله ۲: Wedge Flow

نگارش

محمد رضا واعظی

استاد راهنما

دکتر حمید نادران

۱۴۰۱/۵/۹

فهرست مطالب

صفحه

بنام خدا و برای خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی انرژی و فیزیک

پروژه پایانی درس CFD

مسئله ۱: Lid-driven cavity

نگارش

محمد رضا واعظی

استاد راهنما

دکتر حمید نادران

۱۴۰۱/۵/۹

۱ مسئله ۱: Lid-Driven

۱-۱ مقدمه

۱-۱-۱ تعریف مسئله

مربعی به ضلع ۱ را در نظر بگیرید که تمام اضالع آن بجز ضلع باالا ساکن است. ضلع باالا سرعت افقی برابر ۱ به سمت راست دارد و سرعت عمودی آن صفر است. سیال درون مربع تراکم ناپذیر با چگالی ثابت است. مسئله را به ازای عدد رینولدز برابر ۱، ۱۰،۱۰۰ و ۵۰۰ حل و تحلیل کنید (راهنمایی: برای تغییر عدد رینولدز میتوانید ویسکوزیته سیال را تغییر دهید.) یکی از روشهای تراکمپذیری مصنوعی، روش ، روش تصویر یا روش تصحیح فشار را به دلخواه انتخاب کرده و پیاده کنید.

۱-۱-۲ معادلات حاکم

معادلات ۱-۱ معادله پیوستگی و ۱-۲ معادله مومنتوم برای سیال تراکم ناپذیر ویسکوز است. با فرض هم دما بودن معادله انرژی صرف نظر شده است.

$$\nabla . u = 0$$ **معادله ۱-۱**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \upsilon.\nabla^2 u$$ **معادله ۱-۲**

۱-۱-۳ شرایط مرزی

برای هر یک از متغیر ها v و u باید در مرز ها شرایطی تعریف شود با فرض غیر لغزندگی(no-slip) برای سطوح و عمود بر سطح(normal) میتوان این شرایط مرزی را مطابق معادلات ۱-۳ و ۱-۴ مشاهده کرد.

$$No-slip \Rightarrow u(x,y) = \begin{cases} 0 & x=0,y \\ 0 & x=1,y \end{cases}$$

$$normal \Rightarrow v(x,y) = \begin{cases} 0 & x=0,y \\ 0 & x=1,y \end{cases}$$ **معادله ۱-۳**

$$No - slip \Rightarrow u(x,y) = \begin{cases} 0 & y = 0, x \\ 1 & y = 1, x \end{cases}$$

$$normal \Rightarrow v(x,y) = \begin{cases} 0 & y = 0, x \\ 0 & y = 1, x \end{cases}$$

معادله ۴-۱

۱-۱-٤ مدلهای کمکی و شرایط مرزی(vorticity-stream function)

برای حل معادلات حاکم جریان تراکم ناپذیر و ویسکوز از روش vorticity-stream function کـه یـک روش متغیر های ثانویه است استفاده شده است. که عبارات و معـادلات کمکـی در معادلـه ۵-۱ تـا ۸-۱ عنوان شده است.[۱]

$$\omega = \nabla \times \vec{u}$$ معادله ۵-۱

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$ معادله ۶-۱

$$\nabla^2 \psi = -\omega$$ معادله ۷-۱

$$\underset{time.part}{\frac{\partial \omega}{\partial t}} = -\overbrace{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}.\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}^{part1} + \overbrace{\upsilon\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)}^{part2}$$

$$\upsilon = \frac{1}{\text{Re}} O(\Delta x^2, \Delta t^3)$$

معادله ۸-۱

پ.ن: معادله ۸-۱ از بخش ۷.۱ مقاله [۱] برداشته شده است

۱-۱-٤-۱ شرایط مرزی

طبیعی است که با تبدیل متغیر های اولیه به ثانویه باید شرایط اولیه را نیز تبدیل شـوند. مقـدار مشـتق جزئی تابع جریان که برابر سرعت است به عنوان شرایط مرزی تابع جریان تعریف می‌شـود. هـر کـدام از معادلات ۹-۱ و ۱۰-۱ به ترتیب برای جهت های افقی(x) و عمودی(y) از شرایط مرزی اولیه آورده شده است.

باید توجه داشت که مقدار $\frac{\partial \psi}{\partial n}=0$ که n میتواند برابر x و y باشد بیانگر مقدار نیست و ما مقدار ψ در شرایط مرزی را برابر صفر در نظر گرفته ایم. همچنین مقدار $\frac{\partial \psi}{\partial n}=1$ شرایطی دارد که در گسسته سازی شرایط مرزی توضیح داده میشود. صفر فرض نکردن ψ برای شرایط مرزی در نقطه (y=۱,x) تاثیر کمی در محاسبات دارد اما در شرایط مرزی vorticity اثر گذار است.

شرایط مرزی برای ω (vorticity) مطابق روش Jensen تعریف شده است که روشی مطابق مطالب کلاس دارد و از تشریح آن خود داری میشود و در بخش گسسته سازی (بخش ۲-۳-۲) به صورت گسسته و بر اساس ψ آورده شده است.

$$1-No-slip \Rightarrow u(x,y)=\begin{cases} 0 & x=0,y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=\psi=0 \\ 0 & x=1,y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=\psi=0 \end{cases}$$

$$2-normal \Rightarrow v(x,y)=\begin{cases} 0 & x=0,y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=\psi=0 \\ 0 & x=1,y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=\psi=0 \end{cases}$$

معادله ۹-۱

$$1-No-slip \Rightarrow u(x,y)=\begin{cases} 0 & y=0,x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=\psi=0 \\ 1 & y=1,x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=1,\psi=-\Delta y \end{cases}$$

$$2-normal \Rightarrow v(x,y)=\begin{cases} 0 & y=0,x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=\psi=0 \\ 0 & y=1,x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=\psi=0 \end{cases}$$

معادله ۱۰-۱

۱-۱-۵ تبدیل vorticity و stream function به فشار و سرعت

در مقالات این تبدیل متغییر های ثانویه به اولیه عنوان نشده است و مطالب عنوان شده در این بخش از مطالب تدریس شده آورده شده است. بعد از بدست آوردن تابع جریان و vorticity باید آن ها را به متغیر های اولیه

برای بدست آوردن سرعت u و v از معادله ۶-۱ و تجزیه تابع جریان در آن استفاده شده است. بدست آوردن توضیع فشار باید از معادله دو بعدی ۲-۱ گرادیان گرفت مطابق معادله ۱۰-۱. این کار باعث میشود تا دو معادله در دو بعد به یک معادله با مجهول فشار تبدیل شود. مطابق مطالب کلاس ساده شده معادله ۱-۱۰ در معادله ۱۱-۱ آورده شده است.

$$\nabla.\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}.\nabla\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\upsilon.\nabla^2\vec{u}\right]$$

معادله ۱۱-۱

$$\nabla^2 P=-\left[\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\left[u.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+v.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]+\left[v.\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y}+u.\frac{\partial^2 v}{\partial x.\partial y}\right]+\rightarrow$$

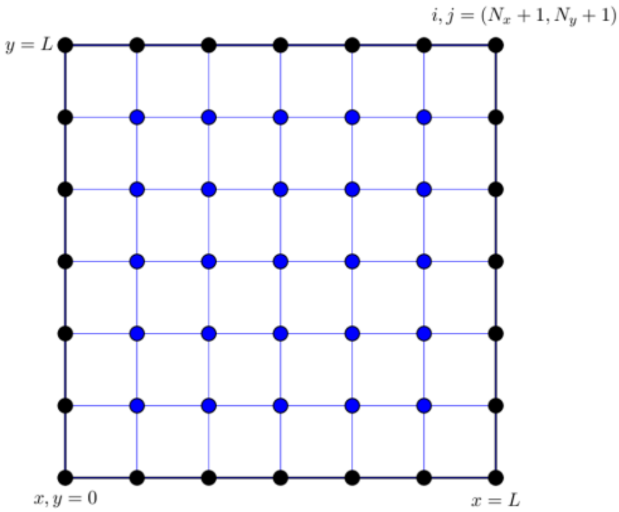
$$\rightarrow\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2\right]+\upsilon\times\left[\frac{\partial(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})}{\partial y}\right],\quad \upsilon=\frac{1}{\mathrm{Re}}$$

معادله ۱۲-۱

۱-۲ حل عددی

۱-۲-۱ شبکه محاسباتی

با توجه به دامنه کارتزین (مربعی بودن تمام مرز ها) و حل با روش تفاصل محدود، شبکه محاسـباتی بـه صورت مربعی و بر اساس دستگاه مختصات کارتزین مطابق شکل ... استفاده شده است.



رسم توضیحی ۱-۱-۲ مش بندی مورد نظر برای کد تفاضل محدود

۱-۲-۲ روش عددی

برای تجزیه هر بخش از معادلات حاکم بر اساس روش $\omega - \psi$ که در معادلات ۱-۷ و ۱-۸ عنوان شده است ما از روشی استفاده کرده ایم به آن هایی که از مقالات دیده استفاده شده این جا شرح داده شده است. باقی بخش ها (در صورت خطی بودن) جدول ... استفاده شده است.

جدول ۱-۱ جدول تجزیه تفاضل محدود با دقت مرتبه ۲ برای عبارات خطی[۲]

$\delta_x \psi_{i,j}$	$(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})/2h_x$
$\delta_y \psi_{i,j}$	$(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})/2h_y$
$\delta_{x^2} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j})/h_x^2$
$\delta_{y^2} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1})/h_y^2$
$\delta_{x^3} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i+2,j} - 2\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i-1,j} - \psi_{i-2,j})/2h_x^3$
$\delta_{y^3} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i,j+2} - 2\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j-2})/2h_y^3$
$\delta_{x^2 y} \psi_{i,j}$	$((\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) - 2(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) + (\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}))/2h_y h_x^2$
$\delta_{xy^2} \psi_{i,j}$	$((\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) - 2(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + (\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}))/2h_x h_y^2$
$\delta_{x^4} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i+2,j} - 4\psi_{i+1,j} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j})/h_x^4$
$\delta_{y^4} \psi_{i,j}$	$(\psi_{i,j+2} - 4\psi_{i,j+1} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j-2})/h_y^4$
$\delta_{x^2 y^2} \psi_{i,j}$	$((\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j-1}) - 2(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) + (\psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i-1,j} + \psi_{i-1,j-1}))/h_x^2 h_y^2$

۱-۲-۲-۱ راگه-کوتا (Runge-Kutta):

ما برای تجزیه بخش زمانی معادله حاکم(معادله...) از این پیکره پندی تجزیه استفاده کرده ایم راگه-کوتا مرتبه سوم برای گسسته سازی عبارت زمانی در معادله گرما استفاده می کنیم. ما از همان طرح تفاوت

مرکزی مرتبه دوم برای عبارت فضایی استفاده می کنیم .خطای برش این تقریب عددی معادله حرارتی $O(\Delta t^3)$است .با استفاده از سه مرحله از مرحله زمانی t^n به t^{n+1} حرکت می کنیم .ادغام زمـانی معادل ه حرارت با استفاده از طرح رانگ-کوتا مرتبه سوم در معادلات ۱-۲ تا ۴-۲ آورده شده است.[۳]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a$$ معادله ۱-۱۳

$$u_i^{(1)} = u_i^{(n)} + \Delta t(A)$$ معادله ۱-۱۴

$$u_i^{(2)} = \frac{3}{4}u_i^{(n)} + \frac{1}{4}u_i^{(1)} + \Delta t(A)$$ معادله ۱-۱۵

$$u_i^{(3)} = \frac{1}{3}u_i^{(n)} + \frac{2}{3}u_i^{(1)} + \frac{2}{3}\Delta t(A)$$ معادله ۱-۱۶

۱-۲-۲-۲ ژاکوبین:

معادله ۵-۲ بخشی از معادله حاکم عنوان شده در ۸-۱ است که بخشی غیر خطی در این معادلات است و برای تجزیه آن از ژاکوبین استفاده شده است. این طرح عددی دارای خاصیت بقای انرژی، آنستروفی و تقارن چولگی است و از ناپایداری های محاسباتی ناشی از برهمکنش های غیرخطی جلوگیری می کند . این طرح عددی دقت مرتبه دوم دارد و در معادلات ۵-۲ تا ۹-۲ آورده شده است.[۴]

$$J(\omega,\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}.\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$ معادله ۱-۱۷

$$J(\omega,\psi) = \frac{J_1(\omega,\psi) + J_2(\omega,\psi) + J_3(\omega,\psi)}{3}$$ معادله ۱-۱۸

$$J_1(\omega,\psi) = \frac{1}{4.\Delta x.\Delta y} \times \left[(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j})(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) - (\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1})(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \right]$$ معادله ۱-۱۹

$$J_2(\omega,\psi) = \frac{1}{4.\Delta x.\Delta y} \times \begin{bmatrix} \omega_{i+1,j}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) - \omega_{i-1,j}(\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}) \rightarrow \\ \rightarrow -\omega_{i,j+1}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) + \omega_{i,j-1}(\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}) \end{bmatrix}$$ معادله ۱-۲۰

$$J_3(\omega,\psi) = \frac{1}{4.\Delta x.\Delta y} \times \begin{bmatrix} \omega_{i+1,j+1}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j}) - \omega_{i-1,j-1}(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j-1}) \rightarrow \\ \rightarrow -\omega_{i-1,j+1}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j}) + \omega_{i+1,j-1}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j-1}) \end{bmatrix}$$ معادله ۱-۲۱

۱-۲-۲-۳ حل معادله پواسون

دو روش مختلف برای پیاده سازی حل کننده سریع پواسون برای دامنه تناوبی وجود دارد. یـک راه ایـن است که FFT ها را مستقیماً روی معادله پواسون انجام دهیم که دقت طیفی را به ما می دهد. روش دوم این است که ابتدا معادله پواسون را گسسته می کنیم و سپس FFT ها را روی معادله گسسته اعمال می کنیم. رویکرد دوم همان ترتیب مکانی دقت را به ما می دهد که طرح عددی مورد استفاده برای گسسته سازی استفاده می شود. ما از طرح اختلاف مرکزی مرتبه دوم ارائه شده در معادلـه ۱۱-۲ بـرای توسـعه یک حل کننده مستقیم پواسون استفاده می کنیم.

جایی در معادلات ۱۰-۲ و ۱۱-۲ که Δx و Δy فاصله شبکه در جهت‌های x و y است و $f_{i,j}$ عبارت مرجع در مکان‌های شبکه گسسته است .اگر معادله (۸۳) را در هر نقطه شبکه بنویسیم، سیستمی از معـادلات خطی به دست می آید .برای شرط مرزی دیریکله، فرض می کنـیم کـه مقـادیر $u_{i,j}$ زمـانی در دسـترس هستند که (x_i , y_j) یک نقطه مرزی باشد.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi=f$$

معادله ۱-۲۲

$$\frac{(u_{i+1,j}-2\times u_{i,j}+u_{i-1,j})}{\Delta x^2}+\frac{(u_{i,j+1}-2\times u_{i,j}+u_{i,j-1})}{\Delta y^2}=f_{i,j}$$

معادله ۱-۲۳

تبدیل فوریه یک تابع فضایی را به اجزای سینوس و کسینوس آن تجزیه می کند. خروجی تبدیل فوریـه تابعی در حوزه فرکانس آن است. با استفاده از تبدیل فوریه معکوس می توانیم تابع را از حـوزه فرکـانس آن بازیابی کنیم. ما از تابع و تبدیل فوریه آن در حوزه گسسـته اسـتفاده مـی کنـیم کـه تبـدیل فوریـه گسسته (DFT) نامیده می شود.[۱]

۱-۲-۳ گسسته سازی معادلات و شرایط مرزی

۱-۲-۳-۱ گسسته سازی معادلات

برای گسسته سازی معادله ۱-۷ و ۱-۸ ابتدا مقدار اولیه ایی برای ω با توجه به مقادیر مرزی و معادلات ۱-۹ و ۱-۱۰ فرض میکنیم و سپس با حل معادله پواسون (۱-۷) مقدار ψ را بر اساس ω بدست آورد بعد با مقادیر ψ و ω بخش ۱ را با استفاد از ژاکوبین (بیان شده در زیر فصل ۲-۲-۲) و بخش ۲ را با استفاده از تجزیه مرکزی عنوان شده در جدول ۱-۲ برای هر نقطه تجزیه میکنیم تا سمت راست معادله ۱-۸ را برای هر نقطه بدست آورید و بعد سمت عبارت بدست آمده را به عنوان a در معادله ۱-۲ فرض و با استفاده از تجزیه رانگه-کوتا گام زمانی بعدی را برای ω بدست آورد و از ω جدید به همین ترتیب در زمان جلو میرویم. با رسیدن به شرایط گام زمانی که بدون تغییر و ثابت به شرایط پایا رسیده ایم.

دقت رانگه-کوتا دقت زمانی(دقت مرتبه ۳) و تجزیه بخش ۱ (دقت مرتبه ۲) و بخش ۲ (دقت مرتبه ۲) دقت مکانی حل را مشخص میکند. به این ترتیب دقت معادلات تجزیه شده حداقل $O(\Delta x^2, \Delta t^3)$است.

گسسته سازی شرایط مرزی

برای گسسته سازی باید به دقت تجزیه معادلات توجه داشته و طبق قضیه .... حداقل ۱ مرتبه از دقت معادلات کم تر باشد به همین منظور ما برای شرایط مرزی از روش .... که دقت مرتبه ۲ دارد استفاده کردیم که در معادلات ۲-۱۲ و ۲-۱۳ عنوان شده است[۵]. این معادلات در کنار شرایط مرزی که برای ψ بیان شده است مقادیر ψ و ω در مرز ها را بیان می‌کند.

$$\omega_{i,1} = \frac{1}{2.\Delta y} \times [7 \times \psi_{i,1} - 8 \times \psi_{i,2} + \psi_{i,3} - 6 \times \Delta y \times u_0] + O(\Delta y^2)$$ معادله ۱-۲۴

$$\omega_{i,ny+1} = \frac{1}{2.\Delta y} \times [7 \times \psi_{i,ny+1} - 8 \times \psi_{i,ny} + \psi_{i,ny-1} - 6 \times \Delta y \times u_0] + O(\Delta y^2)$$ معادله ۱-۲۵

شرایط مرزی ψ در معادله پواسون در معادلات ۱-۹ و ۱-۱۰ بیان شده است و بیان کردیم که عبارت $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 1, \psi = -\Delta y$ را در این بخش توضیح میدهیم. ما با تجزیه مرکزی و فرض صفر برای مقدار ψ در نیم فاصله مقادیر ψ در مرز را بدست می آوریم.[۲]

معادله ۱-۲۶

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{i,ny+1}=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\psi_{i,ny+2}-\psi_{i,ny+1}}{\Delta y}=1\\ \psi_{i,ny+\frac{1}{2}}=0\end{cases}\Rightarrow\psi_{i,ny+1}=-\Delta y$$

۱-۲-۳-۲ معادلات تبدیل $\omega-\psi$ به P-v-u

بعد از محاسبه ی $\omega-\psi$ که متغییر های ثانویه هستند آن ها را به متغیر هـای اولیـه P-v-u تبـدیل کنیم. ابتدا از روی ψ مقادیر سرعت u و v را با تجزیه مرکز معادله ۶-۱ از روی جدول ۱-۲ بدست مـی آوریم سپس با استفاده از مقادیر سرعت و تجزیه معادله ۱۲-۱ با استفاده از جـدول ۲-۱ عبـارت مرجـع معادله پواسون فشار بدست می آوریم. سپس با حل معادله پواسون فشار با شرایط مرزی دریکله توضـیع فشار را بدست می آوریم.

۱-۳ پارامترهای حل و دامنه

برای این مسئله مطابق صورت عدد رینولدز به عنوان متغیر حل عنوان شده است و تحلیل حساسیت بـر اساس آن انجام شده است.

Re : عدد رینولدز کمیت بدون یکای مهمی است که در مکانیک سیالات برای پیش‌بینی الگوی جریان از آن استفاده می‌شود. این عدد نسبت نیروی لختی به نیروی گرانروی می‌باشـد. در اعـداد رینولـدز پـایین تمایل جریان به داشتن الگویی آرام و لایه ای می باشد، در حالیکه در اعداد رینولدز بالا جریان به حالـت آشفته در می‌آید. عدد رینولدز کاربردهای فراوانی از قبیل جریان مایع داخل لوله تا جریان هوا روی بـال هواپیما دارد. از عدد رینولدز برای پیش‌بینی گذر جریان از آرام به آشفته استفاده می‌شود و هم‌چنین در پیش‌بینی و تعیین جریان در اطراف یک مدل ماکت و کوچک با مدل اندازه اصلی و بزرگ کاربرد دارد.

و مقدار آن از ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۵۰۰ تغییر می‌دهیم.

ω : گردابه یک میدان شبه بردار است که حرکت چرخشی محلی یک پیوستار را در نزدیکی نقطه ای توصیف می کند همانطور که توسط ناظری که در آن نقطه قرار دارد و همراه با جریان حرکت می کند مشاهده می شود.

ψ : تابع جریان است که عنوان متغیر ثانویه برای حل معادله نویر-استوکس در حالت تراکم ناپذیر استفاده شده است.

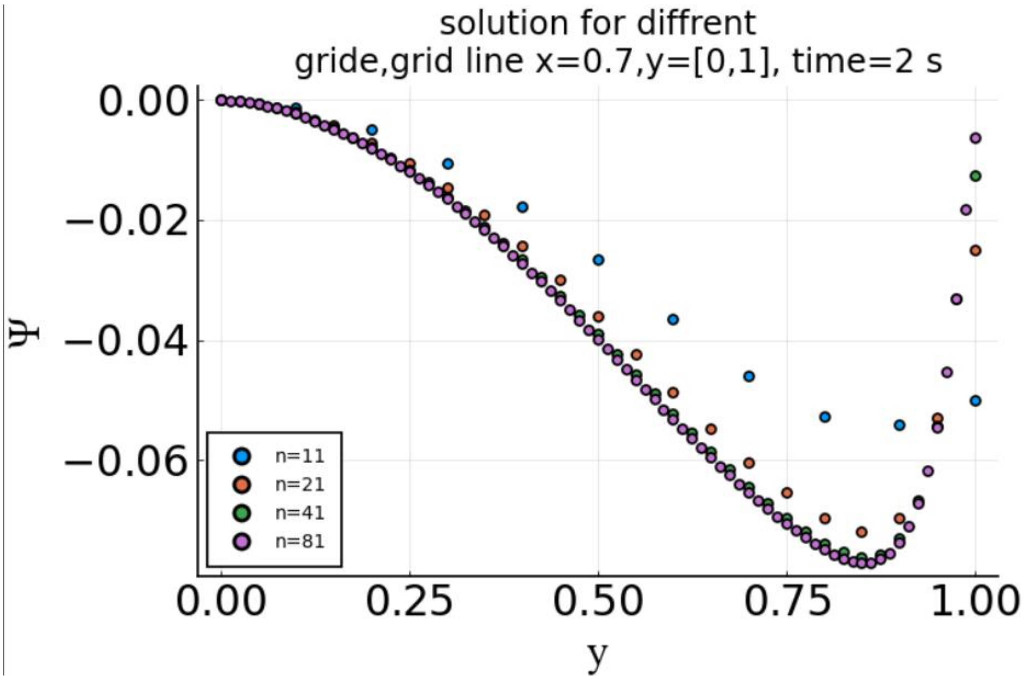
u : سرعت در راستای افق (x) است.

v : سرعت در راستای عمود (y) است.

۱-۴ آنالیز خطا

برای تحلیل خطا و بررسی همگرایی مطابق گفته های کلاس و تمرین های قبل عمل میکنم برای این که مسئله دو بعدی است یک خط از مش بندی منظم (dx=dy) را در نظر میگیریم (ما x=۰٫۷ را در نظر گرفتیم) و سپس به در آن خط به بررسی خطای پیاپی (successive Error) میپردازیم. سپسش در نمودار … شیب لگاریتمی خطا پیاپی بر اساس h (فاصله مش ها) بدست می آوریم همان طور که انتظار داریم دقت مکانی تجزیه حدود مرتبه ۲ است.

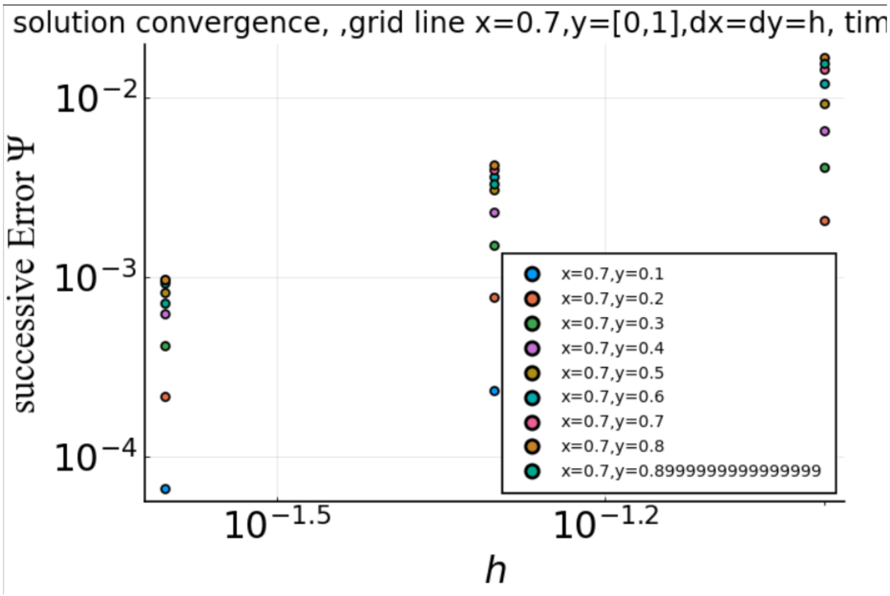
۱-۴-۱ تحلیل استقلال از شبکه محاسباتی



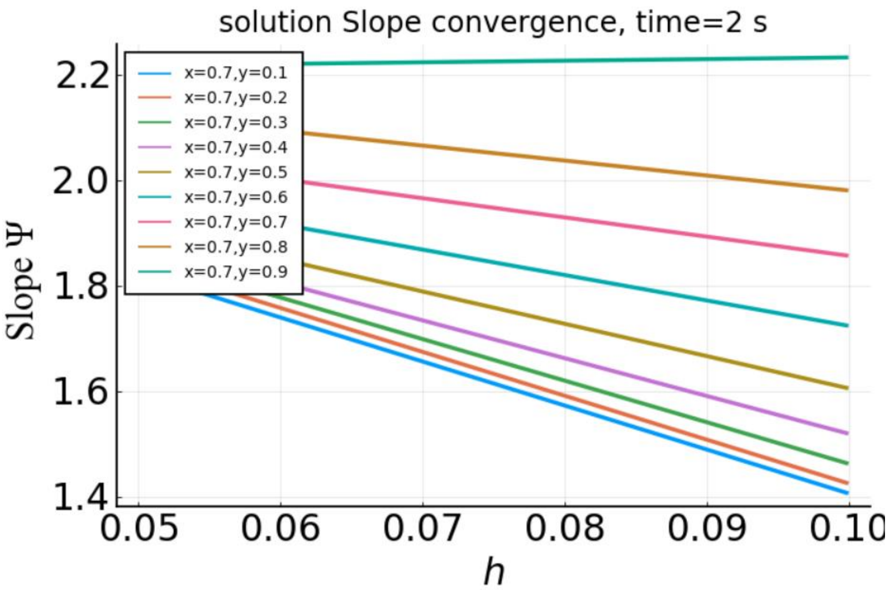
رسم توضیحی ۱-۱-۴ رسم نقاط محاسبه برای خط x=۰٫۷ برای تقسیم بندی محاسباتی مختلف (n تعداد نقاط محاسبانی برای هر بعد)

۱-۱-٤-۱ همگرایی در گام مکانی (شبکه مکانی)

همانطور که گفته شد برای بررسی همگرایی و کاهش خطا با کاهش فاصله مش ها در نمودار های ۲-۴ و ۳-۴ قابل مشاهده است.



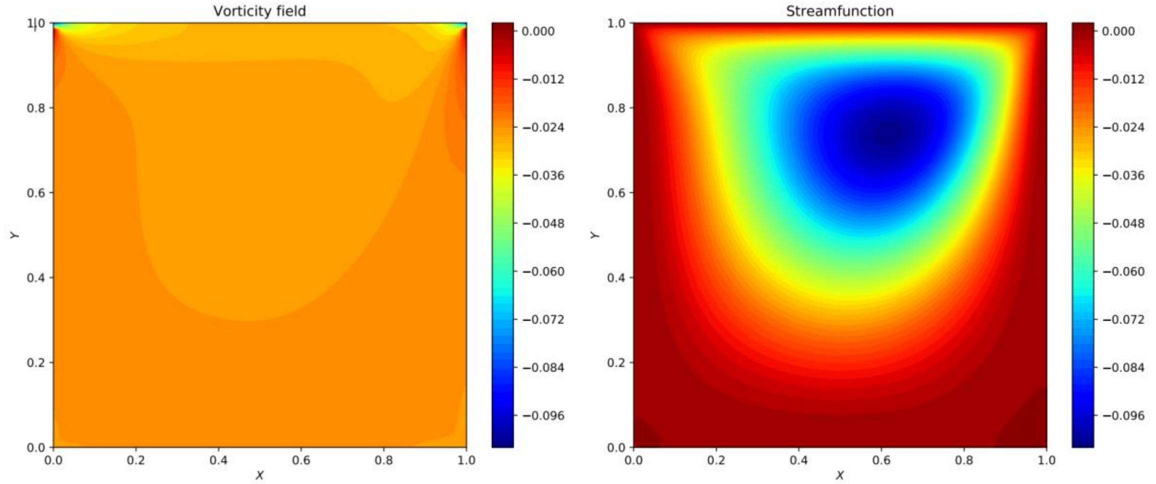
رسم توضیحی ۱-۲-۴ خطای پیاپی برای یک خط مش در x=۰٫۷ و h=dx=dy



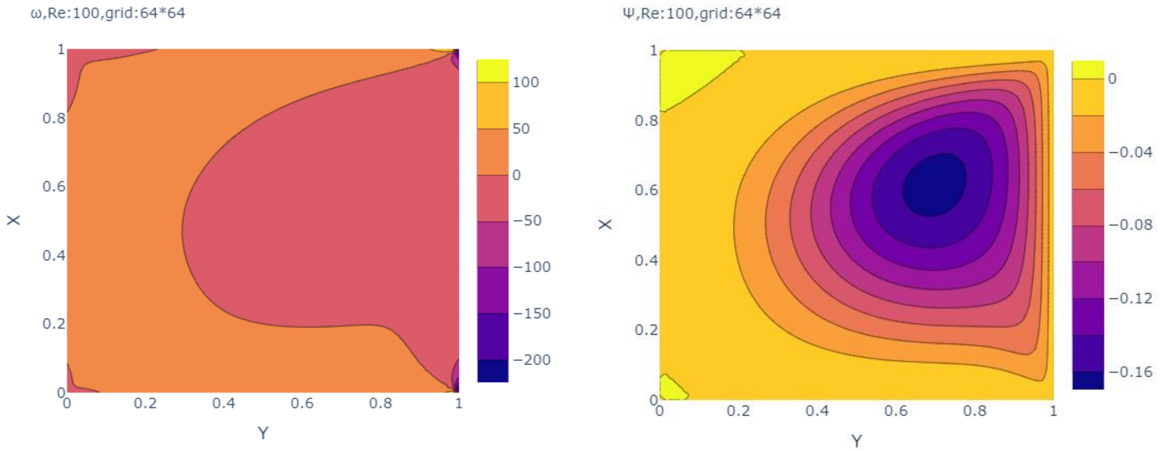
رسم توضیحی ۱-۳-۴ شیب لگاریتمی خطای پیاپی برای یک خط مش در x=۰.۷ و h=dx=dy

۱-۵ صحت سنجی نتایج با نتایج مقالات

شکل ۱-۵ نتایج مقاله برای رینولدز برابر ۱۰۰ و مش بندی ۶۴*۶۴ و زمان از تا ۱۰ ثانیه مطابق شکل زیر بدست آورده است و با این مشخصات ما کد را حل کرده و شکل ۲-۵ آورده ایم همان طور که قابل مشاهده است این نتایج نزدیکی زیادی به هم دارند.

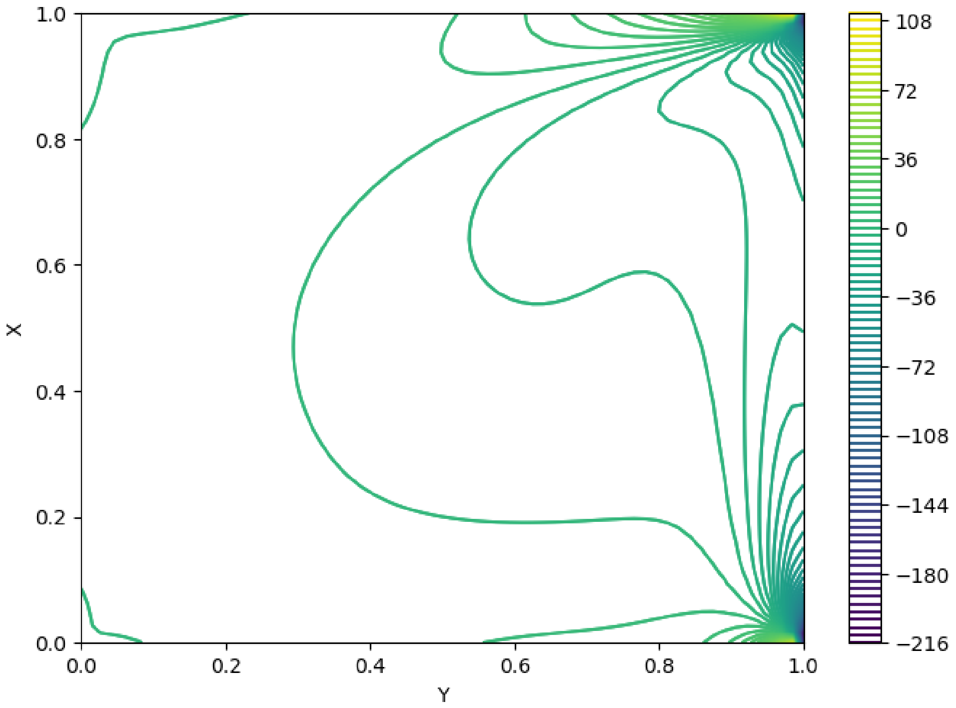


رسم توضیحی ۱-۱-۵ تابع جریان و گردابی در مقاله مرجع[۱]



رسم توضیحی ۱-۲-۵ تابع جریان و گردابی در کد نوشته شده (دقت شود در کد محور عمودی جهت x است)

برای آن که در نمودار رسم شده با PlotJs (رسم توضیحی ۵-۲) جزئیات کمتری دارد جریان گردابـی را در شکل ۵-۳ با جزئیات بیشتر رسم شده است.

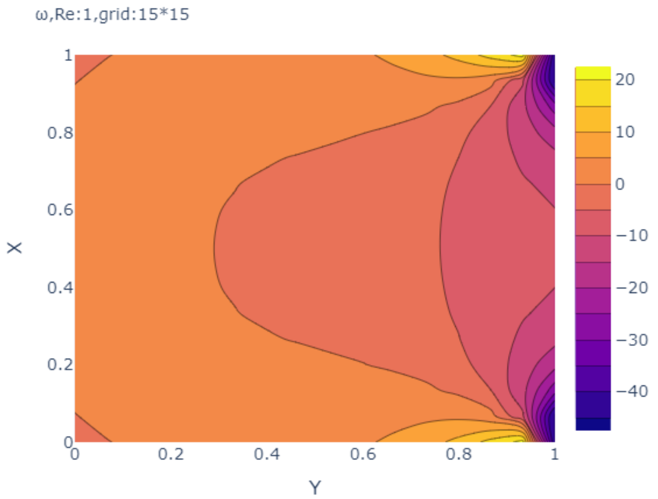


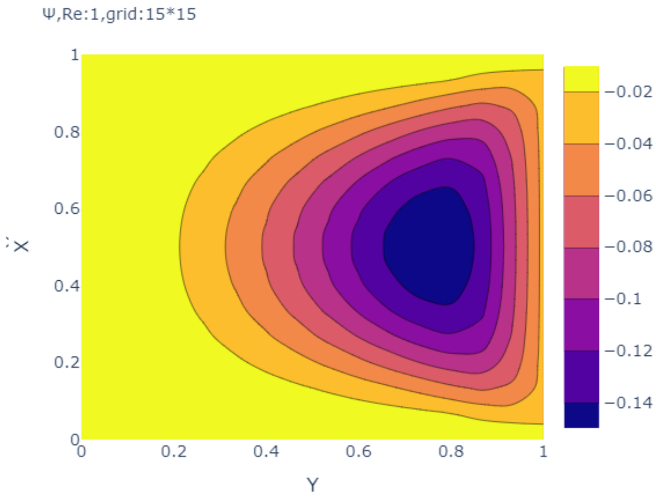
رسم توضیحی ۱-۳-۵ جریان گردابی برای مش ۶۴*۶۴ و Re=۱۰۰، رسم شده با PyPlot

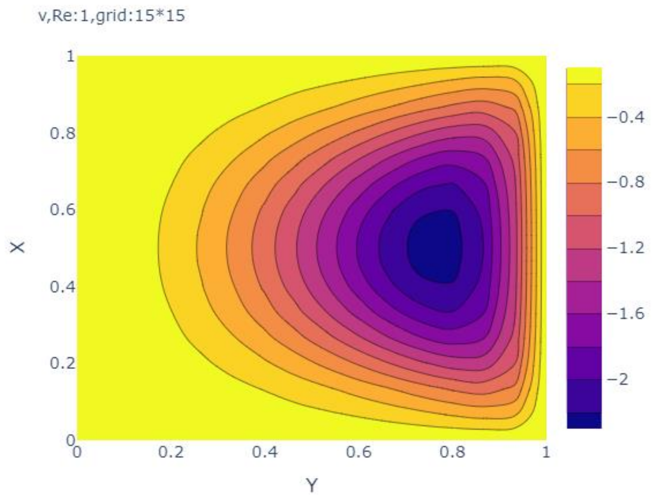
۱-٦ آشکارسازی جریان و بحث درباره آن

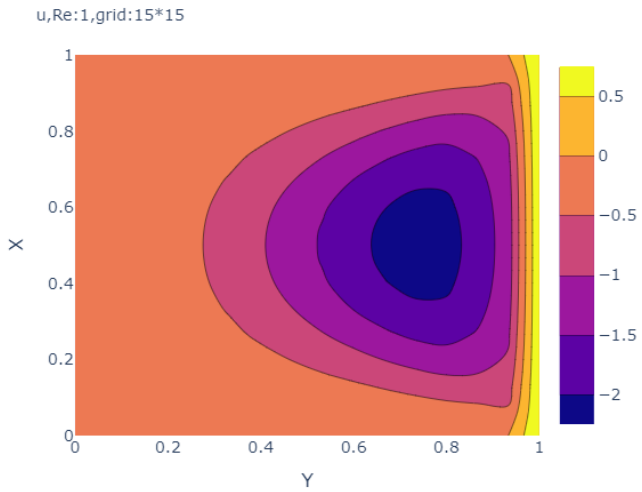
پارامتر مسئله در صورت عدد رینولدز بیان شده است و نتایج متغیر های اولیه و ثانویه برای هر عدد رینولدز در این بخش به صورت کانتور آورده شده است.

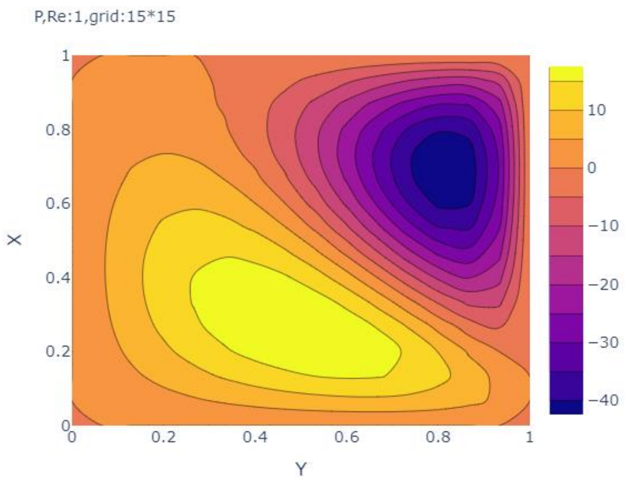
۱-٦-۱ Re=۱


ω,Re:1,grid:15*15
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
20
10
0
−10
−20
−30
−40

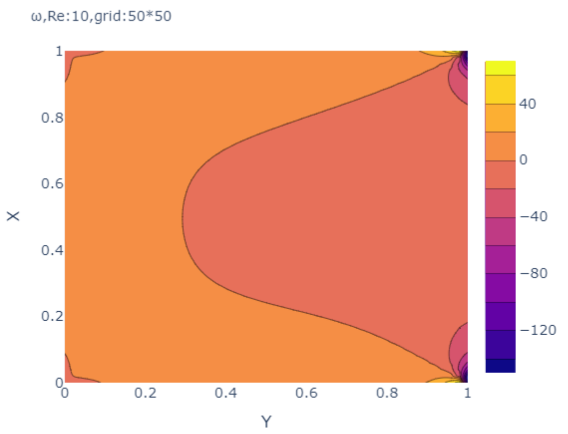

Ψ,Re:1,grid:15*15
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.1
−0.12
−0.14

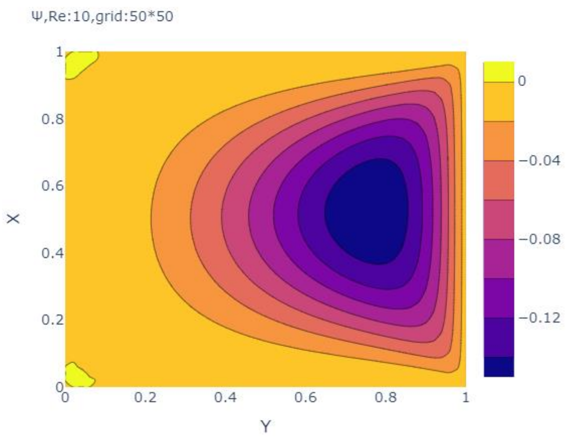

v,Re:1,grid:15*15
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
−0.4
−0.8
−1.2
−1.6
−2

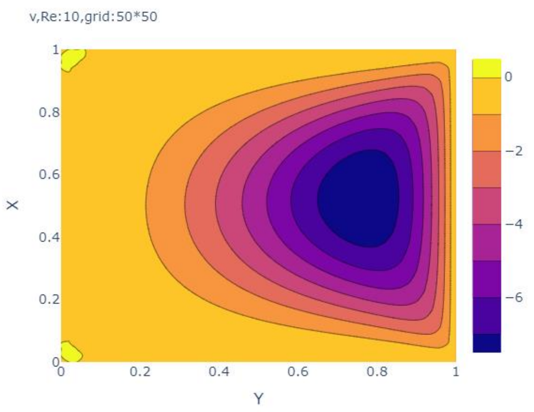

u,Re:1,grid:15*15
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2

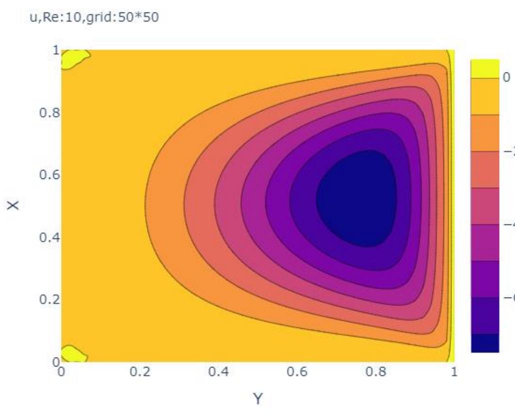

P,Re:1,grid:15*15
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
10
0
−10
−20
−30
−40

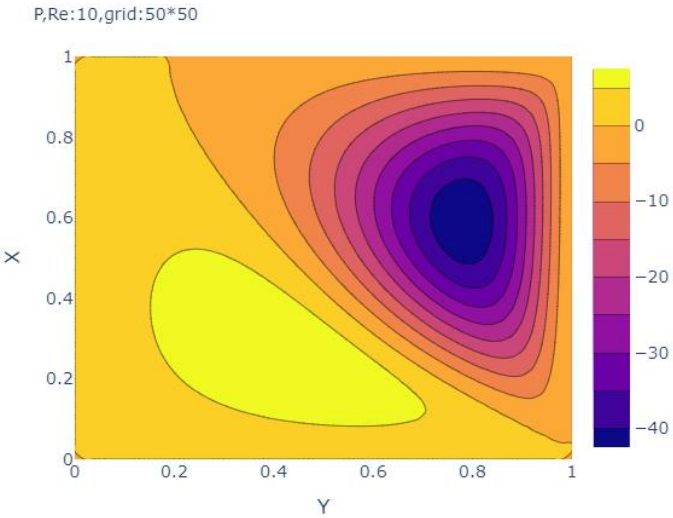
۱-۶-۲ Re=۱۰


ω,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
40
0
−40
−80
−120

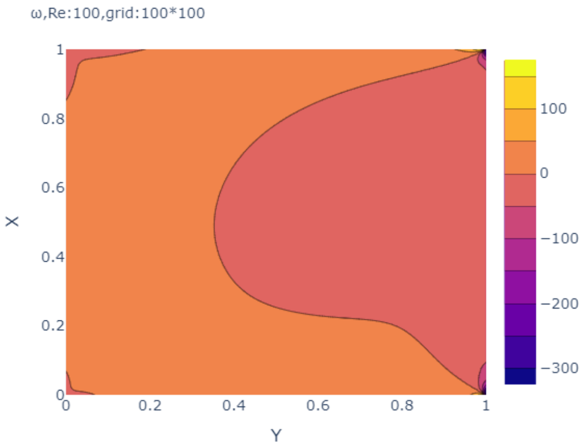

Ψ,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
−0.04
−0.08
−0.12

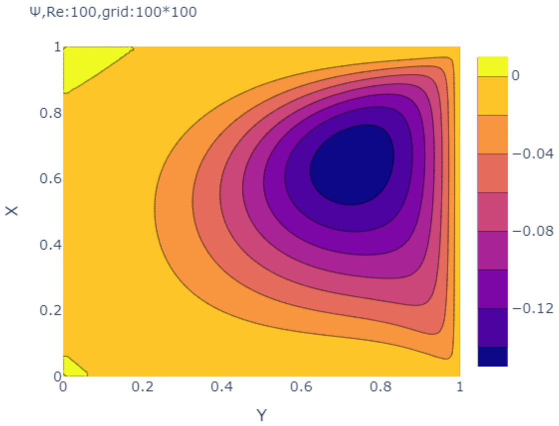

v,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
−2
−4
−6

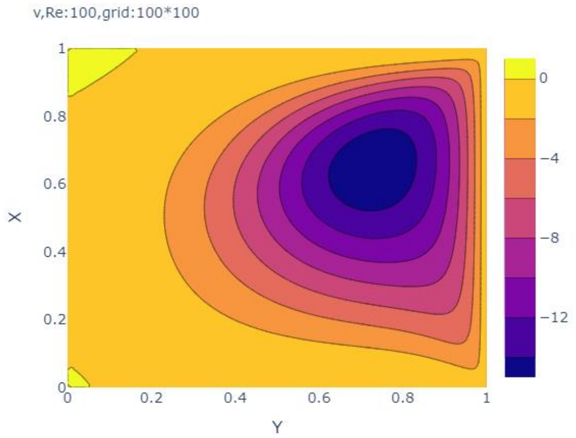

u,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
−2
−4
−6

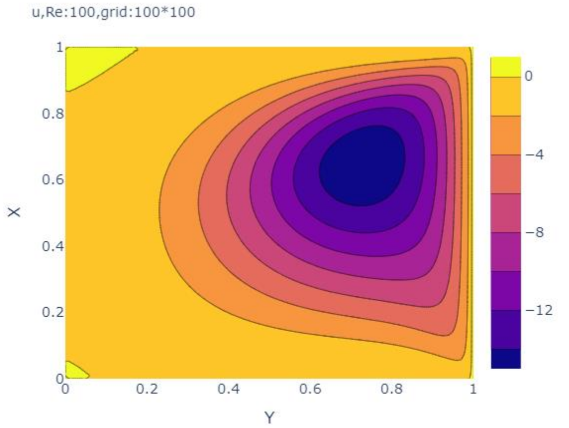

P,Re:10,grid:50*50
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
−10
−20
−30
−40

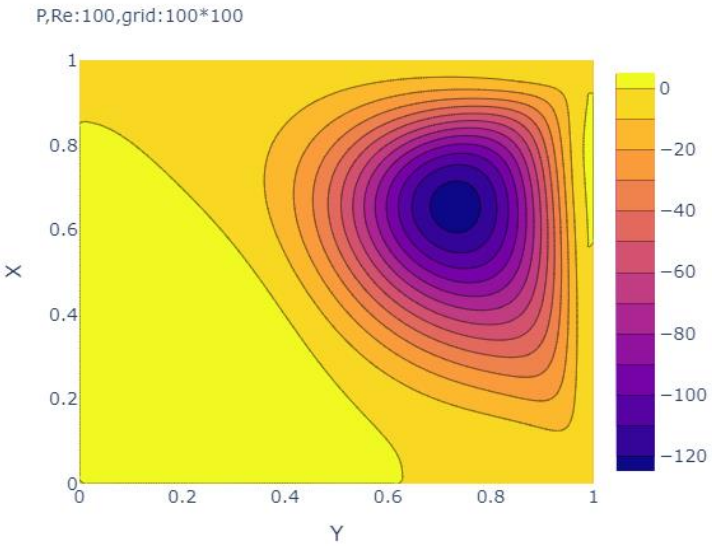
۱-۶-۳ Re=۱۰۰


ω,Re:100,grid:100*100
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
100
0
−100
−200
−300

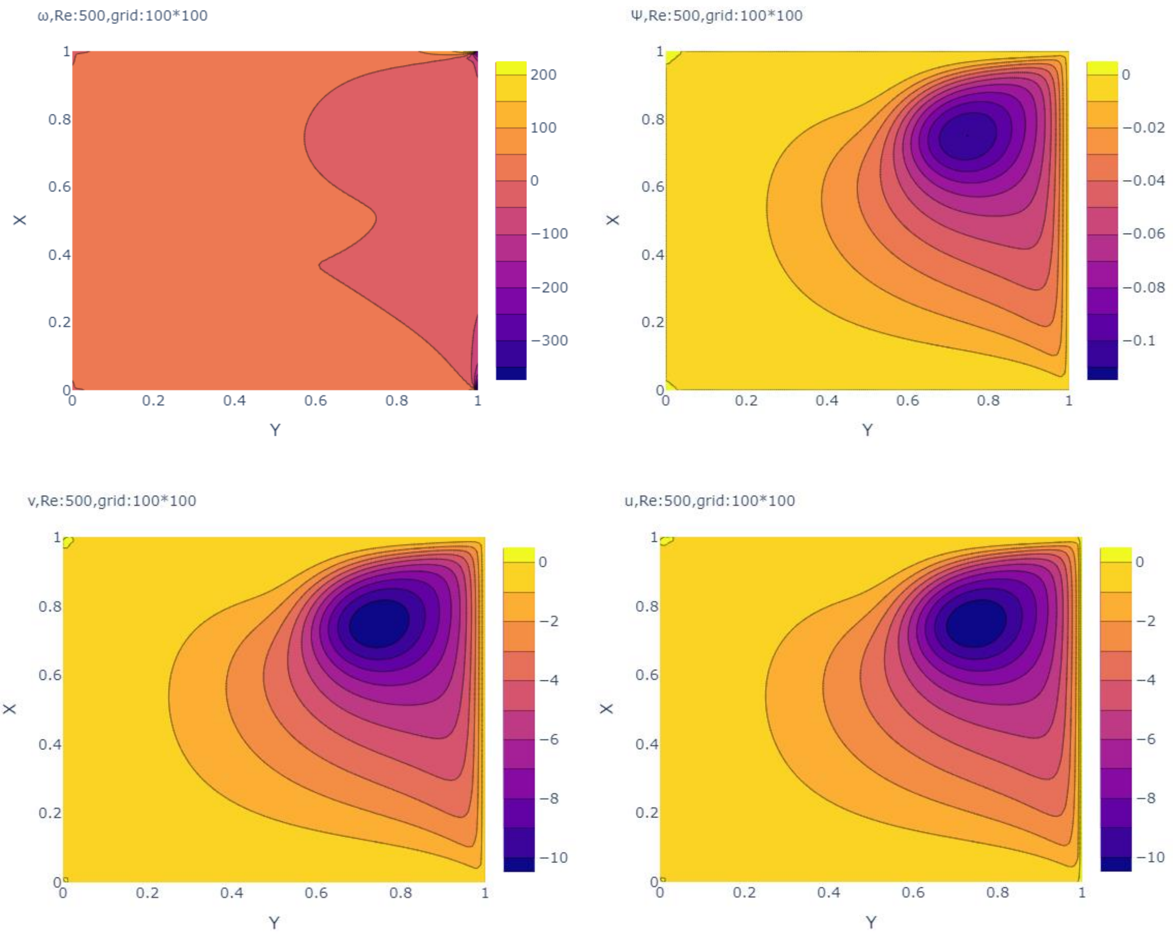

Ψ,Re:100,grid:100*100
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
−0.04
−0.08
−0.12

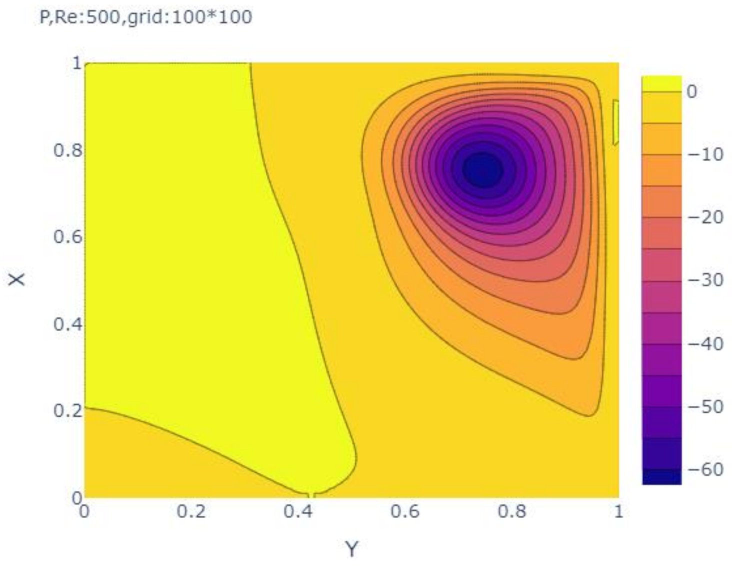

v,Re:100,grid:100*100
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
−4
−8
−12


u,Re:100,grid:100*100
X
Y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
−4
−8
−12


P,Re:100,grid:100*100
X
Y
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120

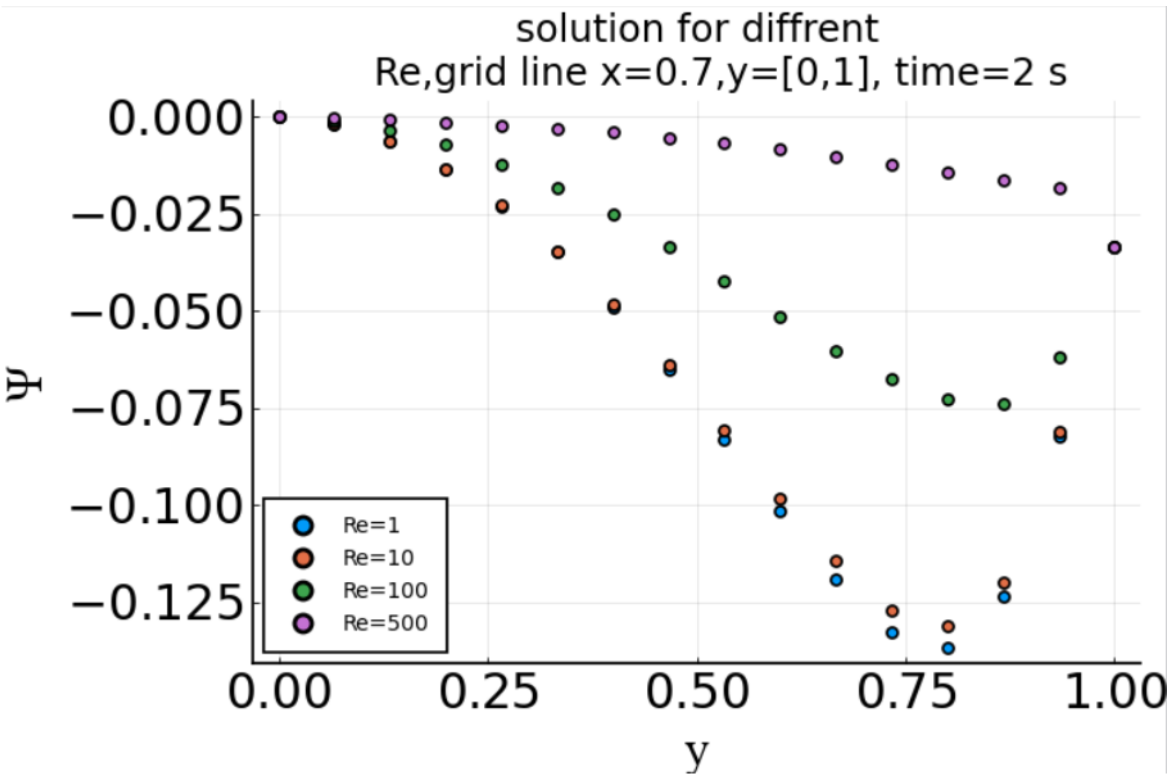
۱-۶-۴ Re=۵۰۰


ω,Re:500,grid:100*100
Ψ,Re:500,grid:100*100
v,Re:500,grid:100*100
u,Re:500,grid:100*100
X
Y



۷-۱ تحلیل حساسیت پاسخ به پارامترهای روش عددی

تحلیل حساسیت نسبت به عدد Re برای یک سطر مشخص انجام شده است همان طور که از نمودار



رسم توضیحی ۱-۱-۷ تحلیل حساسیت نسبت به Re برای یک سطر مش عمودی x=۰٫۷

۱-۸ سخن پایانی درباره حل و کدها (Github)

کد این سوال به وسیله زبان Julia نوشته شده است اما بخش های از آن مانند حل معادلاه پواسون از توابع و کتاب خانه های Python استفاده شده است که در Julia قابل استفاده است. به همین دلیل ممکن است در کتاب خانه FFTW و با دستور [Pkg.add("FFTW")] استفاده شود.

برای استفاده از و اجرای Python در Julia از لینک میتوان کمک گرفت.

ما برای رسم کانتور مجبور به استفاده از API ی atom شدیم هر یک از توابع تعریف شده در برای دیدن نمودار ها را میتوان بعد اجرا با کلید ترکیبی shift+Enter برای یک خط (خط کد نمودار) مورد نظر استفاده کرد. به علاوه برای تغییرات کوچک از تغییر دستی متغیر ها استفاده شده است.

کد ها گزارش جدا گانه در لینک زیر در Github قرار داده شده است. (کلیک کنید)

https://github.com/mrv۰۱۳/final_CFD_Project/tree/master/Lid-driven

۱-۹ منابع و مراجع

۱. Pawar, S. and O. San, *CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics.* Fluids, ۲۰۱۹. ٤(۳): p. ۱٥۹.

۲. Poochinapan, K., *Numerical Implementations for 2D Lid-Driven Cavity Flow in Stream Function Formulation.* ISRN Applied Mathematics, ۲۰۱۲. ۲۰۱۲: p. ۸۷۱٥۳۸.

۳. Gottlieb, S. and C.-W. Shu, *Total variation diminishing Runge-Kutta schemes.* Mathematics of computation, ۱۹۹۸. ٦۷(۲۲۱): p. ۷۳-۸٥.

٤. Arakawa, A., *Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I.* Journal of computational physics, ۱۹۹۷. ۱۳٥(۲): p. ۱۰۳-۱۱٤.

۵. Cassel, K. *Boundary Conditions for Vorticity-Streamfunction Formulation of the Navier-Stokes Equations*. ۲۰۲۲; Available from: https://www.youtube.com/watch?v=۵۰i۷rNJXfEg.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی انرژی و فیزیک

پروژه پایانی درس CFD

مسئله ۱: wedege

نگارش

محمد رضا واعظی

استاد راهنما

دکتر حمید نادران

۱۴۰۰/۵/۹

۲ مسئله ۲: Wedge Flow

۲-۱ مقدمه

۲-۱-۱ تعریف مسئله

برای حل جریان سیال تراکم پذیر غیر ویسکوز از روی یک گوه با زاویه گوه برابر ، دامنه نشان داده شده در شکل سمت راست در نظر گرفته میشود. شرایط مرزی مناسب را برای این دامنه تعریف کنید و با استفاده از یکی از روشهای زیر مساله را حل کنید. عدد ماخ جریان آزاد برابر ۱.۲ و ۲.۵ و نیم‌زاویه گوه برابر با ۱۵ و ۳۵ درجه است.

۲-۱-۲ معادلات حاکم

معادلات ۱-۱ معادله پیوستگی و ۱-۲ معادله مومنتوم برای سیال تراکم پذیر ناویسکوز است. با فرض هم دما بودن از تغییر انرژی داخلی بر اثر دما صرف نظر شده است.

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{G}}{\partial y}=0$$ معادله ۱-۲

$$q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+P\\ \rho uv\\ \rho uh\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+P\\ \rho uh\end{bmatrix}$$ معادله ۲-۲

$$h=e+\frac{P}{\rho},\quad P=\rho\times(\gamma-1)(e+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2)$$

۲-۱-۳ شرایط مرزی

مرز های سیستم به ۳ نوع تقسیم بندی میشوند. نوع اول(معادله ۳-۱) مرز آزاد است که جریان از آن عبور میکند در این نوع مشخصات نقاط سایه ایی برابر نقاط بالادست آن ها است. نوع دوم(معادله ۴-۱) مرز ورودی این شرایط در این مرز در نقطه پایین دست (نقطه ایه ایی) ثابت و برابر مقدارمشخص است. نوع سوم(معادله ۵-۱) مرز باز تابی است؛ این مرز نوعی تنظیم میشود تا مقدار شار برای سرعت صفر

شود به این صورت که فشار و انرژی داخلی در نقاط سایه ایی مشابه نقاط بالادست و سرعت خلاف جهت شار تنظیم میشود در این حالت شار در مرز صفر یا نزدیک آن بدست می آید.

میتوان این شرایط مرزی را مطابق معادلات ۳-۱ و ۴-۱ مشاهده کرد.

$$q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix}\quad Type1\Rightarrow q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix}$$ **معادله ۳-۲**

$$q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix}\quad Type2\Rightarrow q=\begin{bmatrix}\rho_0\\ -\rho_0 u_0\\ -\rho_0 v_0\\ \rho_0 e_0\end{bmatrix}$$ **معادله ۴-۲**

$$q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{bmatrix}\quad Type3\Rightarrow q=\begin{bmatrix}\rho\\ -\rho u\\ -\rho v\\ \rho e\end{bmatrix}$$ **معادله ۵-۲**

۲-۱-٤ مدلهای کمکی و شرایط مرزی(تفکیک شارRoe)

روش تفکیک شار رو از لحاظ مفهوم از مقالات([۶] ، [۱]و[۷])و کتاب[۸]

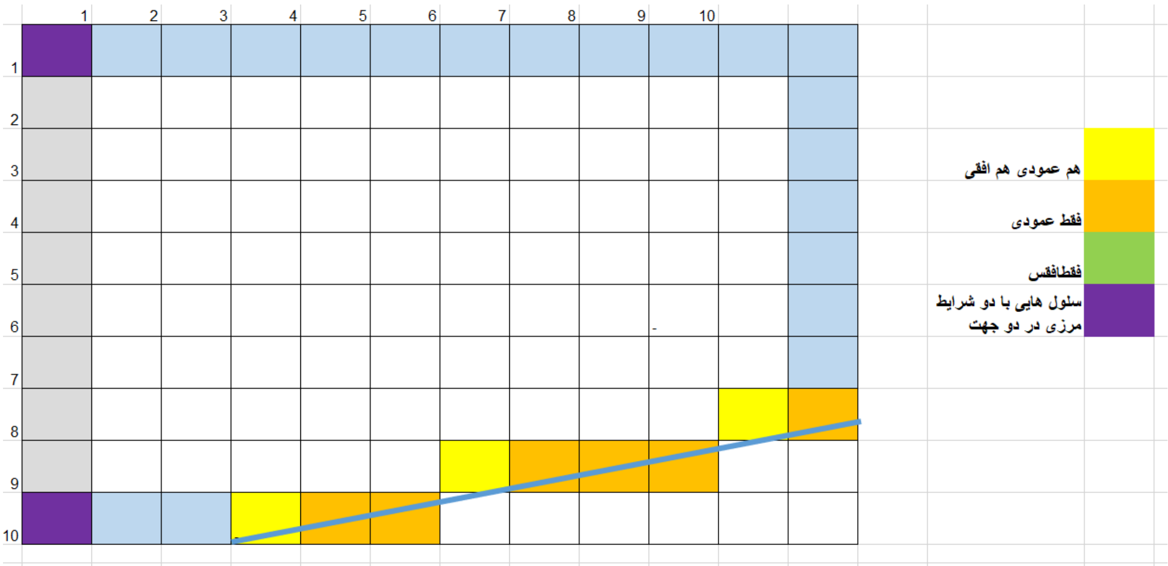
معادله ۶-۲

پ.ن: معادله از بخش ۵ مقاله [۱] برداشته شده است

۲-۲ حل عددی

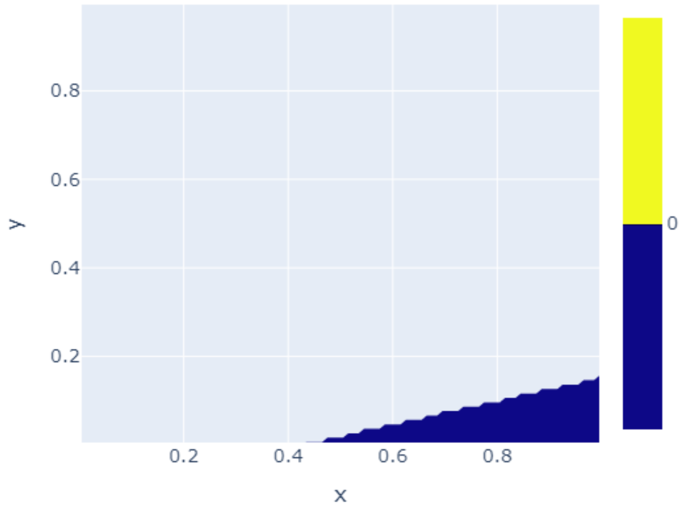
۲-۲-۱ شبکه محاسباتی

با توجه به دامنه کارتزین غیر کارتزین (مربعی بودن تمام مرز ها) و حل با روش تفاصل محدود، شبکه محاسباتی به صورت مربعی و بر اساس دستگاه مختصات کارتزین مطابق شکل ۱-۲تعریف شده است.



رسم توضیحی ۲-۱-۲ این تصویر بیان گر نحوه تشکیل و تفکیک بعد در بخش غیر کارتزین است

شرایط مرزی برای مناطق آبی رنگ از نوع ۱ (بیان شده در ۱-۲-۱) -سطح آزاد و در مناطق خاکستری از نوع ۲-شرایط اولیه و در روی سطح گوِه از نوع ۳- دیوار و بازتابی تعریف شده است. دقت شود تفاوت رنگ های نارنجی زرد و سبز برای سلول هایی است که محدود کننده برای سطر یا ستون هستند. در شکل ۳-۱ بیان گر مش بندی حاصل از کد Julia است.



رسم توضیحی ۲-۲-۲ مش بندی برای ۱۰۰*۱۰۰ و alfa=۱۵ که از کد بیرون آمده است.

۲-۲-۲ روش های عددی مورد استفاده

برای تجزیه هر بخش از معادلات حاکم از روش حجم محدود در Reconstruction-Evlution استفاده شده است ما از روشی استفاده کرده ایم به آن هایی که از مقالات دیده استفاده شده این جـا شـرح داده شده است.

۲-۲-۲-۱ تفکیک ابعادی (Dimensional Splitting)

این بخش بیان میکنیم که چه طور میتوان با تفکیک مسئله چند بعدی به گام های یک بعدی می تـوان به ساده سازی پرداخت فصل ۱۶.۱ کتاب [۹] مفصلا این بحث را توضیح داده شوده است.

برای تفکیک ابعادی ابتدا با در نظر گرفتن یک بعد مثلا Y ثابت برای یک مسیر مش در راستای X یـک بعدی عنوان را برای سرعت u و شار راستای X یعنی F حل میکنیم. و این کا را برای تمام خطوط مـش در راستای X (Y های مختلف) اجرا می کنیم. بعد این مرحله با ذخیره پاسخ ها ایـن بـار ایـن اقـدام را برای مش های راستای Y (Xهای مختلف) انجام میدهیم. باید دقت کرد موئلفه های بدون جهت ماننـد rho (چگالی) و rho.e (موئلفه ی ۴ ام) بدون توجه به راستای حل از مرحله ایی به مرحله بعد منتقـل و

در محاسبه شرکت میکنند. دو مسئله ایی که برای راستا های مختلف حل شوند را در معادله ۷-۲ و ۸-۲ مشاهده میکنید.

$$X \quad direction \qquad for:Y \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0 \\ q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u h \end{bmatrix} \end{cases}$$

معادله ۷-۲

$$h = e + \frac{P}{\rho}, \quad P = \rho \times (\gamma - 1)(e + \frac{1}{2}u^2)$$

$$Y \quad direction \qquad for:X \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial y} = 0 \\ q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \rho v h \end{bmatrix} \end{cases}$$

معادله ۸-۲

$$h = e + \frac{P}{\rho}, \quad P = \rho \times (\gamma - 1)(e + \frac{1}{2}v^2)$$

۲-۲-۲-۲ راگه-کوتا (Runge-Kutta):

ما برای تجزیه بخش زمانی معادله حاکم(معادله...) از این پیکره پندی تجزیه استفاده کرده ایم راگه-کوتا مرتبه سوم برای گسسته سازی عبارت زمانی در معادله گرما استفاده می کنیم .ما از همان طرح تفـاوت مرکزی مرتبه دوم برای عبارت فضایی استفاده می کنیم .خطای برش این تقریب عددی معادله حرارتی $O(\Delta t^3)$است .با استفاده از سه مرحله از مرحله زمانی t^n به t^{n+1} حرکت می کنیم .ادغام زمـانی معادلـه حرارت با استفاده از طرح رانگ-کوتا مرتبه سوم در معادلات ۹-۲ تا ۱۲-۲ آورده شده است.[۳]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a$$

معادله ۹-۲

$$u_i^{(1)} = u_i^{(n)} + \Delta t(A)$$

معادله ۱۰-۲

$$u_i^{(2)} = \frac{3}{4}u_i^{(n)} + \frac{1}{4}u_i^{(1)} + \Delta t(A)$$ معادله ۲-۱۱

$$u_i^{(3)} = \frac{1}{3}u_i^{(n)} + \frac{2}{3}u_i^{(1)} + \frac{2}{3}\Delta t(A)$$ معادله ۲-۱۲

۲-۲-۲-۳ بازسازی WENO

برای این باز سازی از مقاله[۱] و [۱۰] کمک گرفته شده است.

$$f_{i+1/2}^{L} = \omega_0^L \times (\frac{1}{3}f_{i-2} - \frac{1}{3}f_{i-1} + \frac{1}{3}f_i) + \omega_1^L \times (-\frac{1}{6}f_{i-1} + \frac{5}{6}f_i + \frac{1}{3}f_{i+1}) + \omega_2^L \times (\frac{1}{3}f_i + \frac{5}{6}f_{i+1} - \frac{1}{6}f_{i+2})$$ معادله ۲-۱۳

$$f_{i-1/2}^{R} = \omega_0^R \times (-\frac{1}{6}f_{i-2} + \frac{5}{6}f_{i-1} + \frac{1}{3}f_i) + \omega_1^R \times (\frac{1}{3}f_{i-1} + \frac{5}{6}f_i - \frac{1}{6}f_{i+1}) + \omega_2^L \times (\frac{11}{6}f_i - \frac{7}{6}f_{i+1} + \frac{1}{3}f_{i+2})$$ معادله ۲-۱۴

$$\omega_{\mathrm{k}}^{L} = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{d_{\mathrm{k}}^{L}}{\left(\beta_k + e\right)^2}, \quad k = 0,\ 1,\ 2$$
$$d_0^L = \frac{1}{10}, \quad d_1^L = \frac{3}{5}, \quad d_2^L = \frac{3}{10}$$ معادله ۲-۱۵

$$\omega_{\mathrm{k}}^{R} = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{d_{\mathrm{k}}^{R}}{\left(\beta_k + e\right)^2}, \quad k = 0,\ 1,\ 2$$
$$d_0^R = \frac{3}{10}, \quad d_1^R = \frac{3}{5}, \quad d_2^R = \frac{1}{10}$$ معادله ۲-۱۶

$$\beta_0 = \frac{13}{12} \times (u_{i-2} - 2 \times u_{i-1} + u_i)^2 + \frac{1}{4} \times (u_{i-2} - 4 \times u_{i-1} + 3 \times u_i)^2$$
$$\beta_1 = \frac{13}{12} \times (u_{i-1} - 2 \times u_i + u_{i+1})^2 + \frac{1}{4} \times (u_{i-1} - u_{i+1})^2$$
$$\beta_2 = \frac{13}{12} \times (u_i - 2 \times u_{i+1} + u_{i+2})^2 + \frac{1}{4} \times (3 \times u_i - 4 \times u_{i+1} + 3 \times u_{i+2})^2$$ معادله ۲-۱۷

۲-۲-۲-٤ حلگر ریمان Reo در مرز هر سلول

معادله برای محاسبه شار در بخش تماس بین دو سلول از معادلات Roe استفاده میکنیم[۱]

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathrm{F}^R_{i+1/2} + \mathrm{F}^L_{i+1/2}) - \frac{1}{2} R|\Lambda|L(q^R_{i+1/2} - q^L_{i+1/2})$$ معادله ۲-۱۸

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\mathrm{F}^R_{i+1/2} + \mathrm{F}^L_{i+1/2}) - \frac{1}{2} \overline{R}|\overline{\Lambda}|\overline{L} (q^R_{i+1/2} - q^L_{i+1/2})$$ معادله ۲-۱۹

۲-۲-۳ گسسته سازی معادلات و شرایط مرزی

۲-۲-۳-۱ گسسته سازی معادلات

برای گسسته سازی معادله توسعه یافته(semi-discrit) باید مقادیر شار در سطح تماس بین دو سلول محاسبه کنیم از آن جا که روش Roe را به عنوان حلگر ریمان انتخاب کرده ایم حلگر Roe با استفاده از مقدار شار در سمت چپ و راست (به عنوان مثال مقادیر شار چپ قرار دادن q^L در تابع شار F(q) مسئله تجزیه نشده) هر نقطه تماس بین دو سلول، تقریبی از پاسخ مسئله ریمان را ارائه میدهد تا مقدار شار عنوان شده در معادله توسعه یافته را محاسبه کند. مقدار q در سمت چپ و راست هر مرز سلولی به وسیله بازسازی WENO برای بدست میآوریم. پس از محاسبه شار و بدست آورن سمت راست معادله توسعه یافته با استفاده از تجزیه رانگه-کوتا (بیان شده در زیر فصل ۲-۲-۲-۲) گام زمانی بعدی را برای q بدست آورد و از q جدید به همین ترتیب در زمان جلو میرویم. تا این جا مراحل حل برای ۱ بعد را بیان کردیم.

باقی مراحل برای توسعه این مراحل ۱ بعدی از روش تفکیک شار بیان شده در بخش ۱-۲-۲-۲

دقت رانگه-کوتا دقت زمانی(دقت مرتبه ۳) و باز سازی WENO (دقت مرتبه ۵) دقت مکانی حل را مشخص میکند. به این ترتیب دقت معادلات تجزیه شده حداقل $O(\Delta x^5, \Delta t^3)$است.

۲-۲-۳-۲ گسسته سازی شرایط مرزی

برای شرایط مرزی از مقاله[۱۱] استفاده شده است. همچنین از آن جا که برای گسسته سازی شرایط مرزی در مرحله باز سازی باید اقدام کنیم. مقاله نیز برای عنوان شرایط مرزی در روش WENO که مورد استفاده ما هست استفاده شده است. [۱۰] .

همان طور که در معادلات زیر مشخص شده است در بازسازی برای بدست آوردن سمت شار در سطح تماس دو سلول ($f_{i+1/2}$ و $f_{i-1/2}$) باید ۳ سلول اضافه در هر طرف به عنوان نقطه سایه ایی تعریف شود. همان طور که در معادلات زیر مشخص شده است در محاسبه $f^L_{i+1/2}$ برای نقاط n, n-۱ و i=۰،۱،۲ و برای $f^R_{i+1/2}$ نقاط n, n+۱ ,n-۱ و i=۱،۲ شرایط مرزی تاثیر گذار هستند. این شرایط برای سه موئلفه تعریف میشود.

$$f^L_{i+1/2} = WENO^L(f_{i-2}, f_{i-1}, f_i\ , f_{i+1}, f_{i+2})$$
$$|q_{n+1}| = |q_n|, |q_{n+2}| = |q_{n-1}|$$
معادله ۲-۲۰

$$f^R_{i+1/2} = WENO^R(f_{i-2}, f_{i-1}, f_i\ , f_{i+1}, f_{i+2})$$
معادله ۲-۲۱

برای شرایط مرزی نوع ۱و ۳ که علامت متغیر را تعیین و اندازه متغیر را بر اساس نقاط همسایگی (سلول های اطراف) تعریف میکنند. اندازه نقاط همسایگی به صورت آینه ایی نسبت به سلول های درون مرز تعریف میشود. یعنی مثلا نقطه $|q_{n+1}| = |q_n|, |q_{n+2}| = |q_{n-1}|$ فرض می شود. و برای شرایط مرزی نوع ۲ تمام نقاط مرزی عدد ثابت و یک سان مطابق شرایط عنوان شده در مسئله لحاظ میشود.

۳-۲ پارامترهای حل و دامنه

برای این مسئله مطابق صورت عدد ماخ(سرعت افقی ورود هوا به شبیه سازی) و زاویه گوه به عنوان متغیر حل عنوان شده است و تحلیل حساسیت بر اساس آن انجام شده است.

M، ماخ سرعت ورودی: برای آن که عدد ماخ درست بیان شود ما ابتدا از رابطه سرعت صوت را محاسبه کرده و سپس a محاسبه شده را ضرب در عدد ماخ و به عنوان سرعت افقی ورودی لحاض میکنیم.

Alfa: شیب نیم گوه که در گزارش به عنوان شیب گوِه بیان شده است شیب سطحی است غیر کارتزینی است در دامنه محاسباتی وحود دارد.

u : سرعت در راستای افق (x) است.

v : سرعت در راستای عمود (y) است.

۲-٤ آنالیز خطا

برای تحلیل خطا و بررسی همگرایی مطابق گفته های کلاس و تمرین های قبل عمل میکنم بـرای ایـن که مسئله دو بعدی است یک خط از مش بندی منظم (dx=dy) را در نظر میگیریم (در هر بخش بیـان شده است.) و در آن خط به بررسی خطای پیاپی (successive Error) میپـردازیم. و شـیب لگـاریتمی خطا پیاپی بر اساس h (فاصله مش ها) بدست می آوریم.

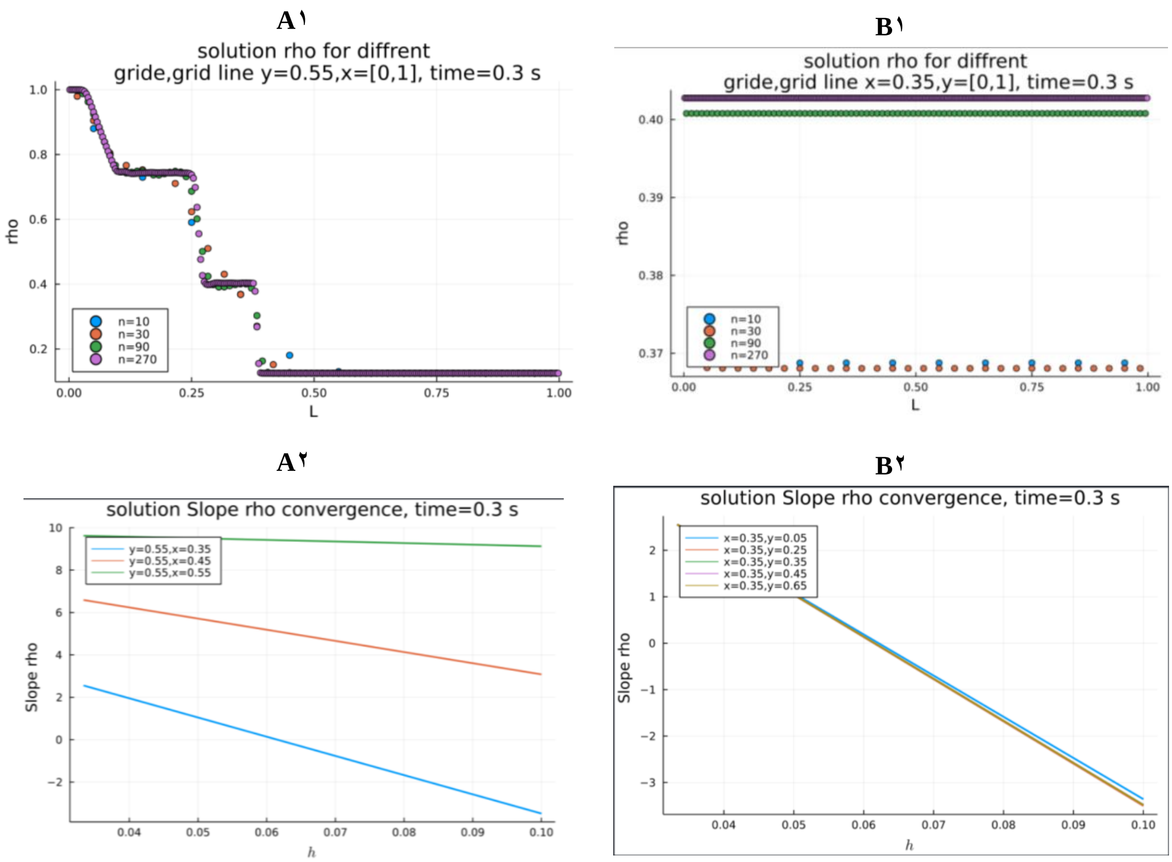
از آن جا که ما برای شرایط مرزی روی گوِه از حالت پله ایی استفاده کرده ایم به مرور زمان بر روی لبه ن پله ها جریان های گردابی ایجاد و باعث ناهمگرایی شبیه سازی ما میشود. به همین علت است که بعد از زمان حدود ۱ ثانیه شبیه سازی کار نمیکند و به کام مکانی کوچک تر نیاز دارد. ما تحلیل خطا را بر روی مکان هایی که این جریان ها گردابی ایجاد نشده است و در معرض آن نیست انجام می‌دهـیم. ایـن کـار دقت شبیه سازی را مستقل از دامنه شبکه روی گوِه (بخش غیر کارتزین)می‌شود. همان طور کـه انتظـار داریم دقت مکانی در محل هایی که از جریان های گردابی به وجود آمده فاصله دارد دقت مکانی تجزیـه حدود مرتبه ۵ است اما به حرکت به سمت این جریان ها دقت به مرتبه ۲ کاهش میابد. و این مطلب در رسم توضیحی ۱-۴ مشاهده میشود.

۲-٤-۱ تحلیل استقلال از شبکه محاسباتی

تحلیل استقلال از شبکه محاسباتی مکانی و زمانی جدا گانه بررسی میشود.

۲-٤-۱-۱ همگرایی در گام مکانی (شبکه مکانی)

همانطور که گفته شد همگرایی و کاهش خطا با کاهش فاصله مش های مورد بررسی در نمودار های ۲-۴ و ۳-۴ قابل مشاهده است. نکته مهم در بررسی خطا در یک خط مش در راستای x و یا y است. این بررسی خطا برای زمان ۰.۳ ثانیه و با شروع از کام مکانی ۰.۱ (n=۱۰) است.



رسم توضیحی ۲-۱-۴ خطای پیاپی برای یک خط مش سمت راست: خط مش در راستای y و x=۰،۳۵ ، سمت راست: خط مش در راستای x و y=۰،۵۵ -همچنین: h=dx=dy

در رسم توضیحی ۴-۲ A موج شوک در حال انتقال دیده میشود به همین علت A۲ برای x های عقب تر از موج محاسبه شده است.چرا که برای x های جلو تر تغییری در متغیر ها نیست و خطا ه م قابل

محاسبه نیست. هم چنین رسم توضیحی ۴-۲ B برای مش عمودی نزدیک نقطه شروع گوِه بیان شده است. از آن جا که موج عبوری ما اقفی است افت و خیزی در نمودار B۱ دیده نمیشود همچنین شکل B۲ خطا مرتبه ۲ را نشان میدهد که به علت نزدیکه بودن مش به گوه و جریان های گردابی است که ابتدای تحلیل خطا توضیح داده شده است

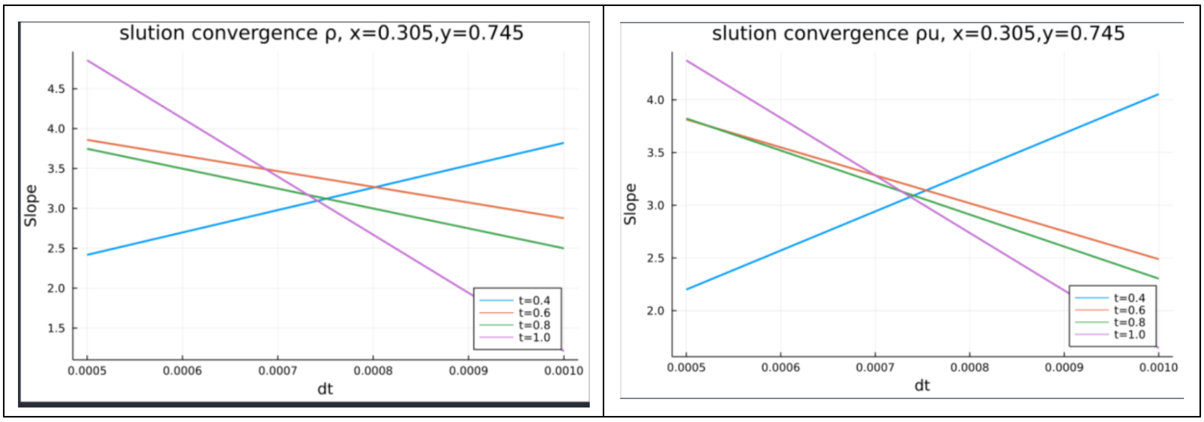
```
nRange1 = ▸[10, 30, 90, 270]
 · nRange1=[1,3,9,27].*(n)
                                        37.5 μs
▸[0.1, 0.0333333, 0.0111111, 0.0037037]
 · (1)./nRange1

CFL_x = ▸[0.0264, 0.0792, 0.2376, 0.7128]
 · CFL_x=(2.2*1.2).*0.001./((1)./nRange1)
```

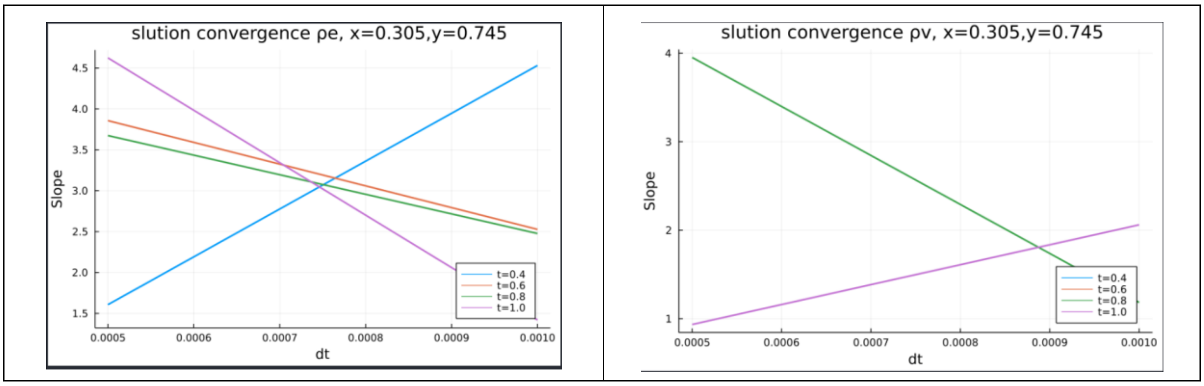
رسم توضیحی ۲-۲-۴ محاسبه‌ی CFL برای گام های مکانی که در تحلیل خطای مکانی استفاده شده است

باید توجه شود که در تغییر تعداد مش برای تحلیل خطا شرط CFL به هم نخورد. بررسی این موضوع در رسم توضیحی ۲-۴ نشان داده شده است. فصل ۱۴ کتاب[۹] مفصلا درباره از تباط CFL با دقت صحبت کرده است.

۲-۱-٤-۲ استقلال محاسبات نسبت به گام زمان

این مسئله برای شرایط گذرا است و همان طور که مشاهده میکنید برای گام های زمانی(dt) کمتر از مقدار مشخص همگرا است این تحلیل خطا برای مش مکانی ۱۰۰*۱۰۰ انجام گرفته است رسم توضیحی ...همان طور که پیشبینی شد بود دقت زمانی مرتبه ۳ بدست می دهد.





رسم توضیحی ۲-۳-۴ شیب لگاریتمی خطای پیاپی برای سلول در گام های زمانی مختلف (dt)

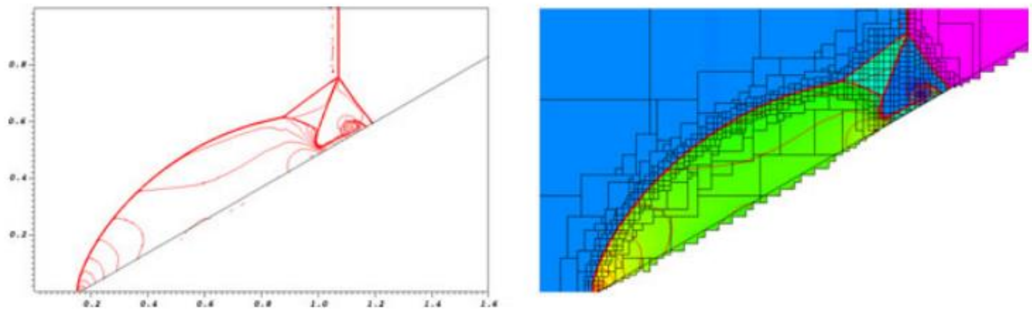
همان طو که در بخش قبل (۴-۱-۲) عنوان شد در تحلیل خطا باید دقت با تغییر گام زمانی از CFL عبور نکنیم یعنی گام زمانی را به قدر کوچک نشود تا این شرط رعایت نشود. شکل ... لی ن موضوع را بررسی میکند. همان طور که مشخص است برای دو گام زمانی اول این شرط رعایت نشده و علت واگرا شدن بعد از مقداری کاهش dt همین است.

```
t_Range1 = ▸[0.01, 0.005, 0.0025, 0.00125]
  t_Range1=[1,0.5, 0.25, 0.125]*0.01
                                        62.9 μs
CFL_t = ▸[2.64, 1.32, 0.66, 0.33]
  CFL_t=(2.2*1.2).*t_Range1./0.01
                                        15.2 μs
```

رسم توضیحی ۲-۴-۴ محاسبه‌ی CFL برای گام های زمانی که در تحلیل خطای زمانی استفاده شده است.

۲-۵ صحت سنجی نتایج با نتایج مقالات

شکل ۱-۵ نتایج مقاله برای برابر ۱۰۰ و مش بندی ۱۰۰*۱۰۰ و زمان از تا ۱ ثانیه مطابق شکل زیر بدست آورده است و با این مشخصات ما کد را حل کرده و شکل ۲-۵ آورده لی م همان طور که قابل مشاهده است این نتایج نزدیکی زیادی به هم دارند.



(a) 30 density contours from 1.4 to 23.   (b) density plot with AMR grid hierarchy.

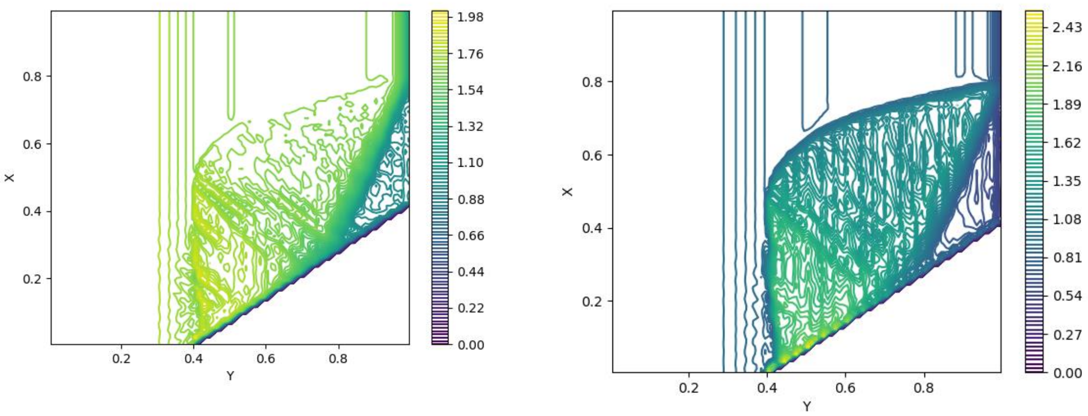
Figure 9. Cut-cell boundary (Chombo) calculation of DMR. The effective grid resolution at the finest level is $1600 \times 800, CFL = 0.8, t = 0.09$. (a) 30 density contours from 1.4 to 23 and (b) density plot with adaptive mesh refinement grid hierarchy.

رسم توضیحی ۲-۱-۵ مقاله مرجع جهت مقایسه و صحت سنجی نتایج[۱۲]

متاسفانه سیستم مورد استفاده برای مش متراکم تر از ۱۰۰*۱۰۰ با کم بود حافظه مواجه میشود اما با همین صورت نیز شباهت نتایج شبیه سازی قابل مشاهده است

برای آن که در نمودار رسم شده با PlotJs (رسم توضیحی ۵-۲) جزئیات کمتری دارد جریان گردابی را در شکل ۵-۲ با جزئیات بیشتر رسم شده است.

Rho*u   Rho

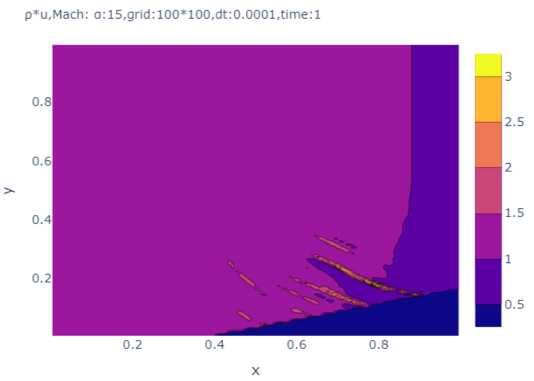


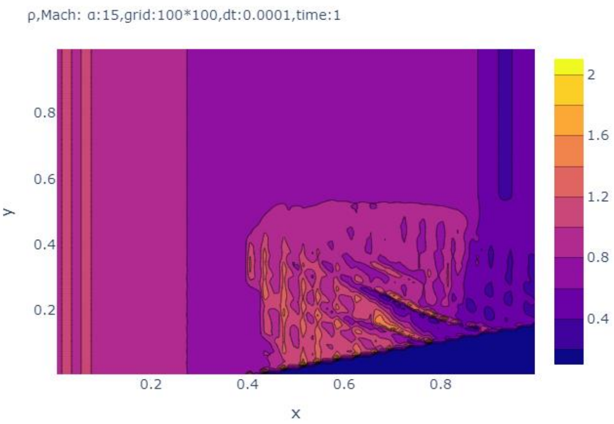
رسم توضیحی ۲-۲-۵ برای مش ۱۰۰*۱۰۰ و M=۱,۲، alfa=۳۵ رسم شده سمت راست rho چگالی و سمت چپ rho*u با PyPlot

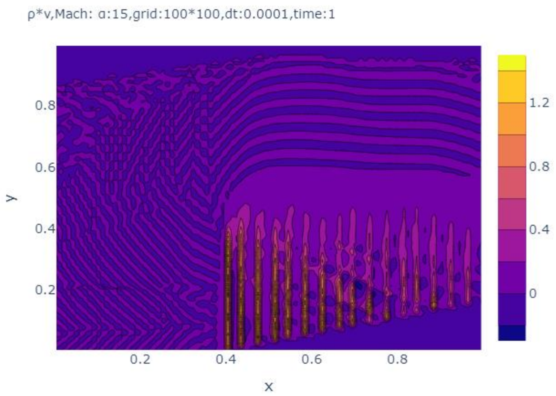
۲-۶ آشکارسازی جریان

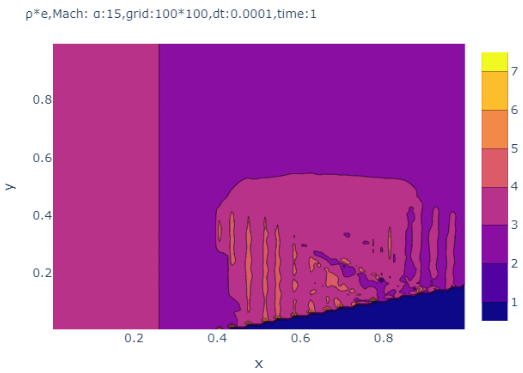
پارامتر مسئله در صورت عدد زاویه گوِه(alfa) و سرعت ورودی M بیان شده است و نتـایج متغیـر هـای اولیه و ثانویه برای هر عدد رینولدز در این بخش به صورت کانتور آورده شده است.

۲-۶-۱ M=۱.۲-alfa=۱۵

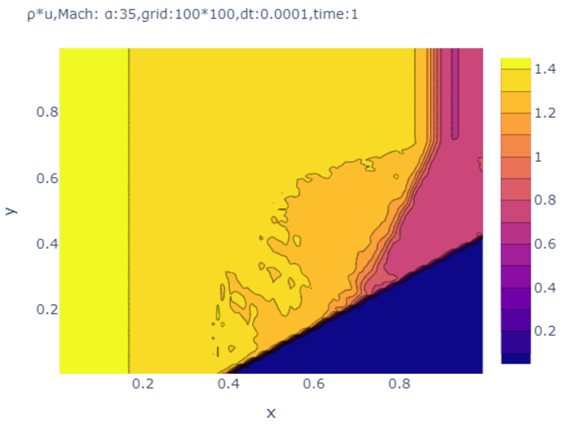


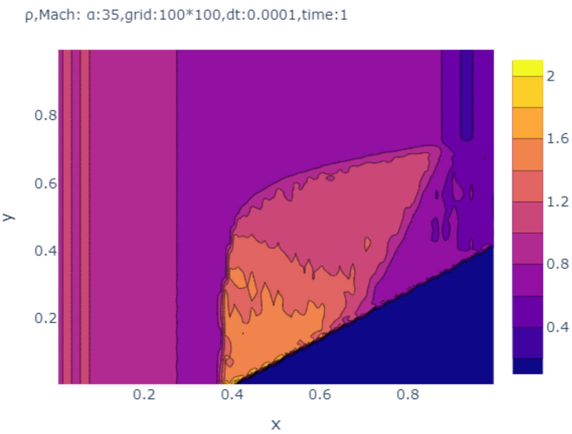


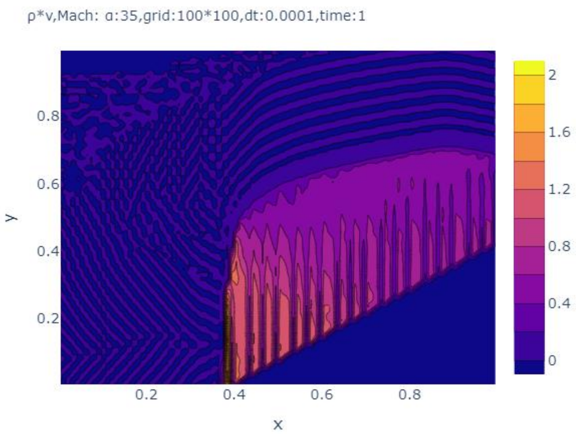


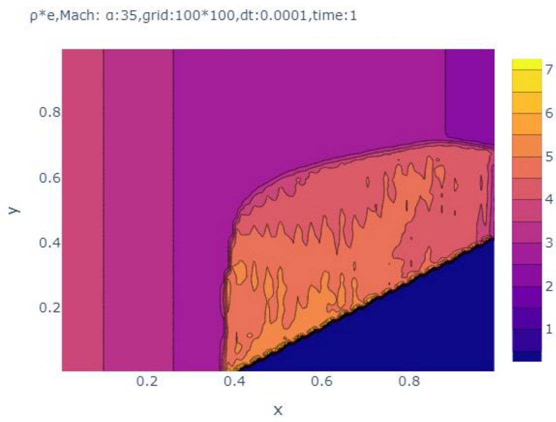


۲-٦-۲ M=۱.۲–alfa=۳۵

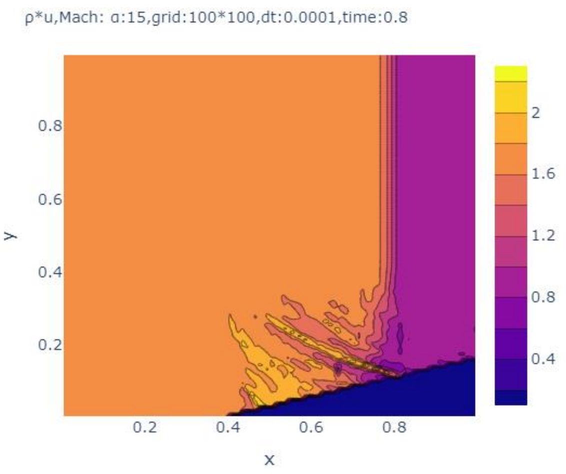


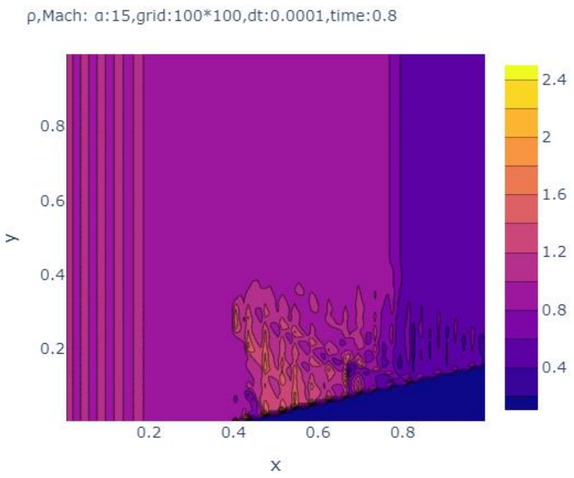


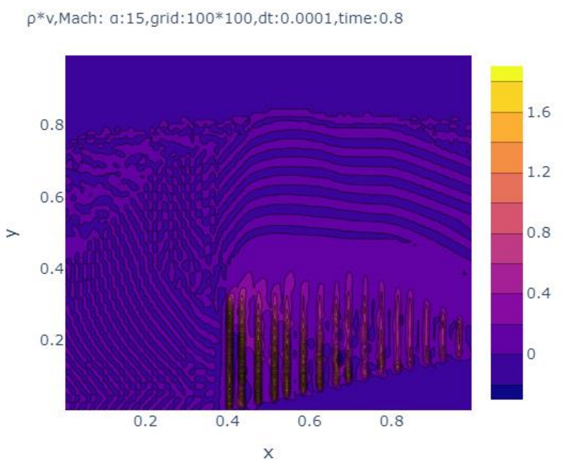


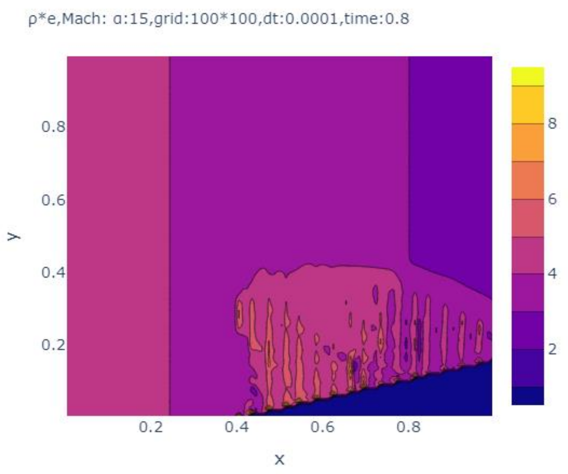


۲-۶-۳ M=۱.۵–alfa=۱۵

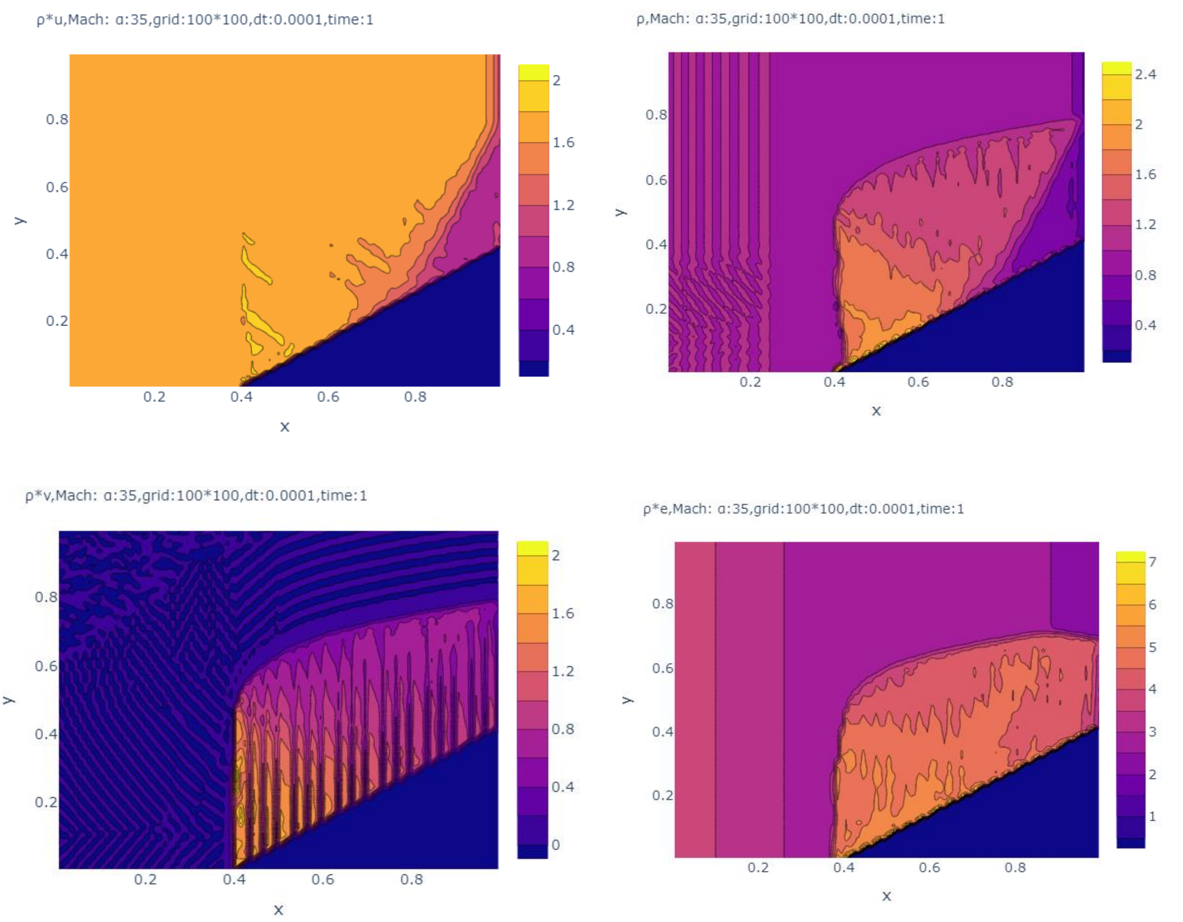








۲-٦-٤ M=۱.۵–alfa=۳۵



۲-۷ تحلیل حساسیت پاسخ به پارامترهای روش عددی

هر چه alfa بزرگ تر است ناحیه ناپیوسته بزرگ تری به وجود آمده است بخصوص در rho*v. هم چنین با افزایش سرعت و عدد ماخ ناپیوستگی کمی جلو تر منتقل شده است.این موارد در شکل های بخش ۶ و مقایسه آن ها با هم قابل مشاهده است.

۲-۸ سخن پایانی درباره حل و کدها (Github)

کد این سوال به وسیله زبان Julia نوشته شده است اما بخش های از آن مانند رسم دقیق تر بخشی از نمودارها از توابع و کتاب خانه های Python استفاده شده است که در Julia قابل استفاده است.

برای استفاده از و اجرای Python در Julia از لینک میتوان کمک گرفت.

ما برای رسم کانتور مجبور به استفاده از API ی atom شدیم هر یک از توابع تعریف شده در برای دیدن نمودار ها را میتوان بعد اجرا با کلید ترکیبی shift+Enter برای یک خط (خط کد نمودار) مورد نظر استفاده کرد. به علاوه برای تغییرات کوچک از تغییر دستی متغیر ها استفاده شده است. یکی از تغییرات لصلی و مهم که این جا عنوان میکنیم تغییر عدد ماخ است. برای تغییر عدد ماخ باید مقدار M در تابع b_c را تغییر داد.

کد ها گزارش جدا گانه در لینک زیر در Github قرار داده شده است. (کلیک کنید)

https://github.com/mrv۰۱۳/final_CFD_Project/tree/master/wedge

۲-۹ منابع و مراجع

فقط منابع مسئله ۲:

۱. Pawar, S. and O. San, *CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics.* Fluids, ۲۰۱۹. ٤(۳): p. ۱٥۹.

۲. Poochinapan, K., *Numerical Implementations for 2D Lid-Driven Cavity Flow in Stream Function Formulation.* ISRN Applied Mathematics, ۲۰۱۲. ۲۰۱۲: p. ۸۷۱٥۳۸.

۳. Gottlieb, S. and C.-W. Shu, *Total variation diminishing Runge-Kutta schemes.* Mathematics of computation, ۱۹۹۸. ٦۷(۲۲۱): p. ۷۳-۸٥.

٤. Arakawa, A., *Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I.* Journal of computational physics, ۱۹۹۷. ۱۳٥(۲): p. ۱۰۳-۱۱٤.

٥. Cassel, K. *Boundary Conditions for Vorticity-Streamfunction Formulation of the Navier-Stokes Equations*. ۲۰۲۲; Available from: https://www.youtube.com/watch?v=٥۰i۷rNJXfEg.

٦. Roe, P.L., *Characteristic-based schemes for the Euler equations.* Annual review of fluid mechanics, ۱۹۸٦. ۱۸(۱): p. ۳۳۷-۳٦٥.

۷. Vanleer, B. *Flux-vector splitting for the 1990s*. in *NASA, Lewis Research Center, Computational Fluid Dynamics Symposium on Aeropropulsion*. ۱۹۹۱.

۸. Hussaini, M.Y., B. van Leer, and J. Van Rosendale, *Upwind and high-resolution schemes*. ۲۰۱۲: Springer Science & Business Media.

۹. Toro, E.F., *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. ۲۰۱۳: Springer Science & Business Media.

۱۰. Shu, C.-W., *High order weighted essentially nonoscillatory schemes for convection dominated problems.* SIAM review, ۲۰۰۹. ۵۱(۱): p. ۸۲-۱۲۶.

۱۱. Berger, M.J. and R.J. LeVeque, *Stable boundary conditions for Cartesian grid calculations.* Computing systems in Engineering, ۱۹۹۰. ۱(۲-٤): p. ۳۰۵-۳۱۱.

۱۲. Chi, C., B.J. Lee, and H.G. Im, *An improved ghost-cell immersed boundary method for compressible flow simulations.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, ۲۰۱۷. ۸۳(۲): p. ۱۳۲-۱٤۸.