



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی انرژی و فیزیک

پروژه پایانی درس CFD
مسئله ۱: wedge

نگارش
محمد رضا واعظی

استاد راهنما
دکتر حمید نادران

۱۴۰/۵/۸

۱	مقدمه.....	۲
۱-۱	تعریف مسئله.....	۲
۲-۱	معادلات حاکم و شرایط مرزی.....	۲
۱-۲-۱	شرایط مرزی.....	۲
۳-۱	مدلهای کمکی و شرایط مرزی (تفکیک شار Roe).....	۳
۲	حل عددی.....	۳
۱-۲	شبکه محاسباتی.....	۳
۲-۲	روش عددی.....	۵
۱-۲-۲	تفکیک ابعادی (Dimensional Splitting).....	۵
۲-۲-۲	راگه-کوتا (Runge-Kutta):.....	۵
۳-۲-۲	بازسازی WENO.....	۶
۴-۲-۲	حلگر ریمان Reo در مرز هر سلول.....	۶
۳-۲	گسسته سازی معادلات و شرایط مرزی.....	۷
۱-۳-۲	گسسته سازی معادلات.....	۷
۲-۳-۲	گسسته سازی شرایط مرزی.....	۷
۳	پارامترهای حل و دامنه.....	۸
۴	آنالیز خطا.....	۸
۱-۴	تحلیل استقلال از شبکه محاسباتی.....	۹
۱-۱-۴	همگرایی در گام مکانی (شبکه مکانی).....	۹
۲-۱-۴	استقلال محاسبات نسبت به گام زمان.....	۱۰
۵	صحت سنجی نتایج با نتایج مقالات.....	۱۱
۶	آشکارسازی جریان.....	۱۲
۱-۶	$15=alfa-1.2=M$	۱۳
۲-۶	$35=alfa-1.2=M$	۱۴
۳-۶	$15=alfa-1.5=M$	۱۵
۴-۶	$35=alfa-1.5=M$	۱۶
۷	تحلیل حساسیت پاسخ به پارامترهای روش عددی.....	۱۶
۸	سخن پایانی درباره حل و کدها (Github).....	۱۷

۱۹	منابع و مراجع.....
----	--------------------

۱ مقدمه

۱-۱ تعریف مسئله

برای حل جریان سیال تراکم پذیر غیر ویسکوز از روی یک گوه با زاویه گوه برابر ، دامنه نشان داده شده در شکل سمت راست در نظر گرفته میشود. شرایط مرزی مناسب را برای این دامنه تعریف کنید و با استفاده از یکی از روشهای زیر مساله را حل کنید. عدد ماخ جریان آزاد برابر ۱.۲ و ۲.۵ و نیم زاویه گوه برابر با ۱۵ و ۳۵ درجه است.

۲-۱ معادلات حاکم و شرایط مرزی

معادلات ۱-۱ معادله پیوستگی و ۲-۱ معادله مومنتوم برای سیال تراکم پذیر ناویسکوز است. با فرض هم دما بودن از تغییر انرژی داخلی بر اثر دما صرف نظر شده است.

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = 0 \quad \text{معادله ۱-۱}$$

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uh \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho vh \end{bmatrix} \quad \text{معادله ۱-۲}$$

$$h = e + \frac{P}{\rho}, \quad P = \rho \times (\gamma - 1) \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \right)$$

۱-۲-۱ شرایط مرزی

مرزهای سیستم به ۳ نوع تقسیم بندی میشوند. نوع اول (معادله ۱-۳) مرز آزاد است که جریان از آن عبور میکند در این نوع مشخصات نقاط سایه ای برابر نقاط بالادست آن ها است. نوع دوم (معادله ۱-۴) مرز ورودی این شرایط در این مرز در نقطه پایین دست (نقطه ایه ایی) ثابت و برابر مقدار مشخص است. نوع سوم (معادله ۱-۵) مرز بازتابی است؛ این مرز نوعی تنظیم میشود تا مقدار شار برای سرعت صفر شود به این صورت که فشار و انرژی داخلی در نقاط سایه ایی مشابه نقاط بالادست و سرعت خلاف جهت شار تنظیم میشود در این حالت شار در مرز صفر یا نزدیک آن بدست می آید.

میتوان این شرایط مرزی را مطابق معادلات ۱-۳ و ۱-۴ مشاهده کرد.

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad Type1 \Rightarrow q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad \text{معادله ۱-۳}$$

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad Type2 \Rightarrow q = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ -\rho_0 u_0 \\ -\rho_0 v_0 \\ \rho_0 e_0 \end{bmatrix} \quad \text{معادله ۱-۴}$$

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad Type3 \Rightarrow q = \begin{bmatrix} \rho \\ -\rho u \\ -\rho v \\ \rho e \end{bmatrix} \quad \text{معادله ۱-۵}$$

۳-۱ مدل‌های کمکی و شرایط مرزی (تفکیک شار Roe)

روش تفکیک شار رو از لحاظ مفهوم از مقالات ([۱] ، [۲] و [۳]) و کتاب [۴]

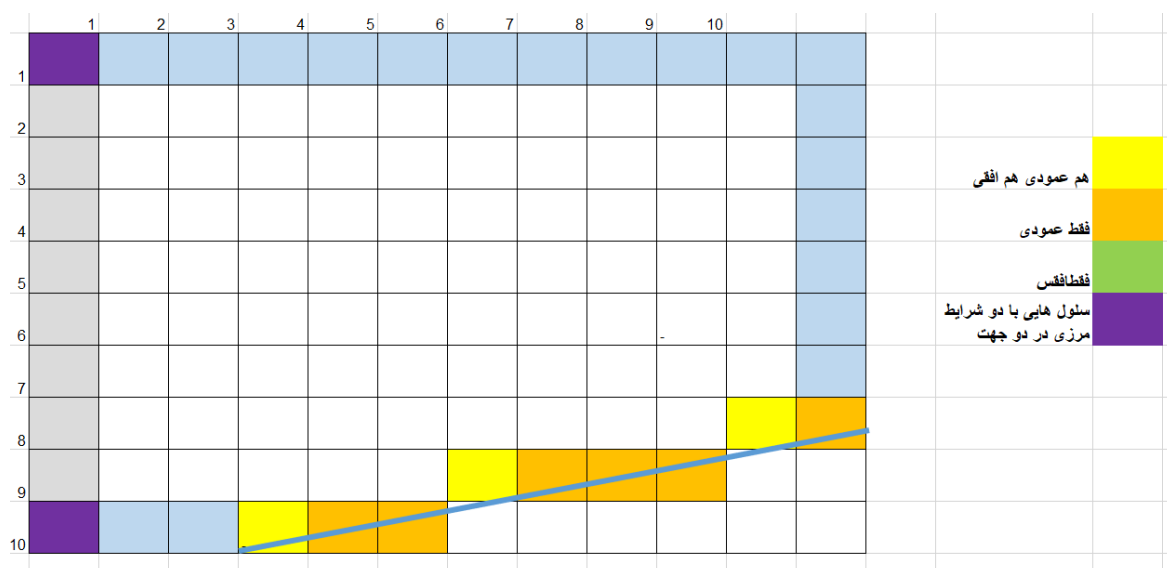
معادله ۱-۶

پ.ن: معادله از بخش ۵ مقاله [۲] برداشته شده است

۲ حل عددی

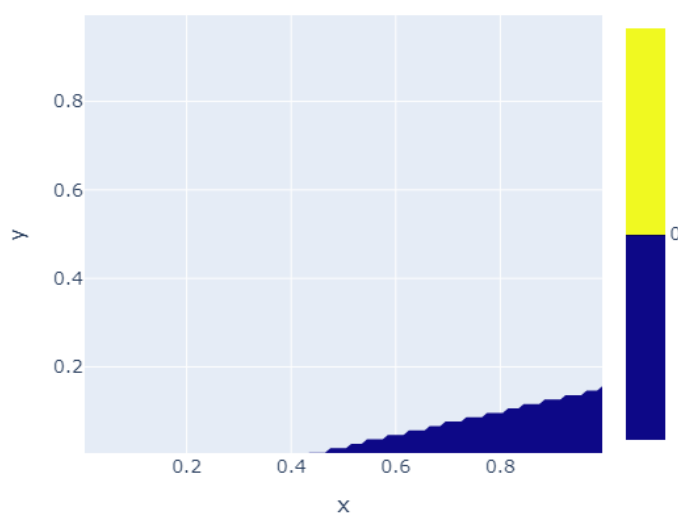
۱-۲ شبکه محاسباتی

با توجه به دامنه کارتیزین غیر کارتیزین (مربعی بودن تمام مرزها) و حل با روش تفاضل محدود، شبکه محاسباتی به صورت مربعی و بر اساس دستگاه مختصات کارتیزین مطابق شکل ۱-۲ تعریف شده است.



رسم توضیحی ۱-۲ این تصویر بیان گر نحوه تشکیل و تفکیک بعد در بخش غیر کارتیزین است

شرایط مرزی برای مناطق آبی رنگ از نوع ۱ (بیان شده در ۱-۲-۱) - سطح آزاد و در مناطق خاکستری از نوع ۲ - شرایط اولیه و در روی سطح گوه از نوع ۳ - دیوار و بازتابی تعریف شده است. دقت شود تفاوت رنگ های نارنجی زرد و سبز برای سلول هایی است که محدود کننده برای سطر یا ستون هستند. در شکل ۱-۳ بیان گر مش بندی حاصل از کد Julia است.



رسم توضیحی ۲-۲ مش بندی برای 100×100 و $\alpha = 10$ که از کد بیرون آمده است.

۲-۲ روش عددی

برای تجزیه هر بخش از معادلات حاکم از روش حجم محدود در Reconstruction-Evolution استفاده شده است. ما از روشی استفاده کرده ایم به آن هایی که از مقالات دیده استفاده شده این جا شرح داده شده است.

۱-۲-۲ تفکیک ابعادی (Dimensional Splitting)

این بخش بیان میکنیم که چه طور میتوان با تفکیک مسئله چند بعدی به گام های یک بعدی می توان به ساده سازی پرداخت فصل ۱۶.۱ کتاب [۵] مفصلا این بحث را توضیح داده شده است.

۲-۲-۲ راگه-کوتا (Runge-Kutta):

ما برای تجزیه بخش زمانی معادله حاکم (معادله...) از این پیکره پندی تجزیه استفاده کرده ایم راگه-کوتا مرتبه سوم برای گسسته سازی عبارت زمانی در معادله گرما استفاده می کنیم. ما از همان طرح تفاوت مرکزی مرتبه دوم برای عبارت فضایی استفاده می کنیم. خطای برش این تقریب عددی معادله حرارتی $O(\Delta t^3)$ است. با استفاده از سه مرحله از مرحله زمانی t^n به t^{n+1} حرکت می کنیم. ادغام زمانی معادله حرارت با استفاده از طرح رانگ-کوتا مرتبه سوم در معادلات ۲-۱ تا ۲-۴ آورده شده است. [۶]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \quad \text{معادله} \quad 2-1$$

$$u_i^{(1)} = u_i^{(n)} + \Delta t(A) \quad \text{معادله} \quad 2-2$$

$$u_i^{(2)} = \frac{3}{4}u_i^{(n)} + \frac{1}{4}u_i^{(1)} + \Delta t(A) \quad \text{معادله} \quad 2-3$$

$$u_i^{(3)} = \frac{1}{3}u_i^{(n)} + \frac{2}{3}u_i^{(1)} + \frac{2}{3}\Delta t(A) \quad \text{معادله} \quad 2-4$$

۳-۲-۲ بازسازی WENO

برای این باز سازی از مقاله [۲] و [۷] کمک گرفته شده است.

$$f_{i+1/2}^L = \omega_0^L \times \left(\frac{1}{3} f_{i-2} - \frac{1}{3} f_{i-1} + \frac{1}{3} f_i \right) + \omega_1^L \times \left(-\frac{1}{6} f_{i-1} + \frac{5}{6} f_i + \frac{1}{3} f_{i+1} \right) + \omega_2^L \times \left(\frac{1}{3} f_i + \frac{5}{6} f_{i+1} - \frac{1}{6} f_{i+2} \right) \quad \text{معادله ۲-۵}$$

$$f_{i-1/2}^R = \omega_0^R \times \left(-\frac{1}{6} f_{i-2} + \frac{5}{6} f_{i-1} + \frac{1}{3} f_i \right) + \omega_1^R \times \left(\frac{1}{3} f_{i-1} + \frac{5}{6} f_i - \frac{1}{6} f_{i+1} \right) + \omega_2^L \times \left(\frac{11}{6} f_i - \frac{7}{6} f_{i+1} + \frac{1}{3} f_{i+2} \right) \quad \text{معادله ۲-۶}$$

$$\omega_k^L = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{d_k^L}{(\beta_k + e)^2}, \quad k=0, 1, 2 \quad \text{معادله ۲-۷}$$

$$d_0^L = \frac{1}{10}, \quad d_1^L = \frac{3}{5}, \quad d_2^L = \frac{3}{10}$$

$$\omega_k^R = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{d_k^R}{(\beta_k + e)^2}, \quad k=0, 1, 2 \quad \text{معادله ۲-۸}$$

$$d_0^R = \frac{3}{10}, \quad d_1^R = \frac{3}{5}, \quad d_2^R = \frac{1}{10}$$

$$\beta_0 = \frac{13}{12} \times (u_{i-2} - 2 \times u_{i-1} + u_i)^2 + \frac{1}{4} \times (u_{i-2} - 4 \times u_{i-1} + 3 \times u_i)^2 \quad \text{معادله ۲-۹}$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12} \times (u_{i-1} - 2 \times u_i + u_{i+1})^2 + \frac{1}{4} \times (u_{i-1} - u_{i+1})^2$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12} \times (u_i - 2 \times u_{i+1} + u_{i+2})^2 + \frac{1}{4} \times (3 \times u_i - 4 \times u_{i+1} + 3 \times u_{i+2})^2$$

۴-۲-۲ حلگر ریمان Reo در مرز هر سلول

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_{i+1/2}^R + F_{i+1/2}^L) - \frac{1}{2} R |\Lambda| L (q_{i+1/2}^R - q_{i+1/2}^L) \quad \text{معادله ۲-۱۰}$$

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_{i+1/2}^R + F_{i+1/2}^L) - \frac{1}{2} \bar{R} |\bar{\Lambda}| \bar{L} (q_{i+1/2}^R - q_{i+1/2}^L) \quad \text{معادله ۲-۱۱}$$

[۲].

۳-۲ گسسته سازی معادلات و شرایط مرزی

۱-۳-۲ گسسته سازی معادلات

برای گسسته سازی معادله ۱-۷ و ۱-۸ ابتدا مقدار اولیه ایی برای ω با توجه به مقادیر مرزی و معادلات ۹-۱ و ۱-۱۰ فرض میکنیم و سپس با حل معادله پواسون (۱-۷) مقدار ψ را بر اساس ω بدست آورد بعد با مقادیر ψ و ω بخش ۱ را با استفاده از ژاکوبین (بیان شده در زیر فصل ۲-۲-۲) و بخش ۲ را با استفاده از تجزیه مرکزی عنوان شده در جدول ۲-۱ برای هر نقطه تجزیه میکنیم تا سمت راست معادله ۸-۱ را برای هر نقطه بدست آورید و بعد سمت عبارت بدست آمده را به عنوان a در معادله ۲-۱ فرض و با استفاده از تجزیه رانگه-کوتا گام زمانی بعدی را برای ω بدست آورد و از ω جدید به همین ترتیب در زمان جلو میرویم. با رسیدن به شرایط گام زمانی که بدون تغییر و ثابت به شرایط پایا رسیده ایم.

دقت رانگه-کوتا دقت زمانی (دقت مرتبه ۳) و تجزیه بخش ۱ (دقت مرتبه ۲) و بخش ۲ (دقت مرتبه ۲) دقت مکانی حل را مشخص میکند. به این ترتیب دقت معادلات تجزیه شده حداقل $O(\Delta x^5, \Delta t^3)$ است.

۲-۳-۲ گسسته سازی شرایط مرزی

برای شرایط مرزی از مقاله [۸] استفاده شده است. همچنین از آن جا که برای گسسته سازی شرایط مرزی در مرحله باز سازی باید اقدام کنیم. مقاله نیز برای عنوان شرایط مرزی در روش WENO که مورد استفاده ما هست استفاده شده است. [۷]

معادله

۲-۱۲

۳ پارامترهای حل و دامنه

برای این مسئله مطابق صورت عدد ماخ (سرعت افقی ورود هوا به شیب ساز) و زاویه α به عنوان متغیر حل عنوان شده است و تحلیل حساسیت بر اساس آن انجام شده است.

M ، ماخ سرعت ورودی: برای آن که عدد ماخ درست بیان شود ما ابتدا از رابطه سرعت صوت را محاسبه کرده و سپس a محاسبه شده را ضرب در عدد ماخ و به عنوان سرعت افقی ورودی لحاظ میکنیم.

Alfa : شیب نیم گوه که در گزارش به عنوان شیب گوه بیان شده است شیب سطحی است غیر کارتزینی است در دامنه محاسباتی وجود دارد.

u : سرعت در راستای افق (x) است.

v : سرعت در راستای عمود (y) است.

۴ آنالیز خطا

برای تحلیل خطا و بررسی همگرایی مطابق گفته های کلاس و تمرین های قبل عمل میکنم برای این که مسئله دو بعدی است یک خط از مش بندی منظم ($dx=dy$) را در نظر میگیریم (در هر بخش بیان شده است) و در آن خط به بررسی خطای پیاپی (successive Error) میپردازیم. و شیب لگاریتمی خطا پیاپی بر اساس h (فاصله مش ها) بدست می آوریم.

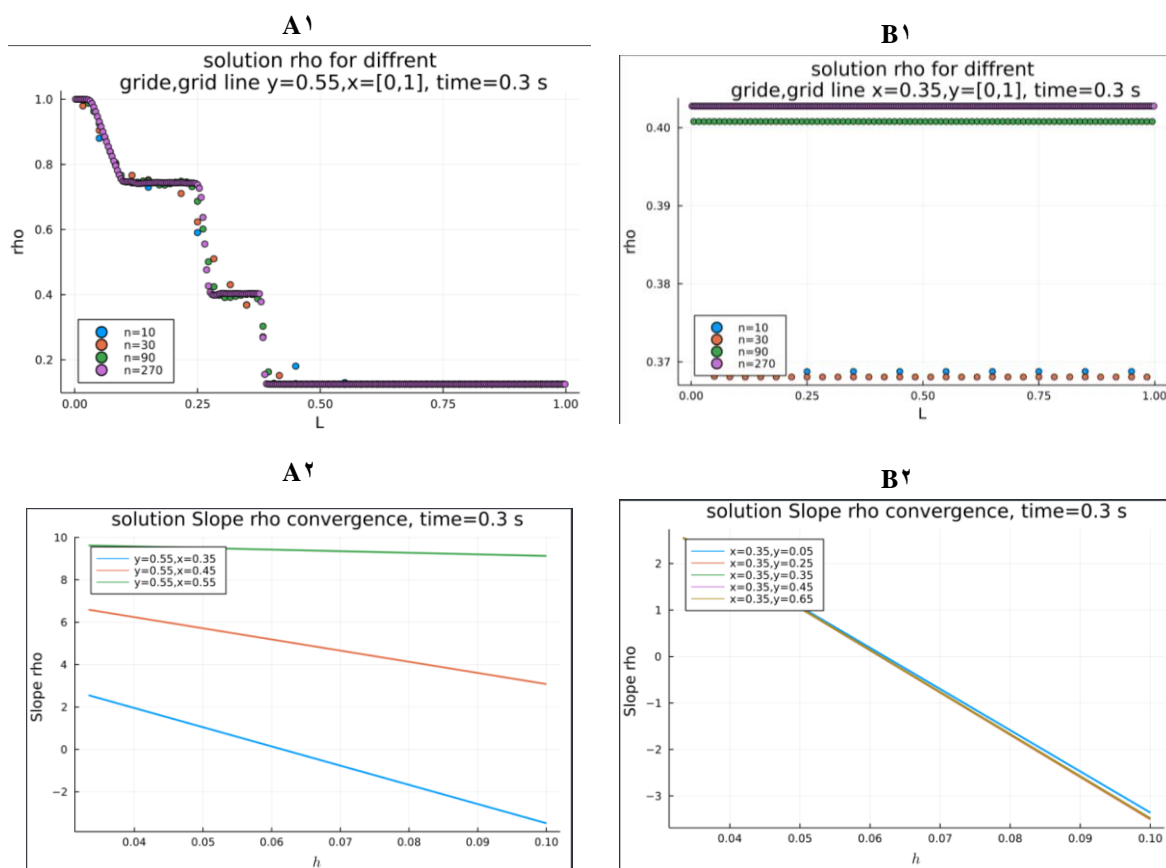
از آن جا که ما برای شرایط مرزی روی گوه از حالت پله ایی استفاده کرده ایم به مرور زمان بر روی این پله ها جریان های گردابی ایجاد و باعث ناهمگرایی شبیه سازی ما میشود. به همین علت است که بعد از زمان حدود ۱ ثانیه شبیه سازی کار نمیکند و به کام مکانی کوچک تر نیاز دارد. ما تحلیل خطا را بر روی مکان هایی که این جریان ها گردابی ایجاد نشده است و در معرض آن نیست انجام می دهیم. این کار دقت شبیه سازی را مستقل از دامنه شبکه روی گوه (بخش غیر کارتزینی) می شود. همان طور که انتظار داریم دقت مکانی در محل هایی که از جریان های گردابی به وجود آمده فاصله دارد دقت مکانی تجزیه حدود مرتبه ۵ است اما به حرکت به سمت این جریان ها دقت به مرتبه ۲ کاهش میابد. و این مطلب در رسم توضیحی ۱-۴ مشاهده میشود.

۱-۴ تحلیل استقلال از شبکه محاسباتی

تحلیل استقلال از شبکه محاسباتی مکانی و زمانی جدا گانه بررسی میشود.

۱-۱-۴ همگرایی در گام مکانی (شبکه مکانی)

همانطور که گفته شد همگرایی و کاهش خطا با کاهش فاصله مش های مورد بررسی در نمودار های ۲-۴ و ۳-۴ قابل مشاهده است. نکته مهم در بررسی خطا در یک خط مش در راستای x و یا y است. این بررسی خطا برای زمان ۰.۳ ثانیه و با شروع از کام مکانی ۰.۱ ($n=10$) است.



رسم توضیحی ۱-۴ خطای پیاپی برای یک خط مش سمت راست: خط مش در راستای y و $x=0.35$ ، سمت راست: خط مش در

راستای x و $y=0.55$ همچنین: $h=dx=dy$

در رسم توضیحی ۲-۴ موج شوک در حال انتقال دیده میشود به همین علت A^۲ برای x های عقب تر از موج محاسبه شده است. چرا که برای x های جلو تر تغییری در متغیر ها نیست و خطا هم قابل

محاسبه نیست. هم چنین رسم توضیحی ۲-۴ B برای مش عمودی نزدیک نقطه شروع گوه بیان شده است. از آن جا که موج عبوری ما افقی است افت و خیزی در نمودار B^1 دیده نمیشود همچنین شکل B^2 خطا مرتبه ۲ را نشان میدهد که به علت نزدیکه بودن مش به گوه و جریان های گردابی است که ابتدای تحلیل خطا توضیح داده شده است

```
nRange1 = ▶ [10, 30, 90, 270]
```

```
• nRange1=[1,3,9,27].*(n)
```

37.5 μs

```
▶ [0.1, 0.03333333, 0.01111111, 0.0037037]
```

```
• (1)./nRange1
```

```
CFL_x = ▶ [0.0264, 0.0792, 0.2376, 0.7128]
```

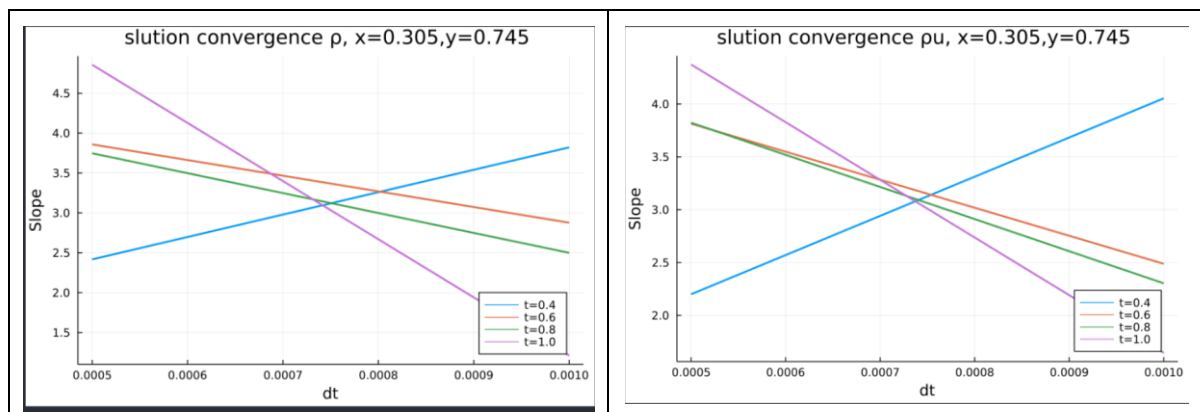
```
• CFL_x=(2.2*1.2).*(0.001./((1)./nRange1))
```

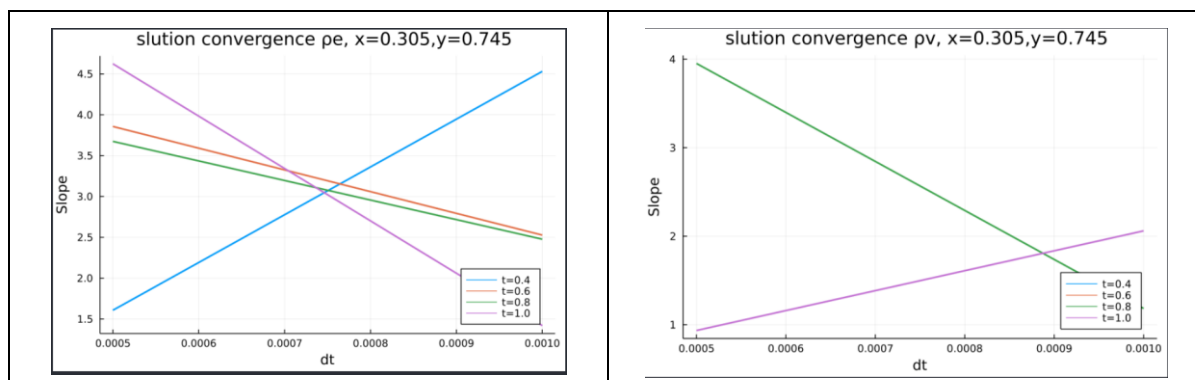
رسم توضیحی ۲-۴ محاسبه CFL برای گام های مکانی که در تحلیل خطای مکانی استفاده شده است

باید توجه شود که در تغییر تعداد مش برای تحلیل خطا شرط CFL به هم نخورد. بررسی این موضوع در رسم توضیحی ۲-۴ نشان داده شده است.

۲-۱-۴ استقلال محاسبات نسبت به گام زمان

این مسئله برای شرایط گذرا است و همان طور که مشاهده میکنید برای گام های زمانی (dt) کمتر از مقدار مشخص همگرا است این تحلیل خطا برای مش مکانی 100×100 انجام گرفته است رسم توضیحی ...همان طور که پیشبینی شد بود دقت زمانی مرتبه ۳ بدست می دهد.





رسم توضیحی ۳-۴ شیب لگاریتمی خطای پیاپی برای سلول در گام های زمانی مختلف (dt)

همان طو که در بخش قبل (۴-۱-۲) عنوان شد در تحلیل خطا باید دقت با تغییر گام زمانی از CFL عبور نکنیم یعنی گام زمانی را به قدر کوچک نشود تا این شرط رعایت نشود. شکل ... این موضوع را بررسی میکند. همان طور که مشخص است برای دو گام زمانی اول این شرط رعایت نشده و علت واگرا شدن بعد از مقداری کاهش dt همین است.

```
t_Range1 = ▶ [0.01, 0.005, 0.0025, 0.00125]
• t_Range1=[1,0.5, 0.25, 0.125]*0.01
62.9 μs

CFL_t = ▶ [2.64, 1.32, 0.66, 0.33]
• CFL_t=(2.2*1.2).*t_Range1./0.01
15.2 μs
```

رسم توضیحی ۴-۴ محاسبه ی CFL برای گام های زمانی که در تحلیل خطای زمانی استفاده شده است.

۵ صحت سنجی نتایج با نتایج مقالات

شکل ۵-۱ نتایج مقاله برای برابر ۱۰۰ و مش بندی ۱۰۰*۱۰۰ و زمان از ۱ تا ۱ ثانیه مطابق شکل زیر بدست آورده است و با این مشخصات ما کد را حل کرده و شکل ۵-۲ آورده ایم همان طور که قابل مشاهده است این نتایج نزدیکی زیادی به هم دارند.

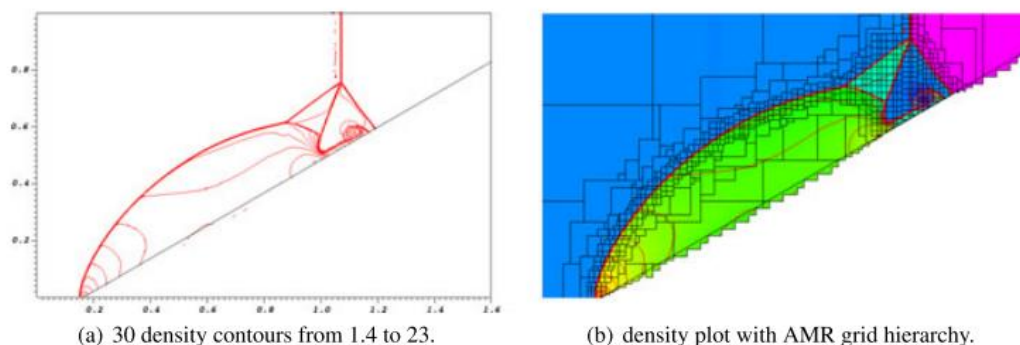
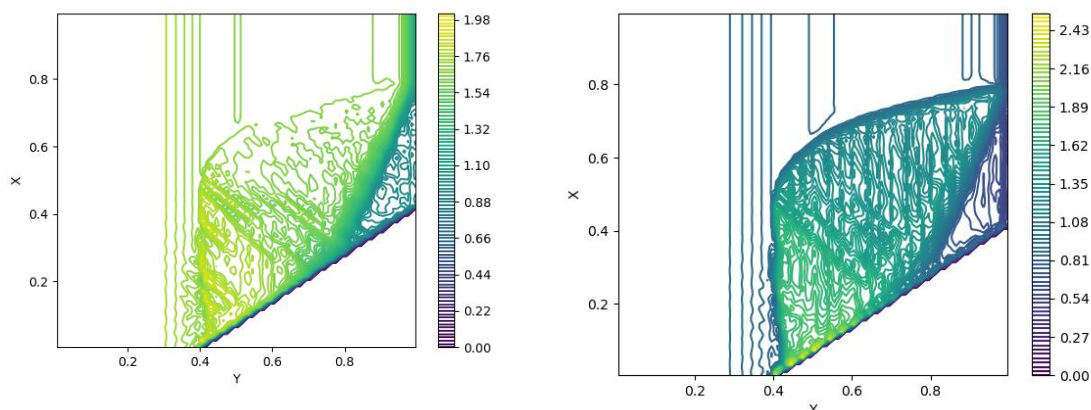


Figure 9. Cut-cell boundary (Chombo) calculation of DMR. The effective grid resolution at the finest level is 1600×800 , $CFL = 0.8$, $t = 0.09$. (a) 30 density contours from 1.4 to 23 and (b) density plot with adaptive mesh refinement grid hierarchy.

رسم توضیحی ۵-۱ مقاله مرجع جهت مقایسه و صحت سنجی نتایج [۹]

متاسفانه سیستم مورد استفاده برای مش متراکم تر از 100×100 با کم بود حافظه مواجه میشود اما با همین صورت نیز شباهت نتایج شبیه سازی قابل مشاهده است

برای آن که در نمودار رسم شده با PlotJs (رسم توضیحی ۵-۲) جزئیات کمتری دارد جریان گردابی را در شکل ۵-۲ با جزئیات بیشتر رسم شده است.

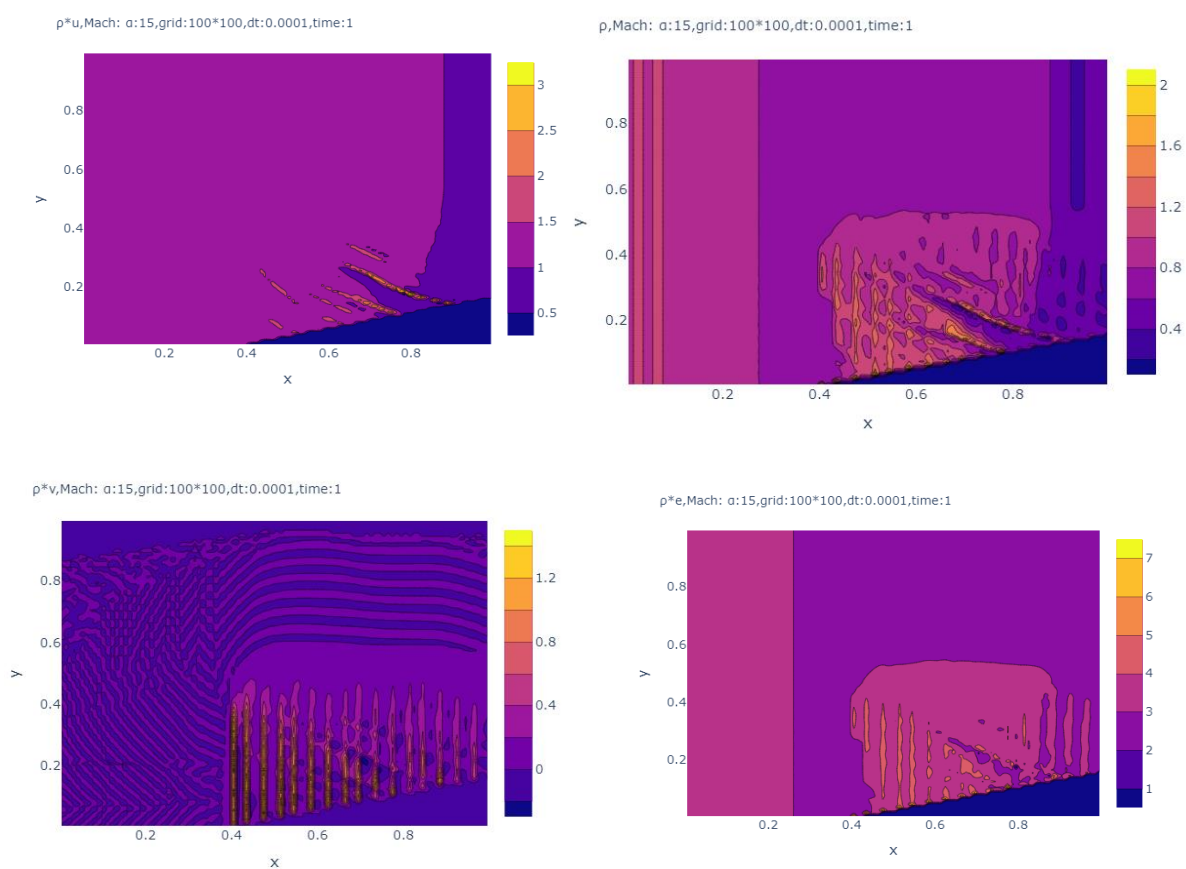


رسم توضیحی ۵-۲ برای مش 100×100 و $M=1, 2$ ، $\alpha=3.5$ رسم شده سمت راست rho چگالی و سمت چپ rho*u با PyPlot

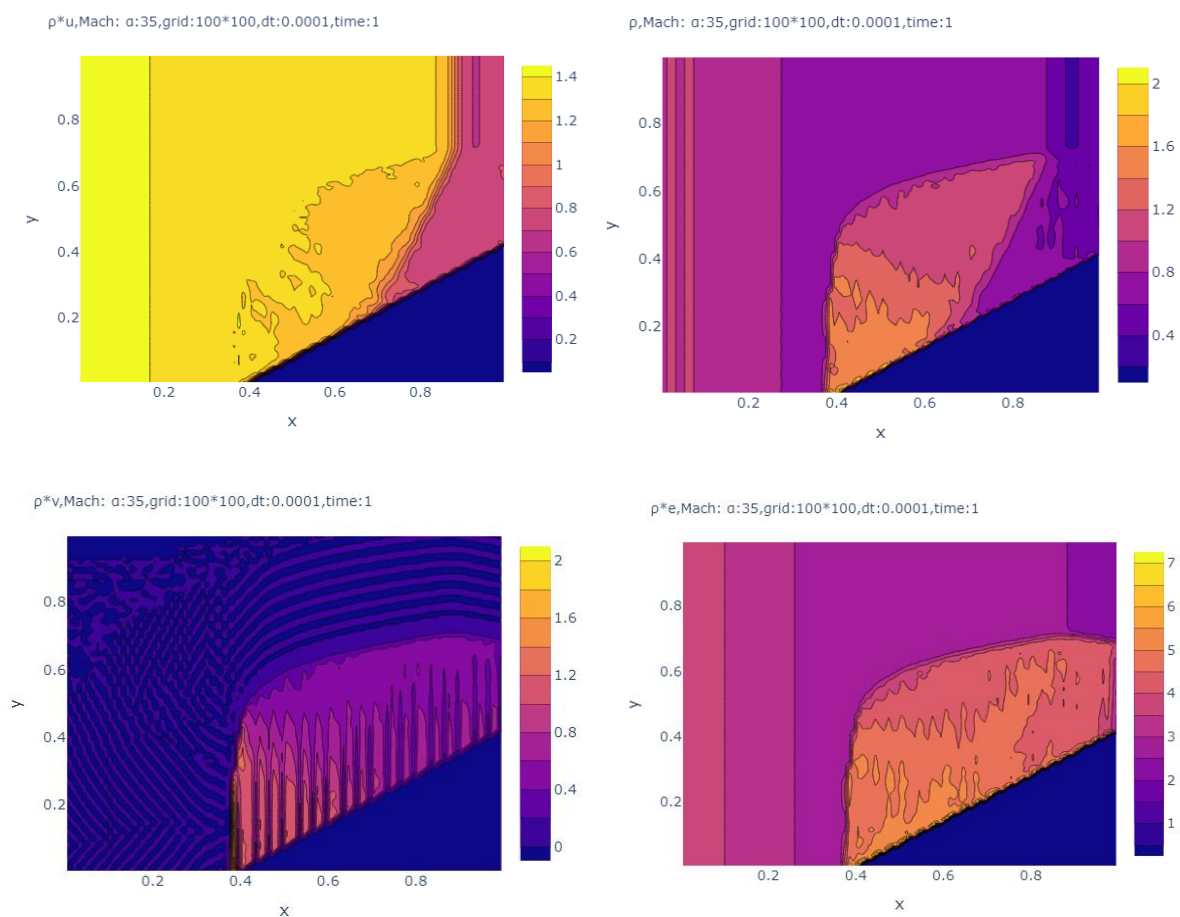
۶ آشکارسازی جریان

پارامتر مسئله در صورت عدد زاویه گوه (alpha) و سرعت ورودی M بیان شده است و نتایج متغیرهای اولیه و ثانویه برای هر عدد رینولدز در این بخش به صورت کانتور آورده شده است.

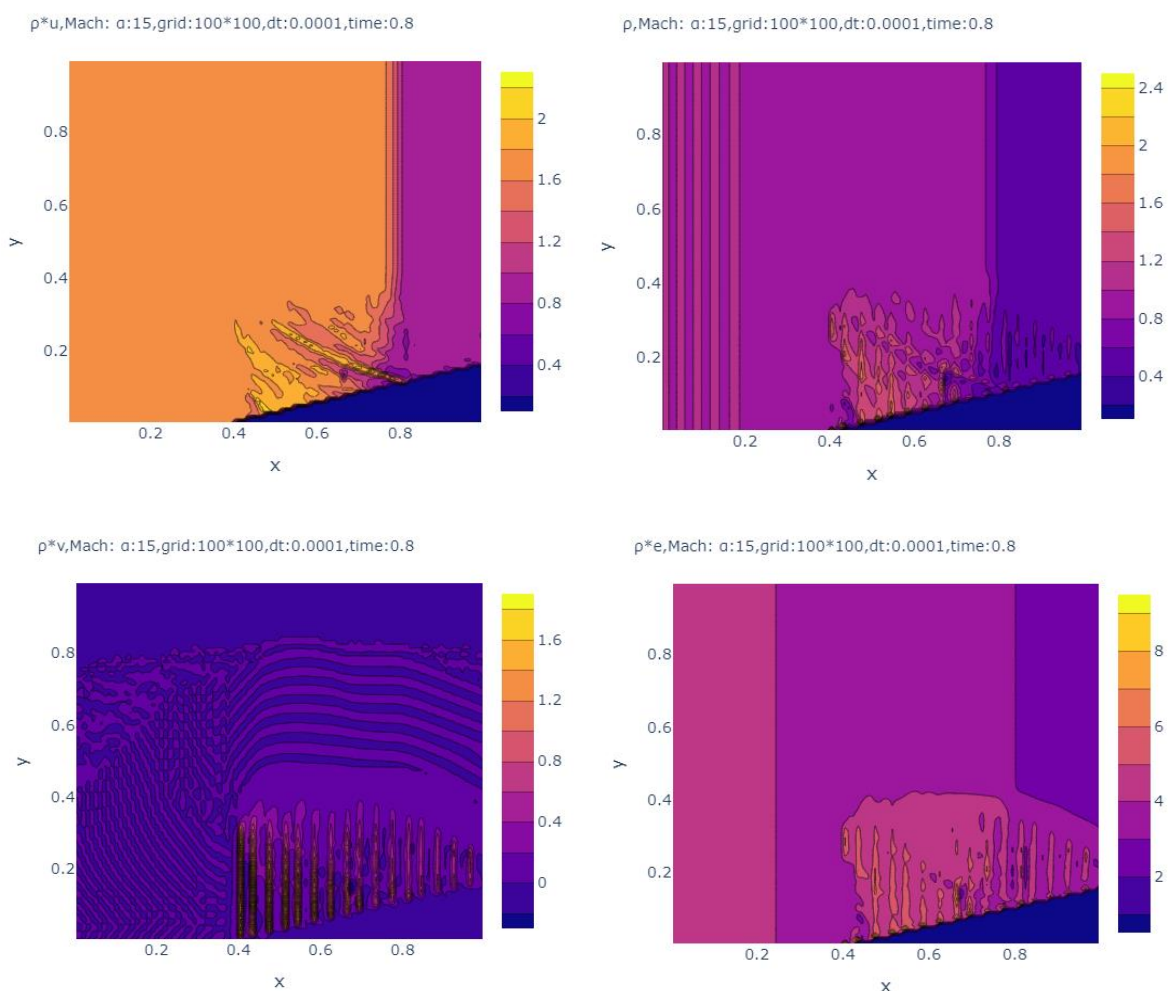
$$\gamma = \frac{1}{1 - \text{M}^2}$$



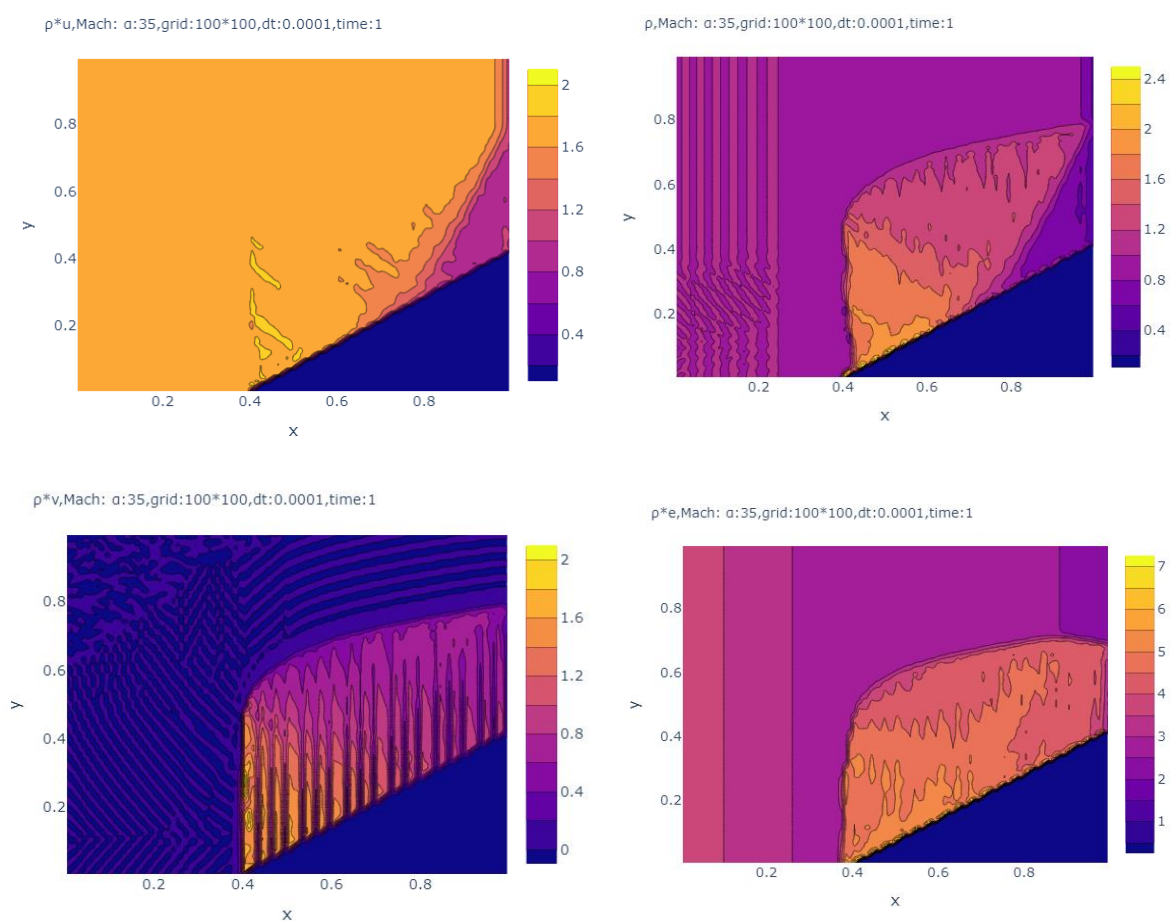
$$\gamma = \frac{1}{\alpha} = 1.2 = M^2$$



$$\gamma = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{M^2}}$$

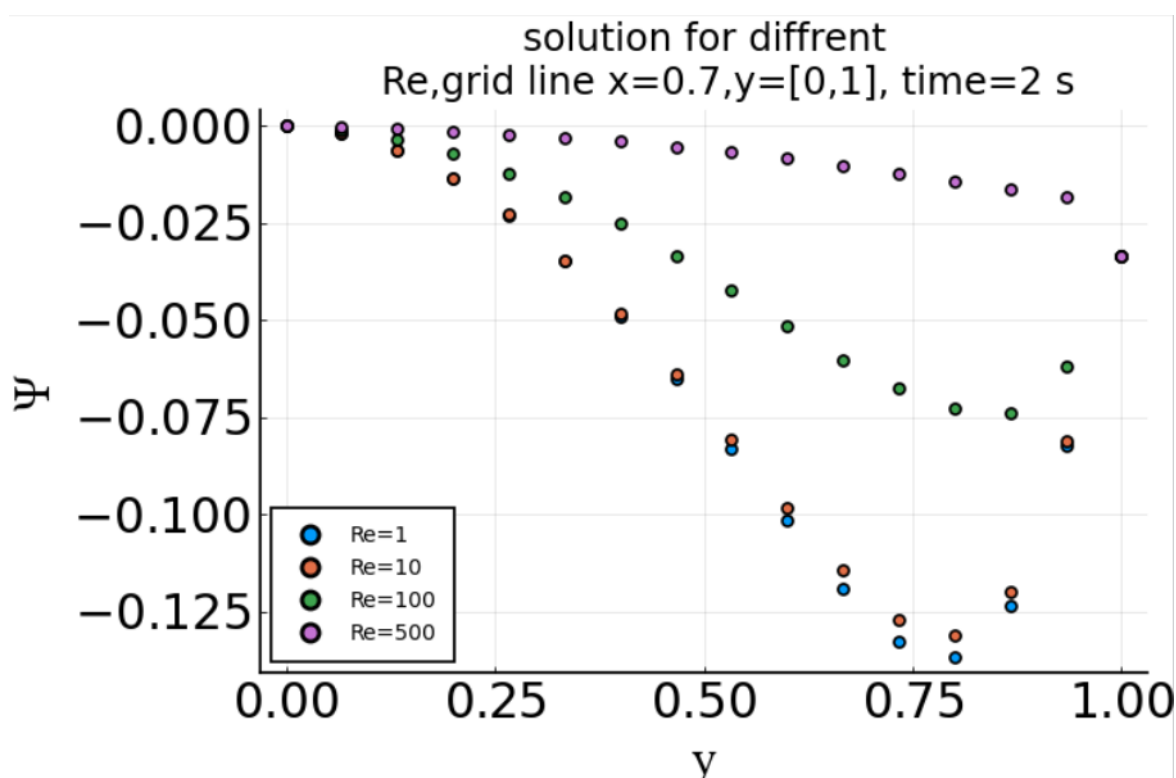


۶-۳ $\alpha = 1.5 = M$



۷ تحلیل حساسیت پاسخ به پارامترهای روش عددی

نسبت به عدد Re برای یک سطر مشخص



۸ سخن پایانی درباره حل و کدها (Github)

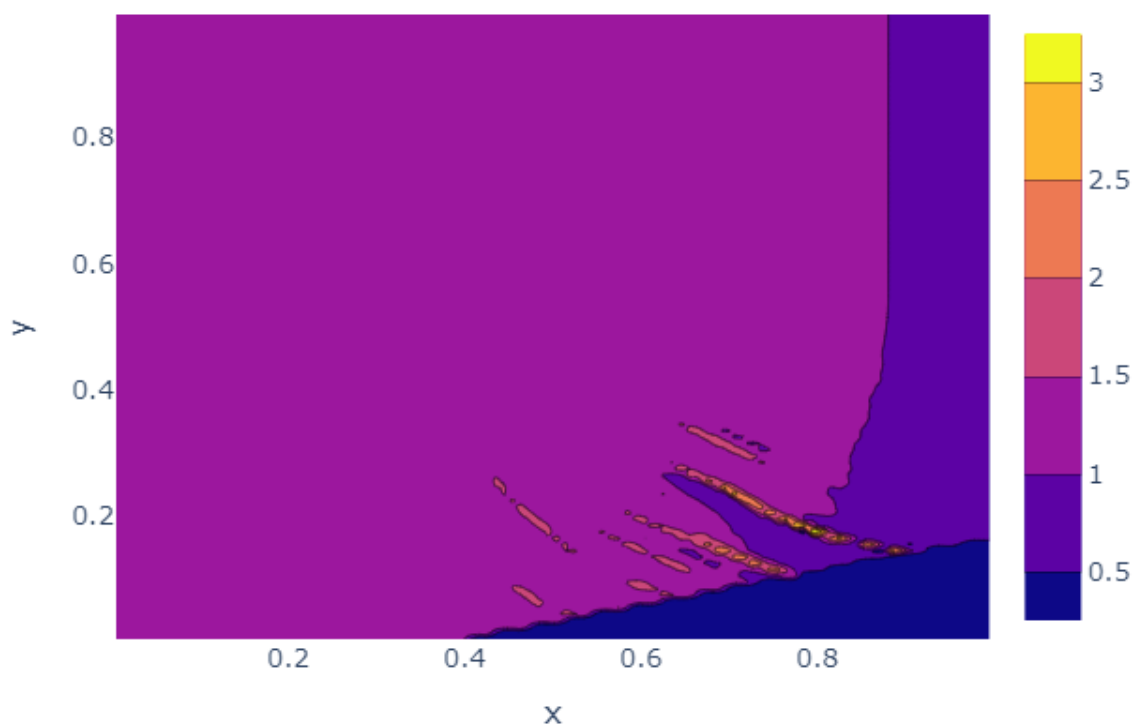
کد این سوال به وسیله زبان Julia نوشته شده است اما بخش های از آن مانند رسم دقیق تر بخشی از نمودارها از توابع و کتاب خانه های Python استفاده شده است که در Julia قابل استفاده است.

برای استفاده از و اجرای Python در Julia از [لینک](#) میتوان کمک گرفت.

ما برای رسم کانتور مجبور به استفاده از API ی atom شدیم هر یک از توابع تعریف شده در برای دیدن نمودارها را میتوان بعد اجرا با کلید ترکیبی `shift+Enter` برای یک خط (خط کد نمودار) مورد نظر استفاده کرد. به علاوه برای تغییرات کوچک از تغییر دستی متغیرها استفاده شده است. یکی از تغییرات اصلی و مهم که این جا عنوان میکنیم تغییر عدد ماخ است. برای تغییر عدد ماخ باید مقدار `M` در تابع `b_c` را تغییر

داد.

$\rho*u$, Mach: $\alpha:15$, grid: $100*100$, dt: 0.0001, time: 1



منابع و مراجع

۱. Roe, P.L., *Characteristic-based schemes for the Euler equations*. Annual review of fluid mechanics, ۱۹۸۶. ۱۸(۱): p. ۳۳۷-۳۶۵.
۲. Pawar, S. and O. San, *CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics*. Fluids, ۲۰۱۹. ۴(۳): p. ۱۵۹.
۳. Vanleer, B. *Flux-vector splitting for the 1990s*. in NASA, Lewis Research Center, *Computational Fluid Dynamics Symposium on Aeropropulsion*. ۱۹۹۱.
۴. Hussaini, M.Y., B. van Leer, and J. Van Rosendale, *Upwind and high-resolution schemes*. ۲۰۱۲: Springer Science & Business Media.
۵. Toro, E.F., *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. ۲۰۱۳: Springer Science & Business Media.
۶. Gottlieb, S. and C.-W. Shu, *Total variation diminishing Runge-Kutta schemes*. Mathematics of computation, ۱۹۹۸. ۶۷(۲۲۱): p. ۷۳-۸۵.
۷. Shu, C.-W., *High order weighted essentially nonoscillatory schemes for convection dominated problems*. SIAM review, ۲۰۰۹. ۵۱(۱): p. ۸۲-۱۲۶.
۸. Berger, M.J. and R.J. LeVeque, *Stable boundary conditions for Cartesian grid calculations*. Computing systems in Engineering, ۱۹۹۰. ۱(۲-۴): p. ۳۰۵-۳۱۱.
۹. Chi, C., B.J. Lee, and H.G. Im, *An improved ghost-cell immersed boundary method for compressible flow simulations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, ۲۰۱۷. ۸۳(۲): p. ۱۳۲-۱۴۸.

