

Coördinaattransformaties en kaartprojecties

Formules en parameters

3^e herziene uitgave
December 2000

Coördinaattransformaties en kaartprojecties

Formules en parameters

3^e herziene uitgave
December 2000

MD-rapportnummer: MDGAP - 2000.31

Voor meer informatie

Afdeling GAP

ir. Marc Crombaghs
m.j.e.crombaghs@mdi.rws.minvenw.nl
015-2691416

ir. Anton Kösters
a.j.m.kosters@mdi.rws.minvenw.nl
015-2691385

Postbus 5023
2600 GA Delft
Fax: 015-2135456

Inhoudsopgave

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| Voorwoord..... | 5 |
| 1. Inleiding | 7 |
| 2. Coördinaatstelsels in de praktijk | 9 |
| 2.1 Nederland..... | 9 |
| 2.2 Europa..... | 11 |
| 2.3 Wereldwijd | 13 |
| 3. Coördinaatstelsels voor positie-bepaling op aarde..... | 15 |
| 3.1 De vorm van de aarde..... | 15 |
| 3.1.1 De omwentelingsellipsoïde | 15 |
| 3.1.2 De geoïde | 16 |
| 3.2 De positie van een punt op aarde | 18 |
| 3.2.1 Ellipsoïdische coördinaatstelsels | 18 |
| 3.2.2 Cartesiaanse coördinaatstelsels | 19 |
| 3.2.3 Lokale en globale ellipsoïdes..... | 20 |
| 3.3 Transformaties tussen ruimtelijke coördinaatstelsels | 23 |
| 4. Kaartprojecties..... | 27 |
| 4.1 Inleiding | 27 |
| 4.2 De dubbelprojectie van Schreiber | 29 |
| 4.2.1 De kaartprojectie..... | 30 |
| 4.2.2 De inversie kaartprojectie | 31 |
| 4.2.3 Reeksontwikkeling | 32 |
| 4.3 De Universele Transversale Mercator-projectie (UTM) | 35 |
| 4.3.1 De kaartprojectie..... | 36 |
| 4.3.2 De inverse kaartprojectie | 38 |
| 4.4 De Gauss-Krüger projectie | 39 |
| 4.5 De Lambert-projectie | 40 |
| 5. Relaties tussen coördinaatstelsels | 43 |
| 5.1 RD-Bessel naar ETRS89 (WGS84) en vice versa..... | 44 |
| 5.2 ED87 (ED50) naar ETRS89 (WGS84) en vice versa..... | 47 |
| 5.3 RD-Bessel naar ED50 en vice versa | 49 |
| 5.4 België: van Hayford naar ETRS89 (WGS84) en vice versa..... | 50 |
| 5.5 Duitsland: van Bessel naar WGS84 en vice versa..... | 51 |
| 5.6 RD naar UTM (ED50) en vice versa | 52 |
| 6. Kwaliteitsbeschrijving coördinaat-transformaties en kaartprojecties | 55 |
| Definities en begripsomschrijvingen | 59 |
| Literatuur | 63 |

Voorwoord

De ligging van objecten op het aardoppervlak wordt beschreven in *coördinaten*. Dit zijn getallen die de ligging ten opzichte van de oorsprong van een gekozen *coördinaatstelsel* definiëren. Er zijn verschillende coördinaatstelsels mogelijk. Hierbij komt het volgende probleem aan de orde:

Hoe kunnen coördinaten van een punt, gegeven in een bepaald coördinaatstelsel getransformeerd worden naar coördinaten in een ander stelsel; welke randvoorwaarden gelden er en welke fouten treden er op?

Dergelijke vragen worden met regelmaat aan de Meetkundige Dienst gesteld door diverse instanties van binnen en buiten de overheid. De relatieve eenvoud, waarmee plaatsgebonden gegevens ingewonnen kunnen worden met behulp van *GPS* en geanalyseerd kunnen worden in een GIS, is katalysator in deze ontwikkeling.

Op de eerste plaats is het doel van dit rapport om duidelijkheden op het gebied van *coördinaattransformaties* en *kaartprojecties* te scheppen door uitleg te geven over algoritmen en de te gebruiken parameters. Hiertoe wordt een beschrijving gegeven van de in Nederland gebruikte *coördinaatsystemen*, voorafgegaan door enige uitleg van de fysieke achtergronden. Bovendien wordt een aantal buitenlandse coördinaatsystemen besproken.

Vervolgens worden algoritmes beschreven voor transformaties tussen deze coördinaatsystemen, met de meest actuele of voorkeurswaarden voor parameters, die nodig zijn voor de berekeningen. Ook wordt er een aantal nevenaspecten, zoals de kwaliteit van de transformaties en de geldigheidsgebieden besproken.

Ten opzichte van de 2^e herziene uitgave uit 1996 zijn er vele tekstuele wijzigingen doorgevoerd. De huidige huisstijl is toegepast. Belangrijk is dat de formules en parameters ongewijzigd zijn. Nieuw in dit rapport zijn onder andere:

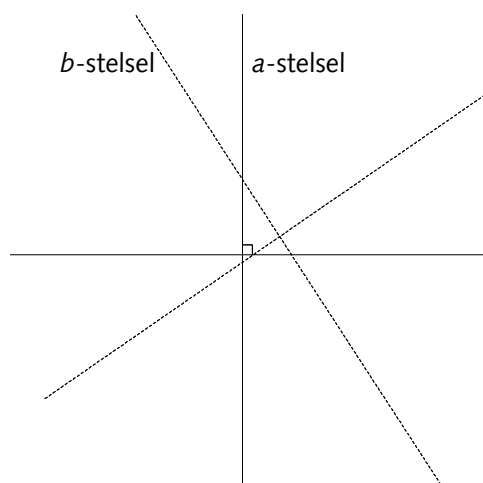
- Een beschrijving van de nieuwe procedure *RDNAPTRANS*TM in de paragrafen 2.1 en 5.1.
- Meer aandacht voor *ETRS89* in 2.2.
- Aandacht voor de Noordzee-geoïde in 2.1.
- Een nieuw hoofdstuk 6, dat de oude paragraaf 5.7 vervangt.

1. Inleiding

Voor de beschrijving van posities van punten op aarde wordt gebruik gemaakt van *coördinaten*. Coördinaten zijn kengetallen die aan een zeker punt worden toegekend. Hiervoor is een definitie van het *coördinaatstelsel* nodig; met behulp van coördinaten en kennis van het coördinaatstelsel kan de positie van een punt eenduidig gereconstrueerd worden.

De definitie van het coördinaatstelsel is binnen bepaalde grenzen in principe arbitrair. Hoewel het niet echt noodzakelijk is, wordt ervan uitgegaan dat de coördinaatassen elkaar loodrecht snijden. Er is dan sprake van een *rechthoekig* of *cartesiaans coördinaatstelsel*. Voor het definiëren van het coördinaatstelsel worden op de eerste plaats de oorsprong (het snijpunt van de coördinaatassen), de oriëntatie en de schaal van de coördinaatassen vastgelegd. Dit wordt de datumdefinitie genoemd.

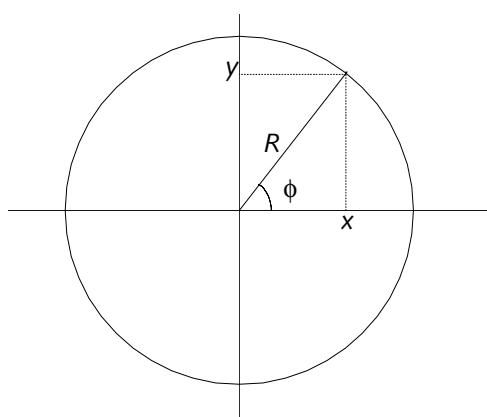
De coördinaten zijn afstanden, die langs de coördinaatassen worden afgezet in een bepaalde eenheid van lengte. De ligging van een punt ten opzichte van een eenduidig gedefinieerd coördinaatstelsel wordt de *absolute ligging* genoemd. De ligging van een aantal punten ten opzichte van elkaar wordt de *relatieve ligging* van punten genoemd. Dit laatste definieert de vorm van de geometrische figuur en is van belang in de geodesie. De keuze van het coördinaatstelsel is van secundair belang. De keuzevrijheid die bestaat bij het kiezen van het *datum* van een coördinaatstelsel ligt ten grondslag aan de verschillen die bestaan tussen de diverse coördinaatstelsels in de geodetische praktijk (Figuur 1).



Figuur 1: Rechthoekige coördinaatstelsels

Coördinaten van een aantal punten in het ene stelsel kunnen omgerekend worden naar een ander stelsel door middel van een *gelijkvormigheids-transformatie*. Hierbij blijft de *relatieve ligging* van deze punten onveranderd. Dit wordt ook wel een *datumtransformatie* of *datum-shift* genoemd.

Men kan ook gebruik maken van kromlijnige coördinaten om de ligging van een punt te definiëren. Hierbij wordt de hoek die de verbindinglijn van de oorsprong van het stelsel met het betreffende punt maakt met een referentierichting als één van de coördinaten genomen. Deze hoek ϕ geeft in combinatie met de afstand R van het punt tot de oorsprong, eveneens een eenduidige beschrijving van de ligging van een punt. In een plat vlak worden dit poolcoördinaten genoemd (Figuur 2).



Figuur 2: Poolcoördinaatstelsel

De positie van punten op aarde kan beschreven worden met bolcoördinaten en met *ellipsoïdische coördinaten*. Figuur 2 is dan uitgebreid met de 3^e dimensie, zodat behalve een hoek ϕ ook een hoek λ met de as die het papier uit zou komen, nodig is om de positie van een punt op de bol of op de *ellipsoïde* te beschrijven (zie 3.2.1).

Kromlijnige coördinaten worden in de praktijk gebruikt omdat ze beter aansluiten bij de praktische toepassing van de coördinaten. Desalniettemin zijn ze slechts een andere verschijningsvorm van *cartesiaanse coördinaten*. Er bestaan altijd omrekeningsformules om kromlijnige coördinaten om te zetten in *rechthoekige coördinaten* en vice versa, zonder dat er fouten of foutjes geïntroduceerd worden. Deze omrekening is dus géén datumtransformatie.

2. Coördinaatstelsels in de praktijk

2.1 Nederland

In Nederland zijn aparte *coördinaatstelsels* in gebruik voor ligging en hoogte. Sinds 2000 is er ook een officieel driedimensioneel coördinaatstelsel voor Nederland.

RD-stelsel

Het stelsel van de Rijksdriehoeksmeting (RD) is het meest gangbare stelsel voor wat betreft de ligging (planimetrie). Het bijbehorende *ellipsoïdische coördinaat-stelsel* gebruikt de Bessel-ellipsoïde. Het datumpunt ligt in Amersfoort. RD-coördinaten werden berekend uit coördinaten op de Bessel-ellipsoïde na toepassing van de zogenaamde dubbelprojectie van Schreiber.

Deze kaartprojectie is sinds 2000 een onderdeel van de procedure RDNAPTRANSTM voor de conversie van RD- naar ETRS89-coördinaten (via de Bessel-ellipsoïde). Deze procedure is onderdeel van de nieuwe definitie van het RD-stelsel, die is gebaseerd op ETRS89. De gepubliceerde RD-coördinaten wijzigen niet door de nieuwe definitie. Zie verder 5.1.

Voor het praktisch gebruik van het RD-stelsel is in de afgelopen eeuw een net van zo'n 6000 RD-punten ontstaan uit vele terrestrische metingen. Zie [Kadaster, 2000] voor meer informatie. De *precisie* van het RD-net is zeer goed te noemen. Zelfs over grotere afstanden zullen de fouten niet groter zijn dan 25 centimeter.

NAP en geoïde

Hoogten worden in Nederland gegeven ten opzichte van Normaal Amsterdams Peil (NAP). Historisch gezien is NAP gerelateerd aan de gemiddelde waterstand van het IJ in Amsterdam. NAP-hoogten zijn *orthometrische hoogten* dat wil zeggen, hoogten ten opzichte van de *geoïde* (met een fysische betekenis). De *precisie* van deze orthometrische hoogten is in vergelijking met de planimetrische coördinaten hoog, en in de praktijk vooral afhankelijk van de precisie van de gebruikte metingen en van de stabiliteit van de objecten waarin de peilmerken zijn verankerd.

In Nederland bevinden zich zo'n 55.000 NAP peilmerken. Het beheer van het NAP-stelsel is in handen van de Meetkundige Dienst van Rijkswaterstaat, afdeling NAP.

De geoïde is van belang als men hoogten ten opzichte van NAP wil omrekenen naar hoogten ten opzichte van de WGS84-ellipsoïde. De geoïde voor Nederland is bepaald door [De Min, 1996] uit zwaartekrachtmetingen in Nederland en Europa en een globaal geopotentialmodel. Door

aansluiting van deze gravimetrische geoïde op ETRS89-coördinaten is een geoïde ontstaan met millimeter-*precisie* over korte afstanden, tot 2 centimeter over 100 kilometer. De realisatie van deze geoïde bestaat uit een gelijkmatig grid van punten, waarbinnen geïnterpoleerd kan worden.

Dit geoïdegrid is ingebouwd in Coordinate Calculator versie 4.0, en in een aantal gangbare landmeetkundige verwerkingspakketten. Overigens zal er in 2001 een nieuwe geoïde voor Nederland berekend worden, die nog preciezer zal zijn, met name in de buurt van de Belgisch-Nederlandse grens.

Omdat ook op zee *GPS* steeds meer gebruikt wordt voor hoogte- en dieptemetingen, is er voor de Noordzee ook een geoïde berekend uit zwaartekrachtsmetingen en satelliet-altimeter waarnemingen [De Bruijne, 1997]. Op zee gaat het niet primair om het *equipotentiaalvlak* op gemiddeld zeeniveau, maar om Mean Sea Level, dat wordt gebruikt voor dieptekartering. Dit Mean Sea Level is niet per se een equipotentiaalvlak, omdat er ook permanente zee-topografie is.

De Noordzee-geoïde is eveneens ingebouwd in Coordinate Calculator versie 4.0. De *precisie* van deze geoïde wordt geschat op ongeveer 10 centimeter.

ETRS89

Sinds 2000 is ETRS89 het driedimensionele coördinaatstelsel voor Nederland. Het ETRS89 is in Nederland *verdicht* met behulp van de NEREF-campagnes, het GPS-kernnet en het AGRS.NL [Van der Marel, 2000]. Met behulp van deze verdichting is de omrekening tussen ETRS89 en RD en NAP bepaald, die aan bod komt in 5.1. ETRS89 wordt uitgebreider beschreven in 2.2.

2.2 Europa

Sinds de Tweede Wereldoorlog zijn er in Europa ontwikkelingen gaande die tot verdere integratie van nationale *coördinaatsystemen* hebben geleid. Kort na het einde van de Tweede Wereldoorlog werd een begin gemaakt met het creëren van een uniform coördinaatsysteem voor Europa.

ED50

Door het rekenkundig aaneenrijgen van een groot aantal driehoeks-kettingen, die geheel Europa (echter zonder Engeland) en zelfs delen van Noord-Afrika besloegen, werd in vrij korte tijd een resultaat bereikt (ED50), dat misschien niet aan alle geodetische *precisie*- en betrouwbaarheidseisen voldeed, maar wel in een behoefte voorzag.

Door de gebrekkige rekentechniek in die tijd, het feit dat niet alle beschikbare data gebruikt werd, het ontbreken van technieken om betrouwbare metingen over grote afstanden overzee uit te voeren en de haast die er mee gemoeid was, is de precisie van de berekende ED50-coördinaten slecht: er kunnen fouten optreden tot 10 meter.

Ondanks de beperkte precisie van ED50, is het wel wettelijk voorgeschreven als coördinaatsysteem voor het beschrijven van grenzen tussen concessiegebieden voor olieboringen op de Noordzee. Juist daarom neemt ED50 een zo belangrijke positie in in het rijtje coördinaatsystemen dat in Nederland wordt gebruikt. ED50 is een *ellipsoïdisch coördinaatstelsel*, gegeven op de Hayford ellipsoïde. Het datum-punt van dit stelsel is gelegen in Potsdam, bij Berlijn. In West-Europa worden ED50-coördinaten gebruikt in combinatie met de UTM-projectie (zie 4.3).

Kort nadat ED50-coördinaten beschikbaar waren gekomen voor geodetisch gebruik werd door een aantal Europese landmeetkundige en wetenschappelijke instellingen een vervolg op ED50 opgestart. De belangrijkste doelstelling van dit project (RETrig) was om een zo precies mogelijk en uniform coördinaatstelsel voor West-Europa te berekenen. Het gehele project heeft drie fasen gekend, waarin steeds weer nieuwe meettechnieken gebruikt werden. In 1988 werden als eindresultaat ED87-coördinaten gepubliceerd.

Hoewel ED87-coördinaten preciezer en betrouwbaarder zijn dan ED50-coördinaten, hebben ze weinig toepassing gevonden in de praktijk. De reden hiervoor is vooral dat de gewinning aan ED50 te groot is, zodat de kosten van zomaar overschakelen op een ander coördinaatstelsel te groot zijn. De verschillen tussen ED50 en ED87 coördinaten kunnen langs de Nederlandse kust oplopen tot enige meters. ED87 is eveneens een ellipsoïdisch coördinaatstelsel; de *referentie-ellipsoïde* is wederom de ellipsoïde van Hayford. Het datum-punt werd (om praktische en politieke) redenen, nu gekozen in München. Het kan echter gelijkgesteld worden aan het datum-punt van ED50.

Merk op dat kaartmateriaal van de Noordzee tegenwoordig meestal in WGS84 wordt afgebeeld.

ETRS89

Het European Terrestrial Reference System (ETRS89) is één van de realisaties van WGS84 (zie ook 2.3). De gebruikte WGS84-ellipsoïde wordt ook wel de GRS80-ellipsoïde genoemd. In tegenstelling tot ITRS, beweegt ETRS89 mee met de Europese plaat, waardoor de snelheid voor praktisch gebruik meestal kan worden verwaarloosd. De precisie van de ETRS89-coördinaten ligt op centimeter-niveau over duizenden kilometers.

Het praktisch gebruik van ETRS89 bestaat onder andere uit toepassingen voor geodesie en navigatie, voor de uitwisseling van (inter)nationale GIS-datasets, en voor geodynamische studies in Europa [Van der Marel, 2000]. ETRS89 wordt ook erkend als het officiële datum voor continentaal Europa (met name met het oog op gegevensuitwisseling), ook voor de luchtvaart.

Sinds 2000 is ETRS89 ook het driedimensionele coördinaatstelsel voor Nederland. De omrekening tussen ETRS89 en RD en NAP via de procedure RDNAPTRANS™ komt in 5.1 aan bod.

ETRS89 wordt gerealiseerd met behulp van diverse GPS-campagnes en het EUREF Permanent GPS network, een verdichting van zo'n 100 stations van het wereldwijde IGS Permanent GPS network. De Nederlandse bijdrage bestaat uit de IGS-stations Kootwijk en Westerbork, en de AGRS.NL stations Delft, Eijsden en Terschelling. Op die manier wordt ETRS89 *verdicht* naar alle Europese landen. De waarnemingen van de ETRS89-stations worden gebruikt voor nieuwe berekeningen van het ITRS.

In Nederland is ETRS89 in de jaren negentig op een aantal manieren verder verdicht [Van der Marel, 2000]:

- In een aantal NEREF/MAREO-campagnes (op basis waarvan de datum-transformatie uit 5.1 is bepaald)
- Met het GPS-kernnet (ruim 400 punten in Nederland die geschikt zijn voor het uitvoeren van GPS-metingen)
- Met het AGRS.NL (Actief GPS Referentiesysteem voor Nederland; vijf permanente GPS-stations).

2.3 Wereldwijd

Sinds de introductie van satellietplaatsbepalingssystemen (zoals Doppler, SLR, *GPS* en Glonass) en astronomische plaatsbepalingssystemen (VLBI) is er een behoefte aan wereldwijd gedefinieerde *coördinaatstelsels*.

Het bekendste en belangrijkste coördinaatstelsel voor wereldwijde toepassingen is op dit moment WGS84. GPS-ontvangers leveren namelijk altijd WGS84-coördinaten (die echter vaak al in de ontvanger omgerekend kunnen worden naar andere coördinaatstelsels).

WGS84 is een geocentrisch en aardvast coördinaatstelsel. Het is in 1984 gedefinieerd door het Amerikaanse Defence Mapping Agency (DMA), het tegenwoordige NIMA. Het is de opvolger van andere coördinaatstelsels (zoals WGS72), die in het verleden voor wereldwijde plaatsbepalings- en karteringswerkzaamheden zijn gebruikt. Het *datum* van WGS84 is zo gekozen, dat de oorsprong zo goed mogelijk in het middelpunt van de aarde ligt, de z-as zo goed mogelijk evenwijdig is aan de rotatie-as van de aarde, de x-as naar de Greenwich *meridiaan* wijst, en de y-as naar de 90°-meridiaan. Voor WGS84 coördinaten is een *ellipsoïde* gedefinieerd, de zogenaamde WGS84-ellipsoïde, ook wel GRS80-ellipsoïde genoemd. Verder bestaat WGS84 ook nog uit een zwaartekrachtmodel en een *geoïde*. Verdere specificaties van het coördinaatstelsel WGS84 worden gegeven in [DMA,1987].

De *realisatie* van WGS84 op aarde vindt op een aantal niveaus plaats [Van der Marel, 2000]:

- Het International Terrestrial Reference System (ITRS) wordt gerealiseerd door het International Terrestrial Reference Frame (ITRF), bestaande uit meer dan 200 waarnemingsstations, verspreid over de hele aarde, waarvan (ongeveer ieder jaar) coördinaten en snelheden gepubliceerd worden door de International Earth Rotation Service (IERS). De gebruikte waarnemingstechnieken zijn onder andere VLBI, SLR en GPS. Het GPS-gedeelte van het ITRF bestaat uit IGS- en EUREF-stations, waarop GPS-ontvangers continu metingen verrichten. Met het ITRS kan de geodynamica van de aarde bestudeerd worden.
- Het European Terrestrial Reference System (ETRS89). De ITRS-coördinaten in Europa vertonen door de beweging van de Europese plaat een min of meer gelijke beweging van enkele centimeters per jaar. Voor veel toepassingen is dit ongewenst. Het ETRS89 beweegt mee met de Europese plaat, waardoor de snelheid voor praktisch gebruik meestal kan worden verwaarloosd. ETRS89-coördinaten zijn overigens eenvoudig om te rekenen naar de verschillende ITRS-realisaties. Zie 2.2.
- WGS84 (G893). Doordat NIMA in 1996 de coördinaten van de GPS-tracking stations aan heeft gesloten op 18 IGS-stations, is WGS84 nu in

feite gebaseerd op ITRF94; het kan beschouwd worden als een realisatie van ITRS94.

Een methode om *absolute posities* te bepalen in WGS84 is door middel van absolute plaatsbepaling met GPS. Hiermee is (sinds het uitschakelen van de SA-verslechtering op 1 mei 2000) een *precisie* van 10-15 meter (2σ) haalbaar. Relatieve metingen ten opzichte van bijvoorbeeld ETRS89 punten leveren betere resultaten.

3. Coördinaatstelsels voor positiebepaling op aarde

3.1 De vorm van de aarde

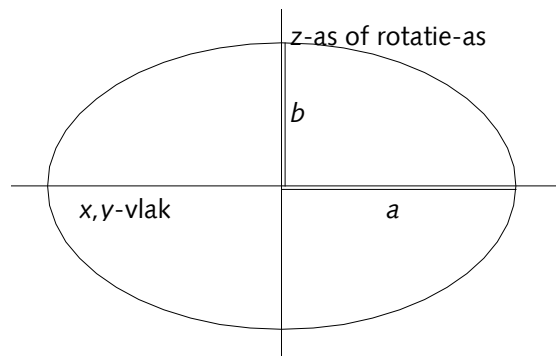
Voor veel toepassingen is het voldoende om de aarde te beschouwen als een bol. Het is echter al lange tijd bekend dat de bolvorm slechts een benadering is. Het meest gebruikte *referentieoppervlak* voor de vorm van de aarde is de *omwentelingsellipsoïde*. De afmetingen hiervan zijn in de loop van de tijd steeds verfijnd door betere meet- en rekenmethoden.

3.1.1 De omwentelingsellipsoïde

Een ellips wordt gedefinieerd door de lengte van de halve lange as a en de lengte van de halve korte as b . De *omwentelingsellipsoïde* (of kortweg ellipsoïde) ontstaat door deze ellips om zijn korte as te laten roteren. De algemene vergelijking van een ellipsoïde is:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

waarbij x , y en z de *coördinaten* van een punt op de ellipsoïde zijn in een nog nader aan te duiden *rechthoekig coördinaatstelsel* (Figuur 3).



Figuur 3: De omwentelingsellipsoïde

De afwijking van de ellipsoïde van een bol wordt beschreven door de excentriciteit e of door de afplatting f , die berekend worden uit de lengte van beide assen. Om de ellipsoïde te definiëren gebruikt men a , in combinatie met e , f of b . De relatie tussen deze vier parameters is:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} ; \quad f = \frac{a - b}{a} \quad (2)$$

In ieder punt van de ellipsoïde is een lijn denkbaar, die loodrecht staat op het oppervlak van de ellipsoïde. Deze lijn heet de *normaalrichting*.

De ellipsoïde is een benadering voor de werkelijke vorm van de aarde. Het is zeer moeilijk de exacte vorm van de aarde met grote nauwkeurigheid te bepalen, maar dat is ook niet nodig. De ellipsoïde voldoet uitstekend als *referentieoppervlak* voor het uitvoeren van landmeetkundige berekeningen, voor karteringswerkzaamheden en voor de beschrijving van hoogteverschillen op aarde.

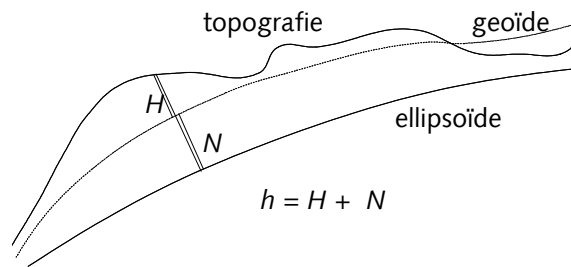
Het is echter van belang onderscheid te maken tussen de vorm van de aarde zelf, en de vorm van het zwaartekrachtsveld van de aarde. Onder het eerste wordt verstaan het oppervlak van de aarde, zoals dit zichtbaar is, en in kaart te brengen (topografie). Voor het overbrengen van hoogtegegevens speelt een ander referentieoppervlak een belangrijke rol, namelijk de *geoïde*. De rol van de zwaartekracht in de geodesie is van belang om te kunnen begrijpen welk praktisch nut de geoïde heeft.

3.1.2 De geoïde

Een voorwerp in de nabijheid van de aarde wordt aangetrokken door een kracht, de zwaartekracht, die groter wordt naarmate het voorwerp de aarde dichter nadert. In termen van energie betekent dit dat een voorwerp dicht bij de aarde een lagere potentiële energie (of potentiaal) bezit dan een voorwerp ver weg. Er moet dus een inspanning verricht worden om een voorwerp naar een punt met een hogere potentiaal te verplaatsen. In de fysica heet dit arbeid. Omgekeerd komt er energie vrij als een voorwerp valt naar een lager potentiaal niveau. Water stroomt dus in de richting van de lagere potentiaal.

Een *equipotentiaalvlak* is een vlak dat punten met een gelijke zwaartekrachts potentiaal verbindt. Er is geen arbeid nodig om een voorwerp voort te bewegen van het ene punt in een equipotentiaalvlak naar een ander punt in dat vlak. Water stroomt dus niet, en zou dus een grote ondiepe plas vormen op dit vlak. Verder geldt dat de richting van de zwaartekracht *altijd* loodrecht staat op een equipotentiaalvlak. Een voorwerp valt evenwijdig met de richting van de zwaartekracht. De richting van de zwaartekracht wordt ook wel de *schietloodrichting* genoemd.

De *geoïde* is een equipotentiaalvlak dat samenvalt met het niveauvlak van het wereldwijd gemiddeld zeeniveau. Dit gemiddeld zeeniveau wordt bepaald uit een langjarig gemiddelde van waterstanden langs de kust, en uit hoogtemetingen vanuit satellieten. Er vinden correcties plaats voor de invloed van getijden, zeestromen etc. De afwijking tussen de schietloodrichting en de *normaalrichting* op de *ellipsoïde* wordt de *schietloodafwijking* genoemd.



Figuur 4: De geoïde

Door onregelmatigheden in de massaverdeling van de aarde is de vorm van de geoïde ook onregelmatig gevormd (Figuur 4). Zelfs ten opzichte van de best passende ellipsoïde kunnen er nog afwijkingen voorkomen van vele tientallen meters.

De hoogte van de geoïde ten opzichte van de ellipsoïde kan worden bepaald door in een groot aantal punten op aarde de grootte en richting van de zwaartekracht waar te nemen. De geoïde van de gehele aarde zou eenduidig te bepalen zijn indien men in alle punten op aarde de zwaartekracht zou kennen. *Geoïdehoogten* worden berekend door toepassing van een integraal over de gehele aarde volgens de formule van Stokes.

De geoïde in een bepaald gebied wordt beïnvloed door de massaverdeling van de gehele aarde, en dus door de zwaartekracht in alle omliggende gebieden. Deze invloed wordt minder naarmate men verder weg is van het gebied waarvan men de geoïdehoogte wil bepalen.

De hoogte van de geoïde kan ook bepaald worden door de banen van laagvliegende satellieten om de aarde nauwkeurig te bestuderen. Ook kan men versnellingsmeters inbouwen in een laagvliegende satelliet, die de zwaartekracht die de satelliet ondervindt registreren. Hoe lager een satelliet vliegt, hoe beter hij de vorm van het zwaartekrachtsveld volgt in zijn baan om de aarde.

Het hoogteverschil tussen de geoïde en het *referentieoppervlak* van de ellipsoïde wordt de *geoïdehoogte* N genoemd; het verschil tussen het aardoppervlak en de ellipsoïde heet de *ellipsoïdische hoogte* h . Het verschil tussen beide hoogtesystemen is de *orthometrische hoogte* H . Er geldt dus:

$$h = H + N \quad (3)$$

Hoogteverschillen die gemeten worden met waterpassen zijn hoogteverschillen ten opzichte van de geoïde, dus orthometrische hoogteverschillen. Om de hoogte boven de ellipsoïde te bepalen, moeten de geoïdehoogte opgeteld worden bij de gewaterpaste hoogte.

3.2 De positie van een punt op aarde

De ruimtelijke positie van punten op aarde kan met twee verschillende type *coördinaten* worden uitgedrukt.

Er zijn *ellipsoïdische coördinaatstelsels* omdat de vorm van de *ellipsoïde* mooi aansluit bij de vorm van de aarde. Daardoor is een ellipsoïde goed bruikbaar als *referentieoppervlak* voor velerlei toepassingen. Bovendien kan iedereen grootte, plaats en oriëntering van een ellipsoïde zodanig kiezen, dat de ellipsoïde optimaal voldoet aan de eisen van zijn toepassing. Er bestaan lokale ellipsoïden, die gekozen zijn voor toepassingen die slechts een beperkt deel van het aardoppervlak in beschouwing nemen, maar ook globale ellipsoïden, die ten doel hebben het aardoppervlak als geheel zo goed mogelijk te beschrijven.

Coördinaten op een ellipsoïde worden geografische coördinaten genoemd. Geografische coördinaten kunnen omgerekend worden in *cartesiaanse coördinaten* via eenvoudige formules. Cartesiaanse coördinaten zijn slechts een andere representatie van geografische coördinaten. Ze hebben vooral een rekenkundig voordeel, indien de ruimtelijke positie van punten ten opzichte van de aarde als geheel berekend moet worden. Ook zijn ze de output van satellietplaatsbepalingssystemen, zoals *GPS*. Voor presentatie van posities wordt toch vaak de voorkeur gegeven aan geografische coördinaten. Hierdoor worden in het gehele rekenproces regelmatig omrekeningen tussen beide coördinaatsoorten uitgevoerd.

3.2.1 Ellipsoïdische coördinaatstelsels

Zoals al eerder vermeld, worden de vorm en grootte van een ellipsoïde gegeven door twee parameters, bijvoorbeeld de halve lange as a en de afplatting f . Om een coördinaatstelsel te definiëren op een ellipsoïde wordt gebruik gemaakt van twee kunstmatige lijnen op het oppervlak van de ellipsoïde, namelijk de *equatorlijn* en de zogenaamde *nulmeridiaan*.

De equatorlijn is de snijlijn van het oppervlak van de ellipsoïde en het equatorvlak. Alle lijnen over de ellipsoïde evenwijdig aan de equatorlijn heten *breedtecirkels*. Een meridiaan verbindt de snijpunten van de poolas met het oppervlak van de ellipsoïde. De nulmeridiaan wordt in principe willekeurig gekozen.

De ellipsoïde is in oost-west-richting onderverdeeld in lengtegraden, in noord-zuid-richting in breedtegraden. Noord van de equator heet noorderbreedte. De noorderbreedte wordt met positieve getallen aangeduid. Zuid van de equator heet zuiderbreedte.

Lengtegraden worden geteld vanaf de nulmeridiaan. Oostelijk van deze nulmeridiaan spreekt men van oosterlengte. De oosterlengte wordt met positieve getallen aangeduid. Westelijk van de meridiaan heet westerlengte.

Van graden, minuten en seconden (sexagesimaal) naar decimale graden:

$$\begin{aligned} 25^\circ 25' 25'' &= \\ 25^\circ 25,4166' &= \\ 25,423611^\circ & \end{aligned}$$

Immers:

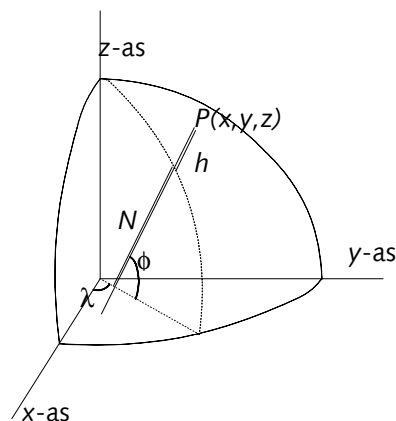
- $25'' = (25/60)' = 0,4166'$
- $25,4166' = (25,4166/60)^\circ = 0,423611^\circ$

De omgekeerde omrekening vindt plaats door het decimale deel twee maal met 60 te vermenigvuldigen.

In de meeste rekenmachines zijn deze omrekeningen ingebouwd.

Geografische coördinaten worden meestal uitgedrukt in sexagesimale graden (360 graden, 60 minuten, 60 seconden), hoewel dit meer gewoonte is dan handig. Soms worden graden gewoon decimaal uitgedrukt. Voor de geografische breedte wordt de Griekse letter ϕ gebruikt, voor de geografische lengte λ .

Samen met de hoogte van het punt boven de ellipsoïde h ontstaat een uniek coördinaten triplet (ϕ, λ, h) , dat in combinatie met de overeengekomen waarde voor de vorm en grootte van de ellipsoïde een eenduidige beschrijving van de positie van een punt op of nabij het aardoppervlak is (Figuur 5).



Figuur 5: Cartesiaanse en ellipsoïdische coördinaten

3.2.2 Cartesiaanse coördinaatstelsels

Een *rechthoekig cartesiaans coördinaatstelsel* wordt gedefinieerd door drie rechte lijnen die onderling loodrecht op elkaar staan, en een gelijke schaal hebben. Eén as valt samen met de korte as van de ellipsoïde, dus de rotatie-as. Langs deze as worden de z-coördinaten uitgezet. De overige twee assen liggen in het equatorvlak: de ene wijst naar de *nulmeridiaan* (de x-as), de ander naar de meridiaan van 90 graden oosterlengte (de y-as). Op deze assen worden de x- en y-coördinaten uitgezet.

De relatie van *cartesiaanse coördinaten* met *ellipsoïdische coördinaten* (ϕ, λ, h) is:

$$\begin{aligned} x &= (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ y &= (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ z &= (N(1 - e^2) + h) \sin \phi \end{aligned} \quad (4)$$

waarbij

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} ; \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (5)$$

De grootheid N heet de eerste hoofdkromtestraal (niet te verwarren met de *geoïdehoogte*). Geografische coördinaten kunnen dus direct omgerekend worden in cartesische coördinaten.

De omgekeerde relatie is ingewikkelder omdat de geografische coördinaten niet op voor de hand liggende wijze in cartesische coördinaten uitgedrukt kunnen worden. Naast een iteratieve procedure om ϕ te berekenen, bestaat er ook een directe berekening (de zg. methode van Bowring), zie bijv. [Strang van Hees, 1993]. Deze methode is exact voor punten die zich op of nabij het aardoppervlak bevinden.

$$\tan \phi = \frac{z + e^2 b \sin^3 \theta}{r - e^2 a \cos^3 \theta} \quad (6)$$

In deze formule is:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{za}{rb} & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ e^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} & e^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Vervolgens wordt berekend:

$$\tan \lambda = \frac{y}{x} \quad h = \frac{r}{\cos \phi} - N \quad (8)$$

Men dient te beseffen dat de bovengenoemde relatie tussen cartesische coördinaten en geografische coördinaten een exacte relatie is. Er treedt geen enkel *precisie*verlies op indien beide representaties in elkaar worden omgezet, indien grootte en vorm van de ellipsoïde eenduidig gedefinieerd zijn. Softwaremodules die deze coördinaatomzetting uitvoeren, kunnen eenvoudig getest worden door een heen- en terugtransformatie uit te voeren. De *residuen* moeten dan gelijk zijn aan nul.

3.2.3 Lokale en globale ellipsoïdes

De keuze van een *ellipsoïde* voor een zekere toepassing wordt bepaald door de eis dat de ellipsoïde een zo goed mogelijke benadering van het aardoppervlak moet zijn *voor die toepassing*.

Zo kent men ellipsoïden, die een zo goed mogelijke benadering van het aardoppervlak zijn voor wereldwijde toepassingen. Dit betekent dat *in principe*, het middelpunt van de ellipsoïde zich in het middelpunt van de aarde bevindt, dat de korte as zo goed mogelijk evenwijdig is aan de werkelijke rotatie-as van de aarde en dat de *nulmeridiaan* samenvalt met de meridiaan die loopt door het observatorium van Greenwich, ofwel de Greenwich-meridiaan. Een lengte-eenheid wordt gevonden door het aannemen van een constante voor de lichtsnelheid.

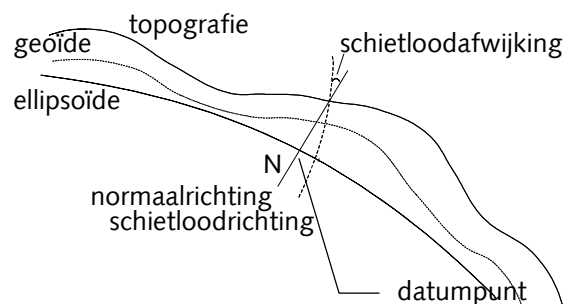
Natuurlijk is nooit met zekerheid vast te stellen of de oorsprong van het *coördinaatstelsel* zich inderdaad in het massamiddelpunt van de aarde bevindt, vooropgesteld dat dit massamiddelpunt een vast punt is, of dat de *z-as* inderdaad evenwijdig is aan de rotatie-as. Men moet deze definities dan ook voornamelijk zien als een voornemen, dat op één of andere manier geoperationaliseerd moet worden.

De *operationalisering (realisatie)* van een globaal coördinaatstelsel vindt plaats door het kiezen van een set coördinaten voor een aantal punten op aarde. De coördinaten van deze punten zijn meestal bepaald door het verrichten van talloze astronomische metingen en satellietmetingen. Deze waarnemingen zijn direct gerelateerd aan de bewegingen die de aarde maakt ten opzichte van de sterren, en daardoor aan de bovengenoemde begrippen (rotatie-as, massamiddelpunt) die de definitie vormen van een coördinaatstelsel. Op deze manier is het coördinaatstelsel een benadering van z'n eigen definitie.

Voor toepassingen die een lokaal karakter hebben, bijvoorbeeld een landelijk coördinaatstelsel voor Nederland, wordt een ellipsoïde gekozen die zo goed mogelijk bij het aardoppervlak van Nederland past. De oriëntering van de assen van de ellipsoïde wordt indirect bepaald door de keuze van een datumpunt en een aantal parameters die in dat punt gelden.

Dit zijn de geografische lengte λ en breedte ϕ , de *geoïdehoogte* N , het *azimuth* (hoek met het noorden) van een richting vanuit het datumpunt naar een ander punt, en tenslotte de noord-zuid en west-oost componenten van de *schietloodafwijking*. De schietloodafwijking is de hoek tussen de *schietloodrichting* en de *normaalrichting* op de ellipsoïde

De ellipsoïde wordt als het ware opgehangen aan de topografie in het datumpunt (Figuur 6). Als gevolg hiervan ontstaan verschillen tussen de positie van het middelpunt en de oriëntering van de assen van diverse ellipsoïdes.



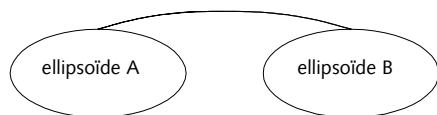
Figuur 6: Lokale datumdefinitie met behulp van schietloodrichting en geoïdehoogte

Uit het voorafgaande is duidelijk geworden, dat wanneer gesproken wordt over "een ellipsoïde", daarmee niet alleen de vorm en de grootte van de ellipsoïde wordt bedoeld, maar ook zijn positie en oriëntering ten opzichte van het aardoppervlak. Zo heeft de Bessel-ellipsoïde in Duitsland een andere stand in de ruimte dan de Bessel-ellipsoïde in Nederland, hoewel ze feitelijk even groot zijn en gelijke vorm hebben.

Coördinaten op twee verschillende ellipsoïdes kunnen daarom niet direct met elkaar vergeleken worden. In de volgende paragraaf wordt ingegaan op de manier waarop coördinaten op de ene ellipsoïde omgerekend kunnen worden naar een andere ellipsoïde. Tabel 1 geeft de vormparameters van enkele belangrijke ellipsoïdes.

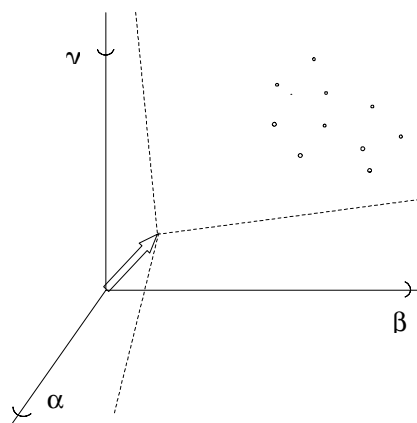
| | <i>Halve lange as</i> <i>a</i> | <i>halve korte as</i> <i>b</i> | <i>eccentriteit</i> <i>e²</i> | <i>inverse afplatting</i> <i>1/f</i> |
|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|
| <i>Bessel (1841)</i> | 6 377 397,155 | 6 356 078,963 | 0,006674372 | 299,1528128 |
| <i>Hayford (Int. 1930)</i> | 6 378 388,0 | 6 356 911,946 | 0,006722670 | 297,0 |
| <i>WGS 84 / GRS80</i> | 6 378 137,0 | 6 356 752,314 | 0,00669437999 | 298,257223563 |

Tabel 1: Vormparameters van enkele belangrijke ellipsoïdes



3.3 Transformaties tussen ruimtelijke coördinaatstelsels

In de vorige paragraaf is uitgelegd dat de ruimtelijke positie van een punt in *cartesiaanse coördinaten* en in *geografische coördinaten* uitgedrukt kan worden. Het ene *coördinaatstelsel* is echter het andere niet. Dit kan diverse redenen hebben. Op de eerste plaats kan de vorm en/of de grootte van de *ellipsoïde* verschillend zijn. Ook kan de definitie van het *datum* of de *operationalisering (realisatie)* ervan anders zijn. Hoe dan ook, in het algemeen bestaan er verschillen tussen coördinaten in niet-identiek gedefinieerde coördinaatstelsels.



Figuur 7: Ruimtelijke gelijkvormigheidstransformatie

Coördinaten van punten in het ene coördinaatstelsel kunnen omgerekend worden naar coördinaten in een ander coördinaatstelsel door middel van een *datum-shift*, veelal in de vorm van een *gelijkvormigheidstransformatie* (Figuur 7). Deze transformatie bestaat uit een verschuiving van de oorsprong van het coördinaatstelsel (translatie), een verandering in de oriëntatie van het gehele driebestel van coördinaatassen (rotatie) en een verandering in de eenheid van lengte (schaalverandering).

Indien de transformatieparameters tussen twee coördinaatstelsels bekend zijn, kan de volgende formule gebruikt worden om de coördinaten van een punt in het ene stelsel (x_1, y_1, z_1) om te zetten in coördinaten van het andere stelsel (x_2, y_2, z_2) .

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & -\gamma & \beta \\ \gamma & \delta & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Hierin is $(t_x, t_y, t_z)'$ de translatievector van de oorsprong van het coördinaatstelsel; α , β en γ zijn de rotaties om respectievelijk de x-, y- en z-as (in radialen), en δ is het toe te passen schaalverschil, meestal uitgedrukt in delen van een miljoen (ppm).

Soms worden de eerste en derde term in het rechterlid samengenomen, zodat in de 3x3-matrix in alle rijen $(1+\delta)$ op de hoofddiagonaal verschijnt. Bovenstaande kan worden samengevat als

$$\begin{aligned}\underline{x}_2 &= \underline{x}_1 + \underline{t} + R\underline{x}_1 \\ &= \underline{t} + (R + I) \underline{x}_1\end{aligned}\quad (10)$$

Voor transformaties van een net van punten, dat slechts een zeer beperkt deel van het aardoppervlak beslaat, is het moeilijk om een betrouwbare set van transformatieparameters te berekenen, in verband met de grote correlatie die dan bestaat tussen rotaties en translaties. Daarom wordt soms een centraal punt x^0 in het netwerk gekozen, dat dient als spil van de rotatie. Daarbij wordt niet de translatie van de oorsprong, maar de translatie van dit centrale punt t_{x0} gekozen. Dit levert een enigszins aangepaste formule op:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{x0} \\ t_{y0} \\ t_{z0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & -\gamma & \beta \\ \gamma & \delta & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x^0 \\ y_1 - y^0 \\ z_1 - z^0 \end{pmatrix}\quad (11)$$

Deze formule wordt samengevat als

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + \underline{t}_{x0} + R(\underline{x}_1 - \underline{x}^0)\quad (12)$$

Opmerkingen:

1. De algemene formules voor het uitvoeren van een ruimtelijke *coördinaattransformatie* zijn niet-lineair. De hierboven gegeven formules ontstaan na linearisering van deze formules, waarbij de benaderde waarden voor de rotatie- en schaalparameters gelijk aan nul zijn gekozen. Als gevolg van deze aanname zijn de formules alleen geldig indien de rotatie-hoeken α , β en γ , en de schaalfactor δ klein zijn. Dit is in deze context bijna altijd het geval.
2. Om de inverse transformatie uit te voeren, worden in de praktijk de tekens van de translatie-, rotatie- en schaalparameters veranderd. Dan ontstaat de volgende situatie:

$$\begin{aligned}\underline{x}_1 &= \underline{x}_2 - \underline{t} - R\underline{x}_2 \\ &= \underline{x}_1 + \underline{t} + R\underline{x}_1 - \underline{t} - R(\underline{x}_1 + \underline{t} + R\underline{x}_1) \\ &= \underline{x}_1 - R\underline{t} - RR\underline{x}_1\end{aligned}\quad (13)$$

Hieruit blijkt dat de datum-shift niet zonder meer omkeerbaar is door de tekens van de parameters te veranderen. Uitgaande van typische waarden voor de rotatie- en schaalparameters van 10^{-6} blijkt echter, dat

de term $RR\mathbf{x}_1$ zonder meer verwaarloosbaar is. De term $R\mathbf{t}$ kan vooral bij grote translaties en rotaties aanleiding geven tot afwijkingen tot een centimeter. Voor de meeste toepassingen is deze afwijking niet relevant, gezien de *precisie* van de transformatie zelf. Echter, indien de coördinaten van een bepaald punt veelvuldig heen- en weer worden getransformeerd, treedt een stapeling van deze fouten op, waardoor het noodzakelijk is om in de terugtransformatie een correctie aan te brengen. Dit kan gedaan worden door de restterm $R\mathbf{t}$ op te nemen in de translatievector. De inverse formule wordt dan:

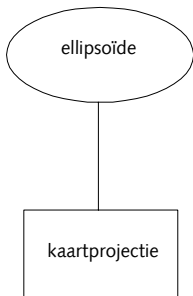
$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{t} - R\mathbf{t}) - R\mathbf{x}_2 \quad (14)$$

3. Ruimtelijke coördinaattransformaties (datum-shifts) worden niet altijd in de bovengenoemde gelijkvormigheidstransformatieparameters uitgedrukt. Soms worden sommige parameters weggelaten omdat ze voor een specifiek probleem niet significant zijn of omdat ze niet bekend zijn. De formules die dan gelden volgen eenvoudig uit de boven gegeven formules door een nul in te vullen op de plaats van de niet bekende parameter.
4. De hierboven gegeven cartesische schrijfwijze van coördinaten volgt vaak uit toepassing van formules (3), (4) en (5). Echter in veel praktische toepassingen van ruimtelijke gelijkvormigheidstransformaties (bijvoorbeeld binnen een GIS) heeft men niet de beschikking over de hiervoor benodigde hoogte informatie. Men kiest dan de *ellipsoïdische hoogte* $h = 0$; deze aanname heeft slechts een minimale invloed op de horizontale ligging van een punt.
5. Een alternatieve methode voor het omrekenen van de ene ellipsoïde naar de andere zijn de Molodenskii-formules. Hiermee worden geografische coördinaten direct omgerekend naar geografische coördinaten, zonder tussenkomst van cartesische coördinaten. Deze methode wordt onder andere gebruikt door DMA voor de omrekening van lokale datums naar WGS84. Echter, bij deze methode worden geen rotaties en schaalfactor toegepast. De methode is daarom minder precies dan de hierboven beschreven 7-parameter methode. Het resultaat is wel identiek aan een 7-parameter transformatie met rotaties en schaal gelijk aan nul. De verschillen in halve lange as a en afplatting f tussen beide ellipsoïdes worden als parameter in de formules opgenomen. De formules van de standaard Molodenskii datum transformation formules zijn, volgens [DMA, 1987]:

$$\begin{aligned}
(M+h)\Delta\phi &= -\Delta x \sin\phi - \Delta y \sin\phi \sin\lambda + \Delta z \cos\phi + \\
&\quad \frac{\Delta a}{a}(Ne^2 \sin\phi \cos\phi) + \Delta f(M\frac{a}{b} + N\frac{b}{a})\sin\phi \cos\phi \\
(N+h)\cos\phi\Delta\lambda &= -\Delta x \sin\lambda + \Delta y \cos\lambda \\
\Delta h &= \Delta x \cos\phi \cos\lambda + \Delta y \cos\phi \sin\lambda + \Delta z \cos\phi - \\
&\quad \Delta a \frac{a}{N} + \Delta f \frac{b}{a} N \sin^2\phi
\end{aligned} \tag{15}$$

Feitelijk worden er correcties $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$, Δh berekend op de geografische coördinaten van een punt. In deze formules komen voor: de coördinaten ϕ , λ en h , de beide hoofdkromtestralen N en M , de transformatieparameters Δx , Δy , Δz , Δa , Δf en de ellipsoïde-parameters a , b , e , en f . De inverse transformatie wordt berekend met tegengestelde parameters.

4. Kaartprojecties



4.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk is uitgelegd dat de *omwentelingsellipsoïde* wordt gebruikt als *referentieoppervlak* voor het beschrijven van de positie van punten op aarde. Voor het maken van een kaart is het gekromde oppervlak van de *ellipsoïde* en de kromlijnige lengte- en breedtecoördinaten ϕ en λ geen handige keuze.

In de cartografie wordt de voorkeur gegeven aan *rechthoekige coördinaten* in een plat vlak. Deze worden verkregen door de *ellipsoïdische coördinaten* te projecteren op een plat vlak volgens een wiskundige formule. Dit noemt men de *kaartprojectie*. Het vlak waarop geprojecteerd wordt, heet het kaartvlak. Soms is er ook een weg terug van de kaart naar de ellipsoïde; de zogenaamde inverse kaartprojectie.

Een kaartprojectie is dus een afbeelding van geografische coördinaten of bolcoördinaten naar rechthoekige coördinaten in een plat vlak. Het is nuttig om bij het gebruik van kaartcoördinaten niet alleen te spreken over het soort kaartprojectie dat gebruikt is, maar ook te vertellen welke (ellipsoïdische coördinaten) geprojecteerd zijn, d.w.z. door welke ellipsoïde en welke *datum*keuze ze beschreven worden.

De positie van een punt op aarde kan dus in een willekeurig coördinaatstelsel beschreven worden, waarbij diverse keuzes van ellipsoïden mogelijk zijn. Vervolgens kan het punt via een aantal mogelijke kaartprojecties op een kaartvlak afgebeeld worden.

Een beschrijving van alle mogelijke kaartprojecties en hun specifieke eigenschappen valt buiten het bestek van dit rapport. In het algemeen kan gesteld worden dat kaartprojecties altijd gepaard gaan met een zeker informatieverlies (vervorming). Immers, het is niet mogelijk om kromlijnige coördinaten op de ellipsoïde om te zetten naar rechthoekige coördinaten in een plat vlak, zonder geweld te doen aan één van de geometrische eigenschappen van punten, lijnen en oppervlakken. Naar de aard van de eigenschappen die bewaard blijven na projectie zijn de kaartprojecties te onderscheiden in:

- Conforme projecties (hoekgetrouw). Hierbij wordt de vorm van een gebied (ofwel de hoek tussen twee snijdende lijnen) onveranderd afgebeeld.

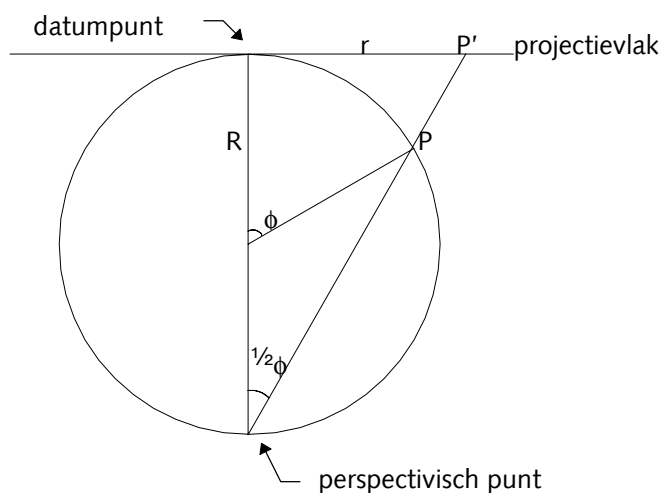
-
- Equivalente projecties (oppervlaktegetrouw). Hierbij houden twee gebieden met gelijke oppervlakten op de ellipsoïde gelijke oppervlakten op de kaart.
 - Equidistante projecties (lengtegetrouw). Hierbij blijft de afstand tussen twee punten langs een of meer lijnen onveranderd.

De conforme projecties vertonen de meest gewenste eigenschap voor geodetische karteringswerkzaamheden. De vervorming die optreedt bij een kaartprojectie wordt uitgedrukt in de grootheden schaalverandering en *meridiaanconvergentie*. Deze grootheden zijn afhankelijk van de coördinaten in de kaartprojectie. Het spreekt voor zich dat bij kaartprojecties voor geodetische toepassingen deze vervormingen zo klein mogelijk gehouden worden.

Voor geodetische toepassing in Nederland en op de Noordzee zijn de volgende kaartprojecties van belang: de Universele Transversale Mercatorprojectie (UTM) en de stereografische projectie die gebruikt wordt voor de definitie van het Nederlandse nationale driehoeksnetwerk van de Rijksdriehoeksmeting. Verder heeft nagenoeg ieder land z'n eigen kaartprojectie die gebruikt wordt voor nationale karteringswerkzaamheden.

4.2 De dubbelprojectie van Schreiber

Voor kadastrale karteringswerkzaamheden in Nederland wordt de zogenaamde dubbelprojectie van Schreiber gebruikt. Dit is een azimuthale projectie. Een azimuthale projectie is een perspectivische projectie, waarbij de projectie van een willekeurig punt op de bol wordt gevonden door een lijn te trekken die door dit punt en door het perspectivisch punt gaat en deze te snijden met het projectievlak. De hoogte van het projectievlak ten opzichte van de bol bepaalt de schaal van de projectie; de positie van het perspectivisch punt bepaalt de vorm van de projectie.



Figuur 8: Stereografische projectie

Het raakpunt van het projectievlak aan de bol is het datumpunt. Er wordt gesproken van een stereografische projectie als het perspectivisch punt diametraal tegenover het datumpunt ligt (zie Figuur 8).

De dubbelprojectie van Schreiber wordt een scheve of oblique projectie genoemd, omdat het datumpunt een willekeurig punt ergens op de bol is, in plaats van een speciaal punt, zoals de Noordpool of een punt op de *equator*. De betiteling 'dubbelprojectie' wordt verklaard door het feit, dat een punt eerst vanaf de ellipsoïde wordt geprojecteerd op een bol volgens de methode van Gauss, waarbij de straal van de bol gelijk is aan de kromtestraal van de ellipsoïde in het datumpunt. Vervolgens wordt het punt op de bol geprojecteerd op het kaartvlak volgens de stereografische projectie. Ook wordt er kunstmatig een schaalfactor geïntroduceerd, doordat het kaartvlak niet aan de bol raakt, maar hem net onder het oppervlak snijdt.

Door dit alles is er duidelijk verschil tussen de algemene stereografische projectie en de hiervan afgeleide projectie, die in Nederland wordt toegepast. Er wordt gebruik gemaakt van de ellipsoïde van Bessel. Het centrale punt bevindt zich in Amersfoort. De coördinaten van dit punt zijn per definitie vastgesteld op:

$$\phi_0 = 52^\circ 09' 22,178''$$

$$\lambda_0 = 05^\circ 23' 15,500''$$

In het kaartvlak is een *rechthoekig coördinaatstelsel* gedefinieerd. De coördinaten van het centrale punt in Amersfoort zijn zodanig gekozen, dat negatieve coördinaten en coördinaatverwisselingen kunnen worden voorkomen. De Rijksdriehoekscoördinaten van dit punt zijn:

$$X_0 = 155\,000$$

$$Y_0 = 463\,000$$

Voor de berekening van de kaartcoördinaten en de inverse berekening bestaat een exacte berekeningswijze: de berekening vindt plaats met gesloten formules¹.

4.2.1 De kaartprojectie

De eerste stap hierin is de berekening van lengte- en breedtecoördinaten op een bol, door middel van de conforme projectie van Gauss. Hiertoe wordt eerst de isometrische breedte τ op de ellipsoïde berekend:

$$\tau_i = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi + 2\phi_i}{4} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \quad (16)$$

Deze wordt omgerekend naar een isometrische coördinaat op de bol, tegelijkertijd met de omrekening naar een lengteverschil met de *meridiaan* van het centrale punt in Amersfoort. Vervolgens wordt de geografische breedte op de bol berekend.

$$T = n\tau + m$$

$$B = 2 \arctan(e^T) - \pi/2 \quad (17)$$

$$\Delta L = n(\lambda - \lambda_0)$$

De constanten n en m zijn zo gekozen, dat de schaalfout over het gehele gebied minimaal is, namelijk:

$$n = 1,00047585668$$

$$m = 0,003773953832$$

¹ Merk op dat de gesloten formules van de (inverse) kaartprojectie sinds 2000 aangevuld dienen te worden met een toepassing van het correctie-grid, zie 5.1.

De X- en Y-coördinaten in het stelsel van de Rijksdriehoeksmeting worden berekend uit de volgende formules:

$$\begin{aligned} X &= 2 \cdot k \cdot R \cdot \frac{\sin \Delta L \cos B}{1 + \sin B \sin B_0 + \cos B \cos B_0 \cos \Delta L} + X_0 \\ Y &= 2 \cdot k \cdot R \cdot \frac{\sin B \cos B_0 - \cos B \sin B_0 \cos \Delta L}{1 + \sin B \sin B_0 + \cos B \cos B_0 \cos \Delta L} + Y_0 \end{aligned} \quad (18)$$

Hierin is k de schaalfactor in het centrale punt, en R de straal van de bol in dit punt, berekend uit de beide hoofdkromtestralen:

$$k = 0,9999079$$

$$R = \sqrt{M_0 N_0} = 6\,382\,644,571 \text{ m.}$$

Sinds 2000 zijn dit pseudo RD-coördinaten. De daadwerkelijke RD-coördinaten volgen hieruit door toepassing van het correctie-grid, dat is vermeld in 5.1 (correcties tot maximaal 25 centimeter).

4.2.2 De inversie kaartprojectie

De inverse projectie (het herberekenen van geografische coördinaten op de Bessel-ellipsoïde uit RD-coördinaten) wordt voorafgegaan door een toepassing van het genoemde correctie-grid. Daarna worden de coördinaten op de bol berekend:

$$\sin B = \cos \alpha \cos B_0 \sin \Psi + \sin B_0 \cos \Psi$$

$$\sin \Delta L = \frac{\sin \alpha \sin \Psi}{\cos B} \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{\Delta L}{n} + \lambda_0$$

met

$$\sin \alpha = \frac{X - X_0}{\sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}} ; \quad \cos \alpha = \frac{Y - Y_0}{\sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}} \quad (20)$$

en

$$\Psi = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}}{2 k R} \right) \quad (21)$$

De breedte B op de bol wordt via isometrische breedte weer omgerekend naar de isometrische breedte τ op de Bessel-ellipsoïde:

$$T = \ln \tan\left(\frac{2B + \pi}{4}\right)$$

$$\tau = \frac{T - m}{n}$$
(22)

De geografische breedte op de ellipsoïde komt vervolgens iteratief tot stand. De startwaarde is:

$$\phi^0 = \frac{4 \arctan(e^\tau) - \pi}{2}$$
(23)

Daarna wordt $\phi^{(k+1)}$ berekend uit $\phi^{(k)}$ door middel van:

$$\phi^{(k+1)} = 2 \arctan \left[e^\tau \left(\frac{1 + e \sin \phi^{(k)}}{1 - e \sin \phi^{(k)}} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \frac{\pi}{2}$$
(24)

De iteratie kan gestopt worden als $abs \phi^{(k+1)} - \phi^{(k)} < 10^{-10}$

4.2.3 Reeksontwikkeling

Er is ook een reeksontwikkeling gemaakt, die een benadering is van de exacte oplossing, maar die eenvoudiger te programmeren en sneller te berekenen is. Voor de HTW uit 1956 (een handboek voor landmeetkundige werkzaamheden van het Kadaster) is een reeksontwikkeling gemaakt die lange tijd toepassing heeft gevonden. De verschillen tussen de exacte oplossing en deze reeksontwikkeling konden oplopen tot 20 centimeter, wat voor nauwkeurige toepassingen over grote afstanden teveel werd geacht. Daarom is in 1992 een verbeterde reeks gepubliceerd, waarvan geëist werd dat het verschil tussen de exacte oplossing en de reeksontwikkeling maximaal 0,2 millimeter mocht bedragen.

De omrekeningsformules zijn geschreven als 6^e graads polynomen met onbekende coëfficiënten. De waarden van deze coëfficiënten zijn geschat volgens de methode van de kleinste kwadraten; niet significante termen zijn weggelaten, totdat voor een controleset van RD-punten, nog juist het geëiste maximale verschil tussen exacte en benaderde oplossing gehaald werd.

Het bleek dat de berekende coëfficiënten (zie tabel 3) goed overeen kwamen met de coëfficiënten van de reeksontwikkeling uit 1956; een aantal termen is toegevoegd aan de reeks. De verbeterde reeksontwikkeling is gepubliceerd door de Rijksdriehoeksmeting [Schut, 1992] en is gegeven in (26) en (29).

Deze reeksonthwikkelingen moeten na heen en terugtransformatie eenzelfde resultaten leveren, binnen de gestelde eis van 0,2 millimeter.

Voor deze reeksonthwikkeling wordt het verschil in geografische breedte en lengte van een punt uitgedrukt in de eenheid 10^4 boogseconden:

$$\begin{aligned} d\phi &= (\phi - \phi_0)10^{-4} ; \phi_0 = 187762,178 \\ d\lambda &= (\lambda - \lambda_0)10^{-4} ; \lambda_0 = 19395,500 \end{aligned} \quad (25)$$

De RD-coördinaten worden berekend met de reeksonthwikkeling:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + dX ; X_0 = 155000 \\ Y &= Y_0 + dY ; Y_0 = 463000 \end{aligned} \quad (26)$$

waarin dX and dY worden uitgerekend met

$$\begin{aligned} dX &= c_{01}d\lambda + c_{11}d\phi d\lambda + c_{21}d\phi^2 d\lambda + c_{03}d\lambda^3 + c_{31}d\phi^3 d\lambda + c_{13}d\phi d\lambda^3 + \\ & c_{23}d\phi^2 d\lambda^3 + c_{41}d\phi^4 d\lambda + c_{05}d\lambda^5 \\ dY &= d_{10}d\phi + d_{20}d\phi^2 + d_{02}d\lambda^2 + d_{12}d\phi d\lambda^2 + d_{30}d\phi^3 + d_{22}d\phi^2 d\lambda^2 + \\ & d_{40}d\phi^4 + d_{04}d\lambda^4 + d_{32}d\phi^3 d\lambda^2 + d_{14}d\phi d\lambda^4 \end{aligned} \quad (27)$$

De coëfficiënten voor deze reeks zijn gegeven in tabel 2. Een rekenvoorbeeld is gegeven in tabel 3.

| $d\phi = \sum a_{ij} dX^i dY^j$ | $d\lambda = \sum b_{ij} dX^i dY^j$ | $dX = \sum c_{ij} d\phi^i d\lambda^j$ | $dY = \sum d_{ij} d\phi^i d\lambda^j$ |
|---------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $a_{01} = 3236,0331637$ | $b_{10} = 5261,3028966$ | $c_{01} = 190066,98903$ | $d_{10} = 309020,31810$ |
| $a_{20} = -32,5915821$ | $b_{11} = 105,9780241$ | $c_{11} = -11830,85831$ | $d_{02} = 3638,36193$ |
| $a_{02} = -,2472814$ | $b_{12} = 2,4576469$ | $c_{21} = -114,19754$ | $d_{12} = -157,95222$ |
| $a_{21} = -,8501341$ | $b_{30} = -,8192156$ | $c_{03} = -32,38360$ | $d_{20} = 72,97141$ |
| $a_{03} = -,0655238$ | $b_{31} = -,0560092$ | $c_{31} = -2,34078$ | $d_{30} = 59,79734$ |
| $a_{22} = -,0171137$ | $b_{13} = ,0560089$ | $c_{13} = -,60639$ | $d_{22} = -6,43481$ |
| $a_{40} = ,0052771$ | $b_{32} = -,0025614$ | $c_{23} = ,15774$ | $d_{04} = ,09351$ |
| $a_{23} = -,0003859$ | $b_{14} = ,0012770$ | $c_{41} = -,04158$ | $d_{32} = -,07379$ |
| $a_{41} = ,0003314$ | $b_{50} = ,0002574$ | $c_{05} = -,00661$ | $d_{14} = -,05419$ |
| $a_{04} = ,0000371$ | $b_{33} = -,0000973$ | | $d_{40} = -,03444$ |
| $a_{42} = ,0000143$ | $b_{51} = ,0000293$ | | |
| $a_{24} = -,0000090$ | $b_{15} = ,0000291$ | | |

Tabel 2: Coëfficiënten reeksonthwikkeling dubbelprojectie van Schreiber

| Bessel-coördinaten | | RD-coördinaten |
|---------------------------------------|---------------------------|--------------------|
| $\phi = 52^{\circ} 12' 34,567'' N$ | $\phi = 52,20960194 N$ | $X = 87\,232,211$ |
| $\lambda = 04^{\circ} 23' 45,678'' E$ | $\lambda = 04,39602167 E$ | $Y = 469\,408,512$ |

Tabel 3: Rekenvoorbeeld omrekening Bessel-ellipsoïde voor Nederland (RD-Bessel) naar RD volgens reeksontwikkeling

Voor de inverse projectie wordt een andere reeks gebruikt. Hiervoor worden eerst de RD-coördinaten ten opzichte van het centrale punt in Amersfoort berekend in de eenheid 10^5 meter.

$$\begin{aligned} dX &= (X - X_0)10^{-5} ; X_0 = 155000 \\ dY &= (Y - Y_0)10^{-5} ; Y_0 = 463000 \end{aligned} \quad (28)$$

De reeksontwikkeling is:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + d\phi ; \phi_0 = 187762,178 \\ \lambda &= \lambda_0 + d\lambda ; \lambda_0 = 19395,500 \end{aligned} \quad (29)$$

met

$$\begin{aligned} d\phi &= a_{01}dY + a_{20}dX^2 + a_{02}dY^2 + a_{21}dX^2dY + a_{03}dY^3 + a_{20}dX^2 + \\ & a_{22}dX^2dY^2 + a_{04}dY^4 + a_{41}dX^4dY + a_{23}dX^2dY^3 + a_{42}dX^4dY^2 + a_{24}dX^2dY^4 \\ d\lambda &= b_{10}dX + b_{11}dXdY + b_{30}dX^3 + b_{12}dXdY^2 + b_{31}dX^3dY + b_{13}dXdY^3 + \\ & b_{50}dX^5 + b_{32}dX^3dY^2 + b_{14}dXdY^4 + b_{51}dX^5dY + b_{33}dX^3dY^3 + b_{15}dXdY^5 \end{aligned} \quad (30)$$

In tabel 2 zijn de benodigde coëfficiënten voor deze reeksontwikkelingen gegeven. Tabel 4 geeft een rekenvoorbeeld.

| RD-coördinaten | Bessel-coördinaten | |
|------------------|----------------------------------------|---------------------------|
| $X = 212345,678$ | $\phi = 51^{\circ} 47' 51,9044'' N$ | $\phi = 51,79775122 N$ |
| $Y = 423456,789$ | $\lambda = 06^{\circ} 13' 08,6659'' E$ | $\lambda = 06,21907386 E$ |

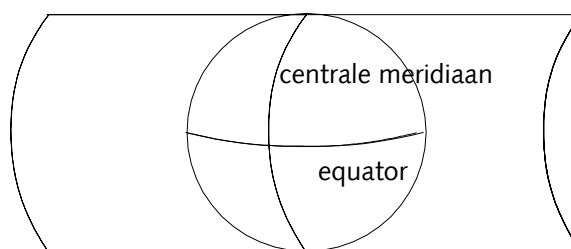
Tabel 4: Rekenvoorbeeld omrekening RD naar Bessel-ellipsoïde voor Nederland (RD-Bessel) volgens reeksontwikkeling

Naarmate er meer hogere orde termen weggelaten worden in de bovenstaande reeksontwikkelingen, wordt de *precisie* van het resultaat slechter. Om een verantwoorde beslissing te nemen over het al dan niet weglaten van termen moet nagegaan worden hoeveel een bepaalde term bijdraagt aan de totale som. Zo kan de reeksontwikkeling na de derde orde termen gestopt worden, indien bij het bereken van RD-coördinaten uit Bessel-coördinaten een precisie van 100 meter volstaat.

4.3 De Universele Transversale Mercator-projectie (UTM)

Een andere projectie die veel toepassing vindt in de praktijk, is de Universele Transversale Mercator-projectie, oftewel de UTM-projectie. Uit de naam blijkt al, dat deze projectie is afgeleid van de bekende Mercator-projectie.

De Mercator projectie is een cilinderprojectie: een punt op de bol wordt geprojecteerd op een cilindervlak, dat de bol omhult. De raakcirkel tussen cilinder en bol is in dit geval de evenaar. Door het cilindervlak als het ware uit te rollen wordt een plat kaartvlak verkregen. Bij de transversale Mercator-projectie wordt de cilinder 90° gekanteld, zodat de cilinder aan de bol raakt in een *meridiaan*, de zogenaamde centrale meridiaan (Figuur 9).



Figuur 9: De transversale Mercator-projectie

Een transversale Mercator-projectie is eenduidig gedefinieerd door het definiëren van een centrale meridiaan, een schaalfactor en een tweetal optelconstanten voor de coördinaatassen (de zogenaamde false Northing en false Easting).

De UTM-projectie is na de Tweede Wereldoorlog ontstaan, en is voor militaire doeleinden wereldwijd gedefinieerd. Voor een eenduidige definitie van de UTM-projectie is de gehele aarde onderverdeeld in 60 stroken, die genummerd zijn van 1 t/m 60.

Men begint te tellen bij 180 graden westerlengte (WL) en vanaf daar oostwaarts. De eerste centrale meridiaan is die van 177 graden WL. Voor Nederland worden de stroken 31 en 32 gebruikt, met als centrale meridianen die van 3 en 9 graden OL.

Verder wordt een onderverdeling in noord-zuid richting gemaakt tussen 80 graden noorderbreedte (NB) en 80 graden zuiderbreedte (ZB), bestaande uit zones van 8 graden, die aangeduid worden met letters. Hierdoor ligt Nederland in zones 31 U en 32 U.

Voor het berekenen van de projectie is het echter alleen belangrijk te weten welke centrale meridiaan er geldt in het betreffende gebied, en of men op het noordelijk of zuidelijk halfrond zit. De coördinaten noordwaarts worden Northing genoemd, de coördinaten oostwaarts Easting. De parameters voor de UTM-projectie in Nederland zijn gegeven in tabel 5.

| <i>Zone</i> | <i>Centrale meridiaan</i> | <i>False Easting</i> | <i>False Northing</i> | <i>Schaalfactor</i> | <i>Ellipsoïde</i> |
|-------------|---------------------------|----------------------|-----------------------|---------------------|-------------------|
| 31 | 3° East | 500 000,0 | 0,0 | 0,9996 | Hayford |
| 32 | 9° East | 500 000,0 | 0,0 | 0,9996 | Hayford |

Tabel 5: Parameters voor de UTM-projectie in Nederland

In West-Europa worden UTM-coördinaten berekend uit ED50-coördinaten, gedefinieerd op de Hayford ellipsoïde (ook wel de Internationale ellipsoïde genoemd). In andere delen van de wereld gelden andere invoercoördinaten en ellipsoïdes. Door de NATO wordt voor de militaire toepassing veel gebruik gemaakt van WGS84-coördinaten op de WGS84-ellipsoïde (GRS80-ellipsoïde). De overige parameters blijven ongewijzigd.

De UTM-coördinaten berekend uit ED50-coördinaten (op de Hayford ellipsoïde) en de UTM-coördinaten berekend uit WGS84-coördinaten (op de WGS84-ellipsoïde) kunnen ongeveer 100 m van elkaar verschillen. Het is dus van belang dit onderscheid goed in de gaten te houden en altijd te spreken van UTM(ED50) coördinaten of UTM(WGS84)-coördinaten, en altijd het zonenummer te vermelden.

4.3.1 De kaartprojectie

De formules voor de berekening van Northing en Easting uit lengte en breedte zijn:

$$N = k \cdot (x + \Delta x) + fN \quad ; \quad E = k \cdot y + fE \quad (31)$$

Hierin is k de schaalfactor op de centrale *meridiaan* λ_0 en fE en fN de false Easting en false Northing. x wordt berekend uit:

$$x = a (1 - e^2) (A\phi - B \sin 2\phi + C \sin 4\phi - D \sin 6\phi + \dots) \quad (32)$$

met

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \dots \\
 B &= \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{32} e^4 + \frac{525}{1024} e^6 + \frac{8820}{16384} e^8 + \dots \\
 C &= \frac{15}{256} e^4 + \frac{105}{1024} e^6 + \frac{2205}{16384} e^8 + \dots \\
 D &= \frac{35}{3072} e^6 + \frac{105}{4096} e^8 + \dots \\
 E &= \frac{315}{131072} e^8 + \dots
 \end{aligned} \quad (33)$$

Δx en y worden berekend uit:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{1}{2} \Delta \lambda^2 R \sin \phi \cos \phi (1 + p \Delta \lambda^2 + q \Delta \lambda^4) \\ y &= \Delta \lambda R \cos \phi (1 + r \Delta \lambda^2 + s \Delta \lambda^4 + u \Delta \lambda^6)\end{aligned}\quad (34)$$

waarin

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 \quad (35)$$

Verder moeten berekend worden:

$$R = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} ; \quad n^2 = \frac{e^2 \cos^2 \phi}{1 - e^2} ; \quad t = \tan \phi \quad (36)$$

en

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{12} \cos^2 \phi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) \\ q &= \frac{1}{360} \cos^4 \phi (61 - 58t^2 + t^4 + 270n^2 - 330t^2 n^2) \\ r &= \frac{1}{6} \cos^2 \phi (1 - t^2 + n^2) \\ s &= \frac{1}{120} \cos^4 \phi (5 - 18t^2 + t^4 + 14n^2 - 58t^2 n^2) \\ u &= \frac{1}{5040} \cos^6 \phi (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6)\end{aligned}\quad (37)$$

De schaalfactor en *meridiaanconvergentie* worden berekend met:

$$m = k \left[1 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi (1 + n^2) \Delta \lambda^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \phi (5 - 4t^2 + 14n^2 - 28t^2 n^2) \Delta \lambda^4 \right] \quad (38)$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \Delta \lambda \sin \phi + \frac{\Delta \lambda^3}{3} \sin \phi \cos^2 \phi (1 + 3n^2 + 2n^4) + \\ &\quad \frac{\Delta \lambda^5}{15} \sin \phi \cos^4 \phi (2 - t^2)\end{aligned}\quad (39)$$

Een rekenvoorbeeld is gegeven in tabel 6.

4.3.2 De inverse kaartprojectie

Voor de inverse transversale Mercator-projectie, zijn de formules:

$$x + \Delta x = \frac{1}{k} \cdot (N - fN) ; y = \frac{1}{k} \cdot (E - fE) \quad (40)$$

De geografische breedte ϕ en lengte λ worden geschreven als:

$$\phi = \phi_n - \Delta\phi ; \lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda \quad (41)$$

Eerst wordt ϕ_n iteratief berekend met

$$\phi_i = \frac{1}{A} \left[\frac{x + \Delta x}{a(1 - e^2)} + B \sin 2\phi_{i-1} - C \sin 4\phi_{i-1} + D \sin 6\phi_{i-1} - E \sin 8\phi_{i-1} \right] \quad (42)$$

met A, B, C, D en E berekend als in (33). Het iteratieproces wordt beëindigd als $abs(\phi_i - \phi_{i-1}) < 10^{-12}$; dan wordt $\phi_n = \phi_i$. Vervolgens worden $\Delta\phi$ and $\Delta\lambda$ berekend met:

$$\Delta\phi = \frac{1}{2} y^2 \cdot \frac{t(1+n^2)}{R^2} \cdot (1 - py^2 + qy^4) \quad (43)$$

$$\Delta\lambda = y \cdot \frac{1}{R \cos \phi_n} \cdot (1 - ry^2 + sy^4 - uy^6)$$

met R, n^2 , en t als in (36) en:

$$p = \frac{1}{12R^2} (5 + 3t^2 + n^2 - 9t^2n^2)$$

$$q = \frac{1}{360R^4} (61 + 90t^2 + 45t^4 + 107n^2 - 162t^2n^2 - 45t^4n^2)$$

$$r = \frac{1}{6R^2} (1 + 2t^2 + n^2) \quad (44)$$

$$s = \frac{1}{120R^4} (5 + 28t^2 + 24t^4 + 6n^2 + 8t^2n^2)$$

$$u = \frac{1}{5040R^6} (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6)$$

De schaalfactor en *meridiaanconvergentie* worden berekend uit

$$m = k \left[1 + \frac{1}{2} (1+n^2) \left(\frac{y}{R} \right)^2 + \frac{1}{24} (1+6n^2) \left(\frac{y}{R} \right)^4 \right] \quad (45)$$

$$\gamma = \tan \phi \left[\left(\frac{y}{R} \right) - \frac{1}{3} (1+t^2 - n^2 - 2n^4) \cdot \left(\frac{y}{R} \right)^3 + \frac{1}{15} (2+5t^2 + 3t^4) \left(\frac{y}{R} \right)^5 \right] \quad (46)$$

Een rekenvoorbeeld is gegeven in tabel 6.

| Hayford (ED50) | | UTM zone 31 | |
|-----------------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------|
| $\phi = 52^\circ 12' 34,567$ | $\phi = 52,20960194$ | Northing | 5785390,246 |
| $\lambda = 04^\circ 23' 45,678''$ | $\lambda = 04,39602167$ | Easting | 595391,658 |
| | | Meridiaanconvergentie | 01°06'11,878" W |
| | | Schaalfactor | 0,99971169 |

Tabel 6: Rekenvoorbeeld UTM-projectie zone 31 op de Hayford ellipsoïde

Opmerking: in alle formules in deze paragraaf zijn de eenheden radialen, meters of dimensieloos.

4.4 De Gauss-Krüger projectie

In Duitsland wordt een andere variant van de Transversale Mercator-projectie gebruikt, de zogenaamde Gauss-Krüger projectie. Er zijn vijf zones gedefinieerd, met de volgende parameters:

| Zone | Centrale meridiaan | False Easting | False Northing | Schaalfactor | Ellipsoïde |
|------|--------------------|---------------|----------------|--------------|------------|
| 1 | 3° East | 1500000,0 | 0,0 | 1,0 | Bessel |
| 2 | 6° East | 2500000,0 | 0,0 | 1,0 | Bessel |
| 3 | 9° East | 3500000,0 | 0,0 | 1,0 | Bessel |
| 4 | 12° East | 4500000,0 | 0,0 | 1,0 | Bessel |
| 5 | 15° East | 5500000,0 | 0,0 | 1,0 | Bessel |

Tabel 7: Parameters Gauss-Krüger projectie in Duitsland

Men spreekt van Hochwert (Northing) en Rechtswert (Easting). De formules voor deze projectie en de inverse projectie zijn identiek aan die van de UTM-projectie, met inachtneming van de hierboven vermelde parameters.

4.5 De Lambert-projectie

In België wordt de Lambert-projectie gebruikt voor kadastrale werkzaamheden. Dit is een conforme kegelpjectie. Hierbij wordt een kegel op de ellipsoïde geplaatst, en wordt het ellipsoïde-oppervlak als het ware afgewikkeld op de kegel.

Er zijn twee varianten: in de eerste variant raakt de kegel aan de ellipsoïde middels één centrale parallel, in de andere variant doorsnijdt de kegel de ellipsoïde, zodat twee fundamentele parallellen ontstaan. In eerste instantie werd voor de variant met 2 fundamentele parallellen gekozen, wat leidde tot zogenaamde Lambert50-coördinaten. Na enige tijd bleken deze coördinaten om diverse redenen niet aan de eisen voor een modern geodetisch net te voldoen. Hierom werd besloten nieuwe berekeningen met nieuwe gegevens en modernere middelen uit te voeren, wat uiteindelijk leidde tot de zogenaamde Lambert72-coördinaten.

Bij de berekening van Lambert-coördinaten wordt gebruik gemaakt van de Hayford ellipsoïde. De x-as is oostwaarts gericht en de y-as noordwaarts. De berekening vindt als volgt plaats:

$$\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi - 2\phi}{4}\right) \cdot \left(\frac{1 + e \sin \phi}{1 - e \sin \phi}\right)^{\frac{e}{2}} \quad (47)$$

Vervolgens worden isometrische poolcoördinaten berekend met:

$$r = k \cdot (\tan \frac{\psi}{2})^p ; \quad \theta = p \cdot (\lambda - \lambda_0) \quad (48)$$

λ_0 is de centrale *meridiaan*, gelegen in het Koninklijk Observatorium in Brussel:

$$\lambda_0 = 4^\circ 21' 24,983'' \text{ O}$$

Verder worden de constanten p and k gebruikt, die zijn vastgesteld op:

$$p = 0,7716421928$$

$$k = 11565915,812935$$

Tot slot wordt door middel van een *gelijkvormigheidstransformatie* het verschil met de Lambert50-coördinaten verrekend, waarbij tevens een false Easting en false Northing worden aangebracht, om negatieve coördinaten en verwisseling van coördinaten te voorkomen.

$$\begin{aligned} x &= 150000 + \Delta x + r \sin(\theta - \alpha) \\ y &= 5400000 + \Delta y - r \cos(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (49)$$

De parameters van de gelijkvormigheidstransformatie zijn:

$$\Delta x = 0,01256$$

$$\Delta y = 88,4378$$

$$\alpha = 29,2985'' \text{ (boogseconden)}$$

Bij de inverse berekening worden bovenstaande rekenstappen in omgekeerde volgorde doorlopen. Allereerst worden het argument en de straal van de isometrische poolcoördinaten berekend door middel van:

$$\theta = \alpha + \arctan\left(\frac{u}{v}\right) ; r = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (50)$$

met:

$$u = x + \Delta x + 150000 ; v = -y + \Delta y + 5400000 \quad (51)$$

De lengte-coördinaat volgt dan uit:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\theta}{\rho} \quad (52)$$

De breedte-coördinaat wordt iteratief berekend met

$$\phi^{k+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \left(\frac{1 + e \sin \phi^k}{1 - e \sin \phi^k} \right)^{\frac{e}{2}} \right) \quad (53)$$

met

$$\tan \frac{\psi}{2} = \left(\frac{k}{\rho} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (54)$$

en als startwaarde $\phi^0 = 90 - \psi$. Het iteratieproces wordt beëindigd als $\text{abs}(\phi^{(k+1)} - \phi^{(k)}) < 10^{-12}$. Een rekenvoorbeeld is gegeven in tabel 8.

| <i>Hayford</i> | <i>Lambert72</i> | |
|-------------------------------------|--------------------------|------------------|
| $\phi = 50^\circ 40' 46,461'' N$ | $\phi = 50,6795725 N$ | $X = 251763,204$ |
| $\lambda = 05^\circ 48' 26,533'' E$ | $\lambda = 05,8073703 E$ | $Y = 153034,174$ |

Tabel 8: Rekenvoorbeeld omrekening Hayford naar Lambert72

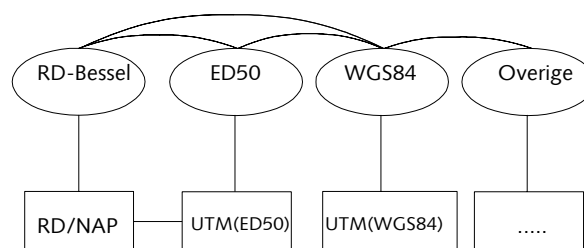
5. Relaties tussen coördinaatstelsels

In de voorafgaande hoofdstukken is uitgelegd dat een *coördinaatstelsel* waarmee de ruimtelijke ligging van punten kan worden beschreven in principe vrij gekozen kan worden. Deze ruimtelijke ligging van punten kan worden uitgesplitst naar een horizontale component op het *referentieoppervlak* van de *ellipsoïde*, en een hoogtecomponent loodrecht hierop.

De *coördinaten* op de ellipsoïde kunnen worden omgerekend naar coördinaten in het kaartvlak via een *kaartprojectie*. De hiervoor benodigde formules zijn gegeven in hoofdstuk 4. Bij een kaartprojectie gaat de hoogteinformatie verloren, tenzij deze netjes wordt uitgesplitst naar *orthometrische hoogte* en *geoïdehoogte*.

De ruimtelijke ligging van eenzelfde punt kan ten opzichte van meerdere ellipsoïdes beschreven worden. Deze ellipsoïdes kunnen verschillen in grootte, maar ook in ligging van hun middelpunt, en in oriëntering van hun assen. Om coördinaten ten opzichte van de ene ellipsoïde naar de andere te kunnen omrekenen wordt gebruik gemaakt van een *gelijkvormigheids-transformatie*, waarvan de formules zijn gegeven in hoofdstuk 3. De benodigde parameters worden verderop in dit hoofdstuk gegeven.

Tussen de kaartprojecties kunnen vaak rechtstreekse omrekeningen plaats vinden door middel van *interpolatieformules*. Meestal wordt hierbij gebruik gemaakt van conforme polynomen, die hoeken in de kaart invariant laten. Hiervan worden voorbeelden gegeven in paragraaf 6 van dit hoofdstuk.



Figuur 10: De relaties tussen de diverse coördinaatstelsels

5.1 RD-Bessel naar ETRS89 (WGS84) en vice versa

Een voor Nederland zeer belangrijke *coördinaattransformatie* is die tussen het geocentrische coördinaatstelsel ETRS89 (ofwel WGS84) en RD-coördinaten (ϕ, λ) op de ellipsoïde van Bessel.

De parameters die vermeld zijn in tabel 9, zijn berekend door [Schut, 1991]. Voor de berekening van de transformatieparameters is gebruik gemaakt van 13 punten, die door middel van de NEREF-campagne in 1991 beschikbaar waren in ETRS89. De ellipsoïdische coördinaten worden aangevuld met *orthometrische hoogten* ten opzichte van NAP en eventueel met *geoïdehoogten*, geïnterpoleerd in het geoïdemodel [de Min, 1996].

De parameters zijn alleen geldig binnen Nederland. Ze worden gebruikt in de formule voor een ruimtelijke *gelijkvormigheidstransformatie*; zie formule (9). In tabel 9 is een rekenvoorbeeld gegeven.

Voor de inverse transformatie kan gebruik worden gemaakt van dezelfde parameters met tegengesteld teken. De *residuen* die hierdoor ontstaan, blijven beperkt tot enkele millimeters.

| | | | |
|--------------|------------|----------------|-------------------------|
| Translatie | langs x-as | t_x (m) | 565,04 |
| | langs y-as | t_y (m) | 49,91 |
| | langs z-as | t_z (m) | 465,84 |
| Rotatie | rond x-as | α (rad) | $-1,9848 \cdot 10^{-6}$ |
| | rond y-as | β (rad) | $1,7439 \cdot 10^{-6}$ |
| | rond z-as | γ (rad) | $-9,0587 \cdot 10^{-6}$ |
| Schaalfactor | | δ (ppm) | 4,0772 |

Tabel 9: Datum-shift parameters van Bessel-ellipsoïde voor Nederland naar ETRS89 (WGS84). Bron: [Schut, 1991]

| RD - Bessel | | ETRS89 (WGS84) | |
|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------|
| Ellipsoïdisch | Cartesiaans | Ellipsoïdisch | Cartesiaans |
| $\phi = 52^\circ 10' 46,2700'' N$ | $X = 3\,898\,615,838\,m$ | $\phi = 52^\circ 10' 42,7005'' N$ | $X = 3\,899\,209,112\,m$ |
| $\lambda = 05^\circ 48' 38,3390'' E$ | $Y = 396\,739,093\,m$ | $\lambda = 05^\circ 48' 36,5479'' E$ | $Y = 396\,765,257\,m$ |
| $h = 47,582\,m$ | $Z = 5\,014\,601,903\,m$ | $h = 90,865\,m$ | $Z = 5\,015\,080,603\,m$ |

Tabel 10: Rekenvoorbeeld datum-shift van Bessel-ellipsoïde voor Nederland naar ETRS89 (WGS84) zonder toepassing van het correctiegrid.

De parameters uit tabel 9 leveren getransformeerde coördinaten op die minder dan 25 centimeter afwijken van de werkelijke coördinaten. Deze afwijkingen worden veroorzaakt door de vervormingen in het RD-net, zie figuur 11. Deze vervormingen komen aan het licht zodra de bekende RD-coördinaten vergeleken worden met de RD-coördinaten die kunnen worden berekend uit ellipsoïdische coördinaten van dezelfde punten, die tegenwoordig met behulp van *GPS* bepaald kunnen worden.



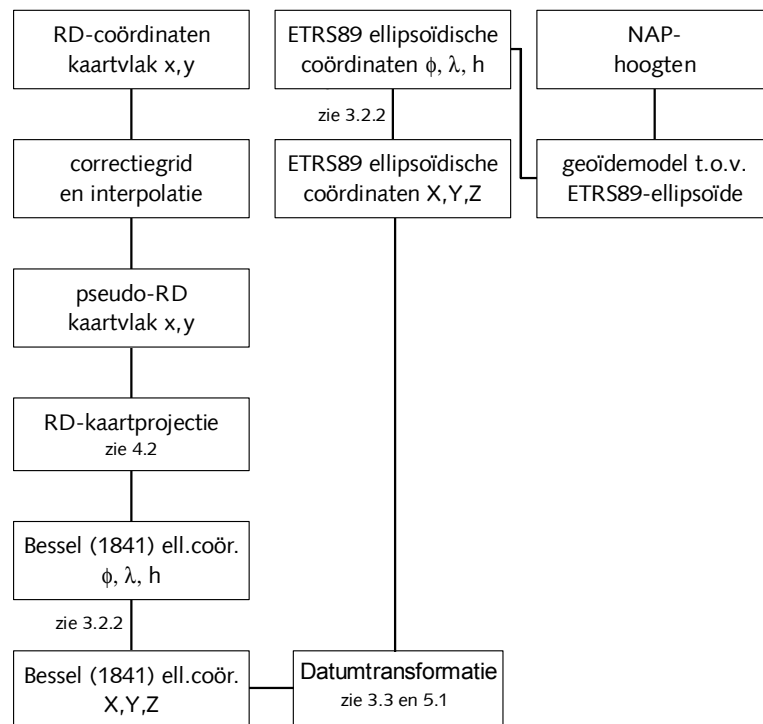
Figuur 11: Fouten in het RD-net (maximaal 25 centimeter)

Het Kadaster, de beheerder van het RD-stelsel, heeft daarom in 2000 voor het Nederlandse grondgebied (want dat is immers het geldigheidsgebied van het RD-stelsel) een gelijkmatig grid met correcties van maximaal zo'n 25 centimeter ter beschikking gesteld, waarbinnen geïnterpoleerd kan worden, zodat homogene coördinaten omgerekend kunnen worden naar het weliswaar vervormde, maar in de praktijk gebruikte RD-stelsel.

Dit correctiegrid is onderdeel van de procedure *RDNAPTRANS*TM voor de conversie van RD- naar ETRS89-coördinaten. Deze procedure wordt ingebouwd in de gangbare landmeetkundige verwerkings-software. Het correctie-grid is nog niet ingebouwd in *Coordinate Calculator* versie 4.0.

Het correctiegrid kan gezien worden als een aanvulling op de hierboven beschreven *coördinaattransformatie*. De correcties worden toegepast in het kaartvlak, dus op de geprojecteerde RD-coördinaten (Figuur 12).

Het gebruik van dit correctiegrid is alleen nodig als voor de transformatie tussen ETRS89-coördinaten en RD-coördinaten in het kaartvlak een *precisie* beter dan 25 centimeter is vereist.



Figuur 12: De procedure RDNAPTRANS™

Bron: [Kadaster]

5.2 ED87 (ED50) naar ETRS89 (WGS84) en vice versa

Bij de berekening van de ED87-coördinaten, een verbeterde versie van ED50-coördinaten (zie 2.2), zijn transformatieparameters bepaald tussen het ED87-coördinaatstelsel en ETRS89 (of WGS84). Dit is gebeurd door het in dit project betrokken rekencentrum van het Institute Geographique Nationale te Parijs. De aanbevolen lijst van transformatieparameters wordt gegeven in tabel 11. De *residuen* die op kunnen treden bij het gebruik van deze parameters kunnen oplopen tot 20 à 30 centimeter voor de planimetrie. Voor de hoogte kunnen de residuen aanzienlijk groter zijn. Deze parameters kunnen gebruikt worden voor geheel West-Europa. Tabel 12 bevat een rekenvoorbeeld.

Er zijn geen directe parameters bekend voor een transformatie tussen ED50 en WGS84. Door de geringe verschillen tussen ED50- en ED87-coördinaten in Nederland kunnen deze parameters ook gebruikt worden om ED50-coördinaten te transformeren naar WGS84. De fouten die hierdoor optreden zijn systematisch van aard en bedragen ongeveer 3 à 5 meter.

| | | | |
|---------------------|-------------------|----------------|-------------------------|
| <i>Translatie</i> | <i>langs x-as</i> | $t_x (m)$ | -83,11 |
| | <i>langs y-as</i> | $t_y (m)$ | -97,38 |
| | <i>langs z-as</i> | $t_z (m)$ | -117,22 |
| <i>Rotatie</i> | <i>rond x-as</i> | $\alpha (rad)$ | $0,0276 \cdot 10^{-6}$ |
| | <i>rond y-as</i> | $\beta (rad)$ | $-0,2167 \cdot 10^{-6}$ |
| | <i>rond z-as</i> | $\gamma (rad)$ | $0,2147 \cdot 10^{-6}$ |
| <i>Schaalfactor</i> | | $\delta (ppm)$ | 0,1218 |

Tabel 11: Datum-shift parameters van ED87 (ED50) naar ETRS89 (WGS84)
Bron: [C. Boucher, IGN Parijs]

| <i>ED87 (ED50)</i> | | <i>ETRS89 (WGS84)</i> | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <i>Ellipsoïdisch</i> | <i>Cartesiaans</i> | <i>Ellipsoïdisch</i> | <i>Cartesiaans</i> |
| $\phi = 52^\circ 12' 34,567'' N$ | $X = 3\,905\,222,155\,m$ | $\phi = 52^\circ 12' 31,732'' N$ | $X = 3\,905\,138,365\,m$ |
| $\lambda = 04^\circ 23' 45,678'' E$ | $Y = 300\,217,705\,m$ | $\lambda = 04^\circ 23' 40,941'' E$ | $Y = 300\,121,060\,m$ |
| $h = 0,0\,m$ | $Z = 5\,017\,227,371\,m$ | $h = 46,801\,m$ | $Z = 5\,017\,111,611\,m$ |

Tabel 12: Rekenvoorbeeld datum-shift ED87 (ED50) naar ETRS89 (WGS84)

Ten behoeve van de olie-exploitatie op de Noordzee zijn grenzen van concessiegebieden aan oliemaatschappijen om wettelijke redenen gedefinieerd in ED50-coördinaten. De *precisie* van ED50-coördinaten is om

historische redenen niet best (zie 2.2), en bovendien zijn de punten niet direct toegankelijk met *GPS*, dat coördinaten levert in WGS84. Daarom zijn transformatieprocedures tussen WGS84 en ED50 noodzakelijk geworden.

Door de landen aan de Noordzee, te weten Noorwegen, Denemarken, Duitsland, Nederland, het Verenigd Koninkrijk en Ierland is besloten om tot een standaardisatie van deze transformatieprocedures te komen. Deze zijn beschreven in [Harsson,1990]. De parameters die hiervoor gebruikt worden zijn geoptimaliseerd voor het Noordzee gebied. Het is echter niet aan te bevelen deze parameters te gebruiken buiten dit gebied. Voor meer informatie over deze methode wordt verwezen naar de bovenvermelde referentie.

5.3 RD-Bessel naar ED50 en vice versa

Door het Kadaster zijn ook transformatieparameters berekend voor het omrekenen van RD naar ED50. Deze parameters zijn vermeld in [Kenselaar,1986]. Ze zijn berekend uit de coördinaten van 17 eerste orde RD punten, die ook bekend zijn in ED50. De *residuen* die op kunnen treden bij het gebruik van deze parameters kunnen oplopen tot 50 centimeter. De parameters zijn uiteraard alleen toepasbaar binnen Nederland.

Gelet op de beperkte *precisie* van ED50-coördinaten, speelt het correctie-grid van het RD-stelsel (zie 5.1) geen rol bij deze *coördinaattransformatie*.

| | | | |
|--------------|------------|----------------|--------------------------|
| Translatie | langs x-as | $t_x (m)$ | 651,43 |
| | langs y-as | $t_y (m)$ | 63,29 |
| | langs z-as | $t_z (m)$ | 590,36 |
| Rotatie | rond x-as | $\alpha (rad)$ | $-10,1689 \cdot 10^{-6}$ |
| | rond y-as | $\beta (rad)$ | $2,4226 \cdot 10^{-6}$ |
| | rond z-as | $\gamma (rad)$ | $1,3546 \cdot 10^{-6}$ |
| Schaalfactor | | $\delta (ppm)$ | 0,1218 |

Tabel 13: Datum-shift parameters van Bessel-ellipsoïde voor Nederland (RD-Bessel) naar ED50. Bron: [Kenselaar, 1986]

| RD-Bessel | | ED50 | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| Ellipsoïdisch | Cartesiaans | Ellipsoïdisch | Cartesiaans |
| $\phi = 52^\circ 12' 34,567'' N$ | $X = 3\,904\,556,368\,m$ | $\phi = 52^\circ 12' 33,831'' N$ | $X = 3\,905\,234,872\,m$ |
| $\lambda = 04^\circ 23' 45,678'' E$ | $Y = 300\,166,522\,m$ | $\lambda = 04^\circ 23' 49,281'' E$ | $Y = 300\,287,293\,m$ |
| $h = 0,0\,m$ | $Z = 5\,016\,615,923\,m$ | $h = 0,05\,m$ | $Z = 5\,017\,213,465\,m$ |

Tabel 14: Rekenvoorbeeld datum-shift Bessel-ellipsoïde voor Nederland (RD-Bessel) naar ED50

5.4 België: van Hayford naar ETRS89 (WGS84) en vice versa

Voor België zijn op basis van WGS84-coördinaten en coördinaten op de Hayford-ellipsoïde van een dertigtal punten transformatieparameters berekend tussen deze beide stelsels. De *residuen* die op kunnen treden bij het gebruik van deze parameters kunnen oplopen tot 30 centimeter. De parameters zijn uiteraard alleen toepasbaar binnen België.

Merk op dat deze *coördinaattransformatie* niet tot de standaard-mogelijkheden van Coordinate Calculator versie 4.0 behoort. Door de parameters uit tabel 15 zelf op te geven bij 'User coordinate systems' kan deze transformatie echter toch uitgevoerd worden.

| | | | |
|---------------------|-------------------|----------------|-------------------------|
| <i>Translatie</i> | <i>langs x-as</i> | $t_x (m)$ | -99,059 |
| | <i>langs y-as</i> | $t_y (m)$ | 53,322 |
| | <i>langs z-as</i> | $t_z (m)$ | -112,486 |
| <i>Rotatie</i> | <i>rond x-as</i> | $\alpha (rad)$ | $2,0314 \cdot 10^{-6}$ |
| | <i>rond y-as</i> | $\beta (rad)$ | $-4,0240 \cdot 10^{-6}$ |
| | <i>rond z-as</i> | $\gamma (rad)$ | $9,1387 \cdot 10^{-6}$ |
| <i>Schaalfactor</i> | | $\delta (ppm)$ | -1,0 |

Tabel 15: Datum-shift parameters van Hayford-ellipsoïde voor België naar ETRS89 (WGS84). Bron: [Voet, 1995]

| <i>Hayford (België)</i> | <i>ETRS89 (WGS84)</i> |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $\phi = 51^{\circ} 14' 06,133'' N$ | $\phi = 51^{\circ} 14' 4,242'' N$ |
| $\lambda = 02^{\circ} 55' 35,229'' E$ | $\lambda = 02^{\circ} 55' 39,654'' E$ |

Tabel 16: Rekenvoorbeeld datum-shift Hayford-ellipsoïde voor België naar ETRS89 (WGS84)

5.5 Duitsland: van Bessel naar WGS84 en vice versa

Voor Duitsland zijn op basis van WGS84-coördinaten en coördinaten op de Bessel-ellipsoïde van een zeventigtal punten transformatieparameters berekend tussen deze beide stelsels. De *residuen* die op kunnen treden bij het gebruik van deze parameters kunnen oplopen tot 5 centimeter. De parameters zijn uiteraard alleen toepasbaar binnen Duitsland.

Merk op dat deze *coördinaattransformatie* niet tot de standaard-mogelijkheden van Coordinate Calculator versie 4.0 behoort. Door de parameters uit tabel 17 zelf op te geven bij 'User coordinate systems' kan deze transformatie echter toch uitgevoerd worden.

| | | | |
|---------------------|-------------------|----------------|--------------------------|
| <i>Translatie</i> | <i>langs x-as</i> | $t_x (m)$ | 582,0 |
| | <i>langs y-as</i> | $t_y (m)$ | 105,0 |
| | <i>langs z-as</i> | $t_z (m)$ | 414,0 |
| <i>Rotatie</i> | <i>rond x-as</i> | $\alpha (rad)$ | $5,0421 \cdot 10^{-6}$ |
| | <i>rond y-as</i> | $\beta (rad)$ | $1,6968 \cdot 10^{-6}$ |
| | <i>rond z-as</i> | $\gamma (rad)$ | $-14,9323 \cdot 10^{-6}$ |
| <i>Schaalfactor</i> | | $\delta (ppm)$ | 8,3 |

Tabel 17: Datum-shift parameters van de Bessel-ellipsoïde voor Duitsland naar ETRS89 (WGS84). Bron: [Zeitschrift für Vermessungswesen 4/1995, p.192-196].

| <i>Bessel (Duitsland)</i> | <i>ETRS89 (WGS84)</i> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\phi = 53^\circ 03' 07,590'' N$ | $\phi = 53^\circ 03' 02,259'' N$ |
| $\lambda = 10^\circ 28' 38,990'' E$ | $\lambda = 10^\circ 28' 34,337'' E$ |

Tabel 18: Rekenvoorbeeld datum-shift Bessel-ellipsoïde voor Duitsland naar ETRS89 (WGS84).

5.6 RD naar UTM (ED50) en vice versa

Voor het rechtstreeks omrekenen van RD-coördinaten in stereografische projectie van en naar ED50-coördinaten in UTM-projectie zijn twee polynomen met coëfficiënten beschikbaar. De ene formule is afgeleid door de Topografische Dienst en is gepubliceerd in NGT Geodesia in 1985 [van der Linden, 1985]. Een andere is gegeven in [Bakker et al., 1985] en [Strang van Hees, 1993].

Deze formules zijn gebaseerd op een vierdegraads conforme transformatie in een plat vlak. Deze transformatie laat vormelementen, zoals hoeken, onveranderd. De coëfficiënten zijn geschat met behulp van een 14-tal punten, waarvan de coördinaten bekend zijn in beide *kaartprojecties*². De *residuen* die op kunnen treden bij het gebruik van deze parameters kunnen oplopen tot enige decimeters.

Omdat Nederland in de UTM-zones 31 en 32 ligt, is er voor iedere zone een aparte reeks coëfficiënten nodig. Het geldigheidsgebied van deze formules wordt begrensd door de UTM-zones en het gebied waarop RD-coördinaten betrekking hebben.

Voor de omrekening van RD-coördinaten naar UTM-coördinaten worden eerst de RD-coördinaten uitgedrukt in eenheden van 100 kilometer.

$$x = (X - 155000) \cdot 10^{-5} \quad y = (Y - 463000) \cdot 10^{-5} \quad (55)$$

Deze worden gebruikt voor de berekening van ΔX en ΔY :

$$\begin{aligned} \Delta X &= A \cdot P - B \cdot Q + C \cdot R - D \cdot S + E \cdot T - F \cdot U + G \cdot V - H \cdot W \\ \Delta Y &= B \cdot P + A \cdot Q + D \cdot R + C \cdot S + F \cdot T + E \cdot U + H \cdot V + G \cdot W \end{aligned} \quad (56)$$

met

$$\begin{aligned} P &= x & Q &= y & R &= Px - Qy & S &= Py + Qx \\ T &= Rx - Sy & U &= Ry + Sx & V &= Tx - Uy & W &= Ty + Ux \end{aligned} \quad (57)$$

Dit wordt gesubstitueerd in:

$$\begin{aligned} E &= E_0 + (X - 155\,000) + \Delta X \\ N &= N_0 + (Y - 463\,000) + \Delta Y \end{aligned} \quad (58)$$

² Als het correctiegrid (zie 2.1 en 5.1) zou zijn toegepast op de RD-coördinaten van deze 14 punten, zouden de coëfficiënten uit tabel 19 iets anders zijn.

De coëfficiënten die hierbij gebruikt dienen te worden, zijn vermeld in de linkerzijde van tabel 19.

| RD naar UTM (ED50) | | | | UTM (ED50) naar RD | | | |
|--------------------|---------------|---------|---------------|--------------------|---------------|---------|---------------|
| Zone 31 | | Zone 32 | | Zone 31 | | Zone 32 | |
| E_0 | = 663395,607 | E_0 | = 252957,480 | E_0 | = 663395,607 | E_0 | = 252957,480 |
| N_0 | = 5781194,380 | N_0 | = 5784656,250 | N_0 | = 5781194,380 | N_0 | = 5784656,250 |
| A | = -51,681 | A | = -79,499 | A | = 56,619 | A | = 168,607 |
| B | = 3290,525 | B | = -4981,899 | B | = 3290,362 | B | = -4977,456 |
| C | = 20,172 | C | = -30,058 | C | = 20,184 | C | = -30,103 |
| D | = 1,133 | D | = 2,819 | D | = -0,861 | D | = -1,686 |
| E | = 2,075 | E | = 2,075 | E | = 2,082 | E | = 2,065 |
| F | = 0,251 | F | = -0,266 | F | = -0,023 | F | = 0,149 |
| G | = 0,075 | G | = 0,072 | G | = 0,070 | G | = 0,078 |
| H | = -0,012 | H | = -0,020 | H | = -0,025 | H | = -0,001 |

Tabel 19: Coëfficiënten voor de omrekening van RD naar UTM (ED50) en vice versa

De berekening van UTM-coördinaten uit RD-coördinaten gaat op een gelijke wijze. Uit (57) volgt

$$X = E - E_0 + 155\,000) - \Delta X \quad (59)$$

$$Y = N - N_0 + 463\,000) - \Delta Y$$

ΔX en ΔY worden berekend als (56) en (57) , met x en y in eenheden van 10 kilometer:

$$x = (E - E_0) \cdot 10^{-5} \quad y = (N - N_0) \cdot 10^{-5} \quad (60)$$

De coëfficiënten zijn vermeld in de rechterzijde van tabel 19. Rekenvoorbeelden zijn opgenomen in tabel 20.

| RD | | UTM (ED50) | | |
|-------------|-------------|------------|---------------|-------------|
| X | Y | Zone | N | E |
| 200 000,0 | 500 000,0 | 31 | 5 819 663,128 | 707 155,557 |
| 192 200,309 | 480 587,716 | 31 | 5 800 000,0 | 700 000,0 |
| 200 000,0 | 500 000,0 | 32 | 5 819 375,548 | 299 761,943 |
| 201 205,051 | 480 663,861 | 32 | 5 800 000,0 | 300 000,0 |

Tabel 20: Rekenvoorbeelden omrekening van RD naar UTM (ED50)

6. Kwaliteitsbeschrijving coördinaat-transformaties en kaartprojecties

De kwaliteitsbeschrijving van *coördinaattransformaties* dient met de nodige nuance te gebeuren. Helaas wordt in de praktijk informatie over de kwaliteit van transformaties vaak niet of te summier gegeven.

Op de eerste plaats zijn er transformaties, die exact gedefinieerd zijn door wiskundige formules. *Precisie*verlies kan alleen ontstaan door eventuele interne rekenonnauwkeurigheden, zoals afrondingsfouten, en algoritmische onnauwkeurigheden, zoals het afbreekcriterium in een iteratielus. Tot deze categorie transformaties behoren de (inverse) *kaartprojecties*, en de omrekening tussen geografische en *cartesiaanse coördinaten*.

Daarnaast zijn er transformaties, waarbij de wiskundige formules exact gedefinieerd zijn (afgezien van eventuele aannamen in de afleiding van de formules), maar waarin parameters voorkomen die niet exact bekend (kunnen) zijn. De *datum-shift* formules zijn hier een voorbeeld van.

Tot slot zijn er transformaties, waarbij de wiskundige formules slechts een benadering zijn van de werkelijke rekenkundige relatie en de hierbij te gebruiken parameters ook. Dit geldt bijvoorbeeld voor de *interpolatie*-formules tussen twee kaartprojecties.

Parameters en benaderingsformules kunnen beter bepaald worden:

- naarmate het beschikbare aantal corresponderende punten in beide *coördinaatstelsels* groter is;
- naarmate de systematische fouten (vervormingen) en lokale meetfouten in beide coördinaatstelsels kleiner zijn;
- naarmate de mate van overlap tussen beide coördinaatstelsels groter is.

De kwaliteit van een transformatie kan beschreven worden door te kijken naar de *residuen*: de verschillen tussen de getransformeerde *coördinaten* en de gemeten of gegeven coördinaten. De residuen kunnen op verschillende manieren beschreven worden:

- De maximale waarde van de residuen, zoals in hoofdstuk 5.
- De kwadratensom van de residuen.
- Het gemiddelde van de residuen.
- De standaardafwijking van de residuen (t.o.v. het gemiddelde of van 0).
- Een covariantiefunctie van de residuen.
- Een afbeelding zoals Figuur 11.

Het kan nuttig zijn om voor de beschrijving van de residuen het hele aandachtsgebied te verdelen in deelgebieden. Ook kan er onderscheid gemaakt worden in verschillende componenten van de residuen, zoals bijvoorbeeld de residuen in x-richting en in y-richting.

Het hangt van de toepassing af, op welke van bovenstaande manier(en) de residuen het beste beschreven kunnen worden.

Het is altijd van belang om in het achterhoofd te houden dat de gemeten of gegeven coördinaten nooit een exact bekend zijn (tenzij een coördinaat per definitie een zekere waarde heeft gekregen). De methode van inwinning speelt hierbij een belangrijke rol. Als een coördinaat een grote toevallige fout heeft, dan zal het residu op dit punt er ook uitspringen. Als een hele coördinatenset een systematische fout bevat, dan zal dit terug te zien zijn in de residuen, tenzij er sprake is van een datum-shift waarvan de parameters zijn bepaald op basis van deze coördinatenset.

In het algemeen geldt, dat uitspraken over de residuen beter gefundeerd zijn, naarmate er op meer punten residuen berekend worden.

Verder kan men de kwaliteit van een transformatie beschrijven in termen van interne en externe consistentie. Met interne consistentie wordt bedoeld de grootte van de residuen na het heen- en terugtransformeren van een coördinaat van het ene stelsel naar het andere. In het algemeen kan gesteld worden dat alle in dit rapport beschreven transformaties op centimeter-niveau intern consistent zijn.

Externe consistentie wordt hier gedefinieerd als de grootte van de residuen na meerdere transformaties van stelsel naar stelsel, uiteindelijk eindigend in het oorspronkelijke stelsel. De residuen zeggen dan dus iets over de mate waarin een set van diverse transformaties met elkaar overeenkomen.

Om hiervan een beeld te geven zijn in de tabellen 21 en 22 een aantal van dit soort residuen opgenomen. Tabel 21 geeft de externe consistentie weer van de drie datum-shifts tussen RD-Bessel, ED50 en WGS84. De hiervoor genoemde statistische gegevens kunnen eenvoudig uit deze tabel worden afgeleid. Direct is duidelijk dat de residuen een systematisch patroon laten zien.

Bij de transformatie van RD naar UTM(ED50) voor zone 31, via Bessel en ED50, en de directe weg terug via *interpolatie* (zie 5.6) zijn de residuen minder systematisch, maar variëren ze sterker in grootte.

In beide gevallen kan aan de hand van voorkennis over de *precisie* van de afzonderlijke transformaties beredeneerd worden, welke transformatiestap voor het grootste deel verantwoordelijk is voor de residuen die optreden. Verder geldt ook hier dat de kwaliteitsuitspraken beter worden, als er meer punten in de vergelijking mee zouden worden genomen.

| <i>RD (m)</i> | | <i>Residuen (m)</i> | |
|---------------|------------|---------------------|-----------|
| <i>X</i> | <i>Y</i> | <i>dX</i> | <i>dY</i> |
| 100 000,00 | 300 000,00 | 1,212 | -0,224 |
| 200 000,00 | 300 000,00 | 1,255 | -0,534 |
| 300 000,00 | 300 000,00 | 1,278 | -0,868 |
| 100 000,00 | 400 000,00 | 1,532 | -0,169 |
| 200 000,00 | 400 000,00 | 1,577 | -0,500 |
| 300 000,00 | 400 000,00 | 1,602 | -0,851 |

Tabel 21: Residuen voor 6 punten na 'rondtransformeren' RD → Bessel → WGS84 → ED50 → Bessel → RD

| <i>RD (m)</i> | | <i>Residuen (m)</i> | |
|---------------|------------|---------------------|-----------|
| <i>X</i> | <i>Y</i> | <i>dX</i> | <i>dY</i> |
| 100 000,00 | 300 000,00 | -2,000 | -0,033 |
| 200 000,00 | 300 000,00 | -0,291 | -0,382 |
| 300 000,00 | 300 000,00 | - | - |
| 100 000,00 | 400 000,00 | -0,230 | 0,107 |
| 200 000,00 | 400 000,00 | -0,044 | 0,257 |
| 300 000,00 | 400 000,00 | - | - |

Tabel 22: Residuen voor 6 punten na 'rondtransformeren' RD → Bessel → ED50 → UTM (ED50) zone 31 → RD

Definities en begripsomschrijvingen

| | |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Absolute positie | De positie van een punt t.o.v. de oorsprong, coördinaatassen en schaal van het coördinaatstelsel |
| Azimuth | De hoek die een richting van standplaats naar richtpunt maakt met het noorden (positief met de wijzers van de klok mee) |
| Breedtecirkel | Cirkel over een ellipsoïde, evenwijdig aan de equator |
| Cartesiaans coördinaatstelsel | Coördinaatstelsel, dat gedefinieerd wordt door een aantal rechte lijnen, die elkaar loodrecht snijden in de oorsprong, en die allen eenzelfde schaalfactor hebben |
| Coördinaat | Kengetal waarmee de ligging van een punt in een coördinaatstelsel wordt aangegeven |
| Coördinaatstelsel/ coördinaat- systeem | Stelsel met datum, waarin de relatieve ligging van punten met behulp van coördinaten kan worden beschreven. Formeel is een coördinaatstelsel de realisatie van een coördinaatsysteem. |
| Coördinaat- transformatie | Zie datumtransformatie |
| Datum | De parameters waarmee, direct of indirect, de positie van de oorsprong, de oriëntering van de coördinaatassen en de schaal van het coördinaatstelsel gedefinieerd zijn. Ook wel coördinaatdefinitie genoemd. Elk coördinaatstelsel heeft een datum. |
| Datum-shift | Zie datumtransformatie |
| Datum- transformatie | Een transformatie van coördinaten in het ene coördinaatstelsel naar een ander coördinaatstelsel |
| Ellipsoïde | Zie omwentelingsellipsoïde |
| Ellipsoïdisch coördinaatstelsel | Coördinaatstelsel, dat gedefinieerd wordt door het oppervlak van een ellipsoïde en waarover kromlijnige coördinaten gedefinieerd zijn in de vorm van lengte- en breedte coördinaten; hoogten worden gegeven ten opzichte van het oppervlak van deze ellipsoïde |

| | |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ellipsoïdische hoogte | Hoogte van een punt ten opzichte van de ellipsoïde |
| Equator | Snijlijn van x,y-vlak met de ellipsoïde |
| Equipotentiaalvlak | Gekromd oppervlak om de aarde heen, dat punten met gelijke zwaartekrachtspotentiaal verbindt |
| Gelijkvormigheids transformatie | Transformatie van coördinaten, waarbij geen vormverandering van de geometrische figuur optreedt. Deze transformatie bestaat enkel uit rotaties, translaties en een schaalverandering |
| Geoïde | Equipotentiaalvlak op gemiddeld zeeniveau |
| Geoïdehoogte | Hoogte van de geoïde ten opzichte van de ellipsoïde |
| GPS | Global Positioning System |
| Interpolatie | Het berekenen van waarden tussen gegeven punten of meetpunten in |
| Kaartprojectie | Afbeelding van bol- of ellipsoïdische coördinaten op een plat vlak, volgens een eenduidig wiskundig concept |
| Meridiaan | Noord-zuid verbinding over de ellipsoïde, die punten met een gelijke lengtegraad verbindt |
| Meridiaan-convergentie | De hoek tussen het kaartnoorden en het ware noorden |
| Normaalrichting | Lijn loodrecht op de ellipsoïde in een bepaald punt |
| Nulmeridiaan | Referentiemeridiaan, ten opzichte waarvan de lengte van een punt wordt berekend |
| Omwentelings-ellipsoïde | Mathematische figuur, die ontstaat door een ellips, met lange en korte as a en b te roteren om de korte as (kortweg: ellipsoïde) |
| Operationalisering | Zie realisatie |
| Orthometrische hoogte | Hoogte van een punt ten opzichte van de geoïde; wordt gemeten met behulp van waterpassen |

| | |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Precisie | <p>Een maat voor de spreiding van de mogelijke fouten. Precisie wordt beschreven door een covariantiematrix. Een maat voor de precisie van een enkele grootte is de standaardafwijking σ. Bij een normale verdeling kan de standaardafwijking geïnterpreteerd worden als het getal waarbinnen 67% van de fouten zal vallen, terwijl 95% van de fouten binnen 2σ valt.</p> <p>Verder kan het nuttig zijn om onderscheid te maken naar de ruimtelijke schaal waarop fouten voorkomen. Bijvoorbeeld: voor een gebied van 10 km x 10 km is de precisie van de coördinaten na een datumtransformatie gelijk aan 5 cm (2σ), terwijl de precisie van de coördinaten voor heel Nederland uit dezelfde datumtransformatie gelijk is aan 30 cm (2σ).</p> |
| Realisatie | De vastlegging van een datum in het terrein door middel van markers, waarvan de coördinaten bekend zijn uit metingen. Wordt ook operationalisering genoemd. Zie ook verdichting. |
| Rechthoekig coördinaatstelsel | Zie cartesiaans coördinaatstelsel |
| Referentie-ellipsoïde | Wiskundig oppervlak (referentieoppervlak) dat gebruikt wordt als basis voor kaartprojecties |
| Referentie-oppervlak | Zie referentie-ellipsoïde |
| Referentiestelsel / referentiesysteem | Een coördinaatstelsel met minimaal nationale reikwijdte. Formeel is een referentiestelsel de realisatie van een referentiesysteem. |
| Relatieve ligging/positie of hoogte | Onderlinge positie of hoogte van een aantal punten ten opzichte van elkaar |
| Residu | Verschil tussen een gemeten of gegeven waarde en een berekende waarde |
| Schietlood-afwijking | Hoek die de schietloodrichting maakt met de normaalrichting |
| Schietloodrichting | Lijn in een punt, loodrecht op het equipotentiaalvlak door een bepaald punt; lokale richting van de zwaartekracht |
| Verdichting | Realisatie in een bepaald aandachtsgebied |

Literatuur

Bakker, G., J.C. de Munck en G.L. Strang van Hees, 1989

Radiopositioning at Sea. Delftse Universitaire Pers, Delft.

Bruijne, A.J.T. de, R.H.N. Haagmans en E.J. de Min, 1997

A preliminary North Sea Geoid model GEONZ97, MD-rapport MDGAP-9735.

DMA, 1987

DMA Technical Report: Department of Defense World Geodetic System 1984; its Definition and relationships with local geodetic systems.

Harsson, B.G., 1990

The transformation between ED50 and WGS84 for exploration purposes in the North Sea. Statens Kartverk, Hønefoss, Noorwegen, nr.1.

Kadaster, Rijksdriehoeksmeting, 2000

Het stelsel van de Rijksdriehoeksmeting en het European Terrestrial Reference System 1989 - Gebruik en definities.

Kenselaar, F., 1986

Stage bij de Rijksdriehoeksmeting. TU Delft.

Linden, J.A. van der, 1985

Over RD, ED en WGS; het verband tussen de coördinaatsystemen op de Nederlandse topografische kaarten. NGT Geodesia.

Marel, H. van der, 2000

De plaats van RD en NAP in Europa. Geodesia, 2000/9, p373-380.

Meetkundige Dienst Rijkswaterstaat

Kwaliteitsbegrippenhandboek.

Min, E.J. de, 1996

De geoïde voor Nederland, Proefschrift Technische Universiteit Delft.

Molendijk, R.E., 2000

Het NAP, houvast in Nederland én Europa. Geodesia, 2000/9, p385-392.

Polman, J., Salzmann, M.A., 1996

Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster (HTW). 1^e Druk, Kadaster Apeldoorn.

Richardus, P. en R.K. Adler, 1972

Map projections for geodesists, cartographers and geographers. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Salzmann, M.A., 2000

De Rijksdriehoeksmeting sluit aan op Europa. Geodesia, 2000/9, p395-403.

Schut, T.G., 1991

Transformatieparameters voor RD naar WGS84. GPS-nieuwsbrief, oktober 1991, Nederlandse Commissie voor Geodesie, Delft.

Schut, T.G., 1992

De transformatie van rechthoekige RD-coördinaten naar geografische coördinaten op de ellipsoïde van Bessel. NGT Geodesie 1992.

Strang van Hees, G.L., 1993

Globale en lokale geodetische systemen. Nederlandse Commissie voor Geodesie, publicatie 30, Delft.

Vaniček, P. and E. Krakowsky, 1986

Geodesy, the concepts. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Voet, P., 1995

Het gebruik van GPS bij de uitbouw van het Belgisch planimetrisch net. Nationaal Geografisch Instituut te Brussel, België.

Willigen, G.W. van, 1985

De berekening van de gravimetrische geoïde van Nederland. Afstudeerscriptie, Technische Universiteit Delft, faculteit Geodesie, Delft.