Механизмы сосуществования стационарных биологических сообществ в пространствах разных размерностей

Антон Сергеевич Савостьянов

.

Руководитель: Никитин Алексей Антонович,
доцент, к.ф.-м.н

Выпускная Квалификационная Работа
студента бакалавриата Факультета Компьютерных Наук
НИУ "Высшая Школа Экономики"

Оглавление

Глава 1

Введение

В 1916 году в [1] Альберт Эйнштейн (Albert Einstein) предложил концепцию вынужденного излучения (stimulated emission) — возникновения колебаний возбужденных электронов, индуцированного существующей световой волной: согласно предложенной теории, данный процесс порождает набор разнофазовых эквиамплитудных волн, *конкурентная самоорганизация* которых в стационарном положении образует равномерно колеблющуюся волну, явление, также известное как *лазерное излучение* [4].

Самоорганизация мультиагентных естественных процессов подробно изучалась в случае химических систем: в 1896 Рафаэлем Лизегангом (Raphael E. Liesegang) был рассмотрен процесс формирования структур, являющихся следствием выпадения в осадок вещества, получившегося в результате химической реакции, (кольца Лизеганга) [3]. Другими широкоизвестными феноменами являются реакция Белоусова-Жаботинского [5] и ячейки Релея-Бенара [2].

Глава 2

Постановка задачи

$$\frac{d}{dt}C_{12}(\xi) = [m_1 * C_{12}](\xi) - d_1 C_{12}(\xi) - (d_{11}^{'} \int w_{11}(\xi')T_{121}(\xi,\xi')d\xi' + d_{12}' \int w_{22}(\xi')T_{122}(\xi,\xi')d\xi') -$$
$$- w_{12}(\xi)C_{12}(\xi) + [m_2 * C_{21}](-\xi) - d_2 C_{21}(-\xi) -$$
$$- (d_{21}^{'} \int w_{21}(\xi')T_{211}(-\xi,\xi')d\xi' + d_{22}' \int w_{22}(\xi')T_{212}(-\xi,\xi')d\xi') - w_{21}(-\xi)C_{21}(-\xi) \quad (2.1)$$

According to normal distribution $m(-\xi) = m(\xi)$ and $C_{21}(-\xi) = C_{12}(\xi)$. Then

$$[m_2 * C_{21}](-\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} m_2(\xi')C_{21}(\xi' - \xi)d\xi' = \int_{-\infty}^{+\infty} m_2(\xi')C_{12}(\xi - \xi') = [m_2 * C_{12}](\xi)$$

Thus

$$\frac{d}{dt}C_{12}(\xi) = [(m_1 + m_2) * C_{12}](\xi) - (d_1 + d_2 + w_{12}(\xi) + w_{21}(\xi))C_{12}(\xi) -$$
$$- (\int w_{21}(\xi')T_{211}(-\xi,\xi')d\xi' + \int w_{22}(\xi')T_{212}(-\xi,\xi')d\xi' +$$
$$+ \int w_{11}(\xi')T_{121}(\xi,\xi')d\xi' + \int w_{12}(\xi')T_{122}(\xi,\xi')d\xi')$$

Normalised:

$$\frac{d}{dt}C_{12}(\xi) = [(m_1 + m_2) * C_{12}](\xi) - (d_1 + d_2 + w_{12}(\xi) + w_{21}(\xi))C_{12}(\xi) -$$
$$- (N_1 \int w_{21}(\xi')T_{211}(-\xi,\xi')d\xi' + N_2 \int w_{22}(\xi')T_{212}(-\xi,\xi')d\xi' +$$
$$+ N_1 \int w_{11}(\xi')T_{121}(\xi,\xi')d\xi' + N_2 \int w_{12}(\xi')T_{122}(\xi,\xi')d\xi')$$

Overseen closure is:

$$T_{ijk}(\xi,\xi') = \frac{\alpha}{2}(C_{ij}(\xi)C_{ik}(\xi')+C_{ij}(\xi)C_{jk}(\xi-\xi')+C_{ik}(\xi')C_{jk}(\xi-\xi')-1)+(1-\alpha)C_{ij}(\xi)C_{ik}(\xi')$$

First moments:

$$\begin{cases} b_1 - d_1 = N_1 y_{11} + N_2 y_{12} \\ b_2 - d_2 = N_1 y_{21} + N_2 y_{22} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
N_1 \int w_{21}(\xi')T_{211}(-\xi,\xi')d\xi' + N_2 \int w_{22}(\xi')T_{212}(-\xi,\xi')d\xi' + \\
+ N_1 \int w_{11}(\xi')T_{121}(\xi,\xi')d\xi' + N_2 \int w_{12}(\xi')T_{122}(\xi,\xi')d\xi'|_{C(\xi)C(\xi')} = \\
= N_1 C_{12} y_{21} + N_2 C_{12} y_{22} + N_1 C_{12} y_{11} + N_2 C_{12} y_{12} = (b_1 + b_2 - d_1 - d_2)C_{12}(\xi) = \\
= (b_1 + b_2 - d_1 - d_2)D_{12}(\xi) + (b_1 + b_2 - d_1 - d_2) \quad \times (1 - \frac{\alpha}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1 \int w_{11}(\xi')T_{121}(\xi,\xi')d\xi' + N_2 \int w_{12}(\xi')T_{122}(\xi,\xi')d\xi' + \\
+ N_1 \int w_{21}(\xi')T_{211}(-\xi,\xi')d\xi' + N_2 \int w_{22}(\xi')T_{212}(-\xi,\xi')d\xi'|_{C(\xi)C(\xi-\xi')} = \\
= N_1 C_{12}[w_{11} * C_{21}] + N_2 C_{12}[w_{12} * C_{22}] + N_1 C_{12}[w_{21} * C_{11}] + N_2 C_{12}[w_{22} * C_{12}] = \\
= (D_{12} + 1)(N_1[w_{11} * D_{21}] + N_2[w_{12} * D_{22}] + N_1[w_{21} * D_{11}] + N_2[w_{22} * D_{12}] + \\
+ N_2 d'_{22} + N_1 d'_{21} + N_2 d'_{22} + N_1 d'_{11}) \quad \times \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1 \int w_{21}(\xi')T_{211}(-\xi,\xi')d\xi' + N_2 \int w_{22}(\xi')T_{212}(-\xi,\xi')d\xi' \\
+ N_1 \int w_{11}(\xi')T_{121}(\xi,\xi')d\xi' + N_2 \int w_{12}(\xi')T_{122}(\xi,\xi')d\xi'|_{C(\xi')C(\xi-\xi')} = \\
= N_1[w_{21}C_{12} * C_{11}] + N_2[w_{22}C_{22} * C_{12}] + N_1[w_{11}C_{11} * C_{12}] + N_2[w_{12}C_{12} * C_{22}] = \\
= \{N_1[(w_{12}D_{12} + w_{12}) * (D_{22} + 1)]\} = \\
= N_1[w_{21}D_{12} * D_{11}] + N_1[w_{21} * D_{11}] + N_1 y_{21} + \\
+ N_2[w_{22}D_{22} * D_{12}] + N_2[w_{22} * D_{12}] + N_2 y_{22} + \\
+ N_1[w_{11}D_{11} * D_{12}] + N_1[w_{11} * D_{12}] + N_1 y_{11} + \\
+ N_2[w_{12}D_{12} * D_{22}] + N_2[w_{12} * D_{22}] + N_2 y_{12} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= N_1[w_{21}D_{12} * D_{11}] + N_2[w_{22}D_{22} * D_{12}] + N_1[w_{11}D_{11} * D_{12}] + N_2[w_{12}D_{12} * D_{22}] + \\
+ N_1[w_{21} * D_{11}] + N_2[w_{22} * D_{12}] + N_1[w_{11} * D_{12}] + N_2[w_{12} * D_{22}] + \\
+ N_1 d'_{21} + N_2 d'_{22} + N_1 d'_{11} + N_2 d'_{12} + \\
+ b_1 + b_2 - d_1 - d_2 \quad \times \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

To sum it all up:

$$
\begin{aligned}
((1 - \frac{\alpha}{2})(b_1 + b_2) + \frac{\alpha}{2}(d_1 + d_2) + w_{12} + w_{21})D_{12} = [(m_1 + m_2) * D_{12}] - w_{12} - w_{21} \\
- \frac{\alpha}{2}(D_{12}(N_1[w_{11} * D_{21}] + N_2[w_{12} * D_{22}] + N_1[w_{21} * D_{11}] + \\
N_2[w_{22} * D_{12}] + N_2 d'_{12} + N_1 d'_{21} + N_2 d'_{22} + N_1 d'_{11}) + \\
+ 2N_1[w_{11} * D_{21}] + 2N_2[w_{12} * D_{22}] + 2N_1[w_{21} * D_{11}] + 2N_2[w_{22} * D_{12}] + \\
+ N_1[w_{21}D_{12} * D_{11}] + N_2[w_{22}D_{22} * D_{12}] + N_1[w_{11}D_{11} * D_{12}] + N_2[w_{12}D_{12} * D_{22}])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((1 - \frac{\alpha}{2})(b_1 + b_2) + \frac{\alpha}{2}(d_1 + d_2 + d'_{11}N_1 + d'_{12}N_2 + d'_{21}N_1 + d'_{22}N_2) + w_{12} + w_{21})D_{12} = \\
[(m_1 + m_2) * D_{12}] - w_{12} - w_{21} - \\
- \frac{\alpha}{2} N_1((D_{12} + 2)([w_{11} * D_{12}] + [w_{21} * D_{11}]) + [w_{21}D_{12} * D_{11}] + [w_{11}D_{11} * D_{12}]) - \\
- \frac{\alpha}{2} N_2((D_{12} + 2)([w_{12} * D_{22}] + [w_{22} * D_{12}]) + [w_{22}D_{22} * D_{12}] + [w_{12}D_{12} * D_{22}])
\end{aligned}
$$

Other equations are:

$$
\begin{aligned}
((1 - \frac{\alpha}{2})b_1 + \frac{\alpha}{2}(d_1 + N_1 d'_{11} + N_2 d'_{12}) + w_{11})D_{11} = \frac{m_1}{N_1} + [m_1 * D_{11}] - w_{11} - \\
- \frac{\alpha}{2} N_1((D_{11} + 2)[w_{11} * D_{11}] + [w_{11}D_{11} * D_{11}]) - \\
- \frac{\alpha}{2} N_2((D_{11} + 2)[w_{12} * D_{12}] + [w_{12}D_{12} * D_{12}])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((1 - \frac{\alpha}{2})b_2 + \frac{\alpha}{2}(d_2 + N_1 d'_{21} + N_2 d'_{22}) + w_{22})D_{22} = \frac{m_2}{N_2} + [m_2 * D_{22}] - w_{22} - \\
- \frac{\alpha}{2} N_2((D_{22} + 2)[w_{22} * D_{22}] + [w_{22}D_{22} * D_{22}]) - \\
- \frac{\alpha}{2} N_1((D_{22} + 2)[w_{21} * D_{12}] + [w_{21}D_{12} * D_{12}])
\end{aligned}
$$

Useful N_1 and N_2:

$$N_1 = \frac{(b_1 - d_1)y_{22} - (b_2 - d_2)y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}$$

$$N_2 = \frac{(b_2 - d_2)y_{11} - (b_1 - d_1)y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}$$

Глава 3

Эвристики численного метода в случаях $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$

3.1 Ускорение вычислений в двумерном случае

Далее обратимся к изучению двумерного случая. Наиболее сложным с вычислительной точки зрения вопросом является работа с двумерной сверткой. Для нее верно свойство преобразования Фурье:

$$[f * g]_{\mathbb{R}^2} = \hat{F}[F[f] \cdot F[g]].$$

После дискретизации на квадратной сетке размера $K \times K$ прямое и обратное преобразования выглядят следующим образом:

$$G_{uv} = \frac{1}{K^2} \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{K-1} x_{mn} e^{-\frac{2i\pi}{K}(mu+nv)},$$

$$x_{nm} = \sum_{n=1}^{K-1} \sum_{m=1}^{K-1} G_{uv} e^{\frac{2i\pi}{K}(mu+nv)}.$$

Эти преобразования могут быть ускорены за счет применения одномерного быстрого преобразования Фурье:

$$G_{uv} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{K-1} \left[\frac{1}{K} \sum_{m=1}^{K-1} x_{mn} e^{-\frac{2i\pi nv}{K}} \right] e^{-\frac{2i\pi mu}{K}},$$

что дает алгоритмическую сложность $O(K^3 \log(K))$, поскольку необходимо вычислить быстрое преобразование Фурье ($K\log(K)$) в каждом узле сетки. Данную асимптотику можно улучшить, применив преобразование Ханкеля CITE.

Перейдем в преобразовании Фурье к полярным координатам:

$$F[f](\omega_x,\omega_y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-i(\omega_x x+\omega_y y)}dxdxy = \int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(r,\theta)e^{-ir\rho\cos(\psi-\theta)}rdrd\theta.$$

Пользуясь тем, что исследуемые функции радиально-симметричны, получаем соотношение

$$F[f](\rho,\psi) = \int\limits_{0}^{+\infty} rf(r)dr\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ir\rho\cos(\psi-\theta)}d\theta = 2\pi\int\limits_{0}^{+\infty} rf(r)J_0(r\rho)dr,$$

которое известно как **преобразование Ханкеля 0-го порядка**, где $J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\tau}d\tau$ — *функция Бесселя нулевого порядка*. Если же теперь дополнительно сделать экспоненциальную замену переменных $r = r_0e^x$, $\rho = \rho_0e^y$,

$$H_0[f](\rho) = \int_0^{+\infty} rf(r)J_o(\rho r)dr = \frac{1}{e^{y/4}}[(f(e^{x/4})\cdot e^{x/4}) * J_0(e^{x/4})](y)|_{x=\ln r,\, y=\ln\rho}.$$

то вместо преобразования Фурье получим свертку двух функций, алгоритмическая сложность которой $O(K\cdot\log(K))$, т.е. было произведено ускорение в K^2 раз.

3.2 Ускорение вычислений в трехмерном случае

Аналогичным образом проведем рассуждение в случае трехмерной свертки. Для нее верно свойство преобразования Фурье:

$$[f*g]_{\mathbb{R}^2} = \hat{F}[F[f]\cdot F[g]].$$

Пользуясь соображениями выше, легко понять, что ее вычислительная сложность есть не что иное, как быстрое преобразование Фурье, запущенное в каждой точке пространства, т.е. $O(K^3\cdot K\log K) = O(K\cdot\log K)$. Улучшим вычислительную сложность нашего метода за счет перехода в класс радиально симметричных функций, как и ранее. Для этого сделаем дополнительное построение: вспомним задачу Лапласса с граничным условием на шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ 0 < \rho < a,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi \\ u(a, \theta, \phi) = f_0(\theta, \phi) \equiv 0 \end{cases}$$

Строго говоря, мы необязаны привязывать наши рассуждения к конкретному виду начальных условий, поэтому для удобства положим, что задача дана с условиями Дирихле, как приведено выше. Полагая по методу Фурье $u(\rho, \theta, \phi) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} R_n^k(\rho) Y_n^k(\theta, \phi)$, получаем:

$$Y_n^k(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-k)!}{4\pi(n+k)!}} P_n^k(\cos\phi) e^{ik\theta},$$

где $P_n^k(x)$ — *присоединенные полиномы Лежандра*, известные своей ортогональность в L_2:

$$P_n^k(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1 - x^2)^{k/2} \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} [(1 - x^2)^n]$$

Воспользуемся разложением ядра Фурье через Y_n^k:

$$e^{i(\vec{w}, \vec{r})} = 4\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2r\rho}} J_{n+1/2}(\rho r) \overline{Y_n^k(\phi, \psi)} Y_n^k(\theta, \eta)$$

Подставляя полученное выражение в теорему о свертке:

$$\begin{aligned}[f *** g] = F^{-1}[F[f] \cdot F[g]] = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(r) e^{i(\vec{w}, \vec{r})} r^2 \sin\phi \, dr d\phi \right) \cdot \\ \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} g(r) e^{i(\vec{w}, \vec{r})} r^2 \sin\phi \, dr d\phi \right) \Bigg] e^{-i(\vec{w}, \vec{r})} \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\theta d\eta\end{aligned}$$

и меняя порядок суммирования с учетом ортогональности полиномов Лежандра, получаем:

$$[f *** g](\vec{r}) = 4\pi [(r \cdot f) * g](r)$$

Глава 4

Результаты и заключение

4.1 Механизмы сосуществования в пространствах различных рамерностей

В рамках нашего исследования предложено исследовать равновесные положения популяции в пространстве параметров модели, описанном выше, с ограничениями на некоторое подмножество параметров, которые приводит к нетривиальным стационарным точкам системы; такие ограничения также известны как *механизмы сосуществования*, поскольку отсутствие нулевых стационарных решений есть выживание всех видов популяции.

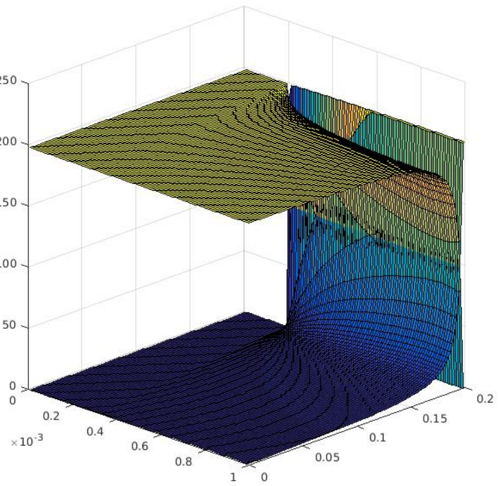
4.1.1 Competition-colonization trade-off

В данной части работы мы приведем более точные иллюстрации для наблюдаемой реализации широко известного механизма **competition-colonization trade-off**; биологическое соображение, описывающее данный механизм, заключается в том, что сосуществование двух видов возможно, если один из видов сильнее конкурирует, а второй распространяется на большие расстояния, что в нашем пространстве можно наблюдать в пространстве $[\sigma_{m2};\ d'_{12}]$. Несложно заметить, что данное соображение описывает равновесные устойчивые положения модели «хищник–жертва».

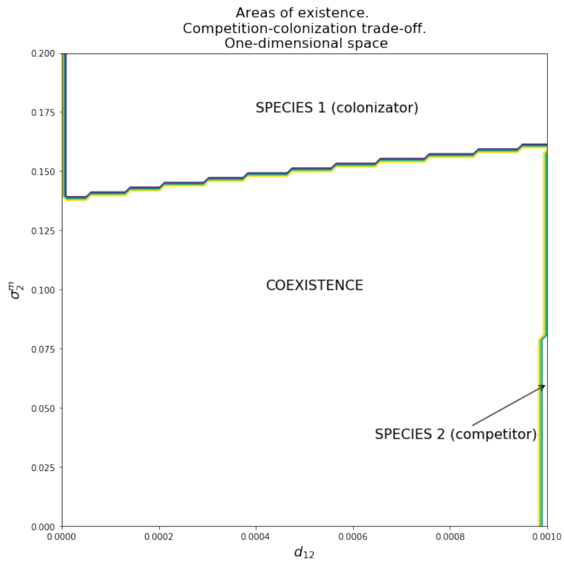
Главной целью нашего исследования являются эффекты увеличения размерности геометрического пространства, в котором обитают особи. Рисунки [fig:cctod1], [fig:cctod2] and [fig:cctod3] иллюстрируют случаи $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно. В рамках выполнения работы нами был разработан численный метод, позволяющий считать решения системы точнее, чем ранее известные методы за счет экспоненциальной скорости сходимости и уменьшения выполняемых арифметических операций, что не позволяет ошибке накапливаться. Для каждого случая приведены два графика: поверхности плотностей индивидов (первых моментов) для каждой пары параметров $(\sigma_2^m; d_{12}')$ и области в пространстве параметров, которые индуцируют сосуществование или существование только одного из видов (номер выживающего вида подписан на рисунке).

Исходя из полученных результатов, необходимо сделать следующий набор выводов и подчернуть следующие особенности:

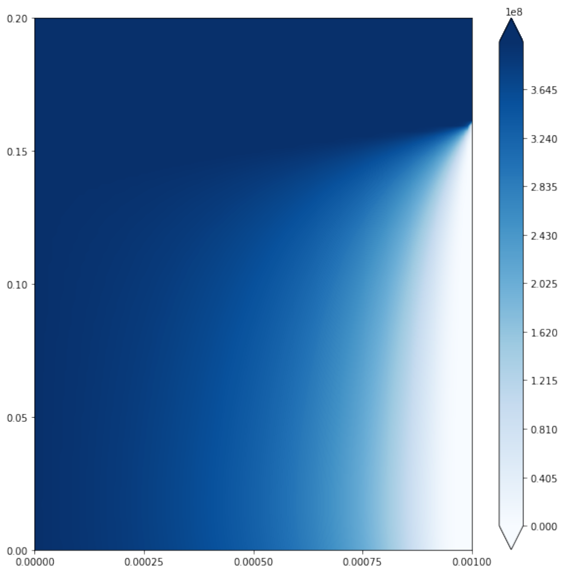
- интервал, выбранный для d_{12}' должен быть увеличен для получения более значимой области доминации более сильного вида;
- общая идея мезанизма competition-colonization trade-off наблюдается во всех трех размерностях; при этом механизм нельзя воспринимать, как правило, необходимо требующее для сосуществования двух видов овердисперсии второго; как показано на наших рисунках, увеличение σ_2^m ведет к вымиранию сильного вида;
- с ростом размерности геометрического пространства вид-колонизатор вытесняет более сильный вид и даже приводит к его вымиранию: общий тренд заключается в увеличении области выживания исключительно первого вида, в то время как область сосуществования двигается (двумерный случай) и уменьшается (трехмерный случай);
- в трехмерном случае вид-колонизатор фактически приводит к вымиранию более сильного вида при всех рассмотренных наборах параметров модели; выделенная область сосуществования, несмотря на то, что оба вида там выживают, приводит к фактическому вымиранию более сильного вида, с резким ростом к границе области, где сильный вид выигрывает;
- как видно из рисунков [fig:cctod2:sub2] и [fig:cctod3:sub2] разработанный численный метод имеет несколько численных артефактов, которые можно устранить увеличением вычислительной точности нашего метода.



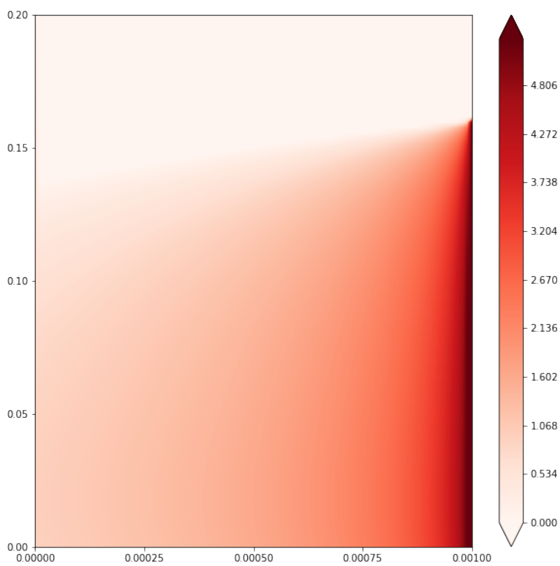
(a) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space



(b) Areas of coexistence in described parameter space

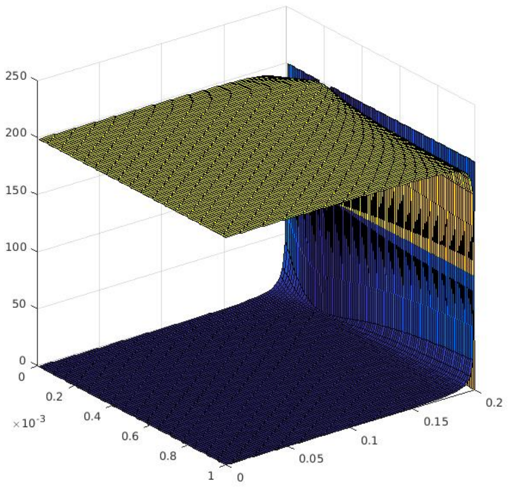


(c) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space

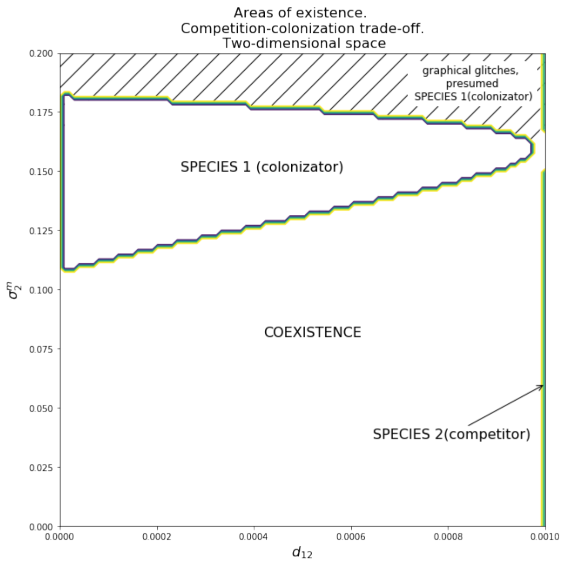


(d) Areas of coexistence in described parameter space

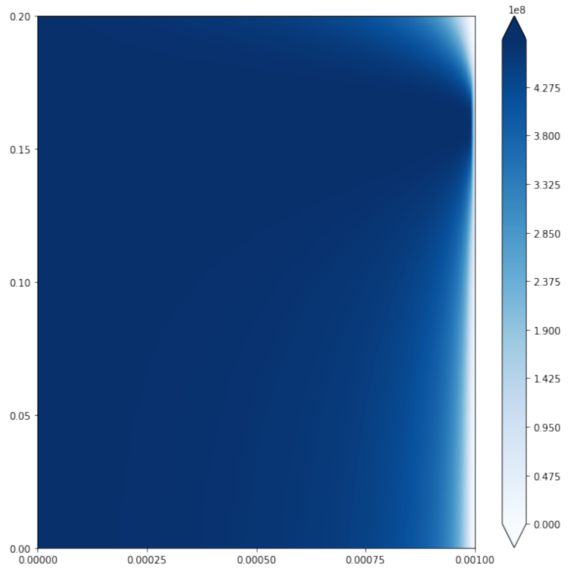
Рис. 4.1: Realization of Competition-Colonization Trade-Off mechanisms in σ_2^m and d'_{12} parameter space in case of *one-dimensional habitat*. Other parameters are chosen as follows: $b_1 = b_2 = 0.4, d_1 = d_2 = 0.2, d'_{11} = d'_{22} = d'_{21} = 0.001, \sigma_1^m = 0.04, \sigma_{11}^w = \sigma_{12}^w = \sigma_{21}^w = \sigma_{22}^w = 0.04$



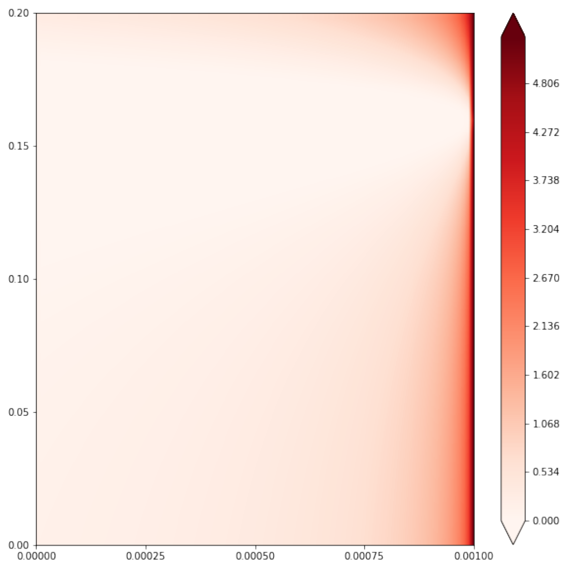
(a) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space



(b) Areas of coexistence in described parameter space

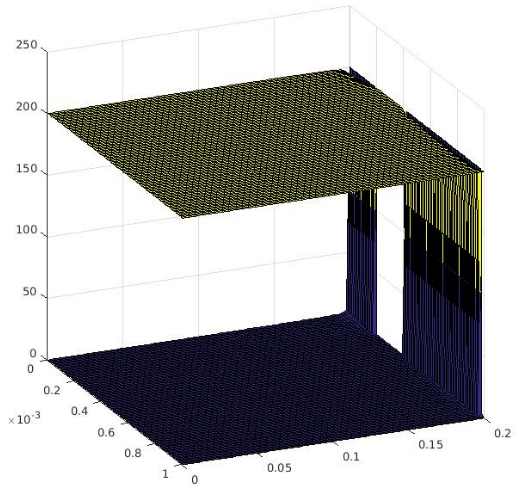


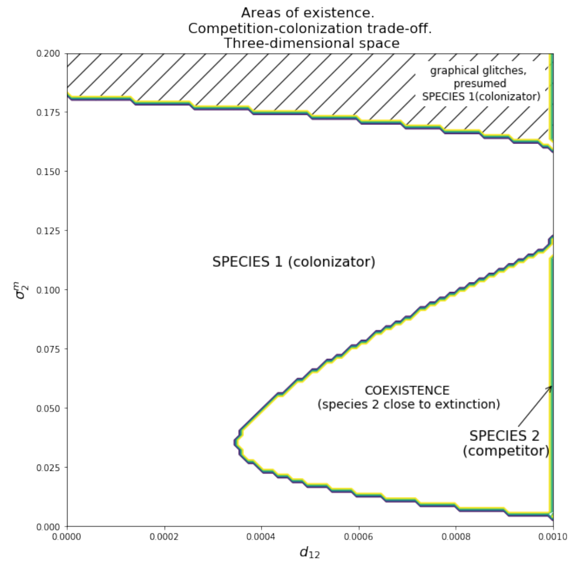
(c) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space



(d) Areas of coexistence in described parameter space

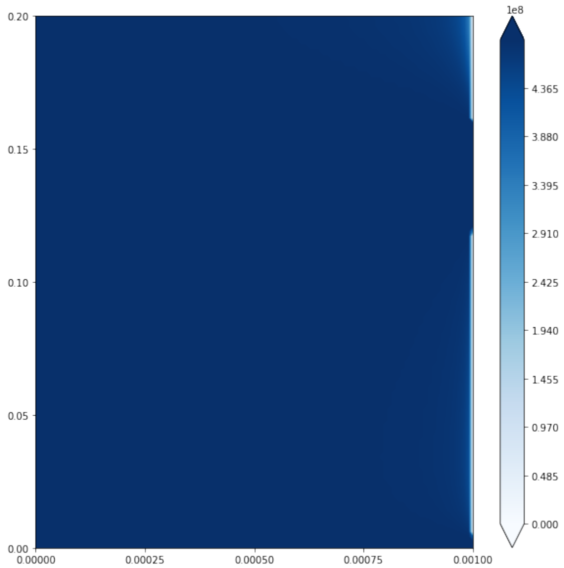
Рис. 4.2: Realization of Competition-Colonization Trade-Off mechanims in σ_2^m and d'_{12} parameter space in case of *two-dimensional habitat*. Other parameters are chosen as follows: $b_1 = b_2 = 0.4, d_1 = d_2 = 0.2, d'_{11} = d'_{22} = d'_{21} = 0.001, \sigma_1^m = 0.04, \sigma_{11}^w = \sigma_{12}^w = \sigma_{21}^w = \sigma_{22}^w = 0.04$

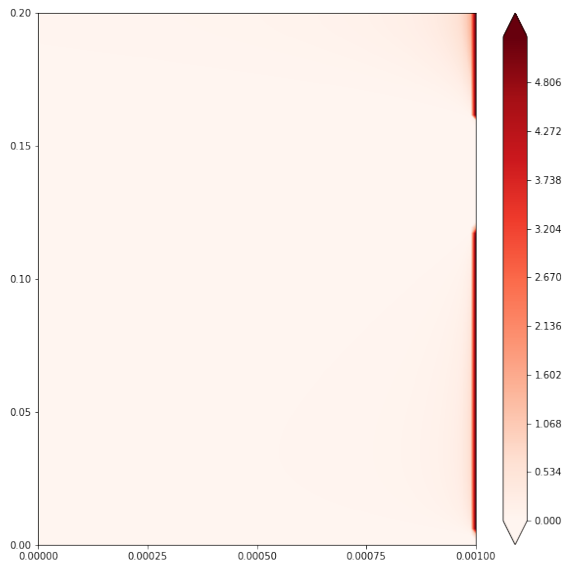




(a) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space

(b) Areas of coexistence in described parameter space





(c) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space

(d) Areas of coexistence in described parameter space

Рис. 4.3: Realization of Competition-Colonization Trade-Off mechanisms in σ_2^m and d'_{12} parameter space in case of *three-dimensional habitat*. Other parameters are chosen as follows: $b_1 = b_2 = 0.4, d_1 = d_2 = 0.2, d'_{11} = d'_{22} = d'_{21} = 0.001, \sigma_1^m = 0.04, \sigma_{11}^w = \sigma_{12}^w = \sigma_{21}^w = \sigma_{22}^w = 0.04$

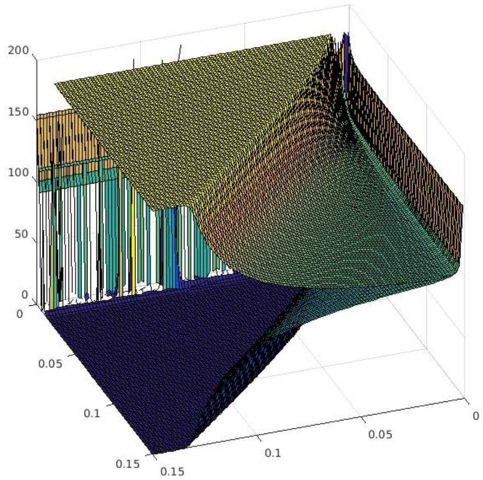
4.1.2 Heteromyopia

В данной части работы мы рассмотрим другой механизм сосуществования, который был предложен в [25], *heteromyopia*: драйвером сосуществования в рамках данного механизма считается принцип о том, что межвидовая конкуренция индивидов проходит на меньшем расстоянии, чем внутривидовая. В нашей модели мы нашли данный механизм в пространстве параметров $\left[\sigma_{ii}^{w}; \sigma_{ij}^{w}\right]$.

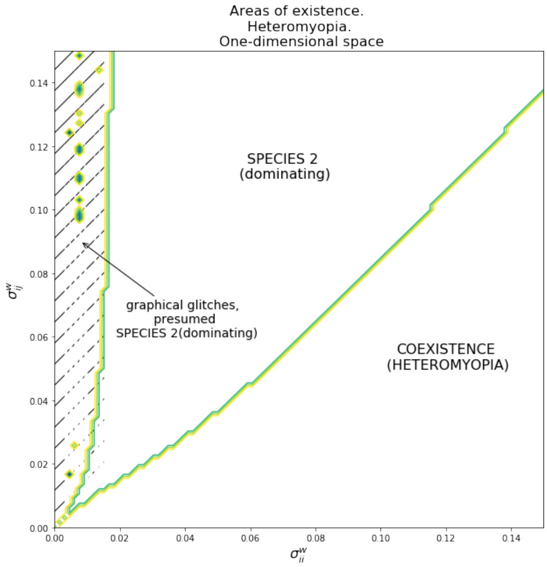
Главной целью нашего исследования являются эффекты увеличения размерности геометрического пространства, в котором обитают особи. Рисунки [fig:cctod1], [fig:cctod2] and [fig:cctod3] иллюстрируют случаи $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно. В рамках выполнения работы нами был разработан численный метод, позволяющий считать решения системы точнее, чем ранее известные методы за счет экспоненциальной скорости сходимости и уменьшения выполняемых арифметических операций, что не позволяет ошибке накапливаться. Для каждого случая приведены два графика: поверхности плотностей индивидов (первых моментов) для каждой пары параметров $\left[\sigma_{ii}^{w}; \sigma_{ij}^{w}\right]$ и области в пространстве параметров, которые индуцируют сосуществование или существование только одного из видов (номер выживающего вида подписан на рисунке).

Исходя из полученных результатов, необходимо сделать следующий набор выводов и подчернуть следующие особенности:

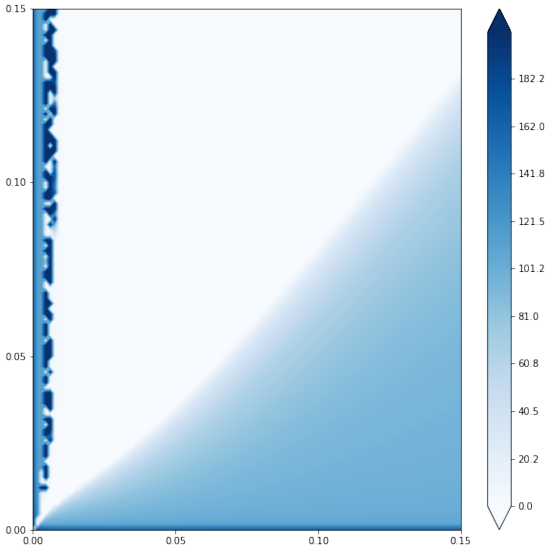
- в целом, корректность предложенного механизма была подтверждена в случае одномерного и двумерного пространства обитания; стоит также отметить, что предложенная в оригинальной статье линейность зависимости между радиусом интравидовой и интервидовой конкуренции является неплохим, но не самым лучшим первым приболижением;
- описанный механизм отсутствует в случае двумерной среды обитания, что ставит вопросы о его значимости и корректности;
- согласно рисункам [fig:hmd1:sub2], [fig:hmd2:sub2] и [fig:hmd3:sub2] разработанный численный метод, как и в случае рисунков для competition-colonization trade-off выше, содержит набор численных артефактов.



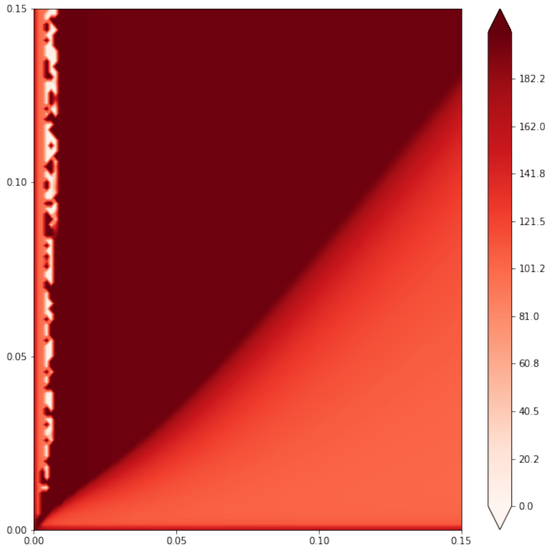
(a) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space



(b) Areas of coexistence in described parameter space



(c) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space

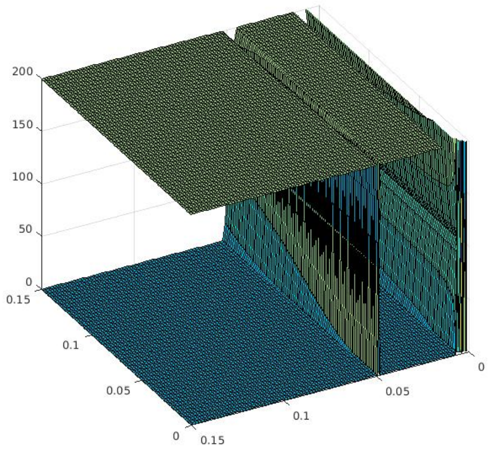


(d) Areas of coexistence in described parameter space

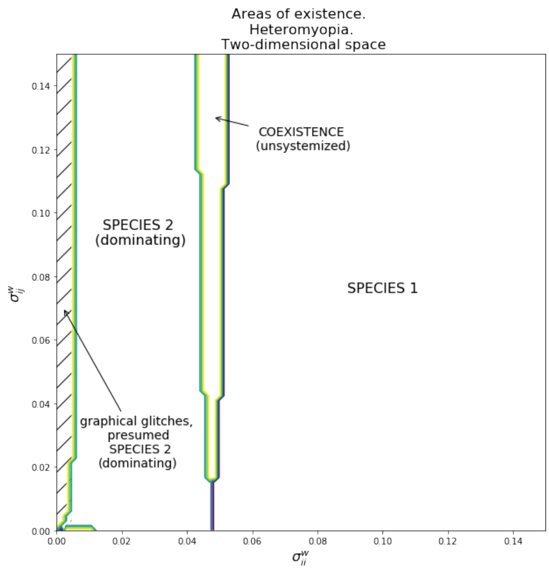
Рис. 4.4: Realization of Heteromyopia mechanisms in $\sigma^w_{11} = \sigma^w_{22}$ and $\sigma^w_{12} = \sigma^w_{21}$ parameter space in case of *one-dimensional habitat*. Other parameters are chosen as follows: $b_1 = b_2 = 0.4, d_1 = d_2 = 0.2, d'_{11} = d'_{22} = d'_{21} = d'_{12} = 0.001, \sigma^m_1 = \sigma^m_2 = 0.06$.

4.1.3 Дальнейшее исследование

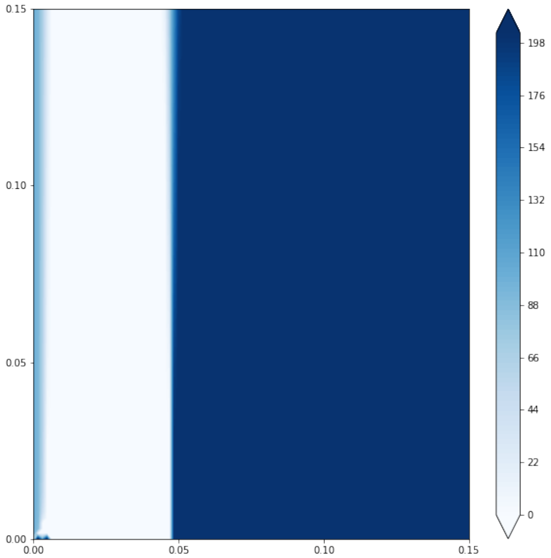
Помимо полученных выше выводов и указанных дальнейших шагов по их преодолению, хотелось бы отдельно указать еще несколько этапов и целей для дальнешей работы:



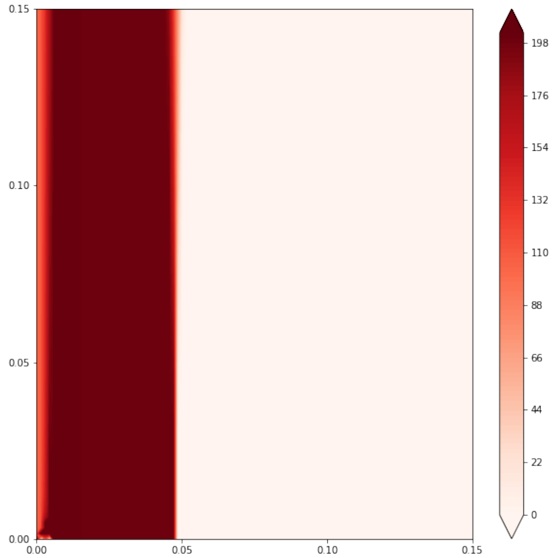
(a) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space



(b) Areas of coexistence in described parameter space



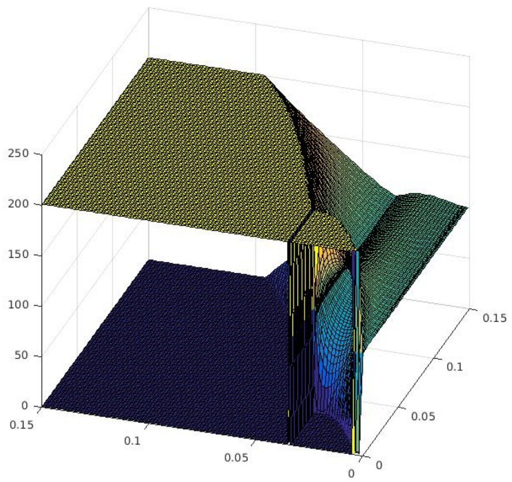
(c) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space



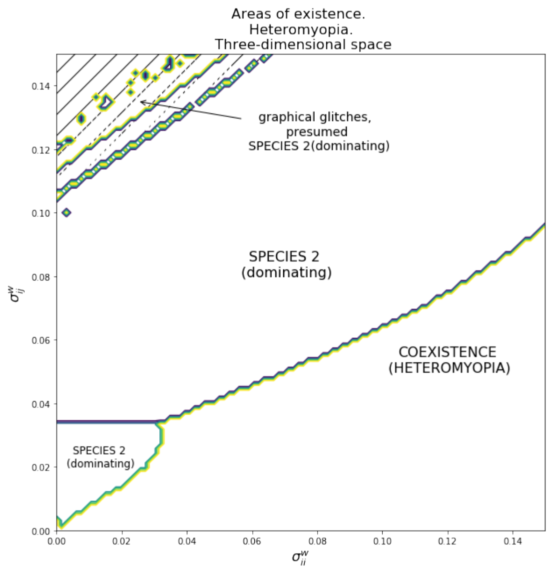
(d) Areas of coexistence in described parameter space

Рис. 4.5: Realization of Heteromyopia mechanisms in $\sigma^w_{11} = \sigma^w_{22}$ and $\sigma^w_{12} = \sigma^w_{21}$ parameter space in case of *two-dimensional habitat*. Other parameters are chosen as follows: $b_1 = b_2 = 0.4, d_1 = d_2 = 0.2, d'_{11} = d'_{22} = d'_{21} = d'_{12} = 0.001, \sigma^m_1 = \sigma^m_2 = 0.06$.

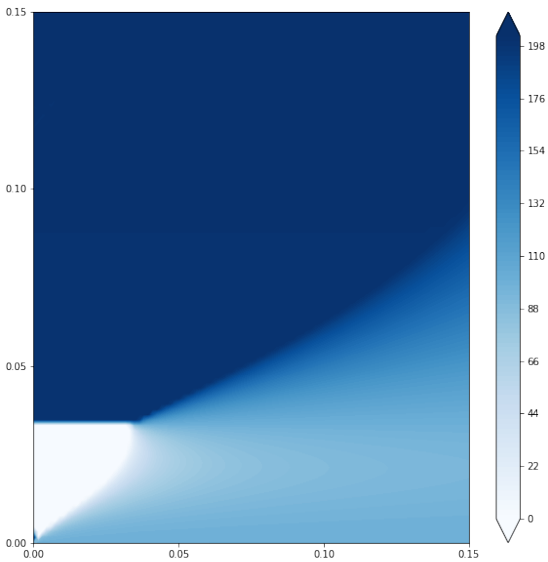
1. Проведение биологических симуляций (часть из них уже была сделана, результаты могут быть обнаружены в том же репозитории, что и головной код численного метода) для получения тестовой выборки, на которой можно будет проверить корректность аппроксимации третьего момента и улучшить ее;



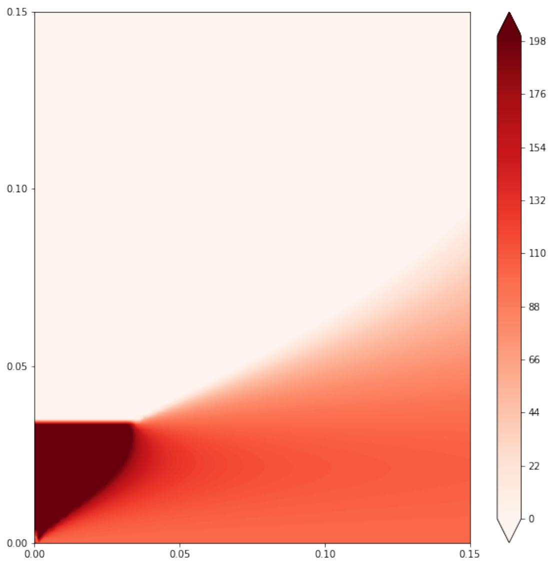
(a) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space



(b) Areas of coexistence in described parameter space



(c) Surfaces of first moment N_1 and N_2 in described parameter space



(d) Areas of coexistence in described parameter space

Рис. 4.6: Realization of Heteromyopia mechanisms in $\sigma_{11}^w = \sigma_{22}^w$ and $\sigma_{12}^w = \sigma_{21}^w$ parameter space in case of *three-dimensional habitat*. Other parameters are chosen as follows: $b_1 = b_2 = 0.4, d_1 = d_2 = 0.2, d'_{11} = d'_{22} = d'_{21} = d'_{12} = 0.001, \sigma_1^m = \sigma_2^m = 0.06$.

2. Изучение случае больших размерностей; несмотря на кажущуюся математичность и неприменимость подобных сред обитания в реальной жизни, необходимо отметить, что более чем трехмерные пространства — это классический подход моделирования биоценозов тропических лесов;

3. Изучение работы численного метода и зависимости результатов от ядер другого вида; в частности, рассмотрение ядер конкуренции с сингулярностью в 0, что позволяет моделировать размер индивида, и ядер дисперсии с 0 в 0, что является более корректным биологическим случаем;

4. Получение корректных ядер взаимодействия в модели, согласно имеющимся дата-сетам о распределении планктона в течениях; центральная сложность данной задачи заключается в том, что получение корректной выборочной фукнции распределения затруднена наличием градиентов течения и кислорода, влияние которых должно быть учтено при моделировании;

5. Изучение поведение симбионтов (т.е. видов в отрицательной константой конкуренции) с учетом пространственной структуры и наличием внутривидовой конкуренции.

Литература

[1] A. Einstein. Strahlungs-Emission und bsorption nach der Quantentheorie. *Deutsche Physikalische Gesellschaft*, 18, 1916.

[2] A. V. Getling. Rayleigh-bénard convection: Structures and dynamics. *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*, 11.

[3] R. E. Liesegang. Naturwiss. *Wochenschr*, 11:353, 1896.

[4] W. Steen. 'light' industry: an introduction to laser processing and its industrial applications. In J. Lawrence, , J. Pou, , D. Low, , and E. Toyserkani, editors, *Advances in Laser Materials Processing*, Woodhead Publishing Series in Welding and Other Joining Technologies, pages 3 – 19. Woodhead Publishing, 2010.

[5] Б. П. Белоусов. Периодически действующая реакция и её механизм. *Автоволновые процессы в системах с диффузией*, page 76, 1951.

Список иллюстраций