Анализ качества восстановления каплинга в обратной задаче Курамото-модели для различных модельных функций

Научный семинар

by

Антон Савостьянов

17 ноября, 2017

Contents

Модель Курамото

- Модель предложена в 1975 *Yoshiki Kuramoto*
- Поведение осцилляторов в модели:

$$X_i(t) = a_i(t)\sin\left(\Omega_i t + \varphi_i\right)$$

$$X_i(t) = \sin\left(\theta_i(t)\right)$$

- Явление синхронизации: $\Omega_i = \Omega_j = \Omega$ (**частотная**) и $\varphi_i - \varphi_j = const$ (**фазовая**)

$$\varphi_i - \varphi_j = (\Omega t + \varphi_i) - (\Omega t + \varphi_j) = \theta_i(t) - \theta_j(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j = 0$$

Модель Курамото

- Динамика фаз осцилляторов:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{ij}}{2}(t) \sin\left(\theta_j - \theta_i\right),$$

  где ω_i — разница фаз, $k_{ij}(t)$ — каплинг осцилляторов, а $\theta_i - \theta_j$ — фазовая разница.
- Положим задачу для двух осцилляторов ($i, j = 1, 2$) с постоянными естественными частотами ($\omega_i = const$) и симметричным каплингом ($k_{12}(t) = k_{21}(t) = k(t)$). Вычитая уравнения ($\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, $\theta_1 - \theta_2 = \theta$):

$$\dot{\theta} = 2\Delta\omega - k(t) \sin\theta(t)$$

- **Обратная задача:** по $X(t)$ и $Y(t)$ восстановить $k(t)$

Обратная задача

Задача

Оценить качество восстановления на модельных функциях, после чего использовать полученные результаты для анализа качества восстановления на реальных данных.

Процедура восстановления

1. Выберем некоторое начальное приближение каплинга $k_0(t)$; решим дифференциальное уравнение $\dot{\theta} = 2\Delta\omega - k_0(t)\sin\theta(t)$;
2. Введем два виртуальных маятника: $X_0 = \sin(\Omega t + \theta(t))$, $Y_0 = \sin(\Omega t)$, посчитаем их скользящую корреляцию в окне периода $C_0(t)$;
3. Исходя из предположений квазистационарности ($\dot{\theta} \approx 0$): $\varphi_0 = \arccos C_0(t) \Rightarrow \hat{k}(t) = \frac{2\Delta\omega}{\sin\varphi_0}$

Кусочно-константные $k_0(t)$

Пусть

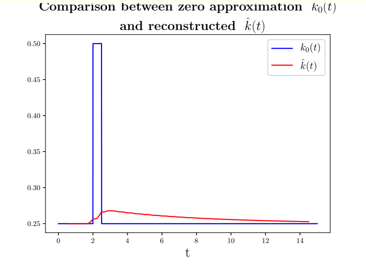
$$k_0(t) = \begin{cases} d, \ 0 \le t \le 2T \wedge t \ge 2T + \tau \\ d + \Delta d, \ 2T \le t \le 2T + \tau \end{cases}$$

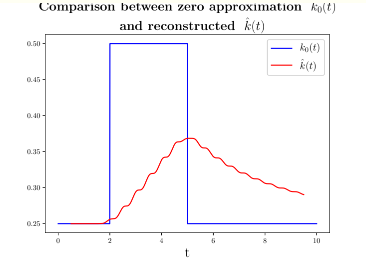
- d — невозмущенное значение;
- Δd — величина возмущения (шока);
- τ — длительность возмущения (шока);
- T — общий главный период маятников.

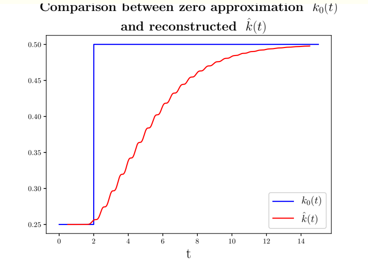
Заметим, что если $\Delta d < 0$, то может быть нарушено основное Курамото-неравенство:

$$\left| \frac{2\Delta\omega}{k_0(t)} \right| \le 1$$

Кусочно-константные $k_0(t)$ ($\Delta d > 0$)





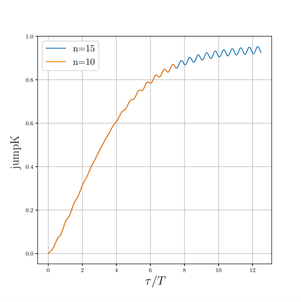


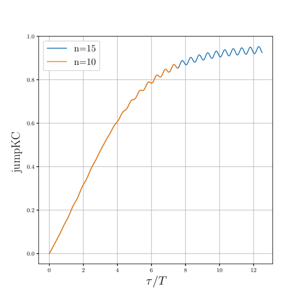
Меры качества восстановления

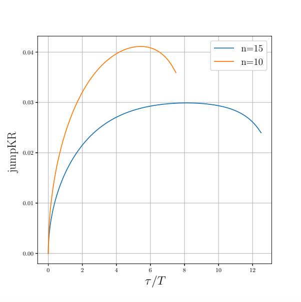
Для данного случая будем рассматривать следующие метрики для сравнения $k_0(t)$ и $\hat{k}(t)$:

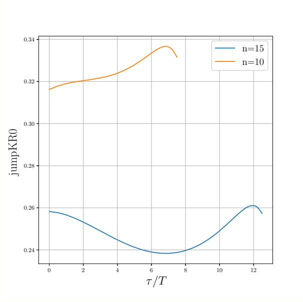
1. $jumpK = \frac{\left|\hat{k}(2T+\tau)-d\right|}{\Delta d}$
2. $jumpKC = \frac{\max\limits_{t \geq 2T+\tau}\left|\hat{k}(t)-d\right|}{\Delta d}$
3. $jumpKR = \frac{1}{nT}\sqrt{\int_0^{nT}\left(\hat{k}(t)-k_0(t)\right)^2 dt}$
4. $jumpKR_0 = \frac{1}{n\sigma(k_0(t))T}\sqrt{\int_0^{nT}\left(\hat{k}(t)-k_0(t)\right)^2 dt}$

Кусочно-константные $k_0(t)$ ($\Delta d > 0$)

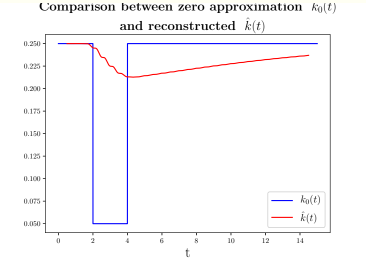


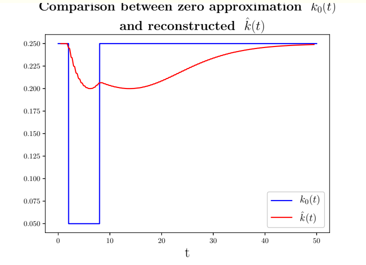


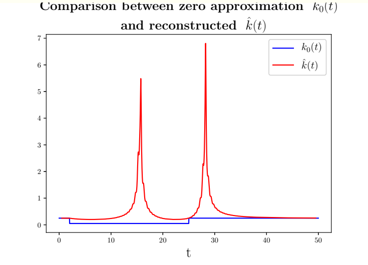




Кусочно-константные $k_0(t)$ ($\Delta d < 0$)





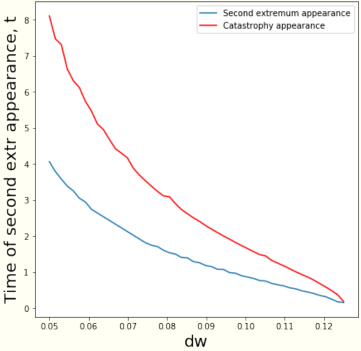


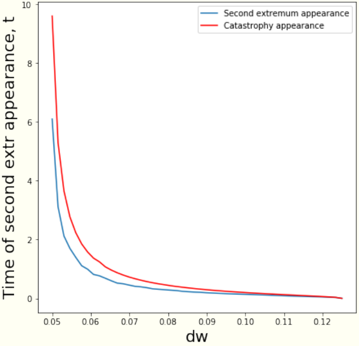
Кусочно-константные $k_0(t)$ ($\Delta d < 0$)

- Пожалуйста, включите видео `const_anim.mp4`
- Можно заметить две характерных длительности шока, нарушающего основное Курамото-неравенство: момент появления второго экстремума и момент появления сингулярности (катастрофы)

Кусочно-константные $k_0(t)$ ($\Delta d < 0$)

Приведем два графика времени появлений второго экстремума и катастрофы: для слабого ($d = 0.25, \Delta d = -0.2$) и сильного ($d = 2.5, \Delta d = -2.45$) каплингов

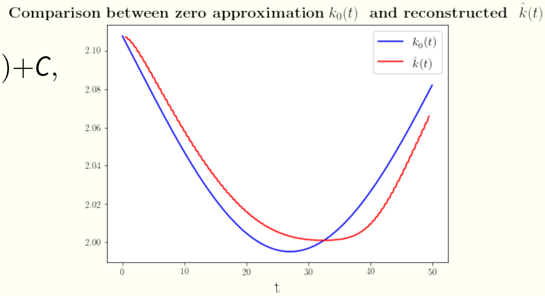




Приближение $k_0(t)$ синусом

$$k_0(t) = A\sin(Bt+\varepsilon)+C,$$

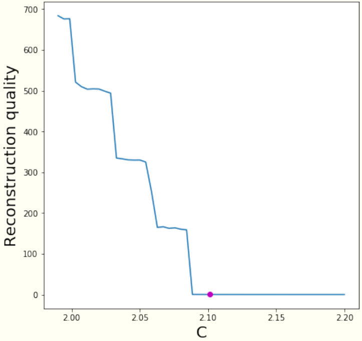
A — амплитуда,
B — частота,
C — среднее значение
$C - A \leq 2\Delta\omega$

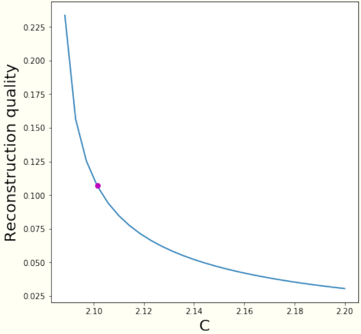


Пожалуйста, включите видео `sink_anim.mp4`

Приближение $k_0(t)$ синусом

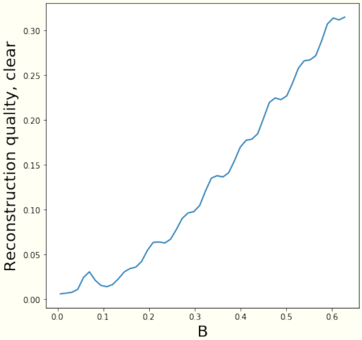
Приведем графики качества восстановления $jumpRK_0$ при различных C:

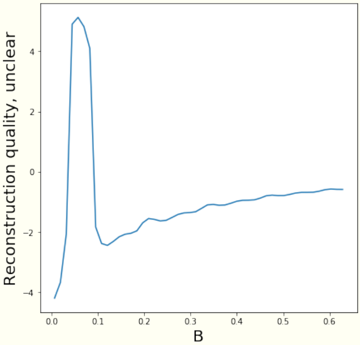




Приближение $k_0(t)$ синусом

Приведем графики качества восстановления $jumpRK_0$ при различных B: слева амплитуда не позволяет нарушений Курамото-неравенства, а справа позволяет (ось ординат логарифмическая):





$k_0(t)$ как реализация AR(1)

- Положим $k_0(t)$ следующим случайным процессом:

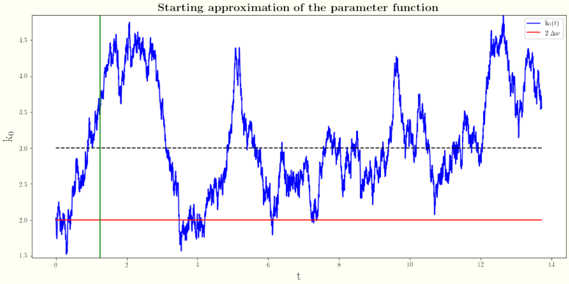
$$k_0(t) = \alpha k_0(t-1) + m + \xi(t-1),\ \ \xi(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

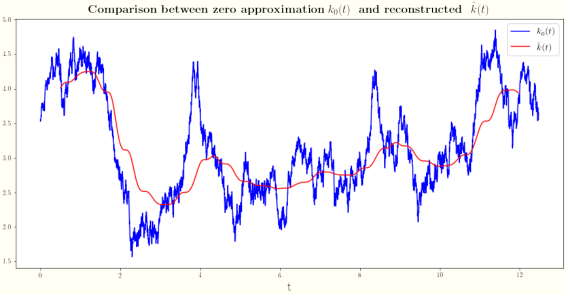
  Такой процесс называется **авторегрессионным**.
- Через характерное время $\tau = \frac{1}{1-\alpha}$ процесс становится стационарным в слабом смысле, причем:

$$\mathbb{E}[k_0] = \frac{m}{1-\alpha}$$

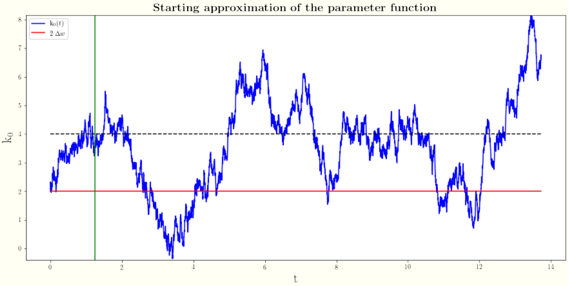
$$\sigma[k_0] = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

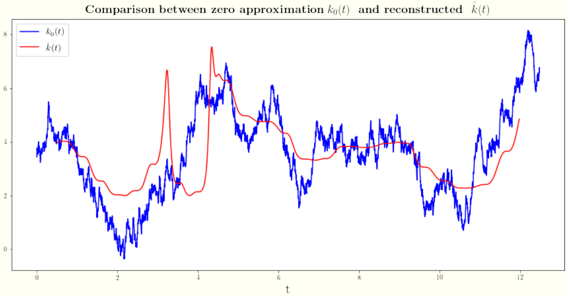
$k_0(t)$ как реализация AR(1)



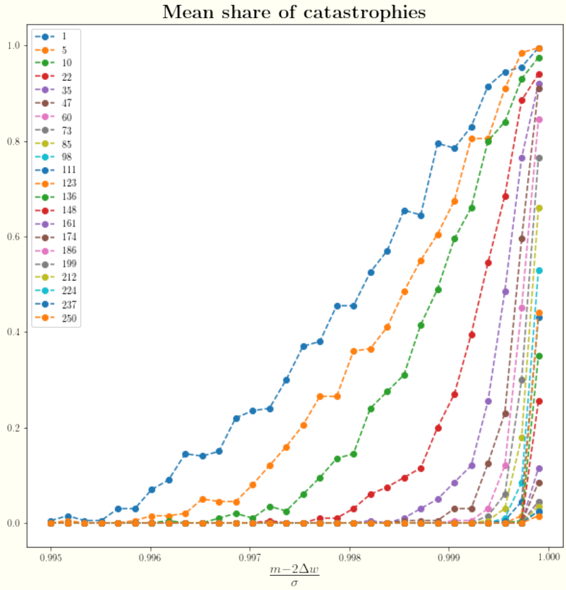


$k_0(t)$ как реализация AR(1)

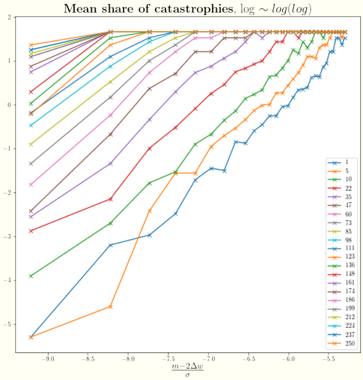


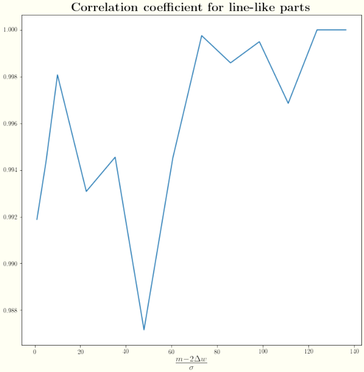


$k_0(t)$ как реализация AR(1)



$k_0(t)$ как реализация AR(1)





Таким образом доля катастроф есть $\approx f((1-\alpha))e^{-(1-\alpha)}$!

Спасибо за внимание!

$k_0(t)$ как реализация AR(1)