Восстановление каплинга по реальным данным в модели Курамото
Попытка вторая

22 января 2018 г.

Описание процедуры. Напомним исходное: даны две временные серии ($X(t)$ и $Y(t)$), *polar focalue,* описывающие магнитную активность на полюсах Солнцах. Наша цель *при помощи этих измерений восстановить каплинг.* Приведем исправленную процедуру, какой она кажется сейчас:

1. **Получим из данных некоторое** $k(t)$. Для этого в 11-летнем окне посчитаем скользящую корреляцию между данными $X(t)$ и $Y(t)$, назовем ее $C(t)$. Далее положим систему стационарной или близкой к стационарной, для которой известно, что

   $$\theta(t) = \arccos C(t),$$

   где $\theta(t)$ — есть фазовая разность между маятниками. Более того, раз система находится в квазистационарном состоянии, то $\dot{\theta} \approx 0$; таким образом, подставляя $\theta(t)$ в уравнение эволюции фазовой разности в модели Курамото:

   $$\dot{\theta} = 2\Delta\omega - k(t)\sin\theta(t)$$

   находим $k(t) = \frac{2\Delta\omega}{\sin\theta}$ (напоминание о постоянно используемых нами обозначениях опущу).

2. **Найдем** $k_0(t)$. Заметим, что предположение о квазистационарности отнюдь не является гарантией того, что при подстановке найденного $k(t)$ в уравнение, мы получим уже известное $\theta(t)$ (как мне казалось ранее, за что я страшно извиняюсь); на самом деле мы ровно и проэксплуатируем тот факт, что мы не находимся в стационарной ситуации. Итак, решим уравнение

   $$\dot{\varphi} = 2\Delta\omega - k(t)\sin\varphi(t)$$

   с найденным ранее $k(t)$; решение назовем $\varphi(t)$ (чтобы отличать эту фазовую разность от полученной из реальных данных). Добавив же в этот момент квазистацинарность, мы можем получить $k_0(t) = \frac{2\Delta\omega}{\sin\varphi}$.

3. **Найдем восстановленное при помощи виртуальных маятников** $\hat{k}(t)$. Процедуру повторим обычную: по найденной разности $\varphi(t)$ построим два виртуальных маятника

$$\begin{cases} X_0(t) = \sin \Omega t \\ Y_0(t) = \sin(\Omega t + \varphi(t)) \end{cases},$$

у которых посчитаем скользящую корреляцию $C_0(t)$, для которой из предположения квазистацинарности найдем свои $\varphi_0(t)$ и $\hat{k}(t)$:

$$\varphi_0(t) = \arccos C_0(t), \qquad \hat{k}(t) = \frac{2\Delta\omega}{\sin \varphi_0(t)}$$

Результаты процедуры. Приведем сравнения получаемых фазовых разностей на всех трех этапах и восстановленных каплингов на всех трех этапах для трех разных $\Delta\omega$. Почему?

Заметим следующее: уравнение на шаге 2 можно переписать как

$$\dot{\varphi} = 2\Delta\omega - \frac{2\Delta\omega}{\sin\theta(t)} \sin\varphi(t) = 2\Delta\omega \left(1 - \frac{\sin\varphi(t)}{\sin\theta(t)}\right),$$

то есть производная пропорциональна $\Delta\omega$. Как видно на рисунках, похожесть восстановления наблюдается при довольно больших $\Delta\omega$, что вряд ли хорошо.

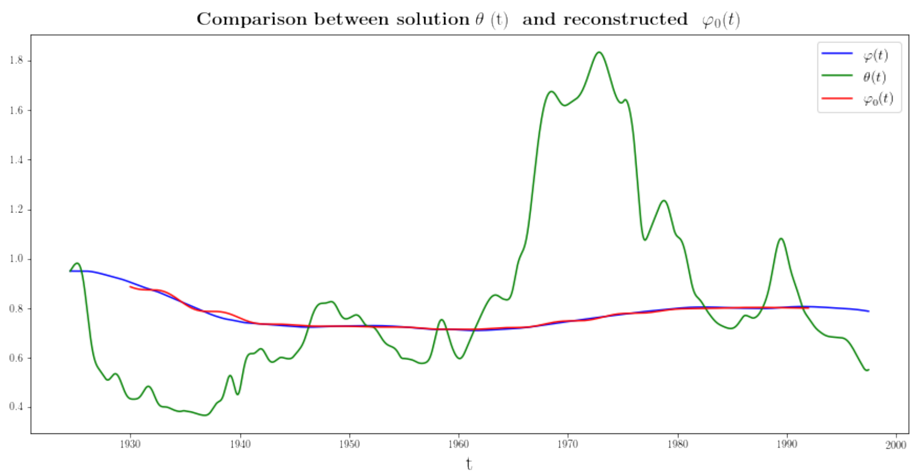

Рис. 1: $\Delta\omega = 0.01$

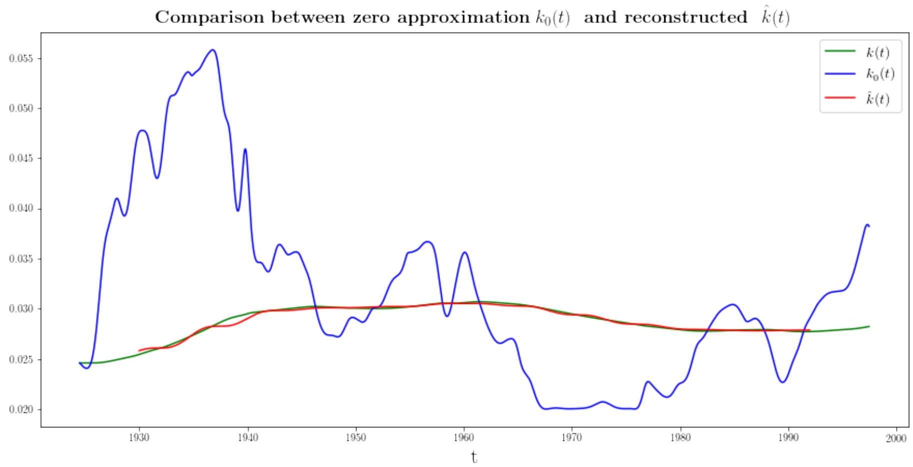

Рис. 2: $\Delta\omega = 0.01$

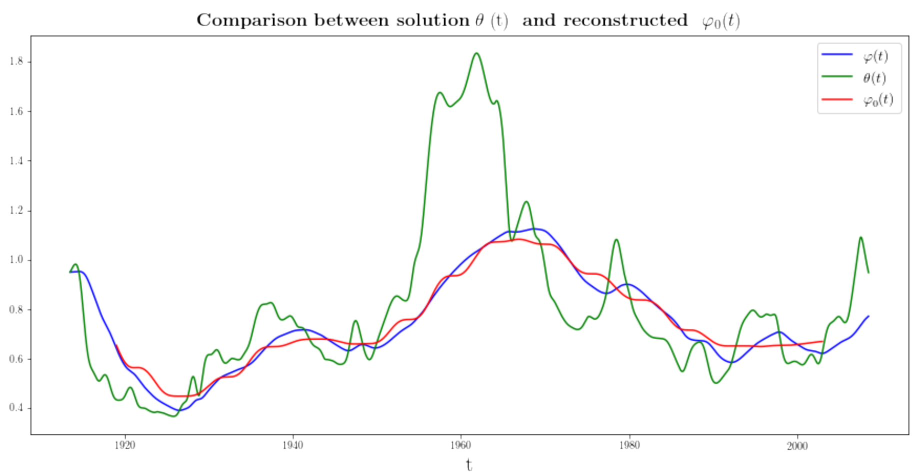

Рис. 3: $\Delta\omega = 0.1$

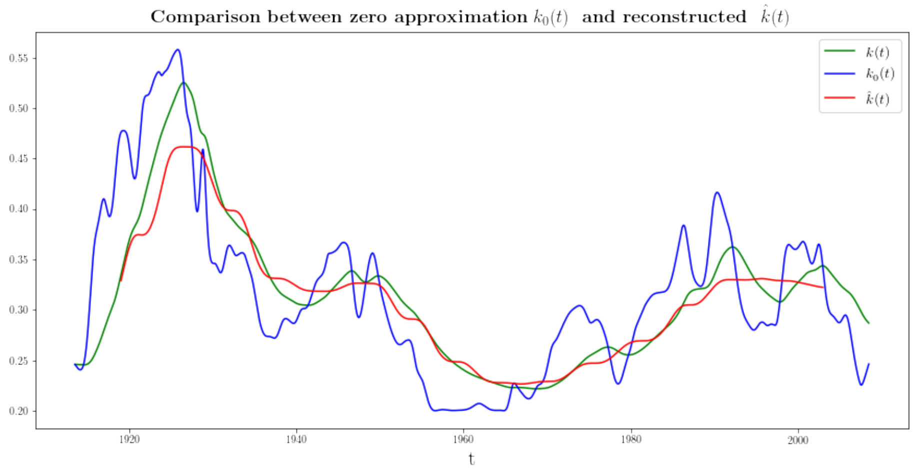

Рис. 4: $\Delta\omega = 0.1$

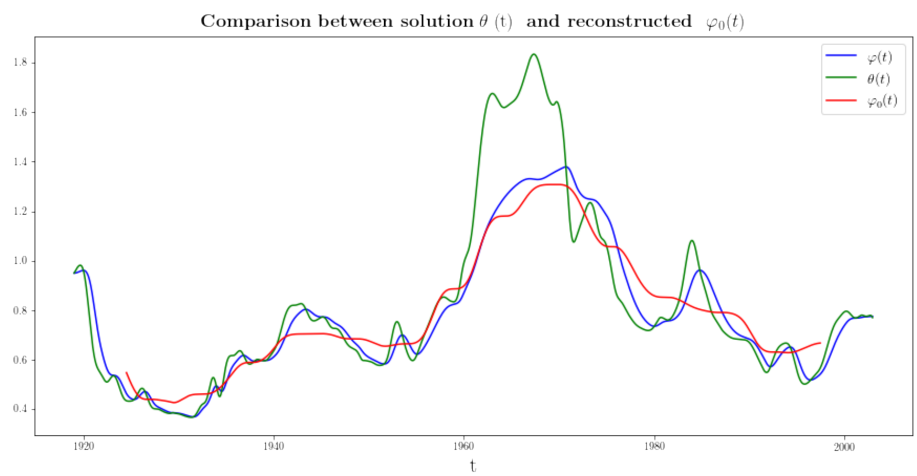

Рис. 5: $\Delta\omega = 0.5$

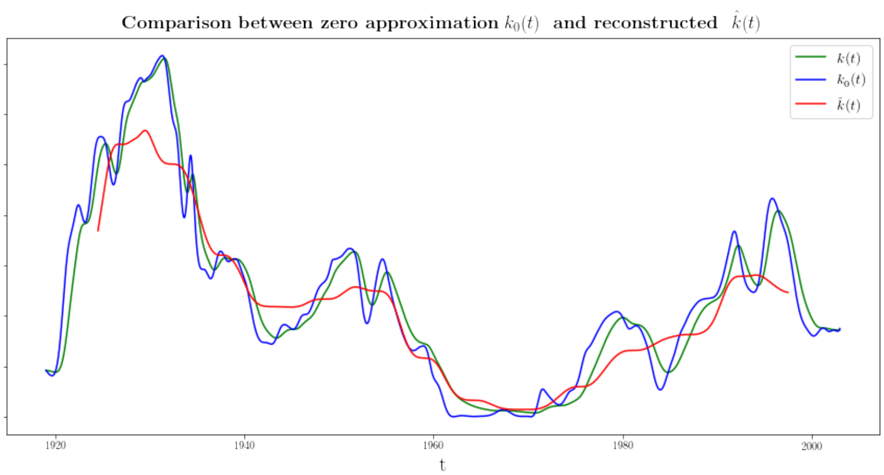

Рис. 6: $\Delta\omega = 0.5$