WS2223_Höhere Mathematik II_Kurzlösung

Author

2024-08-17

Aufgabe 1: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$ (8 Punkte) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax{=}b}$ mit der Koeffizientenmatrix und der rechten Seite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems. Wie ist der Rang der Matrix A?

- Ausgangsmatrix:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$
  $R2 \leftarrow R2 - 2R1, R3 \leftarrow R3 + 3R1, R4 \leftarrow R4 - 4R1:$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & | & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & | & -21 \end{pmatrix}$$
  $R3 \leftarrow R3 + \frac{5}{3}R2, R4 \leftarrow R4 - R2$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & -8 \end{pmatrix}$$
  R3 und R4 sind linear abhängig: Rang=3
- Rückwärtseinsetzen:
$$x_4 = 4, \quad x_3 = x_3, \quad x_2 = 3 - 2x_3, \quad x_1 = -1 - x_3$$
$$x_4 = 4$$
$$-3x_2 - 6x_3 - 4 = -13, \quad -3x_2 - 6x_3 = -9, \quad x_2 = 3 - 2x_3$$
$$x_1 + (3 - 2x_3) + 3x_3 + 4 = 6, \quad x_1 + 3x_3 - 2x_3 = -1, \quad x_1 + x_3 = -1, \quad x_1 = -1 - x_3$$

```python
import sympy as sp
from sympy import pprint

# Aufgabe 1
A = sp.Matrix([
    [1, 1, 3, 1],
    [2, -1, 0, 1],
    [-3, 2, 1, -2],
    [4, 1, 6, 1]
])
b = sp.Matrix([6, -1, 1, 3])
augmented_matrix=A.row_join(b)
pprint(augmented_matrix.rref())
```

```
##   [1  0  1  0  -1]
##   [              ]
##   [0  1  2  0  3 ]
## ([              ], (0, 1, 3))
##   [0  0  0  1  4 ]
##   [              ]
##   [0  0  0  0  0 ]
```

```python
print(A.rank())
```

```
## 3
```

Aufgabe 2 (7+3 Punkte) Im dreidimensionalen Raum $R3$ seien eine Gerade in Koordinatendarstellung $g: \frac{4-x_1}{2} = \frac{4+x_2}{3} = \frac{2-x_3}{2}$

sowie eine Ebene E durch die drei Punkte (3,1,2), (-1,3,2), (5,-2,4).

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g und die Hesse-Normalform der Ebene E an.

b) Entscheiden Sie ob die Gerade g und die Ebene E sich in einem Punkt schneiden.

- Wenn ja, berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts.
- Wenn nein, berechnen Sie den Abstand der Geraden von der Ebene.

Setze die Parameterdarstellung der Geraden in die Ebenengleichung ein:

$$\hat{n} \cdot \vec{r}(t) = 3$$
$$\frac{1}{3}(4-2t) + \frac{2}{3}(4+3t) + \frac{2}{3}(2-2t) = 3$$
$$\frac{4-2t+8+6t+4-4t}{3} = 3$$
$$\frac{0+0t}{3} = 3$$
$$0+0t = 9$$

Kein gültiger Wert von t, daher kein Schnittpunkt und Abstand berechnen

Allgemeiner Abstand einer Geraden von einer Ebene:

$$d = \frac{|\hat{n} \cdot \vec{p} - d|}{\|\hat{n}\|}$$
$$d = \frac{|\frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}(4) + \frac{2}{3}2 - 3|}{\|\hat{n}\|}$$
$$d = \frac{|\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} - 3|}{\|\hat{n}\|}$$
$$d = \frac{|\frac{7}{3}|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}}$$
$$d = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}}}$$
$$d = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{9}{9}}} = \frac{\frac{7}{3}}{1} = \frac{7}{3}$$

```python
import sympy as sp
# Aufgabe 2
t = sp.symbols('t')
g = sp.Matrix([4 - 2*t, 4 + 3*t, 2 - 2*t])
p1 = sp.Matrix([3, 1, 2])
p2 = sp.Matrix([-1, 3, 2])
p3 = sp.Matrix([5, -2, 4])
normal_vector = (p2 - p1).cross(p3 - p1)
plane_eq = normal_vector.dot(sp.Matrix([sp.symbols('x1'), sp.symbols('x2'), sp.symbols('x3')]) - p1)
distance = sp.Abs(plane_eq.subs({sp.symbols('x1'): g[0], sp.symbols('x2'): g[1], sp.symbols('x3'): g[2]
print(distance)
```

```
## 7/3
```

Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix (8 + 3 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A.

b) Drücken Sie die lineare Abbildung $y = Ax$ in einer Basis B aus, die durch die Eigenvektoren von A gebildet wird.

Nullstellen des char. Polynoms geben die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 = -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$p = 0, q = -4, \pm\sqrt{4}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = -2$$

Eigenvektoren:

Für jeden Eigenwert λ das Gleichungssystem:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Beispielsweise für $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1+1 & -2 & 3 \\ 1 & 0+1 & 1 \\ 0 & 4 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Eigenvektoren bestimmen durch Lösen des Gleichungssystems oder Kreuzprodukt Zeile 1 x Zeile 2

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -2 & 3 \\ 1 & 0-2 & 1 \\ 0 & 4 & -2-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3(-2) \\ -(-1-3) \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1+2 & -2 & 3 \\ 1 & 0+2 & 1 \\ 0 & 4 & -2+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ -(3-3) \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren: Inverse P^{-1} berechnen (P|I)->(I|P^{-1})

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

```python
import sympy as sp
from sympy import pprint
# Aufgabe 3
A2 = sp.Matrix([
    [1, -2, 3],
    [1, 0, 1],
    [0, 4, -2]
])
eigenvals = A2.eigenvals()
eigenvects = A2.eigenvects()
P, D = A2.diagonalize()
augmented_matrix=P.row_join(sp.eye(3))

pprint(P)
```

```
## [-1  -5  1]
## [         ]
## [0   1   1]
## [         ]
## [1   4   1]
```

```python
pprint(P.inv())
```

```
## [ 1    -3    2  ]
## [               ]
## [-1/3  2/3  -1/3]
## [               ]
## [1/3   1/3  1/3 ]
```

```python
pprint(D)
```

```
## [-2  0   0]
## [         ]
## [0   -1  0]
## [         ]
## [0   0   2]
```

```
pprint(augmented_matrix.rref())
```

```
## [1  0  0   1    -3    2  ]
## [                         ]
## ([0  1  0  -1/3  2/3  -1/3], (0, 1, 2))
## [                         ]
## [0  0  1  1/3   1/3  1/3 ]
```

Aufgabe 4 (4+4+3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = (y^2 - x)ln(x)$ mit $x > 0$ und $y \in R$.

a) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f.

b) Überprüfen Sie, bei welchen stationären Punkten es sich um lokale Extrema handelt und geben Sie gegebenenfalls an, ob es sich jeweils um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.

c) Bestimmen sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f mit Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Partielle Ableitungen:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}((y^2 - x)\ln(x)) = \frac{y^2 - x}{x} - \ln(x)$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}((y^2 - x)\ln(x)) = 2y\ln(x)$$

Stationäre Punkte durch Lösen von $f_x = 0$ und $f_y = 0$.

$$\frac{y^2 - x}{x} - \ln(x) = 0$$

$$2y\ln(x) = 0$$

$$P1 : x = 1, y = 1$$

$$P2 : x = 1, y = -1$$

$$P3 : x = 1/e, y = 0$$

Berechnung der Hesse-Matrix:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2 - x}{x} - \ln(x)\right) = \frac{-y^2 + x}{x^2} - \frac{2}{x}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2 - x}{x} - \ln(x)\right) = \frac{2y}{x}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2y\ln(x)) = 2\ln(x)$$

Natur der stationären Punkte bestimmen durch Einsetzen in die Hesse-Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2+x}{x^2} - \frac{2}{x} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2y}{x} & 2\ln(x) \end{pmatrix}$$

P1/P2: Sattelpunkt (Spur -/+) P3: Maximum (Spur -/-)

Taylor-Entwicklung um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$:

$$T_2(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y0) + \frac{1}{2}f_xx(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}f_yy(y - y_0)^2 + f_xy(x - x_0)(y - y0)$$

$$f(1,2) = 0, \quad f_x(1,2) = 3, \quad f_y(1,2) = 4\ln(1) = 0$$

$$f_{xx}(1,2) = -5, \quad f_{xy}(1,2) = 4, \quad f_{yy}(1,2) = 2\ln(1) = 0$$

$$T_2(x,y) = 0 + 3(x-1) + 0(y-2) + \frac{1}{2}(-5(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2))$$

$$T_2(x,y) = 3(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2))$$

```python
import sympy as sp
from sympy import pprint

# Aufgabe 4
x, y = sp.symbols('x y')
f = (y**2 - x) * sp.ln(x)
stationary_points = sp.solve([sp.diff(f, x), sp.diff(f, y)], (x, y))
hessian = sp.hessian(f, (x, y))
#taylor_poly = f.series(x, 1, 3).removeO().series(y, 2, 3).removeO()
pprint(stationary_points)
```

```
##                      -1
## [(1, -1), (1, 1), (e  , 0)]
```

```python
pprint(hessian)
```

```
## [            2          ]
## [  2   -x + y     2*y   ]
## [- - - -------    ---   ]
## [  x       2       x    ]
## [         x             ]
## [                       ]
## [     2*y               ]
## [     ---       2*log(x)]
## [      x                ]
```

```python
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Define symbols and function
x, y = sp.symbols('x y')
f = (y**2 - x) * sp.ln(x)

# Compute stationary points
stationary_points = sp.solve([sp.diff(f, x), sp.diff(f, y)], (x, y))

# Compute Hessian matrix
hessian = sp.hessian(f, (x, y))

# Display stationary points and Hessian
pprint(stationary_points)
```

```
##                      -1
## [(1, -1), (1, 1), (e  , 0)]
```

```python
pprint(hessian)
```

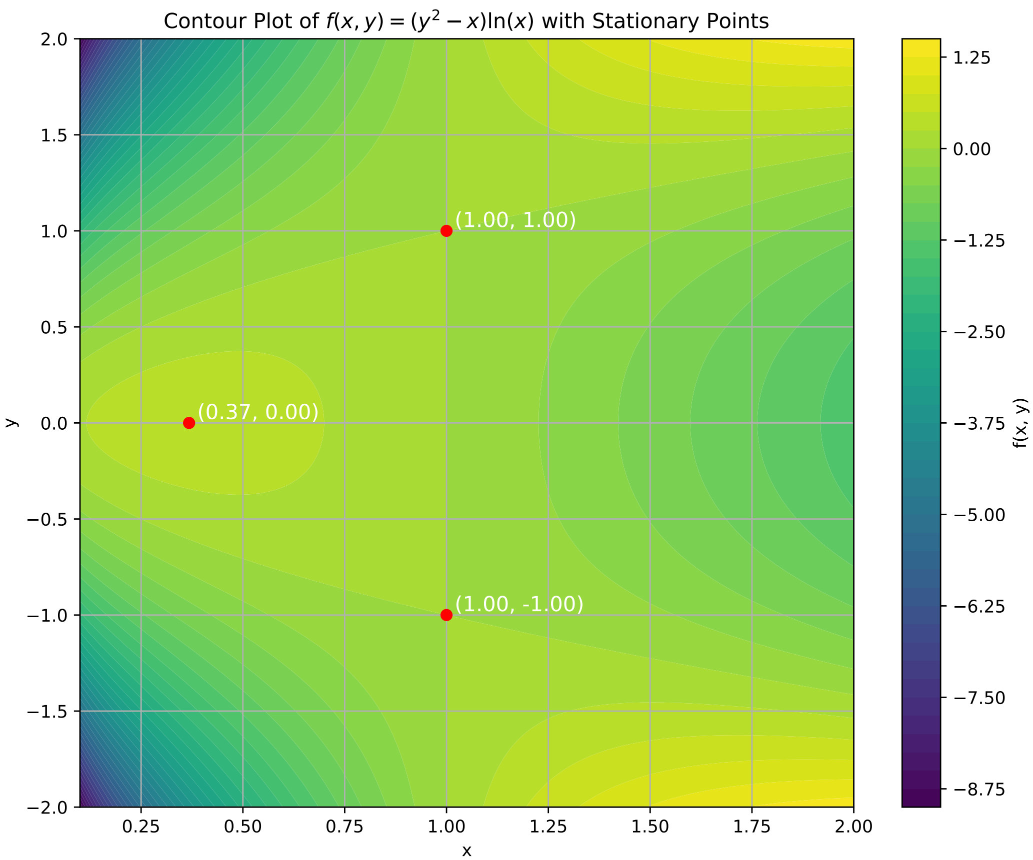
```
## [            2          ]
## [  2   -x + y     2*y   ]
## [- - - -------    ---   ]
## [  x       2       x    ]
## [         x             ]
## [                       ]
## [     2*y               ]
## [     ---       2*log(x)]
```

```
## [      x                 ]
```

```python
# Define the function for numerical evaluation
f_num = sp.lambdify((x, y), f, 'numpy')

# Create a grid of values for x and y
x_vals = np.linspace(0.1, 2, 400)  # Avoid zero since ln(0) is undefined
y_vals = np.linspace(-2, 2, 400)
X, Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
Z = f_num(X, Y)

# Plotting
plt.figure(figsize=(10, 8))
plt.contourf(X, Y, Z, levels=50, cmap='viridis')
plt.colorbar(label='f(x, y)')
```

```
## <matplotlib.colorbar.Colorbar object at 0x11ecdee60>
```

```python
# Plot stationary points
stationary_points_numeric = [(1, -1), (1, 1), (np.exp(-1), 0)]
for point in stationary_points_numeric:
    plt.plot(point[0], point[1], 'ro')
    plt.text(point[0] + 0.02, point[1] + 0.02, f'({point[0]:.2f}, {point[1]:.2f})', color='white', fonts

plt.title(r'Contour Plot of $f(x, y) = (y^2 - x)\ln(x)$ with Stationary Points')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
plt.show()
```


Contour Plot of $f(x, y) = (y^2 - x)\ln(x)$ with Stationary Points
(1.00, 1.00)
(0.37, 0.00)
(1.00, -1.00)
x
y
f(x, y)

Aufgabe 5 (7 + 3 Punkte)

a) Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Kandidaten für lokale Extrema der Funktion

$$f(x, y) = (3x + 2y)x$$

unter der Nebenbedingung

$$2x^3 + 3x^2y = 40$$

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f entlang der implizit durch die Nebenbedingungen gegebenen Kurve $x \mapsto (x, (y(x))$.

$$f_x = 6x + 2y, \quad f_y = 2x$$
$$g_x = 6x^2 + 6xy, \quad g_y = 3x^2$$
$$Det : (f_x g_y - f_y g_x) = 3x^2(6x + 2y) - 2x(6x^2 + 6xy) = 0$$
$$6x^2(x - y) = 0 \to y = x$$

$y = x$ einsetzen in NB:

$$2x^3 + 3x^3 - 40 = 0$$
$$\to 5x^3 - 40 = 0 \to x^3 = 8 \to x = 2$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x}{g_y} = -\frac{6x^2 + 6xy}{3x^2} = - - \frac{2x + 2y}{x}$$
$$f_y * \frac{dy}{dx} = -2x\frac{2x + 2y}{x} = -4x - 4y$$
$$f_x + f_y * \frac{dy}{dx} = 6x + 2y - 4x - 4y = 2x - 2y$$

```
import sympy as sp
from sympy import pprint
# Aufgabe 5
x, y, l = sp.symbols('x y l', real = True)
f5 = (3*x + 2*y)*x
g5 = 2*x**3 + 3*x**2*y - 40
L = sp.Lambda((x, y, l), f5 + l * g5)
grad_L = [sp.diff(L(x, y, l), var) for var in (x, y, l)]
lagrange_sol = sp.solve(grad_L, (x, y, l))
dy_dx = -sp.diff(g5, x) / sp.diff(g5, y)
df_dx = sp.diff(f5, x) + sp.diff(f5, y) * dy_dx
print(sp.diff(f5,x), sp.diff(f5,y))
```

```
## 6*x + 2*y 2*x
```

```
print(sp.diff(g5,x), sp.diff(g5,y))
```

```
## 6*x**2 + 6*x*y 3*x**2
```

```
print(lagrange_sol)
```

```
## [(2, 2, -1/3)]
```

```
print(dy_dx.simplify())
```

```
## -2 - 2*y/x
```

```
print(df_dx.simplify())
```

```
## 2*x - 2*y
```

Aufgabe 6 (10 Punkte) Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y) = 2y/x$ über das Kreissegment B, das von der Kreislinie mit der Gleichung $(x-2)^2 + y^2 = 4$ und der Geraden mit der Gleichung $x + 2y = 4$ begrenzt wird (siehe Abbildung 1).

Schnittpunkte: Einsetzen Geradengleichung in Kreislinie

$$y = \frac{4-x}{2} = 2 - \frac{x}{2}$$

$$(x-2)^2 + (2 - \frac{x}{2})^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4 - 2x + \frac{x^2}{4} - 4 = 0$$

$$-6x + 4 + \frac{5x^2}{4} = 0$$

$$-24x + 16 + 5x^2 = 0$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{16}{5} = 0$$

$$p = -\frac{24}{5}, \quad q = \frac{16}{5}$$

$$\frac{12}{5} \pm \sqrt{(\frac{12}{5})^2 - \frac{16}{5}}$$

$$\frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{80}{25}}$$

$$\frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{64}{25}}$$

$$\frac{12}{5} \pm \frac{8}{5}$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{4}{5}$$

$$\int_{4/5}^{4} \int_{y=(4-x)/2)}^{y=\sqrt{-(x-2)^2+4}} \frac{2y}{x} dy dx$$

$$\int_{4/5}^{4} |\frac{y^2}{x}|_{y=(4-x)/2)}^{y=\sqrt{-(x-2)^2+4}} dx$$

$$\int_{4/5}^{4} \frac{-(x-2)^2+4}{x} - \frac{((4-x)/2)^2}{x} dx$$

$$\int_{4/5}^{4} \frac{-x^2-4+2x+4}{x} - \frac{4+x^2/4-4x}{x} dx$$

$$\int_{4/5}^{4} \frac{-x^2+2x}{x} + \frac{-4-x^2/4+4x}{x} dx$$

$$\int_{4/5}^{4} -x + 2 - 4/x - x/4 + 4 dx$$

$$\int_{4/5}^{4} -\frac{5}{4}x + 6 - \frac{4}{x} dx$$

$$-\frac{5}{8}x^2 + 6x - 4\ln(x)|_{4/5}^{4}$$

$$-\frac{5}{8}4^2 + 6 * 4 - 4\ln(4) - (-\frac{5}{8}\frac{4}{5}^2 + 6 * \frac{4}{5} - 4\ln(4/5))$$

$$14 - 4\ln(4) - \frac{22}{5} + 4\ln(4/5))$$

$$\frac{70}{5} - 4\ln(4) - \frac{22}{5} + 4\ln(4) - 4\ln(5)))$$

$$\frac{48}{5} - 4\ln(5)))$$

```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
circle_eq = (x - 2)**2 + y**2 - 4
line_eq = x + 2*y - 4
y_circle_upper = sp.sqrt(4 - (x - 2)**2)
y_circle_lower = -sp.sqrt(4 - (x - 2)**2)
y_line = (4 - x) / 2

# Bestimmung der Schnittpunkte
intersection_points = sp.solve([circle_eq, line_eq], [x, y])
x1, y1 = intersection_points[0]
x2, y2 = intersection_points[1]

# Bestimmung der Integrationsgrenzen
x_min = min(x1, x2)
x_max = max(x1, x2)

# Funktion f(x, y)
f = 2*y/x

# Berechnung des Doppelintegrals
integral = sp.integrate(sp.integrate(f, (y, y_line, y_circle_upper)), (x, x_min, x_max))
#integral_value = integral.evalf()

print(integral)
```

```
## -4*log(4) + 4*log(4/5) + 48/5
```