HM2_Formelsammlung

Markus Schmidt

2024-06-14

Formelsammlung

Aufgabe 1: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$

1. **Gleichungssystem lösen:**
   - Matrix A und Vektor b gegeben:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
   - Lösung mittels Gauss-Elimination oder inverser Matrix $x = A^{-1}b$.
2. **Rang der Matrix A:**
   - Berechnung des Rangs durch Bestimmen der Anzahl der linearen unabhängigen Zeilen.
   - Anwendung des Gauss-Jordan-Verfahrens oder QR-Zerlegung.

Aufgabe 2: Gerade und Ebene im $\mathbb{R}^3$

1. **Parameterdarstellung der Geraden g:**
   - Umformung der Koordinatendarstellung:
   $$g : \frac{4 - x_1}{2} = \frac{4 + x_2}{3} = \frac{2 - x_3}{2}$$
   - Auflösen nach einem Parameter t (z.B. $x_1 = 4 - 2t$, $x_2 = 4 + 3t$, $x_3 = 2 - 2t$).
2. **Hesse-Normalform der Ebene E:**
   - Ebene durch Punkte (3,1,2), (-1,3,2), (5,-2,4):
   - Berechnung des Normalvektors $\vec{n}$ durch Kreuzprodukt zweier Richtungsvektoren.
   - Hesse-Normalform:
   $$\frac{\vec{n} \cdot \vec{x} - d}{\|\vec{n}\|} = 0$$
   - d ist der Abstand des Ursprungs von der Ebene.
3. **Schnittpunkt oder Abstand:**
   - Lösen des LGS mit der Parameterdarstellung der Geraden und der Ebenengleichung.
   - Falls kein Schnittpunkt: Berechnung des Abstands mit Punkt-Ebene-Abstandsformel.

Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

1. **Eigenwerte:**
   - Bestimmung der Eigenwerte durch Lösen des charakteristischen Polynoms:
   $$\det(A - \lambda I) = 0$$
   - Matrix A:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. **Eigenvektoren:**
   - Für jeden Eigenwert λ Lösung des Gleichungssystems:
   $$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$
3. **Darstellung der linearen Abbildung in Basis B:**
   - Matrix P der Eigenvektoren und diagonale Matrix D:
   $$D = P^{-1}AP$$

Aufgabe 4: Stationäre Punkte und Taylor-Polynom

1. **Stationäre Punkte:**
   - Bestimmung der partiellen Ableitungen und Lösung der Gleichungen $\nabla f = 0$:
   $$f(x, y) = (y^2 - x)\ln(x)$$
2. **Lokale Extrema:**
   - Berechnung der Hesse-Matrix und Anwendung des zweiten Ableitungstests.
3. **Taylor-Polynom zweiten Grades:**
   - Berechnung der Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und Bildung des Taylor-Polynoms.

Aufgabe 5: Lagrange-Multiplikatoren und Ableitung

1. **Lagrange-Multiplikatoren:**
   - Bestimmung der Kandidaten für lokale Extrema:
   $$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$$
2. **Ableitung entlang der Kurve:**
   - Berechnung der totalen Ableitung unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Aufgabe 6: Integral über ein Kreissegment

1. **Bestimmung des Integrals:**
   - Parametrisierung des Bereichs und Umformung in Polarkoordinaten oder geeignetes Koordinatensystem.
   - Funktion $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ über das Kreissegment B:
   $$(x - 2)^2 + y^2 = 4, \quad x + 2y = 4$$
   - Berechnung des Integrals:
   $$\iint_B \frac{2y}{x}\, dA$$

Diese Formelsammlung bietet die grundlegenden Ansätze und Formeln zur Bearbeitung der jeweiligen Aufgaben in der Klausur. Weitere Details und konkrete Berechnungen müssen individuell durchgeführt werden.

2. Iteration ('go on')

Ausführliche Formelsammlung

Aufgabe 1: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$

1. **Lösung des Gleichungssystems:**
   - Gegeben sind Matrix A und Vektor b:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Um das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, können folgende Methoden verwendet werden:
  - **Gauss-Elimination**: Transformiere A in die obere Dreiecksform und löse das resultierende System durch Rückwärtseinsetzen.
  - **Inverse Matrix**: Berechne die Inverse von A (sofern sie existiert) und löse $x = A^{-1}b$.

2. **Rang der Matrix A:**
   - Der Rang der Matrix A ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen (oder Spalten).
   - Anwendung des **Gauss-Jordan-Verfahrens**:
     - Bringe A in Zeilenstufenform.
     - Zähle die Anzahl der nicht-nullen Zeilen.
   - Alternativ: Verwendung der **QR-Zerlegung** oder **LU-Zerlegung** zur Bestimmung des Rangs.

Aufgabe 2: Gerade und Ebene im $\mathbb{R}^3$

1. **Parameterdarstellung der Geraden g:**
   - Gegebene Koordinatendarstellung:

$$g : \frac{4 - x_1}{2} = \frac{4 + x_2}{3} = \frac{2 - x_3}{2}$$

   - Setze einen Parameter t und löse nach x_1, x_2 und x_3 auf:

$$x_1 = 4 - 2t, \quad x_2 = -4 + 3t, \quad x_3 = 2 - 2t$$

   - Parameterdarstellung:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. **Hesse-Normalform der Ebene E:**
   - Ebene definiert durch Punkte (3,1,2), (-1,3,2), (5,-2,4):
   - Berechnung von zwei Richtungsvektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   - Normalvektor:

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   - Normierung des Normalvektors:

$$\hat{n} = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 8^2 + 8^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

   - Hesse-Normalform:

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{x} - d}{\|\vec{n}\|} = 0$$

   - Berechnung von d mit einem Punkt (z.B. (3,1,2)):

$$d = \vec{n} \cdot \vec{p} = 4 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 12 + 8 + 16 = 36$$

   - Hesse-Normalform:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 3 = 0$$

3. **Schnittpunkt oder Abstand:**

- Lösen des LGS:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{in die Ebenengleichung einsetzen}$$

- Falls kein Schnittpunkt, berechne den Abstand:

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p} - d|}{\|\vec{n}\|}$$

Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

1. **Eigenwerte:**
   - Bestimmung der Eigenwerte durch Lösen des charakteristischen Polynoms:

   $$\det(A - \lambda I) = 0$$

   - Für Matrix A:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

   - Charakteristisches Polynom berechnen und Eigenwerte λ finden.
2. **Eigenvektoren:**
   - Für jeden Eigenwert λ das Gleichungssystem lösen:

   $$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

3. **Darstellung der linearen Abbildung in Basis B:**
   - Matrix P der Eigenvektoren:

   $$P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]$$

   - Diagonalmatrix D:

   $$D = P^{-1}AP$$

Aufgabe 4: Stationäre Punkte und Taylor-Polynom

1. **Stationäre Punkte:**
   - Berechnung der partiellen Ableitungen:

   $$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}((y^2 - x)\ln(x)), \quad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}((y^2 - x)\ln(x))$$

   - Lösen der Gleichungen $\nabla f = 0$ für (x, y).
2. **Lokale Extrema:**
   - Berechnung der Hesse-Matrix:

   $$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

   - Anwendung des zweiten Ableitungstests.
3. **Taylor-Polynom zweiten Grades:**
   - Taylor-Entwicklung um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$:

   $$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}($$

Aufgabe 5: Lagrange-Multiplikatoren und Ableitung

1. **Lagrange-Multiplikatoren:**
   - Gegeben:
   $$f(x,y) = (3x+2y)x, \quad g(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 40 = 0$$
   - Lagrange-Funktion:
   $$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (3x+2y)x + \lambda(2x^3 + 3x^2y - 40)$$
   - Ableitungen:
   $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$
   - Gleichungssystem lösen.
2. **Ableitung entlang der Kurve:**
   - Implizite Funktion $y(x)$ aus $g(x,y) = 0$ ableiten:
   $$\frac{d}{dx} f(x, y(x))$$

Aufgabe 6: Integral über ein Kreissegment

1. **Bestimmung des Integrals:**
   - Parametrisierung des Bereichs und Umformung in Polarkoordinaten:
   $$f(x,y) = \frac{2y}{x}$$
   - Kreissegment definiert durch:
   $$(x-2)^2 + y^2 = 4, \quad x + 2y = 4$$
   - Berechnung des Integrals über das Kreissegment B:
   $$\iint_B \frac{2y}{x}\, dA$$

Diese Formelsammlung bietet die grundlegenden Ansätze und Formeln zur Bearbeitung der jeweiligen Aufgaben in der Klausur. Weitere Details und konkrete Berechnungen müssen individuell durchgeführt werden.

3. Iteration ('go on')

Ausführliche Formelsammlung (Fortsetzung)

Aufgabe 1: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$ (Fortsetzung)

1. **Lösung des Gleichungssystems:**
   - Anwendung der Gauss-Elimination:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$
     - Ziel ist es, die Matrix in obere Dreiecksform zu bringen und das Gleichungssystem durch Rückwärtseinsetzen zu lösen.
2. **Berechnung des Rangs:**
   - Rang der Matrix A durch Zeilenstufenform bestimmen:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 5 & 10 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$
   - Da die dritte und vierte Zeile linear abhängig sind, hat die Matrix Rang 3.

Aufgabe 2: Gerade und Ebene im $\mathbb{R}^3$ (Fortsetzung)

1. **Schnittpunkt oder Abstand:**
   - Setze die Parameterdarstellung der Geraden in die Ebenengleichung ein und löse nach t:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{n} \cdot \vec{r}(t) = 3$$

$$\frac{1}{3}(4-2t) + \frac{2}{3}(-4+3t) + \frac{2}{3}(2-2t) = 3$$

   - Falls kein Schnittpunkt, berechne den Abstand:

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p} - d|}{\|\vec{n}\|}$$

Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix (Fortsetzung)

1. **Eigenwerte und Eigenvektoren:**
   - Charakteristisches Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(-\lambda)(-2-\lambda) - 4] + 2[1(-2-\lambda) - 4] + 3[1 \cdot 4 - 0]$$

   - Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ durch Lösen der resultierenden Gleichung.
2. **Eigenvektoren:**
   - Für jeden Eigenwert λ das Gleichungssystem:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Aufgabe 4: Stationäre Punkte und Taylor-Polynom (Fortsetzung)

1. **Berechnung der partiellen Ableitungen:**
   - Partielle Ableitungen:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}((y^2 - x)\ln(x)) = \frac{y^2 - x}{x} - \ln(x)$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}((y^2 - x)\ln(x)) = 2y\ln(x)$$

   - Stationäre Punkte durch Lösen von $f_x = 0$ und $f_y = 0$.
2. **Hesse-Matrix und zweiter Ableitungstest:**
   - Hesse-Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

   - Zweiter Ableitungstest zur Bestimmung der Natur der stationären Punkte.
3. **Taylor-Polynom zweiten Grades:**
   - Taylor-Entwicklung um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$:

$$T_2(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) + \frac{1}{2}(f_{xx}(1,2)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + f_{yy}(1,2)(y-2)^2)$$

Aufgabe 5: Lagrange-Multiplikatoren und Ableitung (Fortsetzung)

1. **Lagrange-Multiplikatoren:**
   - Gleichungen aufstellen und nach x, y und λ lösen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 3x + 2y + \lambda(6x^2 + 6xy) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2x + \lambda(3x^2) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2x^3 + 3x^2 y - 40 = 0$$

2. **Ableitung entlang der Kurve:**
   - Implizite Ableitung $y(x)$ aus der Nebenbedingung:

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \frac{dy}{dx}$$

Aufgabe 6: Integral über ein Kreissegment (Fortsetzung)

1. **Bestimmung des Integrals:**
   - Umformung in Polarkoordinaten:

$$x = 2 + r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

   - Bereichsgrenzen für r und θ anhand der Kreis- und Geradengleichungen:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \frac{2y}{x} r \, dr \, d\theta$$

   - Berechnung der Grenzen und Auswertung des Integrals über das Kreissegment B.

Diese erweiterte Formelsammlung bietet detaillierte Ansätze und Formeln zur Lösung der Aufgaben. Weitere Schritte und konkrete Berechnungen müssen im Detail durchgeführt werden.

4. Iteration ('go on')

Ausführliche Formelsammlung (Fortsetzung)

Aufgabe 1: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$ (Fortsetzung)

1. **Gauss-Elimination Beispiel:**
   - Ausgangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

   - Ziel: Nullstellen unterhalb der ersten Spalte:

$$R2 \leftarrow R2 - 2R1 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & -13 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$R3 \leftarrow R3 + 3R1 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & | & 19 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$R4 \leftarrow R4 - 4R1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & | & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & | & -21 \end{pmatrix}$$

- Nullstellen unterhalb der zweiten Spalte:

$$R3 \leftarrow R3 + \frac{5}{3}R2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & | & -\frac{20}{3} \\ 0 & -3 & -6 & -3 & | & -21 \end{pmatrix}$$

$$R4 \leftarrow R4 - R2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & | & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & -8 \end{pmatrix}$$

- Zurückwärtseinsetzen zur Bestimmung der Lösung x:

$$x_4 = 4, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_1 = 5$$

Aufgabe 2: Gerade und Ebene im $\mathbb{R}^3$ (Fortsetzung)

1. **Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene:**
   - Setze die Parameterdarstellung der Geraden in die Ebenengleichung ein:

$$\hat{n} \cdot \vec{r}(t) = 3$$
$$\frac{1}{3}(4-2t) + \frac{2}{3}(-4+3t) + \frac{2}{3}(2-2t) = 3$$
$$\frac{4 - 2t - 8 + 6t + 4 - 4t}{3} = 3$$
$$\frac{-4+0t}{3} = 3$$
$$-4 + 0t = 9$$

   - Kein gültiger Wert von t, daher kein Schnittpunkt.

2. **Berechnung des Abstands:**
   - Allgemeiner Abstand einer Geraden von einer Ebene:

$$d = \frac{|\hat{n} \cdot \vec{p} - d|}{\|\hat{n}\|}$$
$$d = \frac{|\frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}(-4) + \frac{2}{3}2 - 3|}{\|\hat{n}\|}$$
$$d = \frac{|\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} - 3|}{\|\hat{n}\|}$$
$$d = \frac{|0-3|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}}$$
$$d = \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}}}$$
$$d = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{9}}} = \frac{3}{1} = 3$$

Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix (Fortsetzung)

1. **Berechnung des charakteristischen Polynoms:**
   - Matrix A:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$
   - Charakteristisches Polynom:
   $$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1-\lambda)((-\lambda)(-2-\lambda) - 4) - 2(1(-2-\lambda) - 4) + 3(1 \cdot 4 - 0) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 4) - 2(-2 - \lambda - 4) + 12 \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 4) + 2\lambda + 4 + 12 \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 4) + 2\lambda + 16 \end{aligned}$$
2. **Lösen des charakteristischen Polynoms:**
   - Nullstellen des Polynoms geben die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
3. **Eigenvektoren:**
   - Für jeden Eigenwert λ das Gleichungssystem:
   $$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$
     - Beispielsweise für $\lambda = 1$:
     $$\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 3 \\ 1 & 0-1 & 1 \\ 0 & 4 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$
     $$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$
   - Eigenvektoren bestimmen durch Lösen des Gleichungssystems.

Aufgabe 4: Stationäre Punkte und Taylor-Polynom (Fortsetzung)

1. **Hesse-Matrix und zweiter Ableitungstest:**
   - Berechnung der Hesse-Matrix:
   $$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2 - x}{x} - \ln(x)\right) = \frac{-y^2 + x}{x^2} - \frac{1}{x}$$
   $$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2 - x}{x} - \ln(x)\right) = \frac{2y}{x}$$
   $$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2y\ln(x)) = 2\ln(x)$$
2. **Stationäre Punkte überprüfen:**
   - Natur der stationären Punkte bestimmen durch Einsetzen in die Hesse-Matrix:
   $$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2+x}{x^2} - \frac{1}{x} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2y}{x} & 2\ln(x) \end{pmatrix}$$
3. **Taylor-Polynom zweiten Grades:**
   - Taylor-Entwicklung um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$:
   $$f(1,2) = 0, \quad f_x(1,2) = -1, \quad f_y(1,2) = 4\ln(1) = 0$$
   $$f_{xx}(1,2) = -1, \quad f_{xy}(1,2) = 4, \quad f_{yy}(1,2) = 2\ln(1) = 0$$
   $$T_2(x,y) = 0 - 1(x-1) + 0(y-2) + \frac{1}{2}(-1(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2))$$

Aufgabe 5: Lagrange-Multiplikatoren und Ableitung (Fortsetzung)

1. **Lagrange-Multiplikatoren:**
   - Gleichungen aufstellen und nach x, y und λ lösen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 3x + 2y + \lambda(6x^2 + 6xy) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2x + \lambda(3x^2) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2x^3 + 3x^2y - 40 = 0$$

   - System lösen, um Kandidaten für lokale Extrema zu finden.
2. **Ableitung entlang der Kurve:**
   - Implizite Ableitung $y(x)$ aus der Nebenbedingung:

$$g(x, y(x)) = 2x^3 + 3x^2y - 40 = 0$$

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

   - Berechne $\frac{dy}{dx}$ durch totale Differentiation von g:

$$\frac{dg}{dx} = 6x^2 + 6xy + 3x^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2 + 6xy}{3x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 - 2y$$

Aufgabe 6: Integral über ein Kreissegment (Fortsetzung)

1. **Bestimmung des Integrals:**
   - Umformung in Polarkoordinaten:

$$x = 2 + r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

   - Bereichsgrenzen für r und θ anhand der Kreis- und Geradengleichungen:

$$(2 + r\cos(\theta) - 2)^2 + (r\sin(\theta))^2 = 4$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

   - Integral über das Kreissegment B:

$$\int_0^{\pi} \int_0^2 \frac{2r\sin(\theta)}{2 + r\cos(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

   - Berechnung der Grenzen und Auswertung des Integrals über das Kreissegment B.

Diese erweiterte Formelsammlung bietet detaillierte Ansätze und Formeln zur Lösung der Aufgaben. Weitere Schritte und konkrete Berechnungen müssen im Detail durchgeführt werden.

5. Iteration ('go on')

Formelsammlung (Fortsetzung)

Aufgabe 1: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$ (Abschluss)

- **Rang der Matrix A:**
  - Der Rang der Matrix A ist die Anzahl der nicht-null Zeilen in der reduzierten Zeilenstufenform.
  - Nach der Gauss-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & | & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & -8 \end{pmatrix}$$

  - Die Matrix hat 4 unabhängige Zeilen (keine Nullzeilen), daher ist der Rang von A gleich 4.

Aufgabe 2: Gerade und Ebene im $\mathbb{R}^3$ (Abschluss)

- **Berechnung des Schnittpunkts (wenn vorhanden) oder des Abstands:**
  - **Falls kein Schnittpunkt:**
    * Der Abstand der Geraden von der Ebene E wird berechnet, indem ein Punkt auf der Geraden in die Ebenengleichung eingesetzt wird:

$$\text{Abstand} = \frac{|\hat{n} \cdot \vec{p} - d|}{\|\hat{n}\|}$$

      Hierbei ist $\vec{p}$ ein Punkt auf der Geraden und d der Abstand der Ebene vom Ursprung.

Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix (Abschluss)

- **Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen:**
  - **Berechnung der Eigenwerte:**
    * Löse das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

  - **Eigenvektoren:**
    * Für jeden Eigenwert λ das Gleichungssystem:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Aufgabe 4: Stationäre Punkte und Taylor-Polynom (Abschluss)

- **Stationäre Punkte und lokale Extrema:**
  - **Berechnung der stationären Punkte:**

$$f_x = 0, \quad f_y = 0$$

  - **Überprüfung der Natur der stationären Punkte:**
    * Berechnung der Hesse-Matrix und Anwendung des zweiten Ableitungstests.
- **Taylor-Polynom zweiten Grades:**
  - **Taylor-Entwicklung um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$:**

$$T_2(x,y) = f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(1,2)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + f_{yy}(1,2)(y-2)^2\right.$$

Aufgabe 5: Lagrange-Multiplikatoren und Ableitung (Abschluss)

- **Lagrange-Multiplikatoren:**
  - **Finde Kandidaten für lokale Extrema:**

* Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

* Setze die Bedingungsgleichungen:

$$\nabla \mathcal{L} = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

- **Ableitung entlang der Kurve:**
  - **Implizite Differentiation der Nebenbedingung:**

$$g(x, y(x)) = 0 \Rightarrow \frac{dg}{dx} = 0$$

Aufgabe 6: Integral über ein Kreissegment (Abschluss)

1. **Umwandlung in Polarkoordinaten:**
   - Setze $x = 2 + r\cos(\theta)$ und $y = r\sin(\theta)$.
   - Bestimme die Grenzen für r und θ basierend auf den gegebenen Kreissegmentgrenzen.
2. **Berechnung des Integrals:**
   - Die Funktion in Polarkoordinaten:

$$f(x, y) = \frac{2y}{x}$$

   - Das Integral in Polarkoordinaten:

$$\iint_B f(x, y)\, dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{2r\sin(\theta)}{2 + r\cos(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

   - Integration über die entsprechenden Grenzen durchführen:

$$\int_0^{\pi} \int_0^2 \frac{2r\sin(\theta)}{2 + r\cos(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

Diese ausführliche Formelsammlung bietet eine umfassende Anleitung zur Lösung der Aufgaben und umfasst grundlegende Techniken der linearen Algebra, der Differentialrechnung und der Integration, die für das Verständnis und die Bearbeitung der gestellten Probleme erforderlich sind. Weitere detaillierte Schritte und konkrete Berechnungen sollten während der Prüfung durchgeführt werden.

Hier ist der kompakte Python-Code mit `sympy`, der alle Aufgaben löst:

```
import sympy as sp

# Aufgabe 1
A = sp.Matrix([
    [1, 1, 3, 1],
    [2, -1, 0, 1],
    [-3, 2, 1, -2],
    [4, 1, 6, 1]
])
b = sp.Matrix([6, -1, 1, 3])
x = A.LUsolve(b)
rank_A = A.rank()

# Aufgabe 2
t = sp.symbols('t')
g = sp.Matrix([4 - 2*t, -4 + 3*t, 2 - 2*t])
p1 = sp.Matrix([3, 1, 2])
p2 = sp.Matrix([-1, 3, 2])
```

```
p3 = sp.Matrix([5, -2, 4])
normal_vector = (p2 - p1).cross(p3 - p1)
plane_eq = normal_vector.dot(sp.Matrix([sp.symbols('x1'), sp.symbols('x2'), sp.symbols('x3')]) - p1)
distance = sp.Abs(plane_eq.subs({sp.symbols('x1'): g[0], sp.symbols('x2'): g[1], sp.symbols('x3'): g[2]

# Aufgabe 3
A2 = sp.Matrix([
    [1, -2, 3],
    [1, 0, 1],
    [0, 4, -2]
])
eigenvals = A2.eigenvals()
eigenvects = A2.eigenvects()

# Aufgabe 4
x, y = sp.symbols('x y')
f = (y**2 - x) * sp.ln(x)
stationary_points = sp.solve([sp.diff(f, x), sp.diff(f, y)], (x, y))
hessian = sp.hessian(f, (x, y))
taylor_poly = f.series(x, 1, 3).removeO().series(y, 2, 3).removeO()

# Aufgabe 5
x, y, l = sp.symbols('x y l')
f5 = (3*x + 2*y)*x
g5 = 2*x**3 + 3*x**2*y - 40
L = sp.Lambda((x, y, l), f5 + l * g5)
grad_L = [sp.diff(L(x, y, l), var) for var in (x, y, l)]
lagrange_sol = sp.solve(grad_L, (x, y, l))
dy_dx = -sp.diff(g5, x) / sp.diff(g5, y)
df_dx = sp.diff(f5, x) + sp.diff(f5, y) * dy_dx

# Aufgabe 6
r, theta = sp.symbols('r theta')
x_polar = 2 + r * sp.cos(theta)
y_polar = r * sp.sin(theta)
f6_polar = (2 * y_polar / x_polar) * r
integral_result = sp.integrate(f6_polar, (r, 0, 2), (theta, 0, sp.pi))

# Ergebnisse ausgeben
(x, rank_A, g, normal_vector, distance, eigenvals, eigenvects, stationary_points, hessian, taylor_poly,
```

Dieser Code deckt alle Aufgaben kompakt und prägnant ab. Jede Aufgabe verwendet `sympy`, um symbolische Berechnungen durchzuführen, einschließlich Lösen von Gleichungssystemen, Eigenwertberechnungen, Ableitungen, Integration und Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren.

https://chatgpt.com/share/1de56271-82b1-4199-a582-41394370b876