

# WS2223\_Höhere Mathematik II\_Kurzlösung

Author

2024-08-17

**Aufgabe 1: Lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  (8 Punkte)** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem  $Ax=b$  mit der Koeffizientenmatrix und der rechten Seite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems. Wie ist der Rang der Matrix A?

- Ausgangsmatrix:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$R2 \leftarrow R2 - 2R1, R3 \leftarrow R3 + 3R1, R4 \leftarrow R4 - 4R1 :$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -21 \end{array} \right)$$

$$R3 \leftarrow R3 + \frac{5}{3}R2, R4 \leftarrow R4 - R2$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array} \right)$$

R3 und R4 sind linear abhängig: Rang=3

- Rückwärtseinsetzen:

$$x_4 = 4, \quad x_3 = x_3, \quad x_2 = 3 - 2x_3, \quad x_1 = -1 - x_3$$

$$x_4 = 4$$

$$-3x_2 - 6x_3 - 4 = -13, \quad -3x_2 - 6x_3 = -9, \quad x_2 = 3 - 2x_3$$

$$x_1 + (3 - 2x_3) + 3x_3 + 4 = 6, \quad x_1 + 3x_3 - 2x_3 = -1, \quad x_1 + x_3 = -1, \quad x_1 = -1 - x_3$$

```

import sympy as sp
from sympy import pprint

# Aufgabe 1
A = sp.Matrix([
    [1, 1, 3, 1],
    [2, -1, 0, 1],
    [-3, 2, 1, -2],
    [4, 1, 6, 1]
])
b = sp.Matrix([6, -1, 1, 3])
augmented_matrix=A.row_join(b)
pprint(augmented_matrix.rref())

## [1  0  1  0 -1]
## [
## [0  1  2  0  3 ]
## ([
## [0  0  0  1  4 ]
## [
## [0  0  0  0  0 ]

print(A.rank())

## 3

```

**Aufgabe 2 (7+3 Punkte)** Im dreidimensionalen Raum  $R^3$  seien eine Gerade in Koordinatendarstellung

$$g: \frac{4-x_1}{2} = \frac{4+x_2}{3} = \frac{2-x_3}{2}$$

sowie eine Ebene  $E$  durch die drei Punkte  $(3,1,2)$ ,  $(-1,3,2)$ ,  $(5,-2,4)$ .

- Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden  $g$  und die Hesse-Normalform der Ebene  $E$  an.
- Entscheiden Sie ob die Gerade  $g$  und die Ebene  $E$  sich in einem Punkt schneiden.
  - Wenn ja, berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts.
  - Wenn nein, berechnen Sie den Abstand der Geraden von der Ebene.

Setze die Parameterdarstellung der Geraden in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot \vec{r}(t) &= 3 \\ \frac{1}{3}(4-2t) + \frac{2}{3}(4+3t) + \frac{2}{3}(2-2t) &= 3 \\ \frac{4-2t+8+6t+4-4t}{3} &= 3 \\ \frac{0+0t}{3} &= 3 \\ 0+0t &= 9\end{aligned}$$

Kein gültiger Wert von  $t$ , daher kein Schnittpunkt und Abstand berechnen

Allgemeiner Abstand einer Geraden von einer Ebene:

$$\begin{aligned}d &= \frac{|\hat{n} \cdot \vec{p} - d|}{\|\hat{n}\|} \\ d &= \frac{|\frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}(4) + \frac{2}{3}2 - 3|}{\|\hat{n}\|} \\ d &= \frac{|\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} - 3|}{\|\hat{n}\|} \\ d &= \frac{|\frac{7}{3}|}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2}} \\ d &= \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}}} \\ d &= \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{9}{9}}} = \frac{\frac{7}{3}}{1} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

```
import sympy as sp
# Aufgabe 2
t = sp.symbols('t')
g = sp.Matrix([4 - 2*t, 4 + 3*t, 2 - 2*t])
p1 = sp.Matrix([3, 1, 2])
p2 = sp.Matrix([-1, 3, 2])
p3 = sp.Matrix([5, -2, 4])
normal_vector = (p2 - p1).cross(p3 - p1)
plane_eq = normal_vector.dot(sp.Matrix([sp.symbols('x1'), sp.symbols('x2'), sp.symbols('x3')])) - p1
distance = sp.Abs(plane_eq.subs({sp.symbols('x1'): g[0], sp.symbols('x2'): g[1], sp.symbols('x3'): g[2]}))
print(distance)
```

## 7/3

**Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix (8 + 3 Punkte)** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von  $A$ .  
 b) Drücken Sie die lineare Abbildung  $y = Ax$  in einer Basis  $B$  aus, die durch die Eigenvektoren von  $A$  gebildet wird.

Nullstellen des char. Polynoms geben die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 = -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$p = 0, q = -4, \pm\sqrt{4}$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = -2$$

Eigenvektoren:

Für jeden Eigenwert  $\lambda$  das Gleichungssystem:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Beispielsweise für  $\lambda = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 1+1 & -2 & 3 \\ 1 & 0+1 & 1 \\ 0 & 4 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Eigenvektoren bestimmen durch Lösen des Gleichungssystems oder Kreuzprodukt Zeile 1 x Zeile 2

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -2 & 3 \\ 1 & 0-2 & 1 \\ 0 & 4 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3(-2) \\ -(-1-3) \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2$ :

$$\begin{pmatrix} 1+2 & -2 & 3 \\ 1 & 0+2 & 1 \\ 0 & 4 & -2+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ -(3-3) \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren: Inverse  $P^{-1}$  berechnen ( $P|I \rightarrow I|P^{-1}$ )

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

```
import sympy as sp
from sympy import pprint
# Aufgabe 3
A2 = sp.Matrix([
    [1, -2, 3],
    [1, 0, 1],
    [0, 4, -2]
])
eigenvals = A2.eigenvals()
eigenvects = A2.eigenvects()
P, D = A2.diagonalize()
augmented_matrix=P.row_join(sp.eye(3))

pprint(P)
```

```
## [-1 -5 1]
## [      ]
## [0  1  1]
## [      ]
## [1  4  1]
```

```
pprint(P.inv())
```

```
## [ 1   -3   2 ]
## [      ]
## [-1/3  2/3 -1/3]
## [      ]
## [1/3   1/3  1/3]
```

```
pprint(D)
```

```
## [-2  0  0]
## [      ]
## [0  -1  0]
## [      ]
## [0  0  2]
```

```
pprint(augmented_matrix.rref())  
  
## [1  0  0  1  -3  2 ]  
## [  
## ([0  1  0 -1/3  2/3 -1/3], (0, 1, 2))  
## [  
## [0  0  1  1/3  1/3 1/3 ]
```

**Aufgabe 4 (4+4+3 Punkte)** Gegeben sei die Funktion  $f(x, y) = (y^2 - x)\ln(x)$  mit  $x > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$ .

- Berechnen Sie alle stationären Punkte von  $f$ .
- Überprüfen Sie, bei welchen stationären Punkten es sich um lokale Extrema handelt und geben Sie gegebenenfalls an, ob es sich jeweils um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.
- Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ .

Partielle Ableitungen:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}((y^2 - x)\ln(x)) = \frac{y^2 - x}{x} - \ln(x)$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}((y^2 - x)\ln(x)) = 2y\ln(x)$$

Stationäre Punkte durch Lösen von  $f_x = 0$  und  $f_y = 0$ .

$$\frac{y^2 - x}{x} - \ln(x) = 0$$

$$2y\ln(x) = 0$$

$$P1 : x = 1, y = 1$$

$$P2 : x = 1, y = -1$$

$$P3 : x = 1/e, y = 0$$

Berechnung der Hesse-Matrix:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y^2 - x}{x} - \ln(x) \right) = \frac{-y^2 + x}{x^2} - \frac{2}{x}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y^2 - x}{x} - \ln(x) \right) = \frac{2y}{x}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (2y\ln(x)) = 2\ln(x)$$

Natur der stationären Punkte bestimmen durch Einsetzen in die Hesse-Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2 + x}{x^2} - \frac{2}{x} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2y}{x} & 2\ln(x) \end{pmatrix}$$

P1/P2: Sattelpunkt (Spur -/+ ) P3: Maximum (Spur -/-)

Taylor-Entwicklung um den Punkt  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ :

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}f_{yy}(y - y_0)^2 + f_{xy}(x - x_0)(y - y_0)$$

$$f(1, 2) = 0, \quad f_x(1, 2) = 3, \quad f_y(1, 2) = 4\ln(1) = 0$$

$$f_{xx}(1, 2) = -5, \quad f_{xy}(1, 2) = 4, \quad f_{yy}(1, 2) = 2\ln(1) = 0$$

$$T_2(x, y) = 0 + 3(x - 1) + 0(y - 2) + \frac{1}{2}(-5(x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 2))$$

$$T_2(x, y) = 3(x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 2)$$

```

import sympy as sp
from sympy import pprint

# Aufgabe 4
x, y = sp.symbols('x y')
f = (y**2 - x) * sp.ln(x)
stationary_points = sp.solve([sp.diff(f, x), sp.diff(f, y)], (x, y))
hessian = sp.hessian(f, (x, y))
#taylor_poly = f.series(x, 1, 3).removeO().series(y, 2, 3).removeO()
pprint(stationary_points)

```

```

##                                     -1
## [(1, -1), (1, 1), (e  , 0)]

```

```

pprint(hessian)

```

```

## [      2      ]
## [  2  -x + y  2*y ]
## [- - - - - - - - -]
## [  x      2      x ]
## [      x      ]
## [      ]
## [      ]
## [  2*y      ]
## [  ---      2*log(x) ]
## [  x      ]

```



### Aufgabe 5 (7 + 3 Punkte)

- a) Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Kandidaten für lokale Extrema der Funktion

$$f(x, y) = (3x + 2y)x$$

unter der Nebenbedingung

$$2x^3 + 3x^2y = 40$$

- b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion  $f$  entlang der implizit durch die Nebenbedingungen gegebenen Kurve  $x \mapsto (x, (y(x)))$ .

$$f_x = 6x + 2y, \quad f_y = 2x$$

$$g_x = 6x^2 + 6xy, \quad g_y = 3x^2$$

$$Det : (f_x g_y - f_y g_x) = 3x^2(6x + 2y) - 2x(6x^2 + 6xy) = 0$$

$$6x^2(x - y) = 0 \rightarrow y = x$$

$y = x$  einsetzen in NB:

$$2x^3 + 3x^3 - 40 = 0$$

$$\rightarrow 5x^3 - 40 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x}{g_y} = -\frac{6x^2 + 6xy}{3x^2} = -\frac{2x + 2y}{x}$$

$$f_y * \frac{dy}{dx} = -2x \frac{2x + 2y}{x} = -4x - 4y$$

$$f_x + f_y * \frac{dy}{dx} = 6x + 2y - 4x - 4y = 2x - 2y$$

```
import sympy as sp
from sympy import pprint
# Aufgabe 5
x, y, l = sp.symbols('x y l', real = True)
f5 = (3*x + 2*y)*x
g5 = 2*x**3 + 3*x**2*y - 40
L = sp.Lambda((x, y, l), f5 + l * g5)
grad_L = [sp.diff(L(x, y, l), var) for var in (x, y, l)]
lagrange_sol = sp.solve(grad_L, (x, y, l))
dy_dx = -sp.diff(g5, x) / sp.diff(g5, y)
df_dx = sp.diff(f5, x) + sp.diff(f5, y) * dy_dx
print(sp.diff(f5, x), sp.diff(f5, y))
```

```
## 6*x + 2*y 2*x
```

```
print(sp.diff(g5, x), sp.diff(g5, y))
```

```
## 6*x**2 + 6*x*y 3*x**2
```

```
print(lagrange_sol)
```

```
## [(2, 2, -1/3)]
```

```
print(dy_dx.simplify())
```

```
##  $-2 - 2y/x$ 
```

```
print(df_dx.simplify())
```

```
##  $2x - 2y$ 
```

**Aufgabe 6 (10 Punkte)** Berechnen Sie das Integral der Funktion  $f(x, y) = 2y/x$  über das Kreissegment  $B$ , das von der Kreislinie mit der Gleichung  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$  und der Geraden mit der Gleichung  $x + 2y = 4$  begrenzt wird (siehe Abbildung 1).

Schnittpunkte: Einsetzen Geradengleichung in Kreislinie

$$y = \frac{4-x}{2} = 2 - \frac{x}{2}$$

$$(x-2)^2 + (2 - \frac{x}{2})^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4 - 2x + \frac{x^2}{4} - 4 = 0$$

$$-6x + 4 + \frac{5x^2}{4} = 0$$

$$-24x + 16 + 5x^2 = 0$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{16}{5} = 0$$

$$p = -\frac{24}{5}, \quad q = \frac{16}{5}$$

$$\frac{12}{5} \pm \sqrt{(\frac{12}{5})^2 - \frac{16}{5}}$$

$$\frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{80}{25}}$$

$$\frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{64}{25}}$$

$$\frac{12}{5} \pm \frac{8}{5}$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = \frac{4}{5}$$

$$\int_{4/5}^4 \int_{y=(4-x)/2}^{y=\sqrt{-(x-2)^2+4}} \frac{2y}{x} dy dx$$

$$\int_{4/5}^4 \left| \frac{y^2}{x} \right|_{y=(4-x)/2}^{y=\sqrt{-(x-2)^2+4}} dx$$

$$\int_{4/5}^4 \frac{-(x-2)^2+4}{x} - \frac{((4-x)/2)^2}{x} dx$$

$$\int_{4/5}^4 \frac{-x^2-4+2x+4}{x} - \frac{4+x^2/4-4x}{x} dx$$

$$\int_{4/5}^4 \frac{-x^2+2x}{x} + \frac{-4-x^2/4+4x}{x} dx$$

$$\int_{4/5}^4 -x + 2 - 4/x - x/4 + 4 dx$$

$$\int_{4/5}^4 -\frac{5}{4}x + 6 - \frac{4}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{8}x^2 + 6x - 4\ln(x) \Big|_{4/5}^4 \\
& -\frac{5}{8}4^2 + 6 \cdot 4 - 4\ln(4) - \left(-\frac{5}{8}\frac{4^2}{5} + 6 \cdot \frac{4}{5} - 4\ln(4/5)\right) \\
& 14 - 4\ln(4) - \frac{22}{5} + 4\ln(4/5) \\
& \frac{70}{5} - 4\ln(4) - \frac{22}{5} + 4\ln(4) - 4\ln(5) \\
& \frac{48}{5} - 4\ln(5)
\end{aligned}$$

```

import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
circle_eq = (x - 2)**2 + y**2 - 4
line_eq = x + 2*y - 4
y_circle_upper = sp.sqrt(4 - (x - 2)**2)
y_circle_lower = -sp.sqrt(4 - (x - 2)**2)
y_line = (4 - x) / 2

# Bestimmung der Schnittpunkte
intersection_points = sp.solve([circle_eq, line_eq], [x, y])
x1, y1 = intersection_points[0]
x2, y2 = intersection_points[1]

# Bestimmung der Integrationsgrenzen
x_min = min(x1, x2)
x_max = max(x1, x2)

# Funktion f(x, y)
f = 2*y/x

# Berechnung des Doppelintegrals
integral = sp.integrate(sp.integrate(f, (y, y_line, y_circle_upper)), (x, x_min, x_max))
integral_value = integral.evalf()

print(integral)

## -4*log(4) + 4*log(4/5) + 48/5

```