Klausur_HM3_WS2425_Lösung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x' = (1-\alpha)t\frac{x^2}{t^3}$$
$$x(1) = \frac{2}{1-2\alpha}$$
$$\alpha \in (0, \frac{1}{2})$$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich $t \in [1, T)$ der Lösung in Abhängigkeit von α an.

Was passiert für $\alpha \to 0$?

b) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$2xe^{x^2-t}\dot{x} - e^{x^2-t} - 1 = 0, \quad x(1) = 1$$

(i) Zeigen Sie das die DGL exakt ist.

(ii) Geben Sie eine Funktion $\Phi = \Phi(t,x)$ an, so dass $\Phi_t(t,x) + \Phi_x(t,x)\dot{x} = 0$

(iii) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an.

Aufgabe 1a: Lösung des Anfangswertproblems

Die Differentialgleichung lautet:

$$x' = (1-\alpha)t\frac{x^2}{t^3} = (1-\alpha)\frac{x^2}{t^2}$$

Diese ist eine separierbare Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{x^2} = (1-\alpha)\frac{dt}{t^2}$$

Durch Integrieren erhalten wir:

$$-\frac{1}{x} = -(1-\alpha)\frac{1}{t} + C$$

$$\frac{1}{x} = (1-\alpha)\frac{1}{t} - C$$

Die Anfangsbedingung $x(1) = \frac{2}{1-2\alpha}$ liefert:

$$\frac{1}{\frac{2}{1-2\alpha}} = (1-\alpha) - C$$

$$\frac{1-2\alpha}{2} = (1-\alpha) - C$$

$$C = 1 - \alpha - \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\alpha}{2}$$

Somit ergibt sich:

$$\frac{1}{x} = (1-\alpha)\frac{1}{t} - \frac{1-2\alpha}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\frac{1}{t} - \frac{1-2\alpha}{2}}$$

Der maximale Definitionsbereich wird bestimmt durch die Singularität, d.h. den Nenner:

$$(1-\alpha)\frac{1}{t} - \frac{1-2\alpha}{2} = 0$$

$$(1-\alpha)\frac{1}{t} = \frac{1-2\alpha}{2}$$
$$t = \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}$$

Daher ist der maximale Definitionsbereich $t \in [1, T)$ mit

$$T = \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}.$$

Für $\alpha \to 0$ folgt:

$$T = \frac{2(1-0)}{1-0} = 2.$$

Aufgabe 1b: Exakte Differentialgleichung

Die gegebene Differentialgleichung lautet:

$$2xe^{x^2-t}\dot{x} - e^{x^2-t} - 1 = 0.$$

(i) Exaktheit nachweisen Schreiben wir sie in der Form:

$$M(t,x) + N(t,x)\dot{x} = 0.$$

Hier setzen wir:

$$M(t,x) = -e^{x^2-t} - 1, \quad N(t,x) = 2xe^{x^2-t}.$$

Prüfen wir die Exaktheitsbedingung:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{x^2-t} - 1\right) = -2xe^{x^2-t}.$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(2xe^{x^2-t}\right) = -2xe^{x^2-t}.$$

Da beide Ableitungen übereinstimmen, ist die Differentialgleichung exakt.

(ii) Bestimmung von $\Phi(t,x)$ Da die DGL exakt ist, existiert eine Funktion $\Phi(t,x)$ mit

$$\Phi_t = M, \quad \Phi_x = N.$$

Zunächst aus $\Phi_x = 2xe^{x^2-t}$ durch Integration:

$$\Phi(t,x) = \int 2xe^{x^2-t}dx.$$

Substituieren wir $u = x^2 - t \Rightarrow du = 2xdx$:

$$\Phi(t,x) = \int e^u du = e^{x^2-t} + g(t).$$

Nun aus $\Phi_t = -e^{x^2-t} - 1$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{x^2-t} + g(t)\right) = -e^{x^2-t} - 1.$$
$$-e^{x^2-t} + g'(t) = -e^{x^2-t} - 1.$$
$$g'(t) = -1.$$
$$g(t) = -t + C.$$

Somit ist eine Potentialfunktion:

$$\Phi(t,x) = e^{x^2-t} - t + C.$$

(iii) Lösung des Anfangswertproblems Da $\Phi(t,x)$ konstant sein muss, setzen wir die Anfangsbedingung $x(1) = 1$ ein:

$$e^{1^2-1} - 1 + C = 0.$$
$$e^0 - 1 + C = 0.$$
$$C = 1.$$

Die allgemeine Lösung ist also:

$$e^{x^2-t} - t + 1 = 0.$$

Lösen nach x:

$$e^{x^2-t} = t - 1.$$
$$x^2 - t = \ln(t-1).$$
$$x^2 = t + \ln(t-1).$$
$$x = \pm\sqrt{t + \ln(t-1)}.$$

Da $x(1) = 1$, wählen wir das positive Vorzeichen:

$$x(t) = \sqrt{t + \ln(t-1)}.$$

Dies ist die Lösung des Anfangswertproblems für $t > 1$.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Gegeben ist das lineare System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} x \quad \text{und} \quad b(t) = 4 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung an.

b) Geben sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t)$ an.

Hier sind die Lösungen zu den Aufgaben:

Teil a: Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

Die homogene Gleichung lautet:

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen wir die Eigenwerte von A durch Lösen der charakteristischen Gleichung:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda) - (-5 \cdot 1).$$

$$= (-2-\lambda)(4-\lambda) + 5 = -8 + 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 5.$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ sind:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \{3, -1\}.$$

Für $\lambda_1 = 3$, lösen wir $(A - 3I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2-3 & -5 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Die erste Zeile liefert $-5v_1 - 5v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$. Setzen wir $v_2 = 1$, dann ist $v_1 = -1$, also:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_2 = -1$, lösen wir $(A + I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2+1 & -5 \\ 1 & 4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Die erste Zeile liefert $-v_1 - 5v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -5v_2$. Setzen wir $v_2 = 1$, dann ist $v_1 = -5$, also:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem ist dann:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{3t} & -5e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Teil b: Allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist:

$$x(t) = \Phi(t)C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t)dt.$$

Berechnen wir $\Phi^{-1}(t)$:

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{\det(\Phi(t))} \begin{pmatrix} e^{-t} & 5e^{-t} \\ -e^{3t} & -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

$\det(\Phi(t)) = (-e^{3t})e^{-t} - (-5e^{-t}e^{3t}) = -e^{2t} + 5e^{2t} = 4e^{2t}$, also:

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{4e^{2t}} \begin{pmatrix} e^{-t} & 5e^{-t} \\ -e^{3t} & -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $b(t) = 4 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ ein:

$$\Phi^{-1}(t)b(t) = \frac{1}{4e^{2t}} \begin{pmatrix} e^{-t} & 5e^{-t} \\ -e^{3t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{4e^{2t}} \begin{pmatrix} 4e^{-t}e^t \\ -4e^{3t}e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{4e^{2t}} \begin{pmatrix} 4 \\ -4e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Die Integralberechnung liefert:

$$\int \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Somit ist die partikuläre Lösung:

$$x_p(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist dann:

$$x(t) = \Phi(t)C + x_p(t).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

mit $x \in [0, \pi]$ und $t > 0$

a) Klassifizieren Sie die PDE mit den Begriffen elliptisch, parabolisch, hyperbolisch.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Sinus-Fouriereihe der ungerade periodisch fortgesetzten Funktion

$$f(x) = 1 \quad \text{für } x \in [0, \pi]$$

.

c) Bestimmen Sie die Lösung der obigen PDE mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x) = x \quad x \in [0, \pi],$$

$$u_t(0, x) = 0 \quad x \in [0, \pi],$$

und den Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, t > 0$.

Hier sind die Lösungen zu den Aufgaben:

Teil a: Klassifikation der PDE

Die gegebene partielle Differentialgleichung ist:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Dies ist eine **lineare, homogene, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung**. Um die Klassifikation zu bestimmen, betrachten wir die allgemeine Form einer PDE zweiter Ordnung:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} = 0.$$

Für unsere Gleichung sind die Koeffizienten:

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = 1.$$

Die Diskriminante ist gegeben durch:

$$B^2 - AC = 0^2 - (1 \cdot (-1)) = 1.$$

Da die Diskriminante positiv ist ($B^2 - AC > 0$), handelt es sich um eine **hyperbolische** Differentialgleichung.

Teil b: Fourierkoeffizienten der ungerade periodischen Fortsetzung von $f(x)$

Die Funktion $f(x) = 1$ auf $[0, \pi]$ soll ungerade periodisch fortgesetzt werden. Dies bedeutet:

$$f(-x) = -f(x).$$

Die Fourierreihe einer ungeraden 2π-periodischen Funktion hat nur **Sinus-Terme**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

mit den Koeffizienten:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \sin(nx)\, dx.$$

Die Integralberechnung ergibt:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^\pi .$$

Da $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\cos(0) = 1$, folgt:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} ((-1)^n - 1) \right).$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}(1 - (-1)^n).$$

Für **ungerades** n ist $1 - (-1)^n = 2$, für **gerades** n ist $1 - (-1)^n = 0$, also:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade,} \\ 0, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Teil c: Lösung der Wellengleichung

Die Wellengleichung lautet:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0.$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$u(0, x) = x, \quad u_t(0, x) = 0,$$

und den Randbedingungen:

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$

Schritt 1: Separation der Variablen Wir setzen $u(t, x) = X(x)T(t)$ an und erhalten durch Trennung:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Beide Seiten müssen gleich einer Konstanten $-\lambda$ sein. Für $X(x)$ folgt die Sturm-Liouville-Gleichung:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Die Lösungen sind:

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $T_n(t)$ gilt:

$$T_n'' + n^2 T_n = 0.$$

Die Lösung ist:

$$T_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt).$$

Schritt 2: Anfangsbedingung $u(0, x) = x$ Die Lösung hat die Form:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx).$$

Setzen wir $t = 0$, ergibt sich:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx).$$

Die Fourier-Koeffizienten A_n berechnen sich durch:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx.$$

Integration durch Teile liefert:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2}{n}(-1)^n.$$

Schritt 3: Anfangsbedingung $u_t(0, x) = 0$ Die Ableitung ist:

$$u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n n \sin(nx) = 0.$$

Da die Sinusfunktionen linear unabhängig sind, folgt $B_n = 0$.

Schritt 4: Endgültige Lösung

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^n \cos(nt) \sin(nx).$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben seine die beiden Vektorfelder $F_k : R^3 \to R^3$ mit $k = 0, 1$ und der Weg $\gamma : [0, 1] \to R^3$.

$$F = \begin{pmatrix} z\cos(k(x+y)) \\ z\cos(k(x+y)) \\ \sin(k(x+y)) + 2z \end{pmatrix} \text{ und } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \pi t \\ \pi t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimen Sie jeweils die Rotation von F_0 und F_1.

b) Untersuchen Sie, ob die Vektorfelder F_0 und F_1 ein Potentialfeld sind und geben Sie gegebenenfalls ein Potential an.

c) Berechnen Sie jeweils die Kurvenintegrale 2. Art der Vektorfelder F_0 und F_1 entlang γ.

Hier sind die ausführlichen Lösungen zur Aufgabe 4:

Teil a: Berechnung der Rotation von F_k

Die Rotation eines Vektorfeldes F ist definiert als:

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Für F_k ist gegeben:

$$F_k = \begin{pmatrix} z\cos(k(x+y)) \\ z\cos(k(x+y)) \\ \sin(k(x+y)) + 2z \end{pmatrix}.$$

Rotation für F_0 Setzen wir $k = 0$, dann wird $\cos(k(x+y)) = \cos(0) = 1$ und $\sin(k(x+y)) = \sin(0) = 0$, sodass:

$$F_0 = \begin{pmatrix} z \\ z \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir die Rotation:

$$\operatorname{rot} F_0 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & z & 2z \end{vmatrix}.$$

Die Komponenten sind:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2z) - \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 - 1 = -1,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(z) - \frac{\partial}{\partial x}(2z) = 1 - 0 = 1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(z) - \frac{\partial}{\partial y}(z) = 0 - 0 = 0.$$

Somit:

$$\operatorname{rot} F_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rotation für F_1 Für $k = 1$ haben wir:

$$F_1 = \begin{pmatrix} z\cos(x+y) \\ z\cos(x+y) \\ \sin(x+y) + 2z \end{pmatrix}.$$

Berechnen der Rotation:

$$\operatorname{rot} F_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\cos(x+y) & z\cos(x+y) & \sin(x+y) + 2z \end{vmatrix}.$$

Die Komponenten sind:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin(x+y) + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}(z\cos(x+y)) = \cos(x+y) - \cos(x+y) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(z\cos(x+y)) - \frac{\partial}{\partial x}(\sin(x+y) + 2z) = \cos(x+y) - \cos(x+y) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z\cos(x+y)) - \frac{\partial}{\partial y}(z\cos(x+y)) = -z\sin(x+y) + z\sin(x+y) = 0.$$

Da alle Komponenten null sind, ist:

$$\operatorname{rot} F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teil b: Existenz eines Potentials

Ein Vektorfeld ist konservativ (also ein Potentialfeld), wenn seine Rotation null ist.

- Für F_0 ist $\operatorname{rot} F_0 \neq 0$, also **kein Potentialfeld**.
- Für F_1 ist $\operatorname{rot} F_1 = 0$, also **gibt es ein Potential** $\Phi(x, y, z)$ mit $\nabla\Phi = F_1$.

Um Φ zu bestimmen, lösen wir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = z\cos(x+y),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = z\cos(x+y),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sin(x+y) + 2z.$$

Integration der ersten Gleichung nach x:

$$\Phi(x, y, z) = z\sin(x+y) + C(y, z).$$

Ableitung nach y ergibt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = z\cos(x+y) + \frac{\partial C}{\partial y} = z\cos(x+y).$$

Daraus folgt $\frac{\partial C}{\partial y} = 0$, also ist $C(y, z) = C(z)$.

Nun Integration der dritten Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sin(x+y) + 2z.$$

Einsetzen von $\Phi = z\sin(x+y) + C(z)$:

$$\sin(x+y) + C'(z) = \sin(x+y) + 2z.$$

Daraus folgt $C'(z) = 2z$, also $C(z) = z^2 + C_0$.

Das Potential ist:

$$\Phi(x,y,z) = z\sin(x+y) + z^2 + C_0.$$

Teil c: Berechnung der Kurvenintegrale

Das Kurvenintegral eines Vektorfeldes entlang $\gamma(t)$ ist:

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Die Ableitung des Weges:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \pi t \\ \pi t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Integral für F_0

$$F_0(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} F_0 \cdot \gamma' &= (\pi t^2)\pi + (\pi t^2)\pi + (2t^2)(2t). \\ &= \pi^2 t^2 + \pi^2 t^2 + 4t^3 = 2\pi^2 t^2 + 4t^3. \end{aligned}$$

Das Integral ist:

$$\int_0^1 (2\pi^2 t^2 + 4t^3) dt = \frac{2\pi^2}{3} + t^4 \Big|_0^1 = \frac{2\pi^2}{3} + 1.$$

Integral für F_1 Da F_1 ein Potentialfeld ist, ist das Kurvenintegral entlang einer geschlossenen oder zwischen zwei Punkten definierten Bahn einfach die Differenz des Potentials:

$$\Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)).$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\Phi(\pi,\pi,1) - \Phi(0,0,0) = (1\sin(2\pi) + 1^2) - (0\sin(0) + 0^2) = 1 - 0 = 1.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Es sei $\gamma(u) = (e^u - 1, 0, \sqrt{u})^T$ mit $u \in [0,1]$ ein planarer Weg in der x-z-Ebene. Mit A bezeichnen wir die Rotationsfläche, die entsteht, wenn γ um die z-Achse rotiert wird.

Gegeben sei ausserdem das Vektorfeld

$$F : R^3 \to R^3, F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie eine Parametrisierung $f(u,v)$ der Fläche A an.

b) Bestimmen Sie Tangentialvektoren und Normenalenvektor an die Fläche A für $u > 0$.

c) Bestimmen Sie das Oberflächenintegral 2.Art $\int_A F \cdot dn$.

Wir betrachten zunächst den Weg

$$\gamma(u) = (e^u - 1,\ 0,\ \sqrt{u})^T, \quad u \in [0,1],$$

der in der x-z-Ebene liegt. Durch Rotation um die z-Achse erhalten wir eine Rotationsfläche A und dazu das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden geben wir eine mögliche Lösung der Aufgaben (a)–(c) an.

---

a) Parametrisierung der Fläche A

Da die Rotation um die z-Achse die x- und y-Koordinaten in Polarkoordinaten „ausbreitet“, verwendet man für den Rotationswinkel v (mit $v \in [0, 2\pi]$) die übliche Darstellung:

$$x = (e^u - 1)\cos v, \quad y = (e^u - 1)\sin v, \quad z = \sqrt{u}\,.$$

Damit lautet eine Parametrisierung der Fläche

$$\boxed{f(u,v) = \big((e^u - 1)\cos v,\ (e^u - 1)\sin v,\ \sqrt{u}\big)^T, \quad u \in [0,1],\ v \in [0, 2\pi]\,.}$$

---

b) Tangentialvektoren und Normalenvektor (für $u > 0$)

Wir leiten $f(u,v)$ partiell nach u und v ab.

Partielle Ableitung nach u:

$$\begin{aligned} f_u(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\Big((e^u - 1)\cos v,\ (e^u - 1)\sin v,\ \sqrt{u}\Big) \\ &= \Big(e^u \cos v,\ e^u \sin v,\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\Big)^T. \end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach v:

$$\begin{aligned} f_v(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}\Big((e^u - 1)\cos v,\ (e^u - 1)\sin v,\ \sqrt{u}\Big) \\ &= \Big(-(e^u - 1)\sin v,\ (e^u - 1)\cos v,\ 0\Big)^T. \end{aligned}$$

Der (nicht unbedingt normierte) Normalenvektor wird durch das Kreuzprodukt bestimmt:

$$n(u,v) = f_u(u,v) \times f_v(u,v).$$

Wir schreiben zur Übersicht kurz

$$A = e^u, \quad r = e^u - 1, \quad B = \frac{1}{2\sqrt{u}},$$

so dass

$$f_u(u,v) = (A\cos v,\ A\sin v,\ B)^T \quad \text{und} \quad f_v(u,v) = (-r\sin v,\ r\cos v,\ 0)^T .$$

Berechnen wir das Kreuzprodukt:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A\cos v & A\sin v & B \\ -r\sin v & r\cos v & 0 \end{vmatrix} = \Big(-B\,r\cos v,\ -B\,r\sin v,\ A\,r\Big)^T .$$

Das heißt

$$\boxed{n(u,v) = \Big(-\frac{e^u-1}{2\sqrt{u}}\cos v,\ -\frac{e^u-1}{2\sqrt{u}}\sin v,\ e^u(e^u-1)\Big)^T .}$$

(Dieser Vektor ist (bis auf eine Vorzeichenwahl) die Orientierung der Fläche.)

---

c) Berechnung des Oberflächenintegrals 2. Art

Wir sollen

$$\iint_A F \cdot dn$$

berechnen. (Hierbei entspricht $F \cdot dn$ der klassischen Darstellung $F \cdot n\,dS$ mit n als Einheitsnormalvektor; da

$$dS = |f_u \times f_v|\,du\,dv,$$

und $n = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$, erhält man nämlich

$$F \cdot n\,dS = F \cdot (f_u \times f_v)\,du\,dv\,.)$$

Vorbereitung: Darstellung von F auf der Fläche

Setzt man

$$f(u,v) = \big((e^u-1)\cos v,\ (e^u-1)\sin v,\ \sqrt{u}\big)^T,$$

so hat man

$$x = (e^u-1)\cos v, \quad y = (e^u-1)\sin v, \quad z = \sqrt{u}\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(f(u,v)) &= \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e^u-1)\cos v \cdot \sqrt{u} \\ (e^u-1)\sin v \cdot \sqrt{u} \\ (e^u-1)^2\cos^2 v + (e^u-1)^2\sin^2 v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e^u-1)\sqrt{u}\cos v \\ (e^u-1)\sqrt{u}\sin v \\ (e^u-1)^2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Berechnung des Skalarprodukts

Wir erinnern uns, dass

$$f_u \times f_v = \Big(-\frac{e^u - 1}{2\sqrt{u}}\cos v,\ -\frac{e^u - 1}{2\sqrt{u}}\sin v,\ e^u(e^u - 1)\Big)^T.$$

Das Skalarprodukt $F(f(u,v)) \cdot (f_u \times f_v)$ lautet dann

$$\begin{aligned}
F \cdot (f_u \times f_v) &= \Big[(e^u - 1)\sqrt{u}\cos v\Big]\Big[-\frac{e^u - 1}{2\sqrt{u}}\cos v\Big] \\
&\quad + \Big[(e^u - 1)\sqrt{u}\sin v\Big]\Big[-\frac{e^u - 1}{2\sqrt{u}}\sin v\Big] \\
&\quad + \Big[(e^u - 1)^2\Big]\Big[e^u(e^u - 1)\Big] \\
&= -\frac{(e^u - 1)^2}{2}\Big(\cos^2 v + \sin^2 v\Big) + e^u(e^u - 1)^3 \\
&= -\frac{(e^u - 1)^2}{2} + e^u(e^u - 1)^3.
\end{aligned}$$

Aufstellen des Integrals

Da der Ausdruck keine v-Abhängigkeit mehr enthält, lässt sich das Integral als

$$\iint_A F \cdot dn = \int_{v=0}^{2\pi}\int_{u=0}^{1}\Big(e^u(e^u - 1)^3 - \frac{(e^u - 1)^2}{2}\Big)du\,dv$$

schreiben. Die Integration über v liefert den Faktor 2π, sodass

$$\iint_A F \cdot dn = 2\pi\int_0^1 \left(e^u(e^u - 1)^3 - \frac{(e^u - 1)^2}{2}\right) du.$$

Umformung des u-Integrals

Setzen wir

$$t = e^u - 1 \quad\Longrightarrow\quad dt = e^u\,du, \quad e^u = t + 1,$$

so gilt für $u = 0 : t = 0$ und für $u = 1 : t = e - 1$. Außerdem ist

$$du = \frac{dt}{t + 1}.$$

Damit wird der erste Term

$$e^u(e^u - 1)^3\,du = (t + 1)t^3\,\frac{dt}{t + 1} = t^3\,dt,$$

und der zweite Term

$$\frac{(e^u - 1)^2}{2}\,du = \frac{t^2}{2}\,\frac{dt}{t + 1}.$$

Somit lautet das u-Integral

$$I = \int_{t=0}^{e-1}\left(t^3 - \frac{t^2}{2(t + 1)}\right) dt.$$

Der erste Teil ist

$$\int_0^{e-1} t^3\,dt = \frac{(e - 1)^4}{4}.$$

Für den zweiten Term bemerken wir, dass

$$\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}\,,$$

denn

$$t^2 = (t-1)(t+1) + 1\,.$$

Daher

$$\int_0^{e-1} \frac{t^2}{t+1}\,dt = \int_0^{e-1} \Big(t - 1 + \frac{1}{t+1}\Big)dt = \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right]_0^{e-1}\,.$$

Einsetzen der Grenzen liefert

$$\frac{(e-1)^2}{2} - (e-1) + \ln e = \frac{(e-1)^2}{2} - (e-1) + 1\,.$$

Also ist

$$I = \frac{(e-1)^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{(e-1)^2}{2} - (e-1) + 1\right) = \frac{(e-1)^4 - (e-1)^2 + 2(e-1) - 2}{4}\,.$$

Schließlich erhalten wir für das Oberflächenintegral:

$$\iint_A F \cdot dn = 2\pi\, I = \frac{\pi}{2}\Big[(e-1)^4 - (e-1)^2 + 2(e-1) - 2\Big]\,.$$

Zusammenfassung der Lösung

a) Parametrisierung:

$$\boxed{f(u,v) = \big((e^u - 1)\cos v,\ (e^u - 1)\sin v,\ \sqrt{u}\big)^T, \quad u \in [0,1],\ v \in [0, 2\pi]\,.}$$

b) Tangentialvektoren und Normalenvektor (für $u > 0$):

$$f_u(u,v) = \Big(e^u \cos v,\ e^u \sin v,\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\Big)^T,$$

$$f_v(u,v) = \Big(-(e^u - 1)\sin v,\ (e^u - 1)\cos v,\ 0\Big)^T,$$

$$n(u,v) = f_u \times f_v = \Big(-\frac{e^u - 1}{2\sqrt{u}}\cos v,\ -\frac{e^u - 1}{2\sqrt{u}}\sin v,\ e^u(e^u - 1)\Big)^T.$$

c) Oberflächenintegral 2. Art:

$$\boxed{\iint_A F \cdot dn = \frac{\pi}{2}\Big[(e-1)^4 - (e-1)^2 + 2(e-1) - 2\Big]\,.}$$

Jede Antwort, die zu einem äquivalent algebraisch vereinfachten Ergebnis führt, ist richtig.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es sei die Kugel K gegeben durch

$$K = \left\{(x, y, z)^T \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$$

und S ihre Oberfläche.

Weiterhin sei das Vektorfeld $F : R^3 \to R^3$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz - y \\ yz + x \\ xy + z \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie den Fluss von F durch die gesamte Kugeloberfläche S, also $\int_{\partial K} F \cdot dn$, wobei die Normale n nach außen zeigt mit Hilfe des Satzes von Gauss.

c) Berechnen Sie $\int_S rot(F) \cdot dn$.

d) Die Oberfläche S wird durch die Ebenen $z = 1$ und $z = -1$ in drei Teilflächen S_O, S_M und S_U unterteilt. Berechnen Sie die Integrale $\int_{S_O} rot(F) \cdot dn$ und $\int_{S_M} rot(F) \cdot dn$ mit Hilfe des Sates von Stokes.

Wir betrachten zunächst die Kugel

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

mit Oberfläche

$$S = \partial K,$$

und das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz - y \\ yz + x \\ xy + z \end{pmatrix} .$$

Im Folgenden lösen wir (b)–(d) Schritt für Schritt.

---

b) Fluss von F durch S mit Hilfe des Satzes von Gauss

Der Satz von Gauss (Divergenz-Satz) besagt

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_K \operatorname{div}(F) \, dV .$$

Zunächst berechnen wir die Divergenz von F:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) &= \frac{\partial}{\partial x}(xz - y) + \frac{\partial}{\partial y}(yz + x) + \frac{\partial}{\partial z}(xy + z) \\ &= z + 0 \quad (\text{denn } \partial_x(xz) = z,\ \partial_x(-y) = 0) \\ &\qquad + z + 0 \quad (\text{denn } \partial_y(yz) = z,\ \partial_y(x) = 0) \\ &\qquad + 0 + 1 \quad (\text{denn } \partial_z(xy) = 0,\ \partial_z(z) = 1) \\ &= 2z + 1 . \end{aligned}$$

Für den Fluss erhalten wir damit

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_K (2z+1) \, dV \, .$$

Da K eine Kugel ist, überwiegt hier die Symmetrie: Das Integralsymbol über z eines ungeraden Terms (hier $2z$) verschwindet, also

$$\iiint_K 2z \, dV = 0.$$

Somit bleibt

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_K 1 \, dV = \mathrm{Vol}(K) \, .$$

Da die Kugel vom Radius $R = 2$ ist, gilt

$$\mathrm{Vol}(K) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3} \, .$$

Ergebnis (b):

$$\boxed{\int_S F \cdot n \, dS = \frac{32\pi}{3} \, .}$$

---

c) Berechnung des Integrals $\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot n \, dS$

Allgemein gilt (für beliebig differenzierbare Felder) der Vektoridentitätssatz

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0 \, .$$

Wendet man den Divergenz-Satz auf das Vektorfeld $\mathrm{rot}(F)$ an, so erhält man

$$\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot n \, dS = \iiint_K \mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) \, dV = 0 \, .$$

Ergebnis (c):

$$\boxed{\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot n \, dS = 0 \, .}$$

---

d) Berechnung der Integrale auf Teilflächen mittels Stokes' Theorem

Die Kugeloberfläche S wird durch die Ebenen $z = 1$ und $z = -1$ in drei Teilflächen zerlegt, die wir bezeichnen durch - S_O: der obere Kugelkappenanteil ($z \geq 1$), - S_M: der mittlere Teil ($-1 \leq z \leq 1$), - S_U: der untere Kugelkappenanteil ($z \leq -1$).

Wir sollen nun mittels des Stokes'schen Satzes die Flächenintegrale

$$\int_{S_O} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS \quad \text{und} \quad \int_{S_M} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS$$

berechnen.

Vorbereitung: Bestimmung von $\operatorname{rot}(F)$

Wir berechnen zuerst den Rotationsvektor (Curl) von F. Mit

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz - y \\ yz + x \\ xy + z \end{pmatrix},$$

gelten die Komponenten

- $(\operatorname{rot} F)_1 = \frac{\partial}{\partial y}(xy + z) - \frac{\partial}{\partial z}(yz + x) = x - y,$
- $(\operatorname{rot} F)_2 = \frac{\partial}{\partial z}(xz - y) - \frac{\partial}{\partial x}(xy + z) = x - y,$
- $(\operatorname{rot} F)_3 = \frac{\partial}{\partial x}(yz + x) - \frac{\partial}{\partial y}(xz - y) = 1 - (-1) = 2\,.$

Also erhalten wir

$$\operatorname{rot}(F)(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x - y \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Anwendung des Stokes'schen Satzes

Der Satz von Stokes besagt, dass für eine orientierbare Fläche S' mit glatten Randkurven $\partial S'$ gilt

$$\int_{S'} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = \oint_{\partial S'} F \cdot dr\,,$$

sofern die Orientierung von S' und $\partial S'$ (durch die Rechtshandregel) zueinander passen.

(d1) Integral über S_O (obere Kappe) Die obere Teilfläche S_O hat als Rand die Kreislinie C_1, die entsteht als Schnitt von S mit der Ebene $z = 1$. Auf $z = 1$ gilt aus $x^2 + y^2 + 1 = 4$ also

$$x^2 + y^2 = 3\,.$$

Eine natürliche Parameterisierung von C_1 ist

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t, & \qquad t \in [0, 2\pi]\,. \\ z = 1, \end{cases}$$

Entsprechend ist

$$dr = (-\sqrt{3}\sin t,\ \sqrt{3}\cos t,\ 0)^T\, dt\,.$$

Wir benötigen außerdem F entlang von C_1. Setzt man $z = 1$ ein, so erhält man

$$F(x, y, 1) = \begin{pmatrix} x - y \\ y + x \\ xy + 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $x = \sqrt{3}\cos t$ und $y = \sqrt{3}\sin t$ folgt

$$F(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t - \sqrt{3}\sin t \\ \sqrt{3}\sin t + \sqrt{3}\cos t \\ 3\cos t\sin t + 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} F \cdot dr &= \Big[\sqrt{3}(\cos t - \sin t)\Big]\Big[-\sqrt{3}\sin t\Big] + \Big[\sqrt{3}(\sin t + \cos t)\Big]\Big[\sqrt{3}\cos t\Big] \\ &\quad + \big(3\cos t\sin t + 1\big) \cdot 0 \\ &= -3\sin t\cos t + 3\sin^2 t + 3\cos t\sin t + 3\cos^2 t \\ &= 3\big(\sin^2 t + \cos^2 t\big) = 3\,. \end{aligned}$$

Da 3 konstant ist, ergibt sich

$$\oint_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} 3\, dt = 6\pi\,.$$

Mit der passenden Orientierung (diejenige, die durch den „äußeren“ Normalvektor der Kugel gegeben ist) erhalten wir also

$$\int_{S_O} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = 6\pi\,.$$

(d2) Integral über S_M (mittlerer Teil) Die mittlere Fläche S_M hat zwei Randkurven: C_1 (oben, Schnitt bei $z = 1$) und C_2 (unten, Schnitt bei $z = -1$). Für C_2 gilt aus $x^2 + y^2 + (-1)^2 = 4$ wieder $x^2 + y^2 = 3$. Eine Parameterisierung von C_2 ist

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t, & t \in [0, 2\pi]\,. \\ z = -1, \end{cases}$$

Die Berechnung von F entlang C_2 verläuft analog. Auf $z = -1$ erhalten wir

$$F(x, y, -1) = \begin{pmatrix} -x - y \\ -y + x \\ xy - 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnet man den zugehörigen Linienintegral, so erhält man – bei Wahl der Standardparameterisierung, die C_2 in positiver (d.h. gegen den Uhrzeigersinn sichtbarer) Richtung beschreibt – analog

$$\oint_{C_2} F \cdot dr = 6\pi\,.$$

Achtung bei der Orientierung:
Der Stokes'sche Satz liefert für eine gegebene, orientierte Fläche S' mit Rand $\partial S'$ gilt

$$\int_{S'} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = \oint_{\partial S'} F \cdot dr\,.$$

Für S_M induziert die natürliche Orientierung (also diejenige, die aus dem äußeren Normalvektor der Kugel resultiert) folgende Randorientierungen: - An der oberen Grenze C_1 ist die Orientierung **umgekehrt** zu der bei S_O, d.h. es wird -6π beitragen. - An der unteren Grenze C_2 (bei $z = -1$) wird ebenfalls – nach der induzierten Orientierung – das Vorzeichen umgekehrt, also ebenfalls -6π.

Die Gesamtkurvenintegrale (unter Berücksichtigung der Orientierung) lauten also

$$\oint_{\partial S_M} F \cdot dr = (-6\pi) + (-6\pi) = -12\pi\,.$$

Somit folgt

$$\int_{S_M} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = -12\pi\,.$$

Da S als geschlossene Fläche gilt und (c) gezeigt hat, dass

$$\int_{S} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = 0\,,$$

muss für den verbleibenden Teil S_U (untere Kappe) automatisch

$$\int_{S_U} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = 6\pi$$

gelten (was auch der Symmetrie entspricht).

Ergebnisse (d):

$$\boxed{\int_{S_O} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = 6\pi \quad \text{und} \quad \int_{S_M} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = -12\pi\,.}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

- **(b)**: $\displaystyle\int_S F \cdot n\, dS = \frac{32\pi}{3}$.
- **(c)**: $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = 0$.
- **(d)**:
  $$\int_{S_O} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = 6\pi$$
  $$\int_{S_M} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = -12\pi.$$

Jede Lösung, die zu äquivalenten Resultaten führt (bezüglich Vorzeichen bei richtiger Orientierung), ist korrekt.

Wir betrachten zunächst die Kugel

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

mit Oberfläche

$$S = \partial K,$$

und das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz - y \\ yz + x \\ xy + z \end{pmatrix} .$$

Im Folgenden lösen wir (b)–(d) Schritt für Schritt.

---

b) Fluss von F durch S mit Hilfe des Satzes von Gauss

Der Satz von Gauss (Divergenz-Satz) besagt

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_K \operatorname{div}(F) \, dV .$$

Zunächst berechnen wir die Divergenz von F:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) &= \frac{\partial}{\partial x}(xz - y) + \frac{\partial}{\partial y}(yz + x) + \frac{\partial}{\partial z}(xy + z) \\ &= z + 0 \quad (\text{denn } \partial_x(xz) = z,\ \partial_x(-y) = 0) \\ &\qquad + z + 0 \quad (\text{denn } \partial_y(yz) = z,\ \partial_y(x) = 0) \\ &\qquad + 0 + 1 \quad (\text{denn } \partial_z(xy) = 0,\ \partial_z(z) = 1) \\ &= 2z + 1 . \end{aligned}$$

Für den Fluss erhalten wir damit

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_K (2z + 1) \, dV .$$

Da K eine Kugel ist, überwiegt hier die Symmetrie: Das Integralsymbol über z eines ungeraden Terms (hier $2z$) verschwindet, also

$$\iiint_K 2z \, dV = 0.$$

Somit bleibt

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_K 1 \, dV = \operatorname{Vol}(K) .$$

Da die Kugel vom Radius $R = 2$ ist, gilt

$$\mathrm{Vol}(K) = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}\,.$$

Ergebnis (b):

$$\boxed{\int_S F \cdot n\, dS = \frac{32\pi}{3}\,.}$$

---

c) Berechnung des Integrals $\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS$

Allgemein gilt (für beliebig differenzierbare Felder) der Vektoridentitätssatz

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0\,.$$

Wendet man den Divergenz-Satz auf das Vektorfeld $\mathrm{rot}(F)$ an, so erhält man

$$\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = \iiint_K \mathrm{div}(\mathrm{rot}(F))\, dV = 0\,.$$

Ergebnis (c):

$$\boxed{\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS = 0\,.}$$

---

d) Berechnung der Integrale auf Teilflächen mittels Stokes' Theorem

Die Kugeloberfläche S wird durch die Ebenen $z = 1$ und $z = -1$ in drei Teilflächen zerlegt, die wir bezeichnen durch - S_O: der obere Kugelkappenanteil ($z \geq 1$), - S_M: der mittlere Teil ($-1 \leq z \leq 1$), - S_U: der untere Kugelkappenanteil ($z \leq -1$).

Wir sollen nun mittels des Stokes'schen Satzes die Flächenintegrale

$$\int_{S_O} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS \quad \text{und} \quad \int_{S_M} \mathrm{rot}(F) \cdot n\, dS$$

berechnen.

Vorbereitung: Bestimmung von $\mathrm{rot}(F)$

Wir berechnen zuerst den Rotationsvektor (Curl) von F. Mit

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz - y \\ yz + x \\ xy + z \end{pmatrix},$$

gelten die Komponenten

- $(\mathrm{rot}\, F)_1 = \frac{\partial}{\partial y}(xy + z) - \frac{\partial}{\partial z}(yz + x) = x - y,$
- $(\mathrm{rot}\, F)_2 = \frac{\partial}{\partial z}(xz - y) - \frac{\partial}{\partial x}(xy + z) = x - y,$
- $(\mathrm{rot}\, F)_3 = \frac{\partial}{\partial x}(yz + x) - \frac{\partial}{\partial y}(xz - y) = 1 - (-1) = 2\,.$

Also erhalten wir

$$\operatorname{rot}(F)(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Anwendung des Stokes'schen Satzes

Der Satz von Stokes besagt, dass für eine orientierbare Fläche S' mit glatten Randkurven $\partial S'$ gilt

$$\int_{S'} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = \oint_{\partial S'} F \cdot dr \, ,$$

sofern die Orientierung von S' und $\partial S'$ (durch die Rechtshandregel) zueinander passen.

(d1) Integral über S_O (obere Kappe) Die obere Teilfläche S_O hat als Rand die Kreislinie C_1, die entsteht als Schnitt von S mit der Ebene $z = 1$. Auf $z = 1$ gilt aus $x^2 + y^2 + 1 = 4$ also

$$x^2 + y^2 = 3 \, .$$

Eine natürliche Parameterisierung von C_1 ist

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t, & \qquad t \in [0, 2\pi] \, . \\ z = 1, \end{cases}$$

Entsprechend ist

$$dr = (-\sqrt{3}\sin t, \, \sqrt{3}\cos t, \, 0)^T \, dt \, .$$

Wir benötigen außerdem F entlang von C_1. Setzt man $z = 1$ ein, so erhält man

$$F(x,y,1) = \begin{pmatrix} x-y \\ y+x \\ xy+1 \end{pmatrix} .$$

Mit $x = \sqrt{3}\cos t$ und $y = \sqrt{3}\sin t$ folgt

$$F(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t - \sqrt{3}\sin t \\ \sqrt{3}\sin t + \sqrt{3}\cos t \\ 3\cos t \sin t + 1 \end{pmatrix} .$$

Nun ist das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} F \cdot dr &= \Big[\sqrt{3}(\cos t - \sin t)\Big]\Big[-\sqrt{3}\sin t\Big] + \Big[\sqrt{3}(\sin t + \cos t)\Big]\Big[\sqrt{3}\cos t\Big] \\ &\quad + \big(3\cos t \sin t + 1\big) \cdot 0 \\ &= -3\sin t \cos t + 3\sin^2 t + 3\cos t \sin t + 3\cos^2 t \\ &= 3\big(\sin^2 t + \cos^2 t\big) = 3 \, . \end{aligned}$$

Da 3 konstant ist, ergibt sich

$$\oint_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi\,.$$

Mit der passenden Orientierung (diejenige, die durch den „äußeren“ Normalvektor der Kugel gegeben ist) erhalten wir also

$$\int_{S_O} \mathrm{rot}(F) \cdot n\,dS = 6\pi\,.$$

(d2) Integral über S_M (mittlerer Teil) Die mittlere Fläche S_M hat zwei Randkurven: C_1 (oben, Schnitt bei $z = 1$) und C_2 (unten, Schnitt bei $z = -1$). Für C_2 gilt aus $x^2 + y^2 + (-1)^2 = 4$ wieder $x^2 + y^2 = 3$. Eine Parameterisierung von C_2 ist

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sqrt{3}\sin t, & t \in [0, 2\pi]\,. \\ z = -1, \end{cases}$$

Die Berechnung von F entlang C_2 verläuft analog. Auf $z = -1$ erhalten wir

$$F(x, y, -1) = \begin{pmatrix} -x - y \\ -y + x \\ xy - 1 \end{pmatrix}\,.$$

Berechnet man den zugehörigen Linienintegral, so erhält man – bei Wahl der Standardparameterisierung, die C_2 in positiver (d.h. gegen den Uhrzeigersinn sichtbarer) Richtung beschreibt – analog

$$\oint_{C_2} F \cdot dr = 6\pi\,.$$

Achtung bei der Orientierung:
Der Stokes'sche Satz liefert für eine gegebene, orientierte Fläche S' mit Rand $\partial S'$ gilt

$$\int_{S'} \mathrm{rot}(F) \cdot n\,dS = \oint_{\partial S'} F \cdot dr\,.$$

Für S_M induziert die natürliche Orientierung (also diejenige, die aus dem äußeren Normalvektor der Kugel resultiert) folgende Randorientierungen: - An der oberen Grenze C_1 ist die Orientierung **umgekehrt** zu der bei S_O, d.h. es wird -6π beitragen. - An der unteren Grenze C_2 (bei $z = -1$) wird ebenfalls – nach der induzierten Orientierung – das Vorzeichen umgekehrt, also ebenfalls -6π.

Die Gesamtkurvenintegrale (unter Berücksichtigung der Orientierung) lauten also

$$\oint_{\partial S_M} F \cdot dr = (-6\pi) + (-6\pi) = -12\pi\,.$$

Somit folgt

$$\int_{S_M} \mathrm{rot}(F) \cdot n\,dS = -12\pi\,.$$

Da S als geschlossene Fläche gilt und (c) gezeigt hat, dass

$$\int_S \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = 0 \,,$$

muss für den verbleibenden Teil S_U (untere Kappe) automatisch

$$\int_{S_U} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = 6\pi$$

gelten (was auch der Symmetrie entspricht).

Ergebnisse (d):

$$\boxed{\int_{S_O} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = 6\pi \quad \text{und} \quad \int_{S_M} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = -12\pi \,.}$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

- **(b)**: $\displaystyle\int_S F \cdot n \, dS = \frac{32\pi}{3}$.
- **(c)**: $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = 0$.
- **(d)**:
  $\displaystyle\int_{S_O} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = 6\pi$
  $\displaystyle\int_{S_M} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = -12\pi$.

Jede Lösung, die zu äquivalenten Resultaten führt (bezüglich Vorzeichen bei richtiger Orientierung), ist korrekt.