Vector_Analysis_HM3_Klausur

Markus Schmidt

2025-02-12

Im Folgenden findest du eine ausführliche Musterlösung zu den drei Aufgaben, angereichert mit gezielten Lernhinweisen und Lernpunkten, die dir helfen sollen, die wesentlichen Methoden zu verinnerlichen. Diese Lösung ist in einzelne Schritte unterteilt, sodass du nach und nach die Vorgehensweise nachvollziehen und eigene Fehlerquellen erkennen kannst.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Teil a)

Löse das Anfangswertproblem

$$x' = t\,x^2 + t, \quad x(0) = 0,$$

und bestimme den maximalen Definitionsbereich.

Schritt 1: Umformulieren in separierbarer Form

Beachte, dass sich der Ausdruck $t\,x^2 + t$ faktorisieren lässt:

$$x' = t(x^2 + 1).$$

Schreibe dies in der separierbaren Form:

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = t\,dt.$$

Lernpunkt:
- **Erkenne:** Eine Differentialgleichung der Form $x' = f(t)\,g(x)$ lässt sich oft trennen, sodass auf einer Seite nur x und auf der anderen nur t steht.

Schritt 2: Integration beider Seiten

Integriere beide Seiten:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int t\,dt.$$

Verwende den Hinweis, dass

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

somit ist

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan(x).$$

Außerdem gilt:

$$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C.$$

Damit erhältst du:

$$\arctan(x) = \frac{t^2}{2} + C.$$

Lernhinweis:
- **Merke:** Oft hilft es, sich bekannte Ableitungen (wie die von $\arctan(x)$) aktiv ins Gedächtnis zu rufen, um das passende Integral zu erkennen.

Schritt 3: Bestimmen der Integrationskonstanten

Setze die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ ein:

$$\arctan(0) = \frac{0^2}{2} + C \quad \Longrightarrow \quad 0 = C.$$

Damit folgt:

$$\arctan(x) = \frac{t^2}{2}.$$

Löse nach x auf:

$$x(t) = \tan\Big(\frac{t^2}{2}\Big).$$

Schritt 4: Maximaler Definitionsbereich

Da die Tangensfunktion nur definiert ist, solange ihr Argument nicht $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) erreicht, betrachten wir den kleinsten kritischen Fall:

$$\frac{t^2}{2} \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Da $t^2 \geq 0$ nur die obere Grenze relevant ist:

$$\frac{t^2}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad t^2 < \pi \quad \Longrightarrow \quad |t| < \sqrt{\pi}.$$

Lernpunkt:
- **Achte:** Auf den Definitionsbereich von Funktionen wie $\tan(\cdot)$. Das Erkennen solcher Einschränkungen ist oft entscheidend.

Teil b)

Betrachte die Differentialgleichung

$$2tx^3 - 2t + 3t^2x^2\,x' = 0, \quad x(1) = 0.$$

(i) Nachweis der Exaktheit

Zuerst schreiben wir die DGL in der Form

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0,$$

wobei wir setzen:

$$M(t,x) = 2tx^3 - 2t \quad \text{und} \quad N(t,x) = 3t^2x^2.$$

Eine Differentialgleichung ist exakt, wenn gilt:

$$M_x(t,x) = N_t(t,x).$$

Berechne:

$$M_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}(2tx^3 - 2t) = 6tx^2,$$

und

$$N_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(3t^2x^2) = 6tx^2.$$

Da $M_x(t,x) = N_t(t,x)$ erfüllt ist, ist die DGL exakt.

Lernhinweis:
- **Wichtig:** Das Prüfen der Exaktheit über $M_x = N_t$ ist ein zentraler Schritt bei exakten DGLs. Notiere alle Teilschritte, um auch bei Teilpunkten Punkte zu erhalten.

(ii) Bestimme eine Funktion $\Phi(t,x)$ mit $\Phi_t + \Phi_x x' = 0$

Da die DGL exakt ist, existiert eine Funktion $\Phi(t,x)$ mit

$$\Phi_t(t,x) = M(t,x) = 2tx^3 - 2t, \quad \Phi_x(t,x) = N(t,x) = 3t^2x^2.$$

Schritt 1: Integriere Φ_x bezüglich x:

$$\Phi(t,x) = \int 3t^2x^2\,dx = t^2x^3 + h(t),$$

wobei $h(t)$ eine Funktion ist, die ausschließlich von t abhängt.

Schritt 2: Bestimme Φ_t:

$$\Phi_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(t^2x^3 + h(t)) = 2tx^3 + h'(t).$$

Vergleiche dies mit $\Phi_t(t,x) = 2tx^3 - 2t$:

$$2tx^3 + h'(t) = 2tx^3 - 2t \quad \Longrightarrow \quad h'(t) = -2t.$$

Integriere:

$$h(t) = -t^2 + C.$$

Ohne Einschränkung wählen wir $C = 0$. Somit:

$$\Phi(t,x) = t^2x^3 - t^2.$$

Lernpunkt:
- **Beachte:** Beim Integrieren einer Funktion in mehreren Variablen kommt eine „Integrationsfunktion“ hinzu, die von der jeweils anderen Variablen abhängt.

(iii) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems und den Grenzwert

Die allgemeine Lösung der exakten DGL ist

$$\Phi(t,x) = \text{konstant}.$$

Das heißt:

$$t^2x^3 - t^2 = K.$$

Setze die Anfangsbedingung $x(1) = 0$ ein:

$$1^2 \cdot 0^3 - 1^2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad K = -1.$$

Also lautet die implizite Lösung:

$$t^2(x^3 - 1) = -1.$$

Für $t \neq 0$ lösen wir:

$$x^3 - 1 = -\frac{1}{t^2} \quad \implies \quad x^3 = 1 - \frac{1}{t^2},$$

und damit:

$$x(t) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{t^2}}.$$

Bestimme den Grenzwert für $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{t^2}} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Lernhinweis:
- **Notiere:** Wie du die Anfangsbedingung einsetzt, um K zu bestimmen, und achte auf die Umformung, wenn du nach x auflöst.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben ist das lineare System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Teil a) Reelles Fundamentalsystem

Schritt 1: Bestimme die Eigenwerte

Berechne das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 5 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Berechne:

$$(3 - \lambda)(-1 - \lambda) - (-1)(5) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 5.$$

Multipliziere:

$$(3 - \lambda)(-1 - \lambda) = -3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Also:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Berechne die Diskriminante:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4.$$

Somit erhalten wir komplexe Eigenwerte:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i.$$

Schritt 2: Reelles Fundamentalsystem erstellen

Obwohl die Eigenwerte komplex sind, können wir ein reelles Fundamentalsystem konstruieren.
Ein komplexer Eigenwert $\lambda = 1 + i$ gehört zu einem Eigenvektor v.
Finde v aus der Gleichung

$$(A - (1+i)I)v = 0.$$

Schreibe:

$$\begin{pmatrix} 3-(1+i) & -1 \\ 5 & -1-(1+i) \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} v = 0.$$

Setze $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Aus der ersten Zeile:

$$(2-i) - \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 2 - i.$$

Die allgemeine Lösung des Systems lautet (unter Verwendung der Euler-Formel $e^{(1\pm i)t} = e^t e^{\pm it}$):

$$x(t) = e^t \Big[C_1 \, \Re\Big(e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \Big) + C_2 \, \Im\Big(e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \Big) \Big].$$

Nach Ausmultiplizieren und Trennung in Real- und Imaginärteil erhält man ein reelles Fundamentalsystem, z. B. in der Form:

$$x(t) = e^t \left\{ C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} \right\}.$$

Lernpunkte:
- **Erinnerung:** Berechne das charakteristische Polynom sorgfältig. - **Tipp:** Auch wenn die Eigenwerte komplex sind, kannst du durch Auftrennen in Real- und Imaginärteile ein reelles Fundamentalsystem erhalten.
- **Hinweis:** Schreibe alle Schritte auf, um bei Teilergebnissen Punkte zu sichern.

Teil b) Allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Systems

Betrachte

$$\dot{x} = Ax + b, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schritt 1: Lösung des homogenen Systems

Aus Teil a) kennst du das allgemeine $x_h(t)$.

Schritt 2: Finde eine partikuläre Lösung x_p

Oft genügt es, eine konstante Lösung anzunehmen. Setze x_p konstant, sodass

$$Ax_p + b = 0.$$

Das heißt:

$$x_p = -A^{-1}b.$$

Berechne zunächst $\det A$:

$$\det A = 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 5 = -3 + 5 = 2.$$

Dann ist

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somit:

$$x_p = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3: Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet:

$$x(t) = x_h(t) + x_p.$$

Lernhinweis:
- **Merke:** Bei linearen Systemen trennt man stets die Lösung in homogene und partikuläre Anteile. - **Tipp:** Prüfe immer durch Einsetzen, ob $Ax_p + b = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$2u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, \pi],\ t > 0.$$

Teil a) Klassifikation

Vergleiche diese Gleichung mit der Standardform von PDEs, in denen normalerweise höhere Ableitungen in x und t vorkommen.
Hier tritt u_t (erste Ableitung in t) und u_{xx} (zweite Ableitung in x) auf.
Diese Struktur entspricht der Wärmeleitungsgleichung, die als **parabolisch** klassifiziert wird.

Lernpunkt:
- **Beachte:** PDEs mit nur einer zeitlichen Ableitung und einer räumlichen zweiten Ableitung (wie bei der Wärmeleitung) sind parabolisch.

Teil b) Fourier-Koeffizienten

Gegeben sei

$$f(x) = 1 \quad \text{für } x \in [0, \pi],$$

wobei $f(x)$ ungerade periodisch fortgesetzt wird. Damit besitzt $f(x)$ eine reine Sinusreihe:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Berechne:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)\, dx.$$

Berechne das Integral:

$$\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\big[\cos(n\pi) - \cos(0)\big] = -\frac{1}{n}\big[(-1)^n - 1\big].$$

Daher:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}\big[1 - (-1)^n\big].$$

Beachte: - Für gerade n: $1 - (-1)^n = 0$. - Für ungerade n: $1 - (-1)^n = 2$.

Somit:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade}, \\ 0, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Lernhinweis:
- **Nutze:** Die Orthogonalität der Sinusfunktionen und achte darauf, ob $f(x)$ ungerade oder gerade fortgesetzt wird.

Teil c) Lösung der PDE mit Anfangsbedingung

Gegeben ist:

$$u(0,x) = \sin(kx), \quad x \in [0,\pi],$$

und die Randbedingungen:

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t > 0.$$

Trennungsansatz

Setze

$$u(t,x) = T(t)\,X(x).$$

Einsetzen in die PDE $2u_t - u_{xx} = 0$ führt zu:

$$2T'(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0.$$

Teile durch $T(t)X(x)$ (sofern $T(t)X(x) \neq 0$):

$$\frac{2T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

wobei λ eine Trennkonstante ist.

Räumliche Funktion $X(x)$:

Es gilt:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X(\pi) = 0.$$

Die Standardlösung ist:

$$X(x) = \sin(kx), \quad \lambda = k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zeitabhängige Funktion $T(t)$:

Aus der Trennung folgt:

$$2T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T'(t) = -\frac{\lambda}{2}T(t) = -\frac{k^2}{2}T(t).$$

Löse die ODE:

$$T(t) = e^{-\frac{k^2}{2}t}.$$

Endgültige Lösung

Damit erhältst du:

$$u(t,x) = e^{-\frac{k^2}{2}t}\sin(kx).$$

Lernhinweis:
- **Wichtig:** Der Trennungsansatz zerlegt die PDE in zwei ODEs – eine in x und eine in t.
- **Überprüfe:** Dass die Randbedingungen durch die Wahl der Sinusfunktionen automatisch erfüllt werden.

Zusammenfassung der Lernpunkte und Lernhinweise

1. **Grundlagen bei ODEs (Aufgabe 1a):**
   - **Lernpunkt:** Erkenne separierbare Gleichungen und setze sie in der Form $\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$ an.
   - **Hinweis:** Nutze bekannte Ableitungen (z. B. von $\arctan x$), um das Integral sofort zu erkennen.
2. **Exakte Differentialgleichungen (Aufgabe 1b):**
   - **Lernpunkt:** Prüfe die Exaktheit mit $M_x = N_t$.
   - **Hinweis:** Beachte, dass beim Integrieren von Funktionen in mehreren Variablen Integrationsfunktionen auftreten, die von der jeweils anderen Variablen abhängen.
3. **Lineare Systeme (Aufgabe 2):**
   - **Lernpunkt:** Berechne Eigenwerte und -vektoren sorgfältig.
   - **Hinweis:** Auch komplexe Eigenwerte können in ein reelles Fundamentalsystem überführt werden, indem du Real- und Imaginärteil trennst.
   - **Zusatz:** Für inhomogene Systeme kann oft ein konstanter Vektor als partikuläre Lösung gewählt werden (hier: $x_p = -A^{-1}b$).
4. **PDEs und Fourier-Reihen (Aufgabe 3):**
   - **Lernpunkt:** Klassifiziere PDEs anhand der höchsten Ableitungen; erkenne, dass diese Gleichung parabolisch ist (ähnlich der Wärmeleitungsgleichung).
   - **Hinweis:** Berechne Fourier-Koeffizienten, indem du die Orthogonalität der Sinusfunktionen nutzt.
   - **Zusatz:** Beim Trennungsansatz löst du die räumliche ODE, die zu Sinusfunktionen führt, und die zeitliche ODE, die exponentiell abklingt.

Diese Musterlösung liefert dir einen kompletten Lösungsweg für die gestellten Aufgaben – ergänzt durch Hinweise, welche Schritte besonders wichtig sind und worauf du achten solltest.
Falls du zu einem bestimmten Schritt Fragen hast oder einzelne Punkte vertiefen möchtest, lass es mich wissen!

Below is a "road-map" for working through these three exam tasks. I'll explain each part step by step, pause to point out useful tips, and include some "check-your-understanding" questions along the way. Remember: even if things seem overwhelming at first, we can break them into bite-sized pieces. (You only need 25% of 30 points to pass—so every little step counts!)

Aufgabe 4 – Potentiale und Kurvenintegrale (10 Punkte)

We are given the vector field

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\,\frac{y^3}{3} \\ x^2\left(z^2 + \frac{y^2}{2}\right) - \alpha x^2 z^2 \\ (1-\alpha)2x^2yz + z^2 \end{pmatrix}$$

and the path

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Let's work through parts (a), (b), and (c).

Part (a): For which α does F have a potential? (4P)

A vector field in a simply connected domain has a potential (i.e. is conservative) if its curl is zero. (Hint: Check if $\nabla \times F = 0$.)

1. **Write $F = (P, Q, R)$:**
   - $P(x, y, z) = \dfrac{x\,y^3}{3}$
   - $Q(x, y, z) = x^2\Big(z^2 + \frac{y^2}{2}\Big) - \alpha x^2 z^2 = x^2\Big((1-\alpha)z^2 + \frac{y^2}{2}\Big)$
   - $R(x, y, z) = (1-\alpha)2x^2yz + z^2$.
2. **Compute the curl components:**
   Recall:
   $$(\nabla \times F)_1 = R_y - Q_z, \quad (\nabla \times F)_2 = P_z - R_x, \quad (\nabla \times F)_3 = Q_x - P_y.$$
   A brief summary of the (key) computations (you may verify the details yourself):
   - **First component:**
   $$R_y = (1-\alpha)2x^2z, \quad Q_z = 2x^2z(1-\alpha) \quad \Longrightarrow \quad (\nabla \times F)_1 = 0.$$
   - **Second component:**
   $$P_z = 0, \quad R_x = 4xyz\,(1-\alpha) \quad \Longrightarrow \quad (\nabla \times F)_2 = -4xyz\,(1-\alpha).$$
   - **Third component:**
   $$Q_x = 2x\Big((1-\alpha)z^2 + \tfrac{y^2}{2}\Big), \quad P_y = xy^2 \quad \Longrightarrow \quad (\nabla \times F)_3 = 2x(1-\alpha)z^2.$$
3. **Conclude:**
   For the curl to vanish identically (for all x, y, z), we need
   $$-4xyz\,(1-\alpha) = 0 \quad \text{and} \quad 2x(1-\alpha)z^2 = 0.$$
   Since these must hold for all x, y, z, it follows that
   $$1 - \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1.$$

Emotional note: "Great job if you followed along! Notice that checking the curl is a systematic way to verify whether a vector field is conservative."

Part (b): Find a potential for $\alpha = 1$. (4P)

When $\alpha = 1$, substitute into F: - $P(x, y, z) = \frac{x\,y^3}{3}$ - $Q(x, y, z) = x^2\Big(0 + \frac{y^2}{2}\Big) = \frac{x^2y^2}{2}$ - $R(x, y, z) = 0 + z^2 = z^2$.

We want a function $\varphi(x, y, z)$ with

$$\varphi_x = \frac{x\,y^3}{3}, \quad \varphi_y = \frac{x^2y^2}{2}, \quad \varphi_z = z^2.$$

Step 1: Integrate φ_x with respect to x:

$$\varphi(x, y, z) = \int \frac{x\,y^3}{3}\,dx = \frac{y^3}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + g(y, z) = \frac{x^2y^3}{6} + g(y, z).$$

Step 2: Differentiate with respect to y and compare with φ_y:

$$\varphi_y = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x^2y^3}{6}\Big) + g_y(y,z) = \frac{x^2y^2}{2} + g_y(y,z).$$

Since we need $\varphi_y = \frac{x^2y^2}{2}$, it follows that

$$g_y(y,z) = 0 \quad\Longrightarrow\quad g(y,z) = h(z).$$

Step 3: Use φ_z:

$$\varphi_z = h'(z) = z^2 \quad\Longrightarrow\quad h(z) = \frac{z^3}{3} + \text{constant}.$$

(You can set the constant to zero.)

Thus, a potential is

$$\boxed{\varphi(x,y,z) = \frac{x^2y^3}{6} + \frac{z^3}{3}.}$$

Tip: "Always check by differentiating your candidate potential to be sure it gives back the components of F."

Part (c): Compute the line integral of F **along** γ **(2P)**

For conservative fields the line integral along a path from $t=0$ to $t=1$ is just the difference of the potential at the endpoints:

$$\int_\gamma F\cdot d\gamma = \varphi\big(\gamma(1)\big) - \varphi\big(\gamma(0)\big).$$

Evaluate at $t=0$:

$$\gamma(0) = (1-0,\,0,\,0) = (1,0,0) \quad\Longrightarrow\quad \varphi(1,0,0) = \frac{1^2\cdot 0^3}{6} + \frac{0^3}{3} = 0.$$

Evaluate at $t=1$:

$$\gamma(1) = (1-1,\,1,\,1) = (0,1,1) \quad\Longrightarrow\quad \varphi(0,1,1) = \frac{0^2\cdot 1^3}{6} + \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

So, the line integral is

$$\boxed{\frac{1}{3}}.$$

Remember: "For conservative fields, the work done is independent of the path—it's only the difference in potential!"

Aufgabe 5 – Fluss durch eine Rotationsfläche (10 Punkte)

We have the curve

$$\gamma(u) = (e^u - 1,\,0,\,u)^T, \quad u\in[0,1],$$

which lies in the x-z plane. Rotating it about the z-axis creates the surface A. The vector field is

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Part (a): Parametrization $f(u,v)$ of A (3P)

When you rotate a point $(x,0,z)$ about the z-axis, it becomes

$$\big(x\cos v,\ x\sin v,\ z\big),$$

with v running from 0 to 2π. Here, $x = e^u - 1$ and $z = u$. Thus, a parametrization is:

$$\boxed{f(u,v) = \Big((e^u - 1)\cos v,\ (e^u - 1)\sin v,\ u\Big), \quad u \in [0,1],\ v \in [0,2\pi].}$$

Part (b): Tangential- and Normalenvektoren (3P)

1. **Tangent vectors:**
   Differentiate $f(u,v)$:
   - With respect to u:
   $$f_u(u,v) = \Big(e^u\cos v,\ e^u\sin v,\ 1\Big).$$
   - With respect to v:
   $$f_v(u,v) = \Big(-(e^u-1)\sin v,\ (e^u-1)\cos v,\ 0\Big).$$
2. **Normal vector:**
   A (nonunit) normal is given by the cross product
   $$n(u,v) = f_u \times f_v.$$
   A short calculation shows that
   $$f_u \times f_v = (e^u - 1)\big(-\cos v,\ -\sin v,\ e^u\big).$$
   (You may check the determinant step by step.)
   Thus, one may write:
   $$\boxed{n(u,v) = (e^u - 1)\big(-\cos v,\ -\sin v,\ e^u\big).}$$

Advice: "Write down each component carefully and check the cross product with a determinant—this is a very standard technique!"

Part (c): Compute the surface integral $\int_A F \cdot dn$ (3P)

Here, the flux is computed as

$$\iint_A F \cdot n\, dS,$$

and when using the parametrization, you can write

$$\iint_A F \cdot n\, dS = \int_{v=0}^{2\pi} \int_{u=0}^{1} F\big(f(u,v)\big) \cdot \big(f_u \times f_v\big)\, du\, dv.$$

1. **Plug in the parametrization into F:**
   With
   $$f(u,v) = ((e^u - 1)\cos v,\ (e^u - 1)\sin v,\ u),$$
   we have:
   $$F\big(f(u,v)\big) = \Big((e^u - 1)(\cos v + \sin v),\ (e^u - 1)(\sin v - \cos v),\ 2\Big).$$

2. **Compute the dot product:**
   With the earlier result

$$f_u \times f_v = (e^u - 1)\,(-\cos v,\ -\sin v,\ e^u),$$

   the dot product is

$$\begin{aligned} F(f(u,v)) \cdot (f_u \times f_v) &= (e^u - 1)^2 \Big[(\cos v + \sin v)(-\cos v) + (\sin v - \cos v)(-\sin v)\Big] \\ &\quad + 2\,(e^u - 1)e^u. \end{aligned}$$

   A short calculation shows that the bracket simplifies:

$$(\cos v + \sin v)(-\cos v) + (\sin v - \cos v)(-\sin v) = -(\cos^2 v + \sin^2 v) = -1.$$

   Therefore, the integrand becomes:

$$-(e^u - 1)^2 + 2e^u(e^u - 1).$$

   Notice that

$$2e^u(e^u - 1) = 2e^{2u} - 2e^u \quad \text{and} \quad (e^u - 1)^2 = e^{2u} - 2e^u + 1,$$

   so the combination simplifies to:

$$[2e^{2u} - 2e^u] - [e^{2u} - 2e^u + 1] = e^{2u} - 1.$$

3. **Integrate:**
   The double integral becomes

$$\int_{v=0}^{2\pi} dv \int_{u=0}^{1} (e^{2u} - 1)\, du = 2\pi \left[\int_0^1 e^{2u} du - \int_0^1 1\, du\right].$$

   Now compute:

   - $\displaystyle\int_0^1 e^{2u} du = \frac{1}{2}(e^2 - 1),$
   - $\displaystyle\int_0^1 du = 1.$

   Hence, the flux is

$$2\pi \left[\frac{e^2 - 1}{2} - 1\right] = \pi(e^2 - 3).$$

So, the answer is

$$\boxed{\int_A F \cdot dn = \pi(e^2 - 3).}$$

Remember: "Always check that your integration limits correspond to the full surface!"

Aufgabe 6 – Integrationssätze bei einem Kugelsegment (10 Punkte)

The spherical segment is

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ z \geq 0\},$$

and its boundary is ∂K. The field is

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ z + xy \end{pmatrix}.$$

Part (a): Parametrize the volume in spherical coordinates.

Use the usual spherical coordinates:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$

with the volume element $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$.

Determine the ranges:
- The sphere: $r \in [0, 2]$ (since $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$).
- $z \ge 0$ implies $\cos\theta \ge 0$ so $\theta \in [0, \pi/2]$.
- $y \ge 0$ implies $\sin\phi \ge 0$ so $\phi \in [0, \pi]$.

Thus, a full parametrization of K is:

$$\boxed{(r, \theta, \phi) : \ r \in [0, 2], \ \theta \in [0, \pi/2], \ \phi \in [0, \pi], \quad dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi.}$$

Part (b): Compute the flux $\int_{\partial K} F \cdot dn$ (Fluss) with outward normal. (b)

A very efficient way is to use the **divergence theorem**:

$$\int_{\partial K} F \cdot n \, dS = \iiint_K \nabla \cdot F \, dV.$$

1. **Compute the divergence:**
   For
   $$F = (x - y, \ x + y, \ z + xy),$$
   we have
   $$\frac{\partial}{\partial x}(x - y) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x + y) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z}(z + xy) = 1.$$
   Thus,
   $$\nabla \cdot F = 1 + 1 + 1 = 3.$$

2. **Compute the volume of K:**
   The full sphere of radius 2 has volume $\frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32\pi}{3}$.
   Since K is restricted by $y \ge 0$ and $z \ge 0$, it represents one–quarter of the sphere:
   $$\text{Vol}(K) = \frac{1}{4} \cdot \frac{32\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

3. **Apply the divergence theorem:**
   $$\int_{\partial K} F \cdot n \, dS = 3 \cdot \frac{8\pi}{3} = 8\pi.$$

Thus, the flux is

$$\boxed{8\pi.}$$

Encouragement: "When you see a constant divergence, the divergence theorem saves you a lot of time. Nice work!"

Part (c): Compute $\int_{\partial K} \operatorname{rot}(F) \cdot dn$ (c)

A key fact is that for any smooth vector field, the divergence of its curl is zero:

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0.$$

Thus, by the divergence theorem,

$$\int_{\partial K} \operatorname{rot}(F) \cdot n \, dS = \iiint_K \nabla \cdot (\nabla \times F) \, dV = 0.$$

So, the answer is

$$\boxed{0.}$$

Part (d): Compute, using Stokes' theorem, $\int_{\partial K \setminus B} F \cdot dn$ where B is the "Boden" (base) in the x-y plane. (d)

Here, ∂K consists of several parts. The "Boden" B is the part in the x-y plane:

$$B = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\},$$

which is a half–disk.

1. **Flux through B:**
   On B we have $z = 0$. The outward normal (pointing out of K) is downward, i.e. $n = (0, 0, -1)$. Evaluate F on B:
   $$F(x, y, 0) = (x - y, \ x + y, \ xy).$$
   Then,
   $$F \cdot n = (x - y)0 + (x + y)0 + xy(-1) = -xy.$$
   In polar coordinates ($x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$) for the half–disk ($r \in [0, 2]$, $\theta \in [0, \pi]$):
   $$\int_B F \cdot n \, dS = -\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2} (r\cos\theta \, r\sin\theta) \, r \, dr \, d\theta.$$
   (The extra factor r is from the area element.)
   Notice that the angular integral involves
   $$\int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta,$$
   which is zero (by symmetry). Hence,
   $$\int_B F \cdot n \, dS = 0.$$

2. **Conclude for $\partial K \setminus B$:**
   Since the total flux through ∂K (from part (b)) is 8π and the flux through the base B is 0, it follows that
   $$\int_{\partial K \setminus B} F \cdot n \, dS = 8\pi - 0 = 8\pi.$$

Thus, using Stokes' theorem (or simply subtracting the base's contribution) we find

$$\boxed{\int_{\partial K \setminus B} F \cdot dn = 8\pi.}$$

Final tip: "When dealing with composite surfaces, sometimes it's easier to compute the flux over the whole boundary and then subtract the flux over the parts you do not want. You did it!"

Summary of Answers

- **Aufgabe 4:**
  (a) F has a potential if and only if $\alpha = 1$.

  (b) A potential for $\alpha = 1$ is
  $$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 y^3}{6} + \frac{z^3}{3}.$$

  (c) $\int_\gamma F \cdot d\gamma = \frac{1}{3}$.
- **Aufgabe 5:**
  (a) $f(u, v) = \big((e^u - 1)\cos v,\ (e^u - 1)\sin v,\ u\big),\ u \in [0, 1],\ v \in [0, 2\pi]$.

  (b) Tangents: $f_u = (e^u \cos v,\ e^u \sin v,\ 1)$ and $f_v = (-(e^u - 1)\sin v,\ (e^u - 1)\cos v,\ 0)$; Normal (nonunit): $n = (e^u - 1)(-\cos v,\ -\sin v,\ e^u)$.

  (c) $\int_A F \cdot dn = \pi(e^2 - 3)$.
- **Aufgabe 6:**
  (a) In spherical coordinates: $r \in [0, 2],\ \theta \in [0, \pi/2],\ \phi \in [0, \pi]$ with $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$.

  (b) Flux through ∂K: 8π.

  (c) $\int_{\partial K} (\nabla \times F) \cdot n\, dS = 0$.

  (d) $\int_{\partial K \setminus B} F \cdot dn = 8\pi$.

Final Thoughts

Remember that even if these problems seem lengthy, each part uses familiar tools: - **Curl and potential functions** for conservative fields, - **Parametrization and cross products** for surface integrals, - **Divergence theorem** for flux, - And sometimes **Stokes' theorem** to relate line and surface integrals.

Take your time with each step, check your computations, and don't hesitate to ask if you need clarification on any detail. You've got this—each small step builds your understanding and confidence!