1: 17.1-3

2:

How can we do better? While deterministic algorithms cannot beat $2 - \frac{1}{B}$, randomized algorithms can. First, we have to clarify what this means. If an algorithm is randomized, it may flip coins to guide its decisions. *We assume that the sequence does not adapt to these coin flips.* The cost of an algorithm on a sequence now becomes a random variable. For our benchmark, we use its expectation.

We say that a randomized algorithm for a maximization problem is α-competitive if

$$\mathbf{E}\left[c(\mathrm{ALG}(\sigma))\right] \leq \alpha \cdot c(\mathrm{OPT}(\sigma)) + b \quad \text{for any sequence } \sigma \enspace ,$$

where σ may not depend on the internal randomness of the algorithm.

To understand the idea, let us consider the following very simple randomized algorithm. We flip a coin: With probability $\frac{1}{2}$ we proceed as before and buy the skis on day B; otherwise (so also with probability $\frac{1}{2}$), we buy the skis already on day $\frac{3}{4}B$.

Theorem 1.3. *The randomized algorithm for ski rental is strictly $\frac{15}{8}$-competitive.*

Proof. We proceed as before. Again, consider an arbitrary sequence σ. We will show that $\mathbf{E}\left[c(\mathrm{ALG}(\sigma))\right] \leq \frac{15}{8} c(\mathrm{OPT}(\sigma))$. To this end, we distinguish three cases regarding the number of skiing days k in the sequence.

If $k < \frac{3}{4}B$, we always rent skis, so $\mathbf{E}\left[\mathrm{ALG}(\sigma)\right] = \mathrm{OPT}(\sigma) = k$.

If $k \geq B$, then $\mathrm{OPT}(\sigma) = B$. Our algorithm eventually always buys skis. It rents skis either $B - 1$ times or only $\frac{3}{4}B - 1$ times, depending on the outcome of the random coin flip. So, $\mathbf{E}\left[c(\mathrm{ALG}(\sigma))\right] = \frac{1}{2}(B - 1 + B) + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}B - 1 + B) \leq \frac{15}{8}B = \frac{15}{8}c(\mathrm{OPT}(\sigma))$.

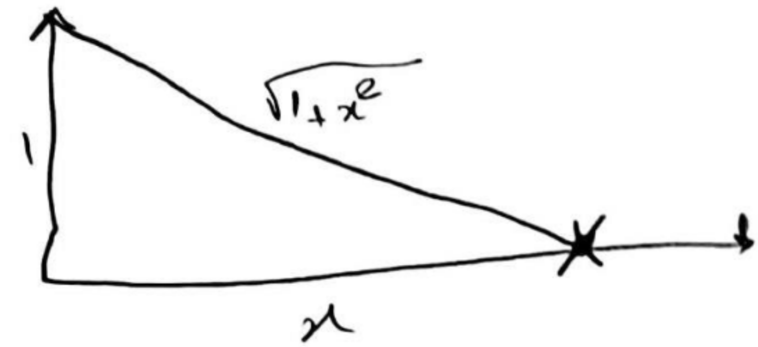
If $\frac{3}{4}B \leq k < B$, we have $\mathrm{OPT}(\sigma) = k$. With probability $\frac{1}{2}$, the algorithm rents skis all k times. With probability $\frac{1}{2}$, it rents the skis $\frac{3}{4}B - 1$ times and buys them in the following step. So $\mathbf{E}\left[c(\mathrm{ALG}(\sigma))\right] = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}B - 1 + B) \leq \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}(k + \frac{4}{3}k) = \frac{5}{3}k \leq \frac{15}{8}k = \frac{15}{8}c(\mathrm{OPT}(\sigma))$. $\square$

It is important to remark at this point that this argument only works because the sequence does not depend on the coin flip; this is where the improvement comes from. Furthermore, this is clearly not the best randomized algorithm in terms of the competitive ratio. We will see a much more structured and general approach soon.

3:

1.

①:



$$\frac{\text{نسبت این الگوریتم}}{\text{نسبت بهینه}} = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

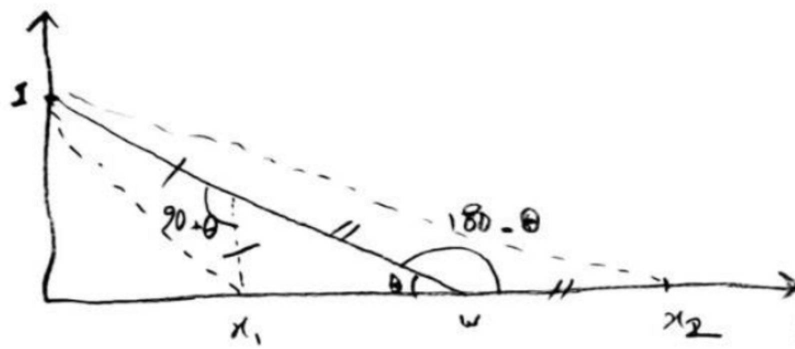
برای پیدا کردن نقطه max مشتق را برابر صفر در نظر می‌گیریم

$$\frac{d}{dx}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{نسبت رقابتی} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \simeq 1.4$$

2.

این استراتژی بدین صورت است که فرد با زاویه θ نسبت به ساحل حرکت می‌کند و وقتی به ساحل‌ها رسید مستقیم حرکت می‌کند



برای یک مثلث با زاویه مشخص

لم 1: مثلث متساوی الساقین بیشترین نسبت $\frac{\text{بزرگترین ضلع}}{\text{جموع اضلاع}}$ را دارد

با توجه به لم 1 بیشترین نسبت رقابتی در max نسبت رقابتی در نقاط x_1 و x_2 است.

لم 2: در یک مثلث متساوی الساقین هرچه بزرگترین زاویه بزرگتر باشد نسبت $\frac{\text{بزرگترین ضلع}}{\text{جموع اضلاع}}$ کوچکتر است

با توجه به لم 2 باید θ ای را انتخاب کنیم که $\min(90+\theta, 180-\theta)$ حداکثر شود

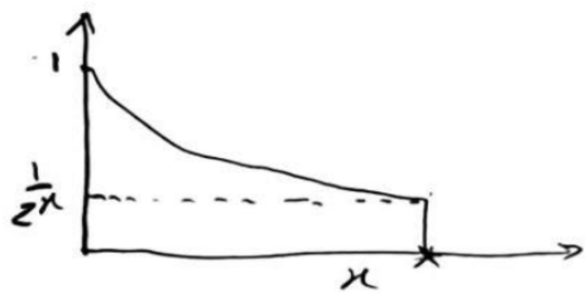
و این θ، 45° است.

نسبت رقابتی $= \frac{2\times Z}{2\times Z\times\cos(22.5)} \approx 1.08$

3.

این استراتژی این است که فرد روی تابع $\frac{1}{z^x}$ حرکت می کند

و زمانی که مغازه را دید مستقیم به سمت آن حرکت می کند



حال طول مسیر را حساب می کنیم

طول مسیر $= z^{-w} + \int_0^w \sqrt{1+\left(\left(z^{-x}\right)'\right)^2} \times dx$

برای $x=w$

$$= z^{-w} + \int_0^w \sqrt{1+\left(-z^{-x}\log(z)\right)^2} \times dx$$

حال نسبت رقابتی ی z را پیدا می کنیم

نسبت رقابتی $= \frac{\text{طول مسیر}}{\sqrt{1+x^2}}$ $\xRightarrow{\text{مشتق} = 0}$ نسبت رقابتی $= g(z)$

حال از $g(z)$ نسبت به z مشتق می گیریم تا z اپتیمال را پیدا کنیم

$g'(z)=0 \Rightarrow$ نسبت رقابتی $= g(z_{opt})$