

# Simulación en Python de dos modelos de osciladores anarmónicos utilizando el método de Runge Kutta.

## Python simulation of two models of anharmonic oscillators using the Runge Kutta method.

M. Sabogal <sup>1</sup>, H. Torres <sup>1</sup>, M. Bandera <sup>1</sup>, J. Gallardo <sup>1</sup>, J. Cardona <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Estudiante del programa de Física, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia

<sup>2</sup> Doctor en ciencias físicas, Docente del programa de Física, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia

---

### Resumen

*Con el propósito de estudiar dos modelos de osciladores anarmónicos, se utilizaron las herramientas computacionales de Python y un Runge Kutta de orden 4, permitiendo simular la evolución de los sistemas propuestos a partir de ciertas condiciones iniciales; encontrado que la evolución de éstos depende de ciertos parámetros, y cada uno presenta ciertas peculiaridades.*

**Palabras clave:** *oscilador, anarmónico, Runge Kutta.*

### Abstract

*With the purpose of studying two models of anharmonic oscillators, the Python computational tools and a Runge Kutta of order 4 were used, allowing to simulate the evolution of the proposed systems from certain initial conditions; found that the evolution of these depends on certain parameters, and each one has certain peculiarities.*

**Keywords:** *oscillator, anharmonic, Runge Kutta.*

---

## INTRODUCCIÓN

El oscilador armónico es uno de los sistemas más estudiados en la física, ya que al observar la naturaleza nos damos cuenta de que muchos procesos físicos son repetitivos, es decir presentan un comportamiento cíclico. En estos casos hablamos de movimiento periódico y lo caracterizamos mediante su período, que es el tiempo necesario para un ciclo completo del movimiento, la característica principal de un oscilador armónico es que éste tiende a regresar a un punto estable, llamado punto de equilibrio, y un ciclo completo incluye atravesar dos veces la posición de equilibrio. Una masa sujeta al extremo de un péndulo o de un resorte, la carga eléctrica

almacenada en un condensador, las cuerdas de un instrumento musical, y las moléculas de una red cristalina son ejemplos de sistemas físicos que a menudo realizan un movimiento oscilatorio.

La anterior descripción tiene aplicación en los sistemas físicos que oscilan, y es extremadamente útil como primera aproximación, sin embargo, en la naturaleza se presentan procesos y sistemas mucho mas complejos, como lo es el caso del oscilador anarmónico (no lineal), el cual oscila al rededor de su punto de equilibrio pero no realiza los ciclos en los mismos intervalos de tiempo y no tiene un periodo fijo.

## Oscilador Armónico

El movimiento armónico simple es un movimiento periódico de vaivén, en el que un cuerpo oscila de un lado al otro de su posición de equilibrio, en una dirección determinada, y en intervalos iguales de tiempo. El recorrido que consiste en ir desde una posición extrema a la otra y volver a la primera, pasando dos veces por la posición central, se denomina ciclo. El número de ciclos por segundo, o hercios (Hz), se conoce como frecuencia de la oscilación empleada en el movimiento armónico simple. El periodo de una oscilación u onda es el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de la oscilación.

Cómo un modelo de movimiento armónico simple, consideremos un bloque de masa  $m$  unido al extremo de un resorte con constante elasticidad  $k$ , con el bloque libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando el resorte no está estirado ni comprimido, el bloque queda en reposo, en la posición llamada posición de equilibrio del sistema, que se identifica como  $x = 0$ . Se sabe por la experiencia que tal sistema oscila de atrás para adelante si se perturba desde su posición de equilibrio. Donde el resorte ejercerá una fuerza sobre la masa, inversamente proporcional a su desplazamiento  $F = -kx$ , llamada fuerza restauradora. Aplicando la segunda ley de Newton, el movimiento armónico simple se define entonces en una dimensión, mediante la ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

La solución de la ecuación diferencial puede escribirse en la forma  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que se conserva la energía mecánica total del sistema.

Ahora analicemos un sistema similar al anterior (masa-resorte), para el cual el movimiento realizado por este deja de ser armónico, sin embargo, éste seguirá siendo un sistema oscilatorio debido a la fuerza restauradora ejercida por el resorte; y se omitirá la fuerza externa dependiente del tiempo. A partir de la segunda ley de Newton obtenemos la siguiente expresión:

$$F_k = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

Donde  $F_k(x)$  es la fuerza de restauración ejercida por el resorte. La ecuación anterior es la ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa. Existen muchos modelos para los cuales esta relación deja de ser lineal, en esta oportunidad analizaremos dos de estos modelos.

### Modelo 1

Cómo primer modelo, suponemos un potencial, el cual se comporta cómo un oscilador armónico para pequeños desplazamientos " $x$ ", y también contiene una perturbación que introduce un término no lineal a la fuerza para valores grandes de " $x$ ":

$$V(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2(1 - \frac{2}{3}\alpha x) \quad (2)$$

Éste no depende explícitamente del tiempo, es decir es conservativo, por lo cual es posible obtener la siguiente relación:

$$F_k(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -kx(1 - \alpha x) = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

La ecuación (3) es la EDO de segundo orden, que se debe resolver para tener pleno entendimiento del fenómeno. Mientras  $x < 1/\alpha$ , habrá una fuerza de restauración y el movimiento será periódico, aunque sea armónico (lineal) solo para oscilaciones de pequeña amplitud; sin embargo, a medida que aumenta la amplitud de la oscilación, habrá una asimetría en el movimiento a la derecha e izquierda de la posición de equilibrio. Esto es debido a la proximidad con la energía máxima del sistema, ya que el modelo que se desarrolla es conservativo, y las únicas energías presentes en el sistema son la cinética y potencial ( $K, V$ ) implicando que:

$$E_T = K + V \quad \frac{dE_T}{dt} = 0$$

Por ende un máximo de la energía total del sistema corresponderá al máximo del potencial, como la energía total es una constante y el potencial se encuentra en su máximo, la energía cinética se encontrará en su mínimo.

$$\frac{dV(x)}{dx} = kx(1 - \alpha x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{or} \quad x = \frac{1}{\alpha}$$

$$V(0) = 0 \quad V(1/\alpha) = \frac{k}{6\alpha^2} = E_\alpha$$

Si  $x > 1/\alpha$ , es decir la energía inicial del sistema es superior a  $E_\alpha$ , la fuerza se volverá repulsiva y dejara de ser un movimiento oscilatorio y pasara a ser un movimiento traslacional.

## Modelo 2

Para el segundo modelo de un oscilador no lineal, asumimos que el potencial del resorte es proporcional a cierta potencia " $p$ " arbitraria del desplazamiento " $x$ " desde el equilibrio:

$$V(x) = \frac{1}{p} kx^p \quad (4)$$

De igual manera que en el primer modelo, este es conservativo, por ende:

$$F_k(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -kx^{p-1} \quad (5)$$

Es necesario que  $p$  solo tome valores pares, tal que se asegure que la fuerza contenga una potencia impar de  $p$ , lo que garantiza que se trate con una fuerza restauradora para valores positivo o negativo de  $x$ . De la ecuación (1) y ecuación (5) se obtiene la ecuación diferencial (EDO) a resolver.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx^{p-1} \quad (6)$$

A diferencia del primer modelo, la energía total del sistema en este modelo no presenta un máximo, facilitando su estudio.

## -Interpretación física y resultados

Con el fin de estudiar los osciladores anarmonicos, se simularon los modelos 1 y 2, utilizando el lenguaje de programación Python. En primera instancia se tuvo en cuenta que estos modelos se pueden estudiar desde la perspectiva de sistemas dinámicos, teniendo esto en consideración y a partir de las expresiones previamente desarrolladas en (3) y (5), donde se puede observar que estos son sistemas conservativos, es posible describir la evolución del sistema, conociendo de que manera evoluciona la velocidad y la posición en función del tiempo, es decir encontrar un vector dinámico " $Y$ " que contenga estas cantidades. Para lograr esto se sabe que la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo y la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo,

tomando el conjunto de estas cantidades como la derivada en el tiempo del vector dinámico  $Y$ , se tiene:

$$F(Y, t) = \frac{dY}{dt} = (v, a) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt} \right)$$

Al integrar esta expresión con respecto al tiempo, se obtiene la manera como evoluciona el sistema.

$$Y_n = Y_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} F(Y, t) dt$$

A través de un runge kutta de orden 4, se calculó el vector dinámico para cada uno de los modelos en estudio, transcurrido un cierto intervalo de tiempo y partiendo de unas condiciones iniciales dadas.

#runge kutta de 4 orden utilizado

```
def rk4(f, x, t, h):
    h2=0.5*h
    for i in range(1, len(t)):
        k1= h*f(t[i-1], x[i-1])
        k2= h*f(t[i-1]+h2, x[i-1]+0.5*k1)
        k3= h*f(t[i-1]+h2, x[i-1]+0.5*k2)
        k4= h*f(t[i-1]+h, x[i-1]+k3)
        x[i]= x[i-1]+(k1+2*(k2+k3)+k4)/6
    return x
```

Para que nuestro sistema de estudio evolucionara de manera correcta, fue necesario condicionar que el espaciado del intervalo del tiempo de estudio estuviera en función de  $h$  (paso del runge kutta), tal que el avance del runge kutta concordara con el avance temporal; se tomo un valor de  $h$  estándar del orden de 0,01.

En el modelo 2 se varió el valor de  $p$  desde 2 hasta 12, tomando solo los pares; y las fuerzas anarmonicas en el modelo 1 se variaron en un rango tal que  $0 \leq \alpha x \leq 1$ , excluyendo las fuerzas dependientes del tiempo. Debido a que los modelos 1 y 2 son osciladores armónicos para  $\alpha x = 0$  y  $p = 2$  respectivamente se tomó como condiciones iniciales  $x_0 = A \cos(\omega t + \phi)$  y  $v_0 = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$ .

Se realizó un vector de dos columnas con la cantidad de filas correspondiente a la longitud de  $t$ , en el cual la primera casilla corresponde a las condiciones iniciales, y se almacenará lo integrado

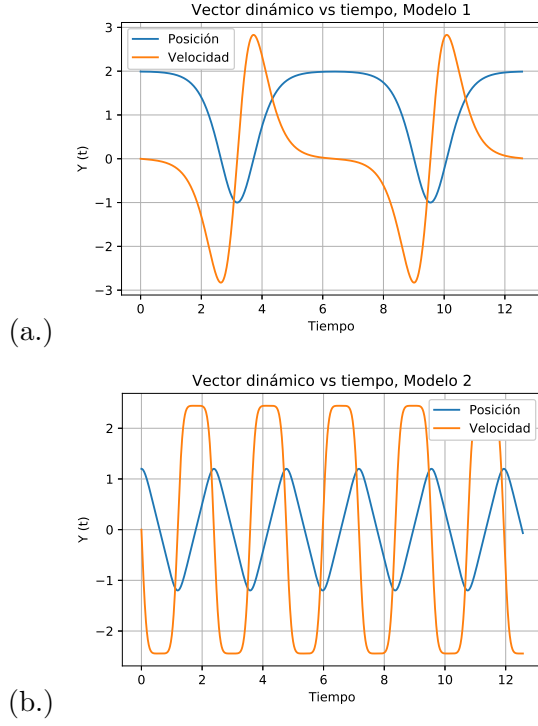


Figura 1: Evolución en el tiempo de un oscilador anarmónico de  $m = 1$  y  $k = 6$ , que parte de las condiciones iniciales  $(x_0, v_0) = (A, 0)$ : (a.)  $\alpha = 0,5$  y  $A = 1,99$  ; (b.)  $p = 6$  y  $A = 1,2$

a través del runge kutta en este vector. El vector dinámico calculado por el runge kuta contiene las posiciones y velocidades del sistema de estudio, al graficar este arreglo de datos contra el tiempo se verifica que la masa experimenta su máxima rapidez cuando esta se encuentra en la posición  $x = 0$  en ambos modelos, como se aprecia en la figura 1.

Esto es debido a la conservación de la energía en ambos sistemas; con la intención de apreciar y comprobar esto, se gráfico la energía mecánica del sistema en función del tiempo, siendo esta la suma de todas las energías presentes en el fenómeno, en este caso la suma de la energía cinética y la energía potencial elástica; las cuales se graficarón en función del tiempo, cómo se aprecia en la figura 2, donde la energía mecánica presenta el comportamiento de una línea recta con pendiente cero, es decir una constante.

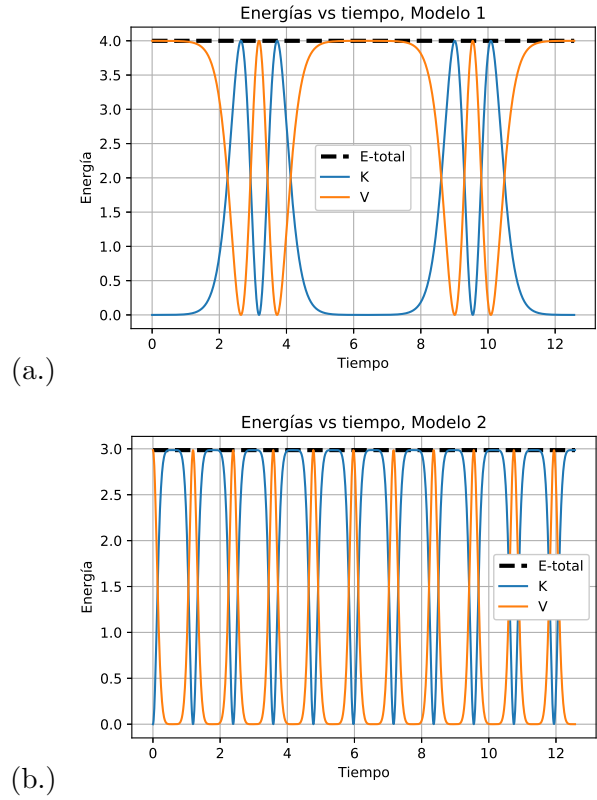
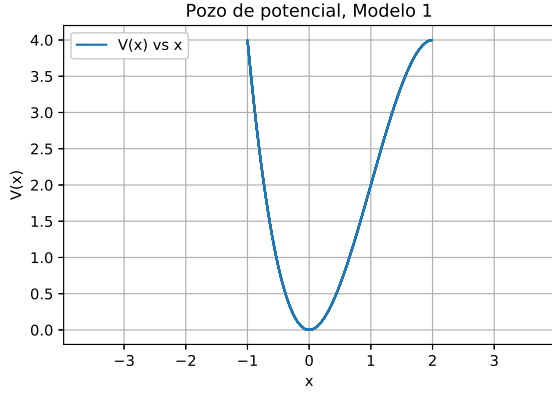


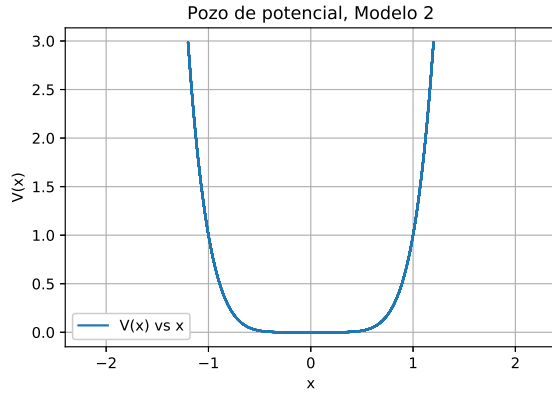
Figura 2: Energías en función del tiempo de un oscilador anarmónico de  $m = 1$  y  $k = 6$ , que parte de las condiciones iniciales  $(x_0, v_0) = (A, 0)$ : (a.)  $\alpha = 0,5$  y  $A = 1,99$  ; (b.)  $p = 6$  y  $A = 1,2$

Al graficar el potencial  $V(x)$  de cada modelo, presentes en la figura 3, se observó en el modelo uno la asimetría del movimiento y como cambia cuando  $x$  se acerca a  $1/\alpha$ ; mientras en el segundo modelo se observa que cuando  $p = 2$  el oscilador es armónico, y que para  $p = 6$  es casi un pozo cuadrado con la masa moviéndose casi libremente hasta que toca la pared en  $x \simeq \pm 1$ . Independientemente del valor de  $p$ , el movimiento siempre será periódico, pero será armónico solo para  $p = 2$ .

Al variar las condiciones iniciales (en nuestro caso solo la amplitud) del movimiento se puede apreciar otra característica de estos osciladores anarmónicos, los cuales son *nonisochronous* cómo se aprecia en la figura 4, es decir para diferentes amplitudes iniciales se encuentran diferentes soluciones con periodos distintos.



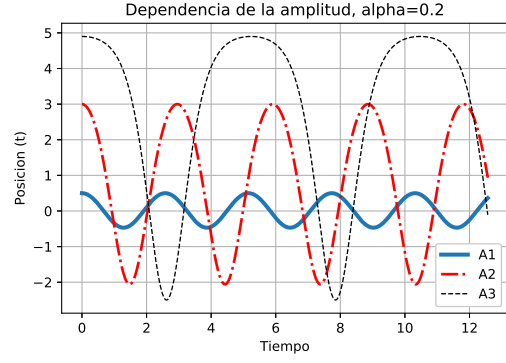
(a.)



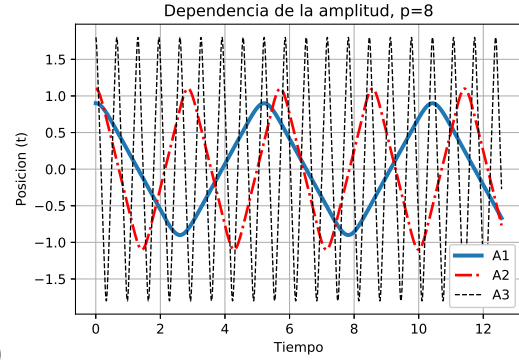
(b.)

Figura 3: Pozo de potencial de un oscilador anarmónico de  $m = 1$  y  $k = 6$ , que parte de las condiciones iniciales  $(x_0, v_0) = (A, 0)$ : (a.)  $\alpha = 0,5$  y  $A = 1,99$  ; (b.)  $p = 6$  y  $A = 1,2$

Se puede apreciar que el comportamiento de cada modelo es diferente al aumentar la amplitud, mientras que en el primer modelo el periodo parece ser proporcional a la amplitud, en el segundo modelo se presenta lo contrario. En aras de tener un mejor entendimiento de la dependencia del periodo en función de la amplitud inicial para cada oscilador, se construyó un algoritmo que permitiera calcular el periodo de sus oscilaciones, registrando los tiempos en el que el oscilador pasa por el punto de equilibrio, y obteniendo la diferencia temporal entre éste tiempo y el tiempo cuando éste completa el ciclo; para esto se utilizó el hecho de que al ser nuestro punto de equilibrio, el origen, es decir  $x = 0$ , la posición del oscilador tendrá un cambio de signo al pasar por este punto. Ya que la descripción de evolución del modelo es obtenida a través del runge kutta, ésta no es infinitesimal (continua), por ende la manera elegida para obtener una buena



(a.)

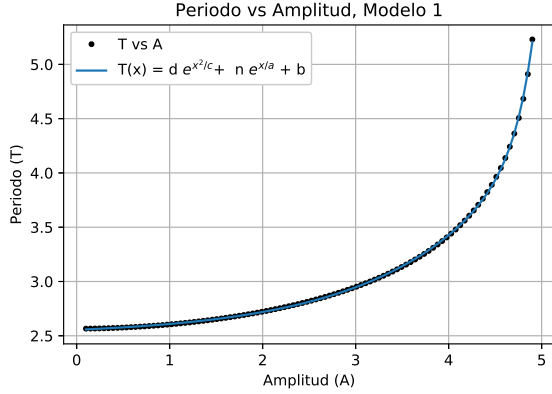


(b.)

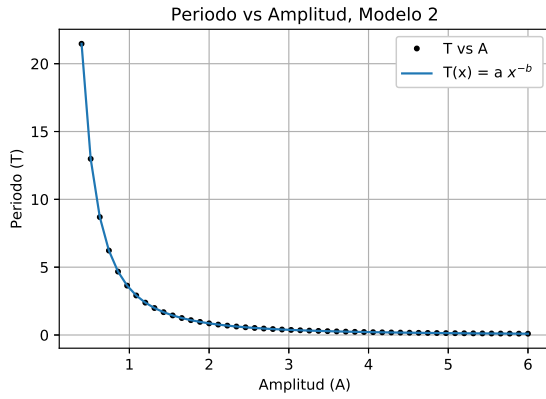
Figura 4: Posiciones versus tiempo para un oscilador anarmónico de  $m = 1$  y  $k = 6$ , que parte de las condiciones iniciales  $(x_0, v_0) = (A, 0)$ : (a.)  $\alpha = 0,2$   $A_1 = 0,5$   $A_2 = 3$   $A_3 = 4,9$  ; (b.)  $p = 8$   $A_1 = 0,9$   $A_2 = 1,1$   $A_3 = 1,8$

aproximación de estos tiempos ( $t^{x=0}$ ), fue tomar los tiempos de los dos puntos, uno antes y otro después del cambio de signo, es decir las dos posiciones calculadas entre el cero absoluto, y encontrar el punto medio entre estos. Puesto que estos son osciladores anarmónicos, sus movimientos pueden ser asimétricos, ocasionando que no se deformen de igual manera en cada lado, con respecto al punto de equilibrio como se aprecia en la figura 4-a; teniendo esto en cuenta, se calculó el periodo de las oscilaciones, tomando el promedio de las diferencia temporales entre el tiempo  $t_i^{x=0}$ , y  $t_{i+2}^{x=0}$ , puesto que en este último es cuando completa el ciclo con respecto al  $i$ -ésimo.

Haciendo uso del algoritmo para encontrar el periodo de las oscilaciones y variando las amplitudes, se determinó la manera como los periodos dependen de las amplitudes iniciales en cada modelo, como se aprecia en las gráficas (a.) y (b.) de la figura 5.



(a.)



(b.)

Figura 5: Periodo en función de la amplitud inicial para un oscilador anarmónico de  $m = 1$  y  $k = 6$ , que parte de las condiciones iniciales  $(x_0, v_0) = (A, 0)$ : (a.)  $\alpha = 0,2$  (b.)  $p = 6$

Debido a que no se conocen las funciones que modelan estos comportamientos, se realizó un fitting, utilizando la función curve-fit de la librería `scipy.optimize` de python y proponiendo una familia de funciones en cada caso, la cual podría presentar un comportamiento similar; de esta manera se obtuvieron los parámetros característicos de estas funciones, las cuales se observan en la figura 5.

Al variar parámetros como  $\alpha$  y  $T_o$  en modelo 1, y  $p$  y  $T_o$  en el modelo 2, se observó una variación de los parámetros característicos de las funciones en términos de estos valores, permitiendo obtener una expresión analítica general que describe la manera como el periodo varía (aproximadamente) en función de la amplitud para cada modelo.

Para el modelo 1 se encontró la siguiente expresi-

sión, siendo  $T_o$  el periodo del oscilador si éste fuera armónico, es decir  $2\pi/\sqrt{k/m}$ :

$$T(A; T_o, \alpha) \approx (k_1 e^{A^2/k_2} + k_3 e^{A/k_4} + k_5) T_o$$

Donde:

$$k_1 = a_1 \alpha^{-b_1} \quad k_2 = a_2 e^{b_2 \alpha} \quad k_3 = a_3 e^{b_3 \alpha^2}$$

$$k_4 = a_4 e^{b_4 \alpha} \quad k_5 = a_5 e^{b_5 \alpha}$$

Y sus constantes presentan los valores:

$a_1$	$1.303e^{-13}$	$b_1$	9.645
$a_2$	14.838	$b_2$	-10.485
$a_3$	0.023	$b_3$	-3.827
$a_4$	3.277	$b_4$	-4.334
$a_5$	0.962	$b_5$	0.071

De manera similar para el segundo modelo se encontró:

$$T(A; T_o, p) \approx (k_1^n A^{-n}) T_o$$

Donde:

$$n = (p - 2)/2 \quad k_1 = a_1 e^{b_1 n}$$

Y las constantes de ésta última presentan los valores:

$a_1$	1.196	$b_1$	-0.016
-------	-------	-------	--------

Ambos modelos presentan cierta peculiaridad, en el modelo 1 se observó que a medida que la energía inicial del sistema se aproxima a la energía  $E_\alpha = \frac{k}{6\alpha^2}$ , la cual es el máximo de su potencial, el movimiento sigue siendo oscilatorio pero no armónico, mientras que el modelo 2 ocurre esto mismo pero para cuando  $p > 2$ , siendo más notorio a partir de  $p > 6$ , es decir los desplazamientos (oscilaciones) y las energías en función del tiempo ya no son descritas de manera sinusoidal, especialmente en el caso del modelo 1, donde se observa una mayor asimetría.

Para el modelo 1, se verificó que al alcanzar su máximo en la energía  $E_\alpha$ , es decir cuando  $x = \frac{1}{\alpha}$ , cesa la acción de una fuerza restaurativa, ocasionando que el movimiento pase de oscilatorio a traslacional, donde una sola oscilación toma un tiempo infinito, pues a partir de este punto  $x > \frac{1}{\alpha}$  la fuerza cambia de restaurativa a repulsiva.

## CONCLUSIÓN

Mediante las herramientas computacionales de Python, y un runge kutta de orden 4, se pudo estudiar y modelar dos sistemas físicos que presentan un comportamiento oscilatorio anarmonico. En el primer modelo se comprobó que para energías superiores a  $E_\alpha$  el movimiento del sistema deja de ser oscilatorio y pasa a ser un movimiento traslacional, de igual manera se observo que los modelos son *noni-sochronous*, encontrando una dependencia diferente del periodo en función de la amplitud inicial en cada caso, también se observo en el modelo 2 que el movimiento deja de ser armónico para  $p$  pares mayores que dos, a diferencia del primer modelo este presenta mayor estabilidad en un rango de estudio mas amplio.

## Referencias

- [ 1 ] Landau, R. H., Páez, M. J, and Bordelanu, C. C. Computational Physics: Problem Solving with Computers. Págs.195-209
- [ 2 ] Sears, F. W., Ford, A. L., and Freedman, R. A. (2009). Física universitaria: con física moderna (Vol. 1). Pearson educación. Págs.419-430
- [ 3 ] Serway, R. A., Jewett, J. W., Hernández, A. E. G., and López, E. F. (2009). Física para ciencias e ingeniería (Vol. 1). Cengage Learning. Págs.419-421