



**ANÁLISIS COSMOLOGÍCO DEL MODELO HOLOGRÁFICO DE ENERGÍA  
OScura DE BARROW USANDO EL CORTE INFRARROJO DE  
GRANDA-OLIVEROS**

**MIGUEL ANTONIO SABOGAL GARCÍA**

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Físico**

**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
PROGRAMA DE FÍSICA  
Barranquilla, Colombia**

**Junio, 2022**

**ANÁLISIS COSMOLÓGICO DEL MODELO HOLOGRÁFICO DE ENERGÍA  
OSCURA DE BARROW USANDO EL CORTE INFRARROJO DE  
GRANDA-OLIVEROS**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Físico

**MIGUEL ANTONIO SABOGAL GARCÍA**

**Director**

**ALEXANDER OLIVEROS GARCÍA, Ph.D**

**Codirector**

**MARIO ACERO ORTEGA, Ph.D**



**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
PROGRAMA DE FÍSICA  
Barranquilla, Colombia  
Junio, 2022**

**Nota de aceptación:**

4.5/5.0

**Jurados:**

Ubaldo Molina Redondo, MSc.

Erick Tuiran Otero, Ph.D.

## Agradecimientos

*A mis padres Miguel y Peithi, por apoyarme y guiarme en cada paso. Por inculcar sus mejores valores en mi. Por ser ejemplos de esfuerzo, determinación y pasión. Por ser mi motor en los momentos mas difíciles, pero sobre todo, por darme su amor incondicional.*

*A mis maestros A. Oliveros y M. A. Acero, por brindarme la oportunidad y el honor de trabajar a su lado. Por su apoyo, dedicación y compromiso en mi proceso. Por guiarme en el ámbito académico, profesional, humano, y sobre todo, ser excelentes ejemplos a seguir.*

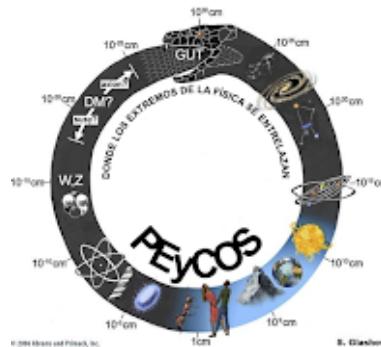
*A mi novia Leidy, por su compañía cada día. Por los incontables momentos felices a su lado que me ayudan a continuar, y en especial por incentivar me a sacar siempre lo mejor de mi.*

*A mis tíos Sandra y Edwar, por abrirme las puertas de su hogar y poder empezar a cumplir mi sueño en una nueva ciudad. A toda mi familia, la que siempre me dio todo su apoyo.*

*A mis amigos y compañeros, Hugo, Mauricio, Ian Calo, Jóse y Juan, por tantas aventuras, partidos, batallas, debates, programadas y risas juntos, sin duda, su compañía vale oro.*

*A la profesora D. Padilla por creer en mi y ayudarme en el momento que más lo necesitaba. A los profesores C. Mejía, U. Molina, J. Cardona, F. Racedo, W. Cardona, pero en especial al maestro J. L. Navarro Estrada, quien me guío a lo largo de la carrera, sacando lo mejor de mí, y me transmitió su pasión por esta bella rama del conocimiento. Finalmente ¡Muchas Gracias! a todos los docentes del excelente programa de Física de la*

*Universidad del Atlántico.*



*Dedicatoria*

*A mis abuelos Miguel y Jonathan.*

# Índice general

<b>Resumen</b> . . . . .	1
<b>Abstract</b> . . . . .	2
<b>1 Introducción</b>	3
<b>2 Bases de la cosmología moderna</b>	6
2.1 Principio cosmológico . . . . .	6
2.2 Ecuaciones de Friedmann . . . . .	7
2.3 Problema de la energía oscura o constante cosmológica . . . . .	9
<b>3 Energía oscura holográfica</b>	13
3.1 Principio holográfico . . . . .	13
3.2 Densidad de energía oscura holográfica . . . . .	14
3.3 Corte infrarrojo de Granda-Oliveros . . . . .	16
3.4 Energía oscura holográfica de Barrow . . . . .	16
3.4.1 Entropía de Barrow . . . . .	16
3.4.2 Densidad de energía oscura holográfica de Barrow . . . . .	17
<b>4 Metodología</b>	18
4.1 Construcción teórica . . . . .	18
4.2 Implementación computacional . . . . .	19
<b>5 Modelo propuesto</b>	20
5.1 Modelo teórico . . . . .	20
5.2 Evolución del parámetro de Hubble . . . . .	22

5.3	Parámetro de desaceleración . . . . .	23
5.4	Parámetro de la ecuación de estado . . . . .	25
5.5	Estabilidad . . . . .	27
5.6	Eras de dominancia . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Ajuste de los parámetros del modelo</b>	<b>35</b>
6.1	Espacio de parámetros permitido . . . . .	35
6.2	Ajuste a partir de los datos observacionales de $H(z)$ . . . . .	38
6.3	Ajuste sobre la Magnitud absoluta (SNIa) . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>Apéndice A Ecuaciones de Friedmann</b>		<b>54</b>
<b>Referencias bibliográficas</b>		<b>66</b>

# Índice de figuras

2.1	Prueba de la expansión del universo, donde se observa la relación velocidad-distancia entre nebulosas extragalácticas. . . . .	10
2.2	Diagrama de Hubble para las Supernovas Tipo Ia, graficando la magnitud efectiva $m_b$ contra el corrimiento al rojo $z$ . . . . .	11
3.1	Representación esquemática del principio holográfico aplicado a un agujero negro . . . . .	14
5.1	Evolución del parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo $z$ , variando $\Delta$ . . . . .	21
5.2	Evolución del Parámetro de Hubble como función del corrimiento al rojo $z$ variando $\Delta$ , y $H(z)$ del modelo $\Lambda$ -CDM a $z$ grandes . . . . .	22
5.3	Parámetro de desaceleración en función de $z$ , variando $\Delta$ . . . . .	23
5.4	Parámetro de desaceleración en función de $z$ , variando $\beta$ . . . . .	24
5.5	Parámetro de desaceleración en función de $z$ , variando $\alpha$ . . . . .	25
5.6	Evolución del parámetro de la ecuación de estado para la energía oscura, variando $\Delta$ . . . . .	26
5.7	Ecuación de estado para la energía oscura en función de $z$ , variando $\beta$ . .	27
5.8	Ecuación de estado para la energía oscura en función de $z$ , variando $\alpha$ . .	28
5.9	Velocidad del sonido al cuadrado por su signo en función de $z$ , para diferentes valores de $\Delta$ . . . . .	29
5.10	Velocidad del sonido al cuadrado por su signo en función de $z$ , variando (a) $\beta$ y (b) $\alpha$ . . . . .	30

5.11	Zonas de estabilidad en el espacio de parámetros $(\alpha, \beta)$ variando $\Delta$	31
5.12	Zonas de estabilidad en el espacio de parámetros $(\alpha, \beta)$ variando $\Delta$	32
5.13	Evolución de las densidades de materia, energía oscura y radiación, para diferentes valores de $\Delta$ .	33
5.14	Evolución de la cantidad de energía oscura, para diferentes valores de $\Delta$ .	34
5.15	Evolución de la densidad de energía oscura para diferentes valores de $\Delta$ .	34
6.1	Zonas permitidas en el espacio de parámetros $(\alpha, \beta)$ variando $\Delta$	36
6.2	Espacio 3-D de parámetros $(\alpha, \beta, \Delta)$	39
6.3	Intervalos de confianza en el espacio $(\alpha, \beta)$ a un 68,27 %, 95,45 %, 99,73 % C.L.	41
6.4	Intervalos de confianza en el espacio $(\alpha, \Delta)$ a un 68,27 %, 95,45 %, 99,73 % C.L.	42
6.5	Intervalos de confianza en el espacio $(\beta, \Delta)$ a un 68,27 %, 95,45 %, 99,73 % C.L.	43
6.6	Parámetro de Hubble para el modelo cosmológico de estudio utilizando los valores del mejor ajuste obtenido y los datos observacionales de $H(z)$ . Las regiones sombreadas representan los niveles de confianza de $1\sigma$ y $3\sigma$ para la variación del parámetro $\alpha$	44
6.7	Parámetro de Hubble para el modelo cosmológico de estudio utilizando los valores del mejor ajuste obtenido y los datos observacionales de $H(z)$ . Las regiones sombreadas representan los niveles de confianza de $1\sigma$ y $3\sigma$ para la variación del parámetro $\beta$	45
6.8	Parámetro de Hubble para el modelo cosmológico de estudio utilizando los valores del mejor ajuste obtenido y los datos observacionales de $H(z)$ . La región sombreada representa el nivel de confianza $3\sigma$ para la variación de los tres parámetros $\alpha$ , $\beta$ y $\Delta$ simultáneamente.	46
6.9	Intervalos de confianza unidimensionales para $M$ a un 68,27 %, 95,45 %, 99,73 % C.L.	49

6.10 Magnitud aparente $m_b(z)$ del modelo cosmológico de estudio utilizando los valores del mejor ajuste obtenido, y el valor mejor ajustado de $M$ , junto al conjunto de datos de SNIa . . . . .	50
---	----

## Índice de tablas

6.1 Rango del análisis permitido para los parámetros del modelo. . . . .	36
6.2 Datos observacionales de $H(z) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , Los métodos I y II representan los cronómetros cósmicos y del tamaño radial de BAO respectivamente. . .	37
6.3 Mejores valores ajustados para los parámetros $\alpha$ , $\beta$ y $\Delta$ con un nivel de confianza de $1\sigma$ , $2\sigma$ y $3\sigma$ , utilizando los datos observacionales de $H(z)$ . . .	40
6.4 Valor del parámetro de la ecuación de estado actual $w_0$ , parámetro de desaceleración actual $q_0$ , corrimiento al rojo de transición $z_t$ y el estimado de la edad del universo $t_0$ , para el modelo de estudio utilizando los valores del mejor ajustes dentro de una variación de $1\sigma$ . . . . .	40
6.5 Mejor valor ajustado para la magnitud absoluta $M$ de las SNIa, con un nivel de confianza de $1\sigma$ , $2\sigma$ y $3\sigma$ , utilizando los parámetros del modelo con el mejor ajuste. . . . .	49

## Resumen

La actual expansión acelerada del universo frecuentemente es atribuida a la energía oscura, y a lo largo de los años distintos modelos han surgido con el objetivo de dar explicación a esta misteriosa componente. Uno de los acercamientos al problema de la energía oscura más tratado en la literatura lo constituye el principio holográfico. Inspirado en este principio, en el presente trabajo se realiza un análisis de la evolución cosmológica del universo usando un modelo holográfico de energía oscura, con el corte infrarrojo de Granda-Oliveros en el escenario de Barrow. Este último es un modelo holográfico de energía oscura basado en la entropía de Barrow propuesta recientemente, que surge de la modificación de la superficie del agujero negro debido a efectos gravitacionales-cuánticos, cuantificados por un nuevo parámetro  $\Delta$ . Para el análisis de este nuevo escenario se consideró un universo plano, homogéneo e isótropo, modelando su contenido como un fluido perfecto. Se determinó la ecuación diferencial para la evolución de  $H^2(z)$  y se calcularon numéricamente las cantidades asociadas a los modelos de energía oscura. Resaltando que este escenario reproduce un régimen de expansión acelerada del universo en tiempos tardíos, describe la historia térmica del universo, con la secuencia de eras de radiación, materia y energía oscura. Adicionalmente, se evidencia que el nuevo exponente de Barrow  $\Delta$  afecta al parámetro de la ecuación de estado provocando transiciones del régimen de quintaesencia al fantasma. Se analizó cómo afecta  $\Delta$  la estabilidad del modelo ante pequeñas perturbaciones. Por último, teniendo en cuenta los datos cosmológicos más recientes de  $H(z)$  se ajustaron los parámetros del modelo.

**Palabras clave:** Expansión acelerada, principio holográfico, entropía de Barrow, efectos gravitacionales-cuánticos.

## Abstract

The current accelerated expansion of the universe is often attributed to dark energy, and over the years different models have emerged with the aim of explaining this mysterious component. One of the approaches most discussed in the literature to the dark energy problem is the holographic principle. Inspired by this principle, in the present work is executed an analysis of the universe cosmological evolution using a holographic model of dark energy, with the infrared cut of Granda-Oliveros in the Barrow scenario. The latter is a holographic dark energy model based in the recently proposed Barrow entropy, which arises from the modification of the black hole surface due to gravitational-quantum effects, quantified by a new parameter  $\Delta$ . For the analysis of this new scenario, a flat, homogeneous and isotropic universe was considered, and its content was modeled as a perfect fluid. The differential equation for the evolution of  $H^2(z)$  was determined and the quantities associated with the dark energy models were calculated numerically. Highlighting that this scenario reproduces an accelerated expansion regime of the universe in late times, it describes the universe the thermal history , with the sequence eras of radiation, matter and dark energy. Additionally, it is evident that the new Barrow exponent  $\Delta$  affects the state equation parameter causing transitions from the quintessence to the phantom regime. It was analyzed how  $\Delta$  affects the stability of the model in the face of small perturbations. Finally, taking into account the most recent cosmological data of  $H(z)$ , the model parameters were constraint.

**Key words:** Accelerated expansion, holographic principle, Barrow entropy, gravitational-quantum effects.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

El descubrimiento de la expansión acelerada del universo [1–7] es uno de los acontecimientos cosmológicos más importante del siglo XX. Esta aceleración es atribuida a la existencia de una misteriosa componente que posee una presión negativa, que se ha denominado energía oscura; representando aproximadamente el 70 % del contenido del universo según las observaciones más recientes [8, 9]. El candidato más simple para representar la energía oscura es la constante cosmológica [10]; sin embargo, a pesar de ser consistente con los datos observacionales presenta grandes inconsistencias, como lo son el problema del ajuste fino [11, 12] y el problema de la coincidencia [13]. Diversos modelos han surgido con propuestas para dar explicación a la naturaleza de la energía oscura. Se pueden encontrar revisiones extensas de estos modelos en [11, 14]. Quizás, uno de los más trascendentales tiene sus bases en la gravitación cuántica y es conocido como el principio holográfico [15], el cual es fundamental en teorías de la unificación. Este principio establece que la entropía de un sistema no incrementa con su volumen sino con el área de su superficie, semejante a la entropía de Bekenstein-Hawking para un agujero negro [16, 17]. Al aplicar el principio holográfico a la cosmología, se impone un límite superior en la entropía del universo [18], y junto con el hecho de que en una teoría cuántica de campos existe una relación entre un corte ultravioleta (UV) y un corte infrarrojo (IR) [19], se establece que en un contexto cosmológico la

densidad de energía holográfica  $\rho_\Lambda$  corresponderá a la densidad de energía oscura, la cual dependerá solo de la masa de Planck reducida  $M_p$  y de la escala de longitud cosmológica  $L$ .

La elección del corte infrarrojo juega un papel crucial en el comportamiento del modelo y en su consistencia. En particular, si se considera el corte infrarrojo  $H = L^{-1}$ , se resuelve el problema del ajuste, pero no se reproduce un régimen de expansión acelerado [20], al igual que con la elección del horizonte de partículas como corte IR [21]. Al considerar como corte infrarrojo el horizonte de eventos futuro [22], se obtiene la expansión acelerada del universo actual; sin embargo, al depender de cantidades no locales presenta un serio problema con el principio de causalidad. Con la intención de solventar este problema, Granda y Oliveros [23] proponen una densidad de energía oscura que contiene al cuadrado del parámetro de Hubble, pero añadiendo la derivada temporal del mismo, la cual permite generar un régimen de expansión acelerada del universo y evitar el problema de causalidad.

Recientemente, Barrow, inspirado en las representaciones del virus Covid-19, propone una nueva expresión para la entropía de un agujero negro deformada debido a efectos gravitacionales cuánticos [24], cuantificada por un nuevo parámetro  $\Delta$ . Posteriormente, aplicando el principio holográfico en conjunto con la entropía fractal de Barrow, Saridakis [25] postula una energía oscura holográfica extendida que incluye la energía oscura holográfica básica. Al utilizar el horizonte de eventos futuro como corte IR este modelo describe la historia térmica del universo, donde el exponente de Barrow ( $\Delta$ ), afecta la ecuación de estado y de acuerdo a su valor puede llevarlo a estar en el régimen quintaesencia [26], fantasma [27] o experimentar una transición entre ambos [25]. No obstante, al utilizar el horizonte de eventos futuro en esta formulación se sigue presentando el problema de causalidad.

El objetivo fundamental del presente trabajo, es realizar un análisis de la evolución cosmológica del universo en el escenario de la energía oscura holográfica de Barrow empleando el corte infrarrojo de Granda-Oliveros. Para ello se deducen las ecuaciones de Friedmann en el modelo propuesto, a partir de las cuales se determina si es posible obtener un régimen de

---

expansión acelerada del universo en tiempos tardíos y la estabilidad del modelo. Esto con el fin de obtener un modelo que sea fenomenológicamente consistente y que no presente el problema de causalidad, convirtiéndolo en un posible candidato para mejorar el entendimiento de la expansión del universo. Finalmente, mediante un ajuste de datos se determinan los valores de los parámetros que rigen al modelo propuesto teniendo en cuenta los datos cosmológicos observacionales más recientes de  $H(z)$ .

El trabajo ésta estructurado de la siguiente manera: en los capítulos [2](#) y [3](#), se proporciona el fundamento teórico dentro del cual se enmarca el trabajo, presentando las bases, formalismo y definiciones necesarias para el desarrollo teórico del modelo. En el capítulo [4](#) se describe la metodología. En el capítulo [5](#) se presenta el modelo de estudio y su fenomenología, mientras que en capítulo [6](#) se presentan los resultados del ajuste. Por ultimo en el capítulo [7](#) se presentan las conclusiones.

## CAPÍTULO 2

### BASES DE LA COSMOLOGÍA MODERNA

#### 2.1. Principio cosmológico

En el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM<sup>a</sup> se asume el principio cosmológico, el cual establece que el universo es homogéneo e isótropo a gran escala, en otros términos, el universo visible parece el mismo en todas partes y en todas las direcciones, al menos, si se observa a distancias superiores a  $300 h^{-1}$ Mpc<sup>b</sup> [28]. La elección más general de la métrica que satisface estas condiciones es la métrica de Friedmann, Robertson-Walker<sup>c</sup> (FRW) [29–33],

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr}{1 - kr^2} + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2 \right) \right] , \quad (2.1)$$

siendo  $k$  la curvatura de las secciones espaciales del espacio-tiempo, la cual puede tomar los posibles valores de  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ , y  $a(t)$  es el factor de escala. Las coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son usualmente conocidas como coordenadas de co-movimiento.

---

<sup>a</sup>Donde  $\Lambda$  corresponde a la constante cosmológica, y CDM a materia oscura fría (no relativista) por sus siglas en inglés.

<sup>b</sup> $h = H_0/(100 km/s/Mpc)$ , Mpc es un megapársec (3.26 millones de años luz) y  $H_0$  es el parámetro de Hubble actual.

<sup>c</sup>A lo largo de este documento se utilizará la signatura  $(-, +, +, +)$ .

## 2.2. Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones diferenciales que determinan el factor de escala  $a(t)$  y la densidad de materia en el universo, se obtienen a partir de las ecuaciones de campo de Einstein [34],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (2.2)$$

donde se ha tomado la velocidad de luz  $c$  igual a la unidad.  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci el cual depende de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y de sus derivadas.  $R$  es el escalar de Ricci, y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-impulso el cual describe el contenido del universo. Considerando el contenido del universo a gran escala como un fluido perfecto, el tensor energía-impulso toma la forma,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} , \quad (2.3)$$

siendo  $U_\nu$  la 4-velocidad del fluido,  $\rho$  la densidad de energía del fluido en un marco de referencia donde el fluido está en reposo y  $p$  es la presión del fluido en ese mismo marco de referencia. Sustituyendo las Ecs. (2.1) y (2.3) en la Ec. (2.2), se encuentran las ecuaciones de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} , \quad (2.4)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(p + \rho) + \frac{k}{a^2} , \quad (2.5)$$

donde  $H = \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble,  $\rho$  y  $p$  son respectivamente la densidad de energía y presión total de todas las posibles formas de energía en el universo (ver Apéndice A.40).

Considerando la densidad critica como  $\rho_c = 3H^2(t)/8\pi G$ , se puede reescribir la Ec. (2.4) de la siguiente forma:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(aH)^2} , \quad (2.6)$$

donde  $\Omega(t) = \rho(t)/\rho_c(t)$  corresponde al parámetro de densidad adimensional. De esta última expresión es evidente que la distribución de materia en el universo determina la geometría espacial del mismo. Acorde a las observaciones mas recientes [9], nuestro universo es espacialmente plano ( $k = 0$ ) por lo que  $\Omega \simeq 1$ .

De la Ec. (2.5) se observa que la evolución del universo depende de la densidad y presión, por lo que es necesario indicar cómo cambian estas cantidades en el tiempo. Partiendo de la condición de conservación del tensor energía-impulso,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.7)$$

se puede obtener la ecuación de continuidad para la densidad de energía tomando en cuenta su componente temporal ( $\mu = 0$ ), donde las componentes espaciales ( $\mu \neq 0$ ) conducen a una identidad, por lo tanto, al desarrollar la componente temporal se obtiene,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 . \quad (2.8)$$

Si se describen la radiación y materia como fluidos barotrópicos, los cuales presentan una ecuación de estado de la forma,

$$p = w\rho , \quad (2.9)$$

donde  $w$  es el parámetro de la ecuación de estado que relaciona directamente la presión con la densidad del fluido. Sustituyendo la Ec. (2.9) en Ec. (2.8) se obtiene (ver Apéndice A.43):

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} . \quad (2.10)$$

En el caso de un universo dominado por radiación  $w = 1/3$ . Para el caso de materia (tipo polvo)  $w = 0$ , es decir  $p_m = 0$ . Por lo tanto:

$$\rho_r \propto a^{-4} , \quad (2.11)$$

$$\rho_m \propto a^{-3} , \quad (2.12)$$

donde  $\rho_r$  y  $\rho_m$  corresponden a la densidad de radiación y materia respectivamente.

A partir de las ecuaciones de Friedmann Ec. (2.4) y Ec. (2.5), y considerando  $k = 0$  se puede obtener (ver Apéndice A.35 ),

$$\left( \frac{\ddot{a}}{a} \right) = \frac{-4\pi G}{3} (\rho + 3p) , \quad (2.13)$$

donde es evidente que para un régimen de expansión acelerada ( $\ddot{a}/a > 0$ ) es necesario que  $\rho + 3p < 0$ , sin embargo, ninguna de las cantidades antes discutidas (radiación o materia) cumple con esta condición. Por lo que es necesario introducir una nueva componente que presente presión negativa, y el parámetro de su ecuación de estado sea  $w < -1/3$ .

Con el fin de estudiar la expansión acelerada del universo, existe otro parámetro de mucha importancia en cosmología, el denominado parámetro de desaceleración, definido como,

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (2.14)$$

el cual surge al realizar una expansión en serie de Taylor de  $a(t)$ , y permite medir de manera adimensional la razón de cambio de la tasa de expansión que experimenta el universo. Expresado en términos de parámetro de Hubble  $H$  y su derivada temporal, toma la forma,

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.15)$$

### 2.3. Problema de la energía oscura o constante cosmológica

De la primera ecuación de Friedmann Ec. (2.4) se puede inferir que la densidad de energía  $\rho$  hace que el universo cambie su volumen, en un principio el cambio puede ser de expansión o contracción. En su momento, para mantener un universo estático Einstein añade la constante cosmológica  $\Lambda$  a sus ecuaciones de campo de la Relatividad General [34], sin embargo, ésta sería descartada temporalmente hasta cuando en 1929 Hubble demostrara que el universo se encuentra en expansión [35], a partir de la relación velocidad-distancia entre nebulosas extragalácticas como se observa en la Figura 2.1. Los estudios en las fluctuaciones del vacío [18] en décadas posteriores provocaron la reintroducción (1967) de la constante de Einstein, surgiendo una gama de intentos teóricos sobre el problema de la energía oscura. Estos divididos en cinco categorías [36]: *Simetría, Principio antrópico, Mecanismos de ajuste, Gravedad modificada y Gravedad cuántica*.

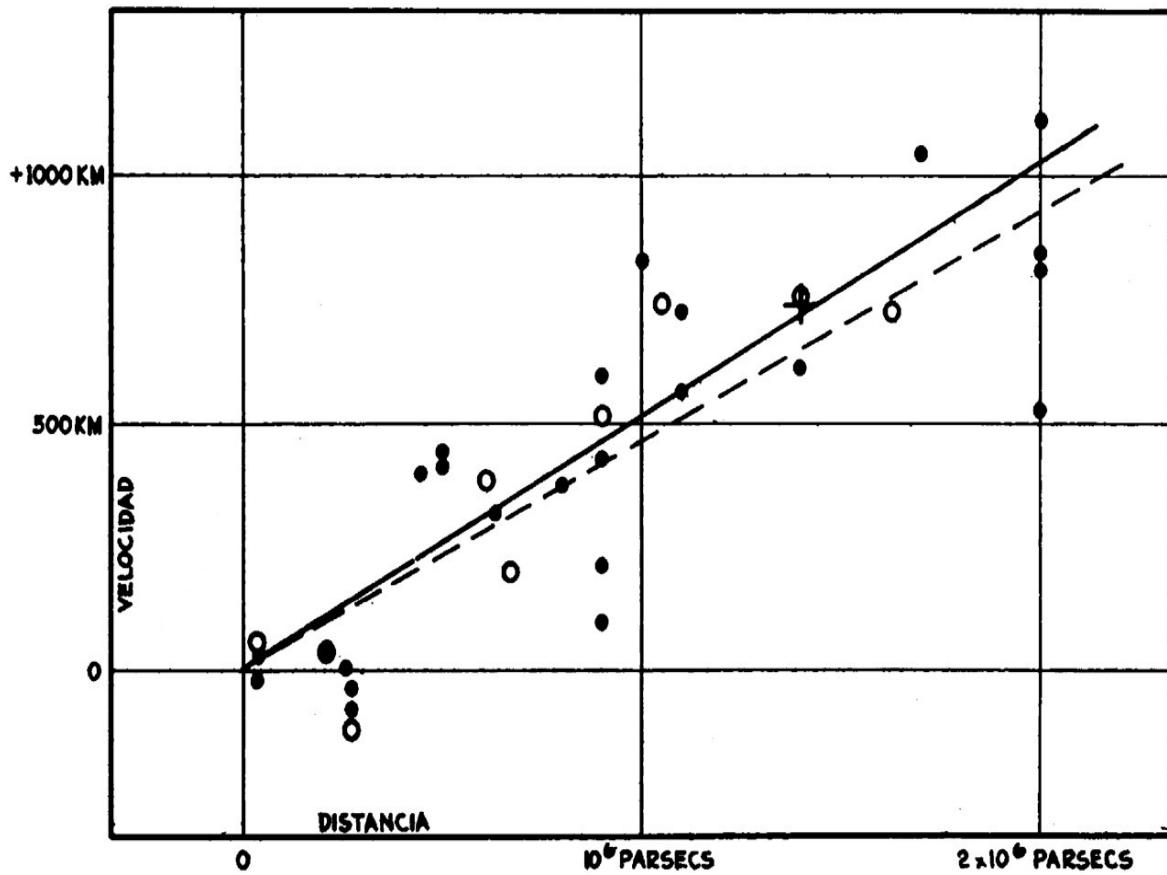


Figura 2.1: Prueba de la expansión del universo, donde se observa la relación velocidad-distancia entre nebulosas extragalácticas, tomado de [35].

Las supernovas de tipo Ia (SN Ia) son enanas blancas que alcanzan el límite de Chandrasekhar, las cuales queman carbono en sus centros [37] y se utilizan como velas estándar para medir la distancia de luminosidad  $dL(z)$  [38]. En 1998, observaciones astrofísicas importantes de dos equipos de investigación independientes, emplearon datos de 16 supernovas distantes de tipo Ia (SN Ia) y 34 supernovas cercanas, a partir de las cuales se reportó por primera vez el descubrimiento de la aceleración del universo en expansión [1, 2]. Esta expansión acelerada se reafirma al estudiar las anisotropías observadas en la radiación cósmica de fondo (CMB, por sus siglas en inglés) [3, 4] y al analizar la estructura a gran escala del universo (LSS, por sus siglas en inglés) [5–7].

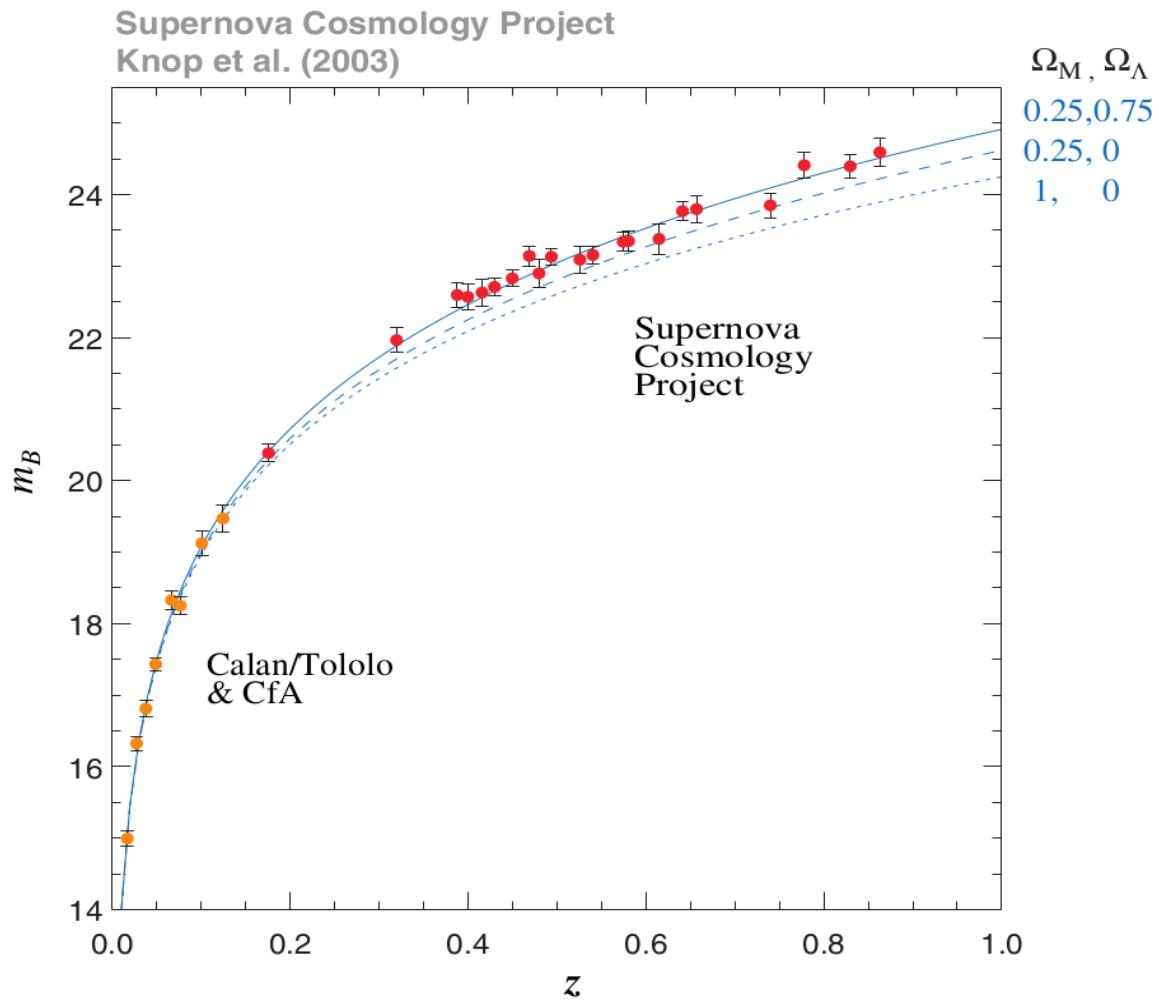


Figura 2.2: Diagrama de Hubble para las Supernovas Tipo Ia, graficando la magnitud efectiva  $m_b$  contra el corrimiento al rojo  $z$ , tomado de [8].

La explicación más sencilla para esta expansión acelerada del universo es la existencia de un tipo de energía especial, capaz de contrarrestar la fuerza gravitatoria de la materia total del universo, incluida ella misma (ver la Ec. (2.13) para más detalles). El nombre genérico para este nuevo tipo de energía es el de energía oscura. Según las observaciones mas recientes del satélite Planck [9] el contenido actual de energía oscura es  $\Omega_\Lambda = 0.6847 \pm 0.0073$ , siendo el contenido de energía oscura el dominante, como se observa en la Figura 2.2.

La propuesta más simple para representar la energía oscura es la constante cosmológica [10], pero las observaciones astronómicas indican que es hasta 120 órdenes de magnitud más pequeña que la estimada en las teorías modernas de partículas elementales [11,12], siendo esto conocido como problema del “Ajuste fino”, dificultando así el problema de la energía oscura en vista que surge de dos teorías extremadamente exitosas, el Modelo Estándar de partículas elementales y la Relatividad General, las cuales han sido probadas de manera confiable y precisa en sus respectivos regímenes, y por lo tanto, no pueden modificarse drásticamente. En añadidura, este modelo presenta el problema de la “Coincidencia cósmica”, en el que tanto las densidades de materia y energía oscura son del mismo orden durante un largo periodo de tiempo. [13].

Posterior al descubrimiento de la expansión acelerada, se propusieron nuevos modelos [11,14] añadiendo 3 nuevas categorías: *Principio Holográfico*, *Reacción inversa de la Gravedad* y *Modelos fenomenológicos*, para intentar resolver el problema de la energía oscura, el cual es uno de los problemas más importantes de la física actual.

## CAPÍTULO 3

### ENERGÍA OSCURA HOLOGRÁFICA

#### 3.1. Principio holográfico

Las cuatro leyes de la mecánica de los agujeros negros, que originalmente eran análogas a las de la termodinámica, se derivaron de las ecuaciones clásicas de campo de Einstein [39], y con la predicción de la radiación cuántica de Hawking [17] quedó claro que la analogía es, de hecho, una identidad donde la temperatura y la entropía específicas de un agujero negro dependen del horizonte del mismo [16, 17]. En el caso de la última mencionada, se le conoce como entropía de Bekenstein-Hawking,

$$S = \left( \frac{A}{A_0} \right) , \quad (3.1)$$

donde  $A$  es el área estándar del horizonte y  $A_0$  es el área de Planck. Inspirado por la investigación de la termodinámica de los agujeros negros, Gerard 't Hooft propuso por primera vez el famoso principio holográfico (HP) [15]. Este principio afirma que toda la información contenida en un volumen de espacio se puede representar como un holograma, lo que corresponde a una teoría que se ubica en el límite de ese espacio (frontera), es decir, que la entropía de un sistema no incrementa con su volumen, sino con su área de superficie [18–21] como se observa en la Figura 3.1.

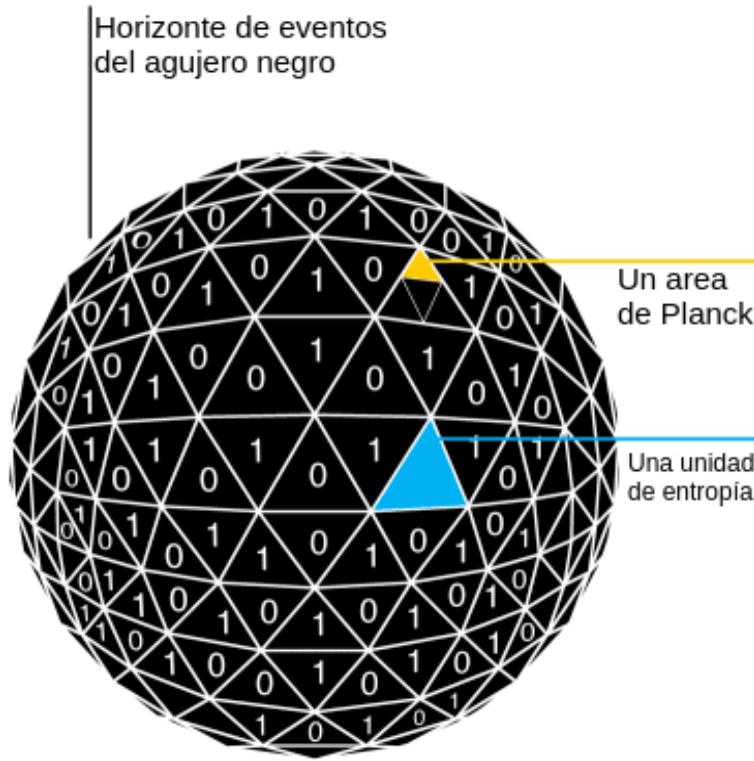


Figura 3.1: Representación esquemática del principio holográfico aplicado a un agujero negro en donde se observa la idea de Bekenstein-Hawking, tomada de [40].

### 3.2. Densidad de energía oscura holográfica

En teoría cuántica de campos, un corte a pequeñas distancias (UV)  $\Lambda$  está relacionado con un corte a largas distancias (IR)  $L$  debido al límite establecido para la formación de un agujero negro [19], que da como resultado una cota superior al punto cero de la densidad de energía. Aplicando el principio holográfico a la cosmología, se puede obtener el límite superior de la entropía contenida en el universo [18]. Siguiendo esta idea, Cohen et al. [19] argumentó que para un sistema con tamaño  $L$  y corte ultravioleta UV, se requiere que la densidad de energía  $\rho_\Lambda$  en esa región no exceda la masa de un agujero negro del mismo tamaño,

$$L^3 \rho_\Lambda \leq L M_p^2. \quad (3.2)$$

Al tomar el valor de  $L$  más grande permitido se satura la desigualdad anterior, resultando en la expresión general de la densidad de energía oscura holográfica,

$$\rho_\Lambda = 3c^2 M_p^2 L^{-2} , \quad (3.3)$$

donde  $3c^2$  es una constante numérica introducida por conveniencia. En este modelo, la densidad de energía solo se basa en dos cantidades físicas en el límite del universo: una es la masa de Planck reducida  $M_p = \sqrt{1/8\pi G}$  y la otra es la escala de longitud cosmológica  $L$ , siendo la opción más simple el corte infrarrojo  $H = L^{-1}$ , con la densidad de energía tomando la forma,

$$\rho_\Lambda = 3c^2 M_p^2 H^2 , \quad (3.4)$$

sin embargo, Hsu [20] ha demostrado que esta elección de corte infrarrojo no funciona porque lleva a una ecuación de estado incorrecta de la energía oscura, y el horizonte de partículas tampoco funciona porque es imposible obtener una expansión acelerada [21]. Para remediar la situación, Li propone escoger  $L$  como el horizonte de sucesos futuro del universo [22],

$$R_h = \int_a^\infty \frac{da}{H a^2} , \quad (3.5)$$

donde este horizonte es el límite del volumen que un observador fijo puede eventualmente observar. Este corte infrarrojo permite reproducir el comportamiento esperado para una componente de energía oscura, donde la densidad de energía oscura toma la forma

$$\rho_\Lambda = 3c^2 M_p^2 R_h^2 . \quad (3.6)$$

Se ha demostrado que este modelo puede estar de acuerdo con los últimos datos de observación, incluida la muestra de supernovas de Tipo Ia (SNIa), el parámetro de desplazamiento del fondo de microondas cósmico (CMB) y la medición de la oscilación acústica bariónica (BAO) [41, 42], sin embargo, en esta propuesta aparece un inconveniente evidente en relación con la causalidad. El horizonte de sucesos es un concepto global de espacio-tiempo; la existencia del horizonte de sucesos del universo depende de la evolución futura del universo y, el horizonte de sucesos existe solo para el universo con expansión acelerada para siempre.

### 3.3. Corte infrarrojo de Granda-Oliveros

Debido a que el Horizonte de Eventos Futuro Ec. (3.5) depende de los valores que pueda tomar en el futuro el factor de escala  $a(t)$ , lo cual está en contraposición al concepto usual de horizonte de eventos usado en cosmología, Granda y Oliveros proponen en [23] una nueva densidad de energía oscura holográfica. En esta propuesta se introduce (basado en un análisis dimensional y geométrico) un término que contiene la derivada en el tiempo del parámetro de Hubble ( $\dot{H}$ ), término que está contenido en la expresión del escalar de Ricci, el cual posee dimensiones de  $(\text{longitud})^{-2}$  (en [43] se propuso un modelo con energía oscura holográfica proporcional en su totalidad al escalar de Ricci). En éste modelo la densidad  $\rho_\Lambda$  toma la forma,

$$\rho_\Lambda = 3M_p^2 \left( \alpha H^2 + \beta \dot{H} \right), \quad (3.7)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros adimensionales que fueron ajustados de manera rigurosa, con base en datos observacionales tanto para el caso de un universo plano como en el no plano [44]. Este modelo también conocido como nueva energía oscura holográfica (NHDE) permite generar de manera estable un régimen de expansión acelerada del universo evitando el problema de causalidad [45], por lo que ha sido estudiado ampliamente en la literatura.

### 3.4. Energía oscura holográfica de Barrow

#### 3.4.1. Entropía de Barrow

Un paso importante en la aplicación del principio holográfico en el marco cosmológico, es que la entropía del horizonte del universo (a gran escala) es proporcional a su área, de manera similar a la entropía de Bekenstein-Hawking de un agujero negro Ec. (3.1). Recientemente, en [24] Barrow inspirado en las representaciones del virus Covid-19, demostró que los efectos gravitacionales cuánticos pueden introducir intrincadas características fractales en la superficie del agujero negro, y por lo tanto, conducir a una entropía de agujero negro

deformada, cuantificada por el parámetro de deformación  $\Delta$ ,

$$S = \left( \frac{A}{A_0} \right)^{1+\Delta/2}, \quad (3.8)$$

donde  $\Delta$  toma los valores  $0 \leq \Delta \leq 1$ , con  $\Delta = 0$  correspondiendo al caso estándar de la entropía Bekenstein-Hawking y  $\Delta = 1$  correspondiendo a la estructura fractal más intrincada.

### 3.4.2. Densidad de energía oscura holográfica de Barrow

Al aplicar el principio holográfico habitual en un escenario cosmológico, pero utilizando la entropía de Barrow Ec. (3.8), Saridakis [25], obtiene una energía oscura holográfica extendida que incluye la energía oscura holográfica básica, como un sub-caso en el límite donde la entropía de Barrow se convierte en la de Bekenstein-Hawking,

$$\rho_\Lambda = 3c^2 M_p^2 L^{2-\Delta}. \quad (3.9)$$

Al utilizar el horizonte de eventos futuro como corte infrarrojo  $L = R_h$ , el parámetro de deformación  $\Delta$  afecta significativamente la ecuación de estado de la energía oscura, y de acuerdo con su valor puede llevarlo a estar en el régimen de quintaesencia [26], en el régimen fantasma [27] o experimentar el cruce de la división fantasma durante la evolución [25]. Este nuevo modelo Ec. (3.9) también puede describir la historia térmica del universo incluyendo la era de dominancia de la materia y la era de dominancia de la energía oscura. Recientemente se han realizado trabajos [46] utilizando datos observacionales con el fin de extraer restricciones sobre  $\Delta$  y el escenario de la energía oscura holográfica de Barrow.

En resumen, la energía oscura holográfica de Barrow exhibe una fenomenología más interesante y rica en comparación con el escenario estándar y, por lo tanto, puede ser candidata a mejorar la descripción de la evolución cosmológica del universo, sin embargo, en esta formulación al utilizar el horizonte de eventos futuro como corte infrarrojo, aún se presenta el problema de causalidad. De modo que se hace necesario e interesante, analizar el comportamiento de la energía oscura holográfica de Barrow utilizando el corte infrarrojo de Granda-Oliveros.

## CAPÍTULO 4

### METODOLOGÍA

En el presente trabajo se asumió un universo plano, homogéneo e isótropo mediante la elección de la métrica de FRW (Ec. 2.1) con  $k = 0$ . Se modeló el contenido del universo a gran escala como un fluido perfecto (Ec. 2.3), y se consideró que los efectos gravitacionales cuánticos pueden introducir intrincadas características fractales en la superficie (entropía) de un agujero negro (Ec. 3.8) y del horizonte cosmológico, de acuerdo al valor del parámetro de deformación  $\Delta$ . Con base en las consideraciones anteriores se procedió de la siguiente manera:

#### 4.1. Construcción teórica

- Se Introdujo la densidad de energía oscura holográfica de Barrow (Ec. 3.9) en las ecuaciones de Friedmann (Ecs. 2.4 y 2.5) utilizando el corte infrarrojo de Grandao Oliveros (Ec. 3.7), obteniendo la ecuación diferencial para el cuadrado del parámetro de Hubble ( $H^2$ ) en el modelo propuesto.

## 4.2. Implementación computacional

- Se resolvió numéricamente utilizando Mathematica y Python la ecuación diferencial para  $H^2$ , con el propósito de determinar el parámetro de desaceleración  $q$  (Ec. 2.15) y la densidad de energía oscura  $\rho_\Lambda$  (Ec. 3.9).
- A partir de la derivada de  $H^2$  con respecto al corrimiento al rojo ( $z$ ), se obtuvo la densidad de presión de energía oscura (Ec. 2.8) y se determinó el parámetro de la ecuación de estado  $w$  (Ec. 2.9) para el modelo propuesto.
- Se verificó que el comportamiento del parámetro  $q$  en función del corrimiento al rojo  $z$  cambie de positivo (desaceleración) a negativo (aceleración), y que el valor del parámetro  $w$  actual se encuentre por debajo de  $-1/3$ .
- Se realizó la derivada de la densidad de presión con respecto a la densidad de energía oscura, obteniendo así el cuadrado de la velocidad del sonido en función del corrimiento al rojo.
- Se ajustaron los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\Delta$  del modelo propuesto mediante la técnica  $\chi^2$ , teniendo en cuenta los datos cosmológicos observacionales más recientes del parámetro de Hubble  $H(z)$ .

## CAPÍTULO 5

### MODELO PROPUESTO

#### 5.1. Modelo teórico

Por definición, la densidad de energía oscura holográfica de Barrow es,

$$\rho_\Lambda = CL^{\Delta-2}, \quad (5.1)$$

donde  $C$  es un parámetro con dimensiones  $[L]^{-2-\Delta}$  [25]. Claramente, para  $\Delta = 0$ , Eq. (5.1) se reduce al caso estándar, es decir,  $\rho_\Lambda = 3M_p^2c^2L^{-2}$ , donde  $C = 3M_p^2c^2$  con  $c^2$  como el parámetro del modelo correspondiente. Utilizando el corte IR de Granda-Oliveros  $L^{-2} = \alpha H^2 + \beta \dot{H}$ , se tiene que en el presente modelo la densidad de energía oscura holográfica esta dada por,

$$\rho_\Lambda = 3M_p^2 \left( \alpha H^2 + \beta \dot{H} \right)^{1-\frac{1}{2}\Delta}, \quad (5.2)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros con dimensiones  $[L]^{\frac{2\Delta}{\Delta-2}}$  con el fin de preservar las dimensiones de  $\rho_\Lambda$ . Notesé que en esta versión modificada de  $\rho_\Lambda$  el parámetro  $C$  en la Eq. (5.1) ha sido reemplazado por  $3M_p^2$  (considerando  $c = 1$ ), debido a que en el presente modelo, el papel jugado por  $c$  en la Ec. (5.1) a través de  $C = 3M_p^2c^2$  es realizado ahora por  $\alpha$  y  $\beta$ .

Considerando que el contenido del universo esta conformado por materia no relativista, radiación y energía oscura, la primera ecuación de Friedmann Ec. (2.4) del modelo, toma la forma,

$$H^2 = \Omega_{m_0} H_0^2 a^{-3} + \Omega_{r_0} H_0^2 a^{-4} + (\alpha H^2 + \beta \dot{H})^{1-\frac{1}{2}\Delta}. \quad (5.3)$$

Donde  $\Omega_{i_0} H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{i_0}$  con  $i = m, r$ . Realizando el cambio de variable  $a(t) = a_0/(1+z)$ , donde  $dt = -dz/H(1+z)$  y  $a_0 = a(t=0) = 1$ , se obtiene la ecuación diferencial para el cuadrado del parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo  $z$  (ver Apéndice A.47),

$$(1+z) \frac{\beta}{2} \frac{dH^2}{dz} - \alpha H^2 + [H^2 - \Omega_{m_0} H_0^2 (1+z)^3 - \Omega_{r_0} H_0^2 (1+z)^4]^{2-\Delta} = 0, \quad (5.4)$$

donde las densidades involucradas satisfacen  $\Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} + \Omega_{\Lambda_0} = 1$ . Para la solución numérica de la Ec. (5.4) se tendrán en cuenta los valores observacionales más recientes de estas cantidades,  $\Omega_{m_0} = 0,315$ ,  $\Omega_{r_0} = 3 \times 10^{-4}$ ,  $\Omega_{\Lambda_0} = 0,6847$  y el valor observational actual del parámetro de Hubble  $H_0 = 67,37$  km/s/Mpc, todos reportados por Planck 2018 [9].

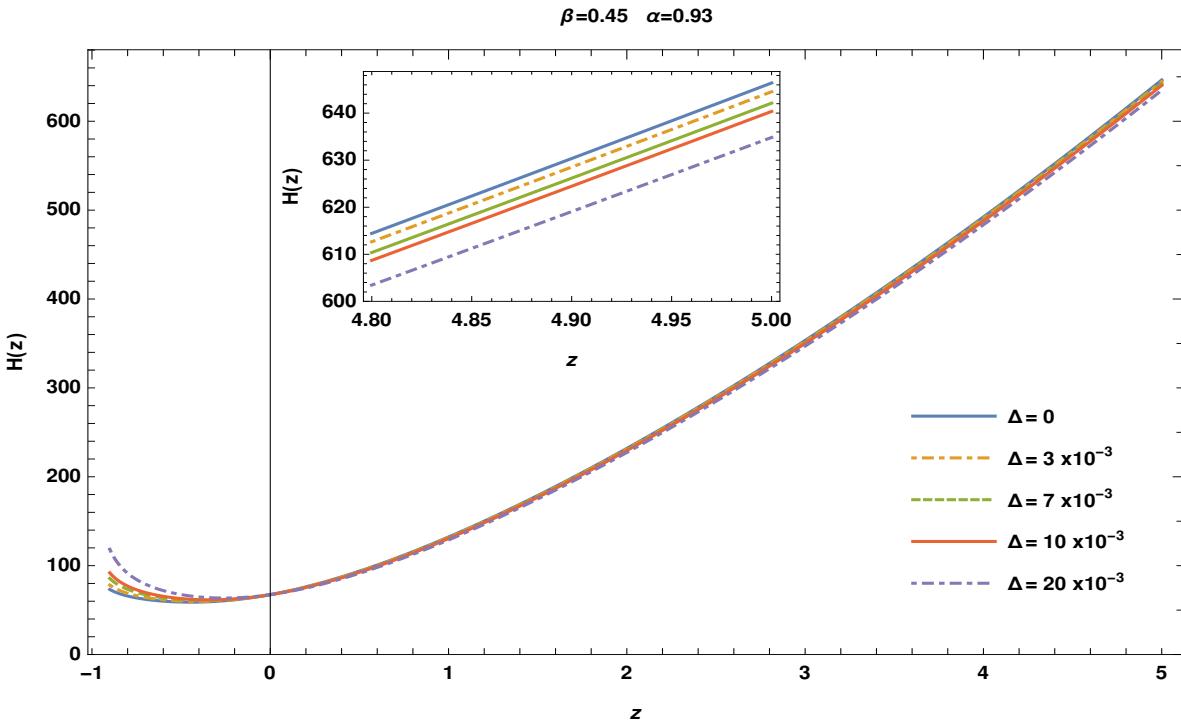


Figura 5.1: Evolución del parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo  $z$ , variando  $\Delta$ . La figura interior corresponde a una ampliación para el intervalo [4.8,5].

## 5.2. Evolución del parámetro de Hubble

En la figura 5.1 se puede observar cómo el nuevo parámetro de deformación  $\Delta$  afecta los valores del parámetro Hubble  $H(z)$  en función del corrimiento al rojo  $z$ , donde la izquierda corresponde al futuro y la derecha al pasado. En este gráfico se fijaron los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , correspondiente a valores cercanos a los ajustados en [44] donde no se considera la contribución de la componente de radiación ( $\Omega_{r0} = 0$ ) ni deformación ( $\Delta = 0$ ). La Figura interior de 5.1 es una ampliación para el intervalo [4.8,5], donde se observa una disminución de los valores en el pasado (al menos en tiempos tardíos) de  $H(z)$  a medida que aumenta  $\Delta$ , mientras que los valores futuros aumentan, comportamiento afín con lo reportado en [47, 48].

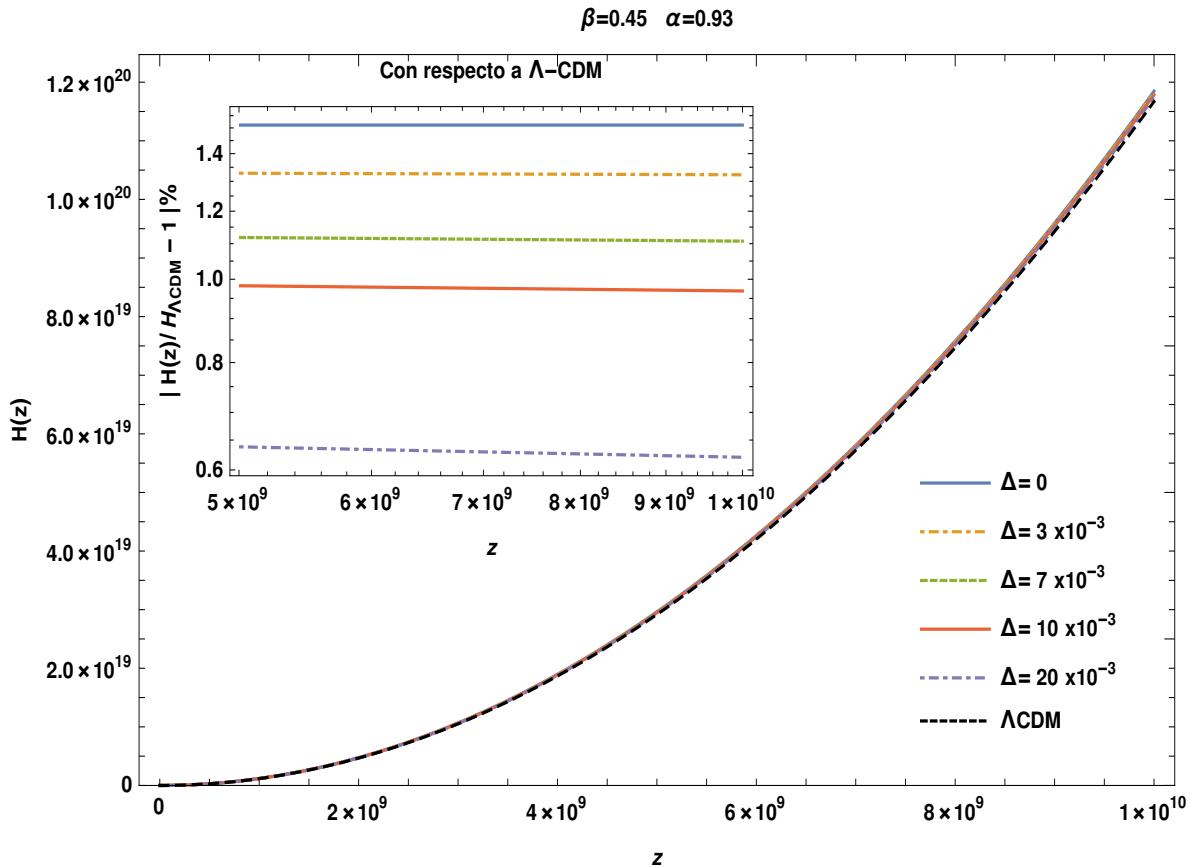


Figura 5.2: Evolución del Parámetro de Hubble como función del corrimiento al rojo  $z$  variando  $\Delta$ , y  $H(z)$  del modelo  $\Lambda$ -CDM a altos corrimientos al rojo, la figura interior corresponde a la diferencia porcentual  $\left( \left| \frac{H(z)}{H_{\Lambda}(z)} - 1 \right| \times 100\% \right)$  entre los modelos.

En la Figura 5.2 se observan los valores del parámetro de Hubble del modelo a altos corrimientos al rojo (tiempos tempranos) para diferentes valores de  $\Delta$ , y se comparan con los valores del modelo  $\Lambda$ CDM. En la literatura se ha reportado desviación del modelo Granda-Oliveros con respecto a  $\Lambda$ -CDM en tiempos tempranos [49], comportamiento debido a la inclusión de términos extra de materia (efectiva) y radiación (efectiva) en la solución de  $H(z)$  (A.48) reportada en [45]. En la Figura interior de 5.2, se muestra que a medida que aumenta el valor del parámetro  $\Delta$  la diferencia porcentual con respecto al modelo  $\Lambda$ -CDM en tiempos tempranos disminuye, a partir del 1.5 % para el conjunto de parámetros utilizado.

### 5.3. Parámetro de desaceleración

El parámetro de desaceleración Ec. (2.15) para el modelo se presenta en función del corrimiento al rojo para diferentes valores de  $\Delta$  en la Figura 5.3.

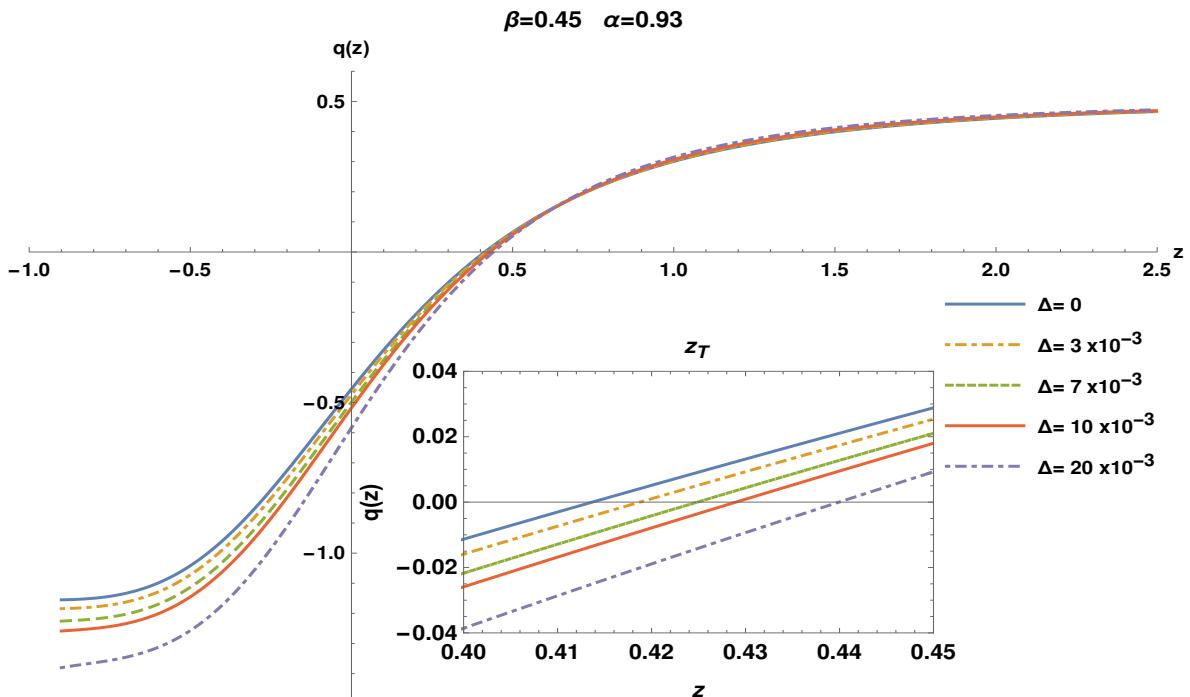


Figura 5.3: Parámetro de desaceleración en función de  $z$ , variando  $\Delta$ . La figura interior corresponde a una ampliación de la zona en la que se ubica el corrimiento al rojo de transición.

Se puede observar en la Figura 5.3, que en todos los casos se exhibe una transición suave de desaceleración a un régimen de expansión acelerado en el pasado reciente. Este resultado es esencial para explicar tanto el crecimiento de estructuras observado en tiempos tempranos y las medidas actuales de la aceleración cósmica. En la Figura interior de 5.3 se visualiza que los valores del corrimiento al rojo de transición ( $z_t$ ) para diferentes valores de  $\Delta$  son compatibles con los datos observacionales actuales [50].

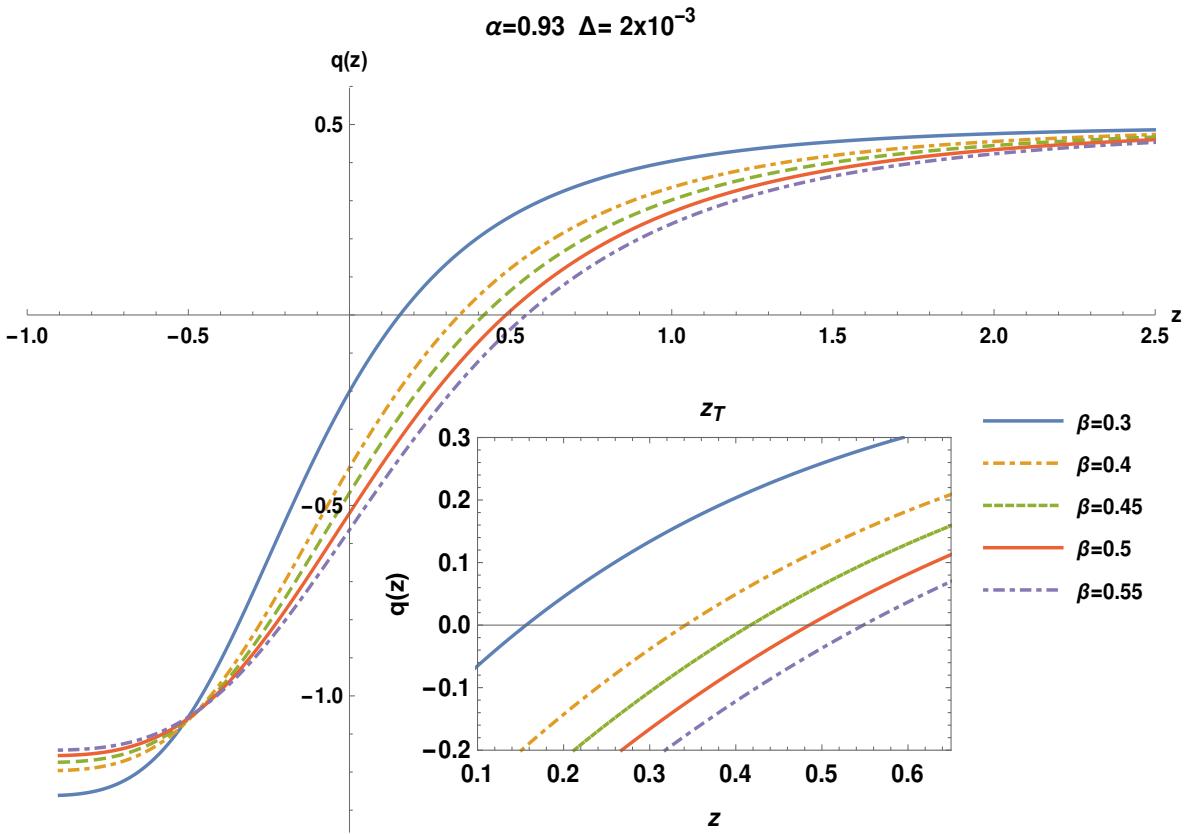


Figura 5.4: Parámetro de desaceleración en función de  $z$ , variando  $\beta$ . La figura interior corresponde a una ampliación de la zona en la que se ubica el corrimiento al rojo de transición.

En las Figuras 5.4 y 5.5, lo que se ha variado son los valores de los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  respectivamente, mientras se mantiene un valor fijo del parámetro de deformación  $\Delta$ . Se puede observar en estas figuras cómo se ven afectados significativamente los valores del corrimiento al rojo de transición  $z_T$ , y los valores actuales del parámetro de desaceleración  $q_0$  para cada caso. Empezando a dilucidar que algunos valores de  $\alpha$  y  $\beta$  no son adecuados.

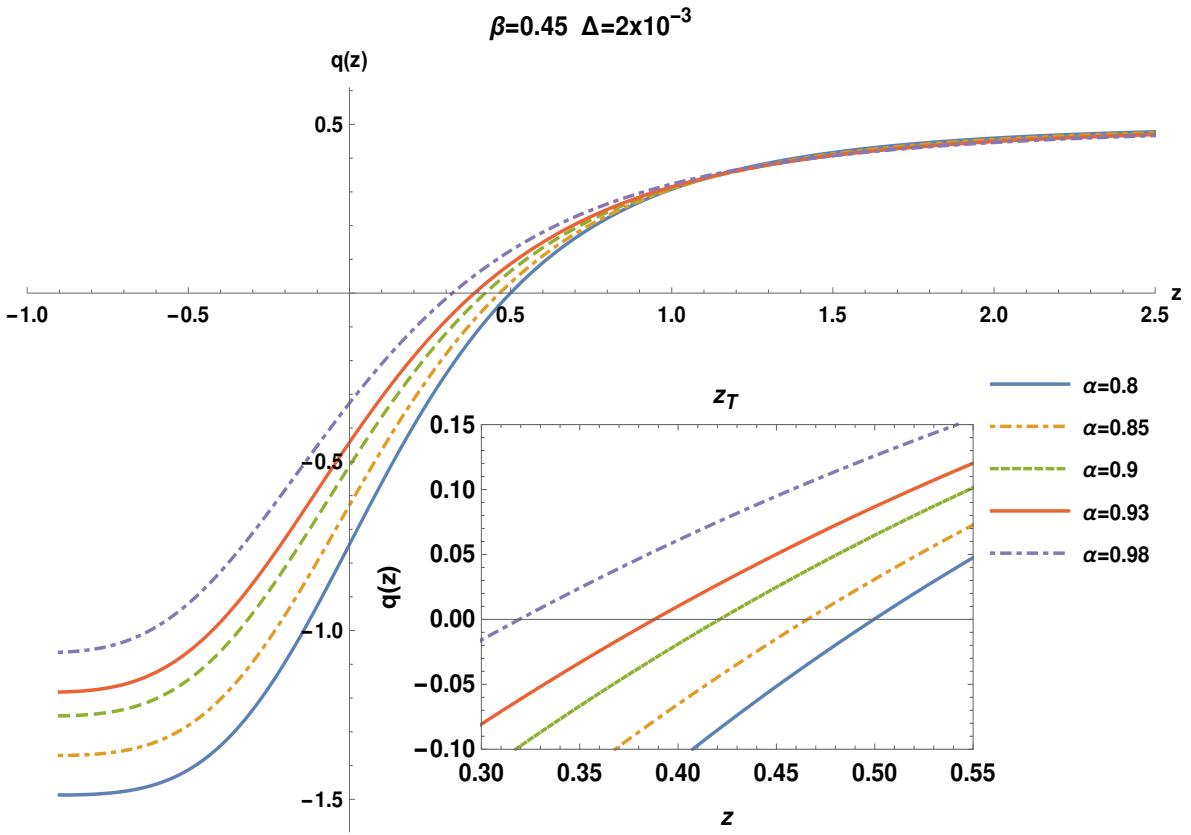


Figura 5.5: Parámetro de desaceleración en función de  $z$ , variando  $\alpha$ . La figura interior corresponde a una ampliación de la zona en la que se ubica el corrimiento al rojo de transición.

#### 5.4. Parámetro de la ecuación de estado

La evolución del parámetro de la ecuación de estado para la energía oscura Ec. (2.9) en función de  $z$  se muestra en la Figura 5.6(a). Se puede observar que para  $\Delta = 0$  a tiempos tempranos la energía oscura presenta una ecuación de estado tipo radiación ( $w = 1/3$ ), y a medida que  $\Delta$  aumenta se reduce el valor de la asíntota, mientras que en la Figura 5.6(b) se observa que en el presente ( $z = 0$ ) para algunos valores de  $\Delta$  el parámetro de la ecuación de estado se encuentra por encima (Quintaesencia) de la barrera de  $-1$ , y a medida que  $\Delta$  aumenta tiende a la constante  $\Lambda$  ó cruza a la zona fantasma. Es importante mencionar que se presenta una transición de quintaesencia (campo escalar con presión negativa que varía en el tiempo) a fantasma (campo con energía cinética negativa) en tiempos futuros.

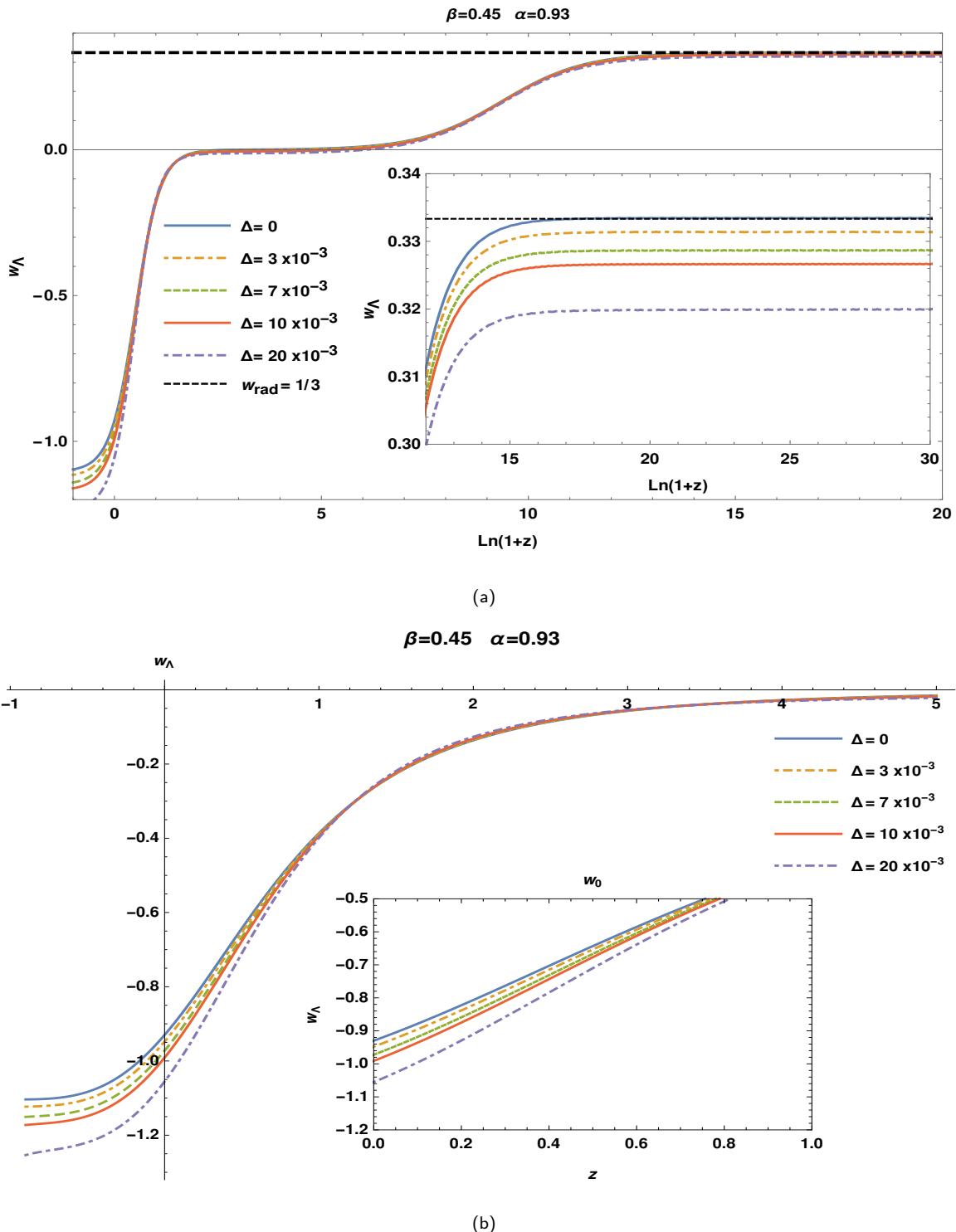


Figura 5.6: Evolución del parámetro de la ecuación de estado para la energía oscura, variando  $\Delta$ . Donde la figura interior corresponde a una ampliación de la zona (a) a tiempos tempranos y (b) en la que se ubica el valor actual de  $w$ .

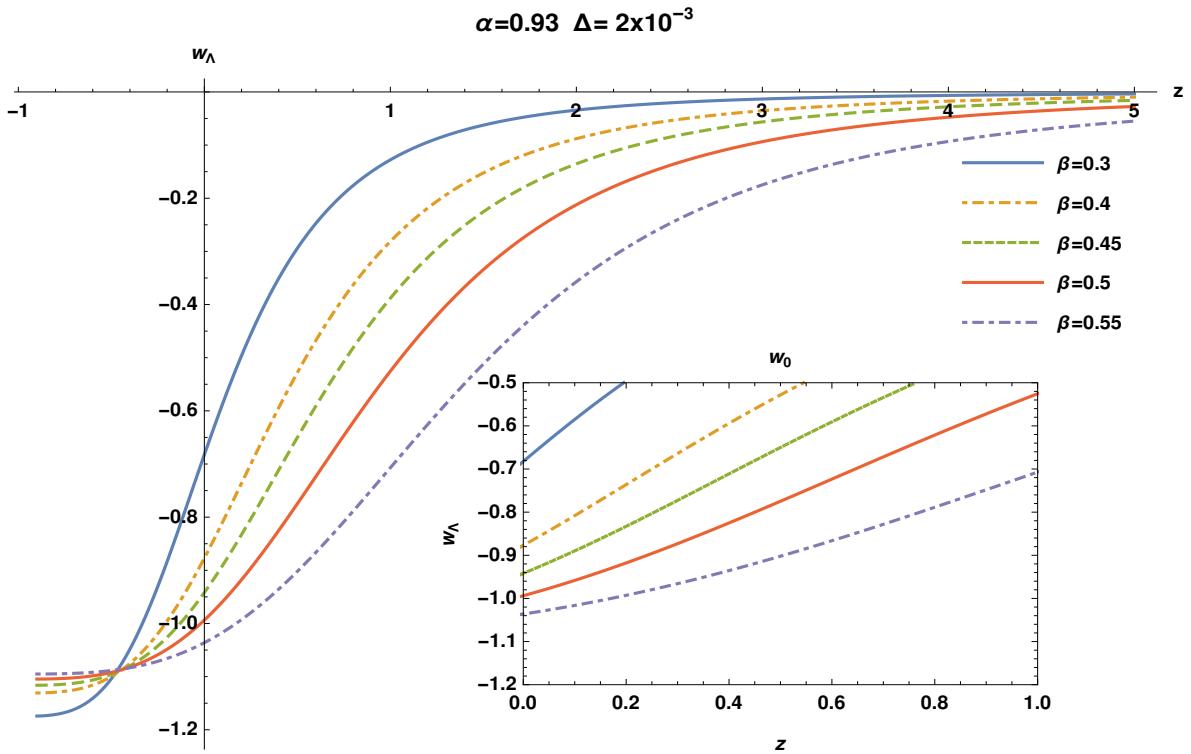


Figura 5.7: Ecuación de estado para la energía oscura en función de  $z$ , variando  $\beta$ . La figura interior corresponde a una ampliación de la zona en la que se ubica el valor actual de  $w$ .

En las Figuras 5.7 y 5.8, lo que se ha variado son los valores de los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  respectivamente, mientras se mantiene un valor fijo de  $\Delta$ . Se puede observar cómo afectan significativamente el valor de  $w_\Lambda$ , permitiéndole ubicarse en el régimen de quintaesencia por encima de  $-1$  o en el régimen fantasma por debajo de  $-1$ . Este tipo de comportamiento donde el parámetro de la ecuación de estado toma valores en la zona de Quintaesencia y también en la zona fantasma es característico de un tipo de modelo llamado Quintom [51].

## 5.5. Estabilidad

Al ser una propuesta fenomenológica, la ausencia de una acción asociada al modelo de estudio impide un tratamiento perturbativo completo, por lo que la velocidad del sonido al cuadrado es un importante parámetro para verificar la estabilidad de este tipo modelos [52].

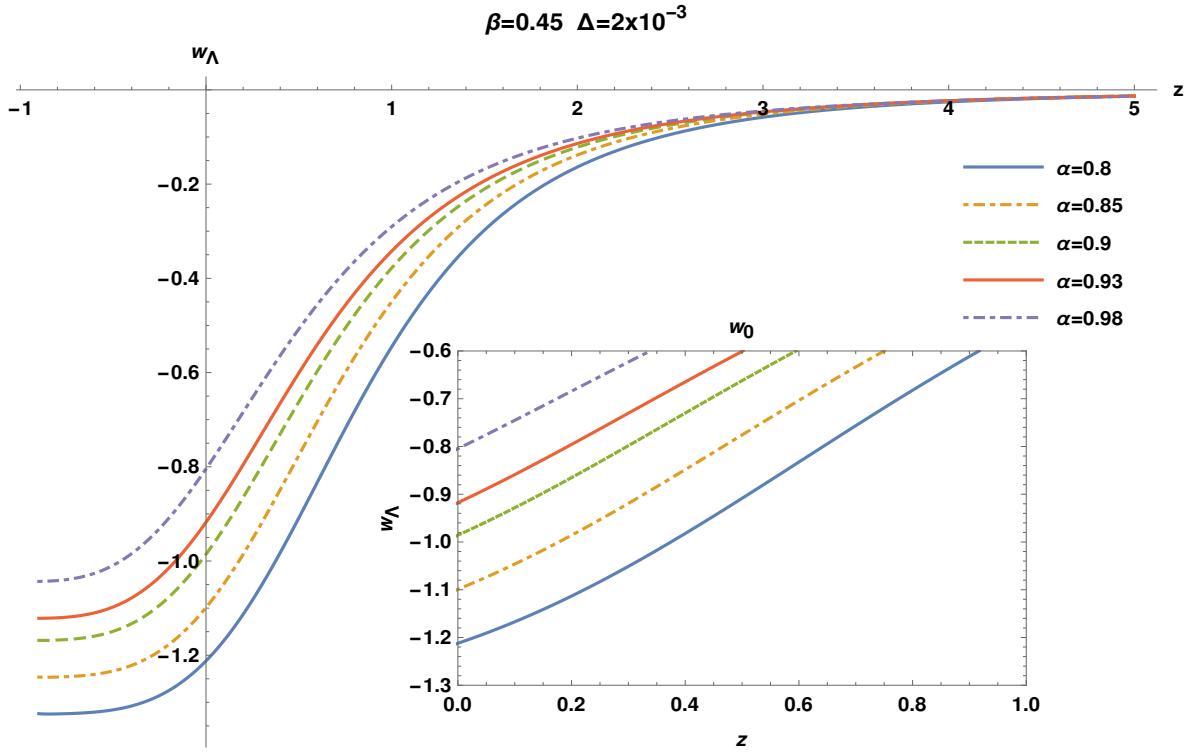


Figura 5.8: Ecuación de estado para la energía oscura en función de  $z$ , variando  $\alpha$ . La figura interior corresponde a una ampliación de la zona en la que se ubica el valor actual de  $w$ .

Sea  $\rho_B$  y  $p_B$  la densidad y presión barotrópica del fluido de estudio en una métrica FRW. Si se consideran pequeñas perturbaciones en la densidad de energía del tipo:  $\rho_B(t) + \delta\rho_B(t, \vec{x})$ , la conservación del tensor de energía-impulso Ec. (2.3) implica que [53]:

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + v_s^2 \nabla^2 \right) \delta\rho_B = 0 . \quad (5.5)$$

Donde  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial \vec{x}$  y  $v_s^2$  es la velocidad del sonido al cuadrado, definida como:

$$v_s^2 = \frac{dp_B}{d\rho_B} . \quad (5.6)$$

Para  $v_s^2 > 0$  la solución de la Ec. (5.5) es una onda libre (estable) con una velocidad  $v_s$  de propagación, mientras que para  $v_s^2 < 0$  la solución es una perturbación con crecimiento exponencial, en otros términos, inestable.

En la Figura 5.9 se presenta en escala logarítmica la velocidad del sonido al cuadrado multiplicada por su signo en función del corrimiento al rojo, donde se observa que para la mayoría de los valores de  $\Delta$  permanece positivo, es decir, estable.

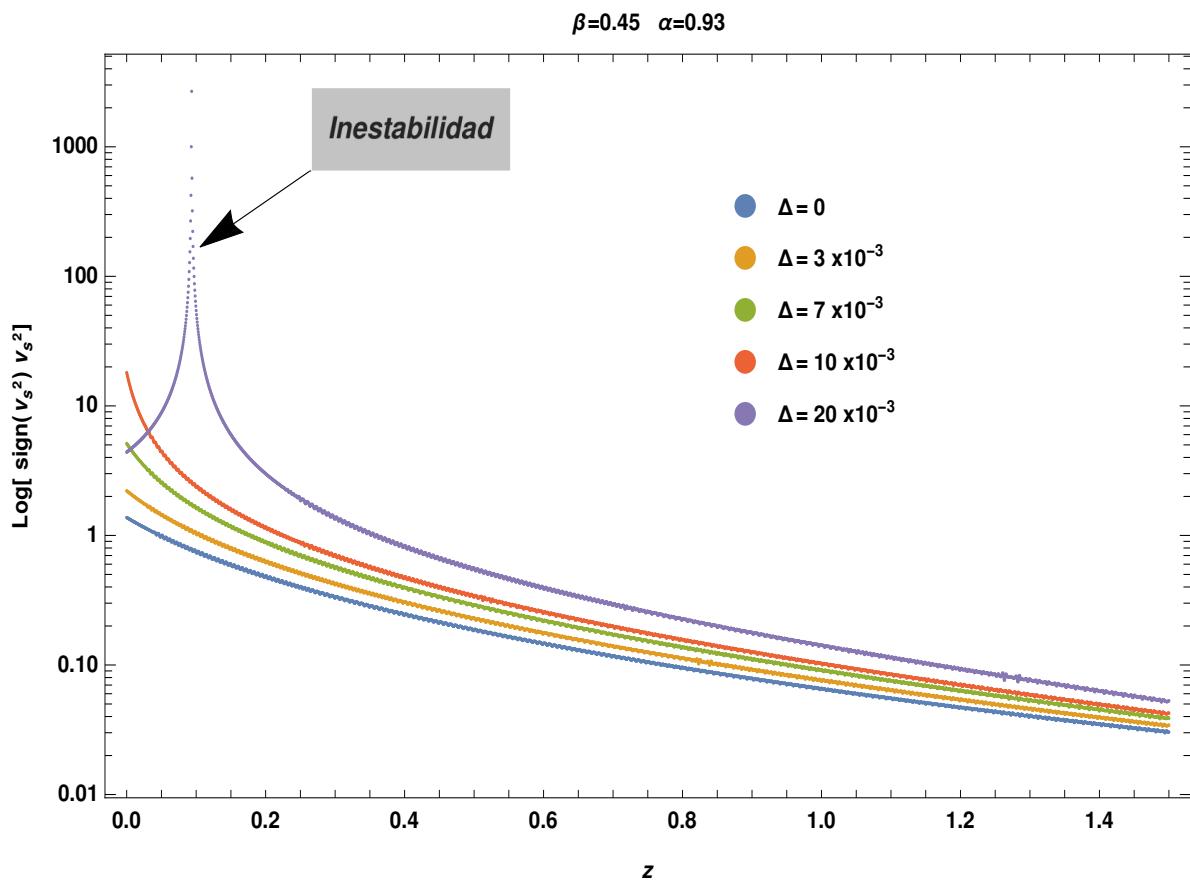


Figura 5.9: En escala logarítmica, la velocidad del sonido al cuadrado por su signo en función de  $z$ , para diferentes valores de  $\Delta$ .

Sin embargo, se exhibe una zona de inestabilidad (pico que refleja cambio de positivo a negativo) a medida que aumenta el parámetro de deformación  $\Delta$ , donde se obtienen valores imaginarios para la velocidad de las perturbaciones, provocando que las perturbaciones crezcan de manera exponencial.

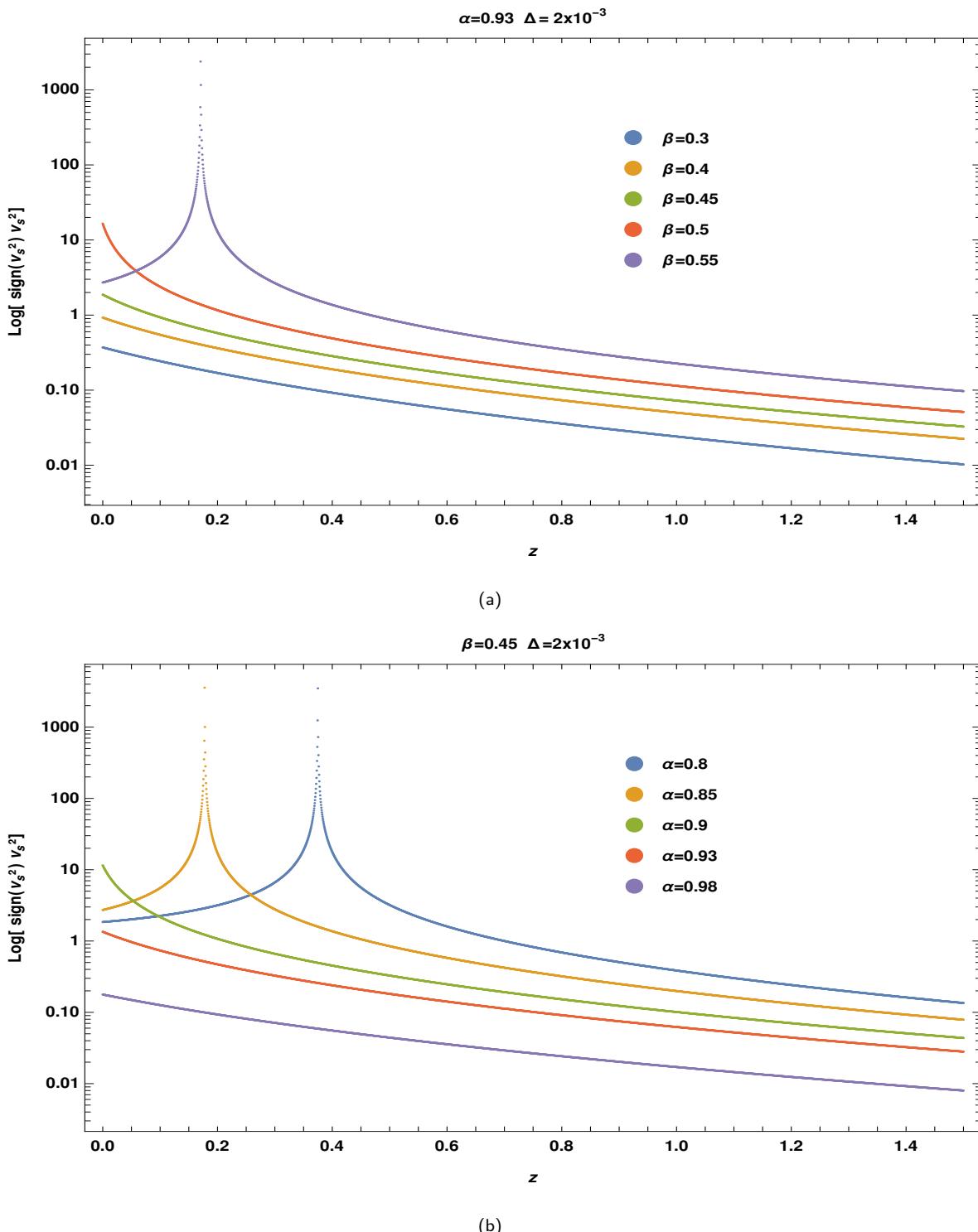


Figura 5.10: En escala logarítmica, la velocidad del sonido al cuadrado por su signo en función de  $z$ , variando (a)  $\beta$  y (b)  $\alpha$ .

En las Figuras 5.10, lo que se ha variado son los valores de  $\beta$  y  $\alpha$  respectivamente, mientras se mantiene un valor fijo de  $\Delta$ . Se puede observar que el grado de estabilidad del modelo también es dependiente de los valores de  $(\alpha, \beta)$ , sugiriendo la existencia de una zona de estabilidad en el espacio de parámetros.

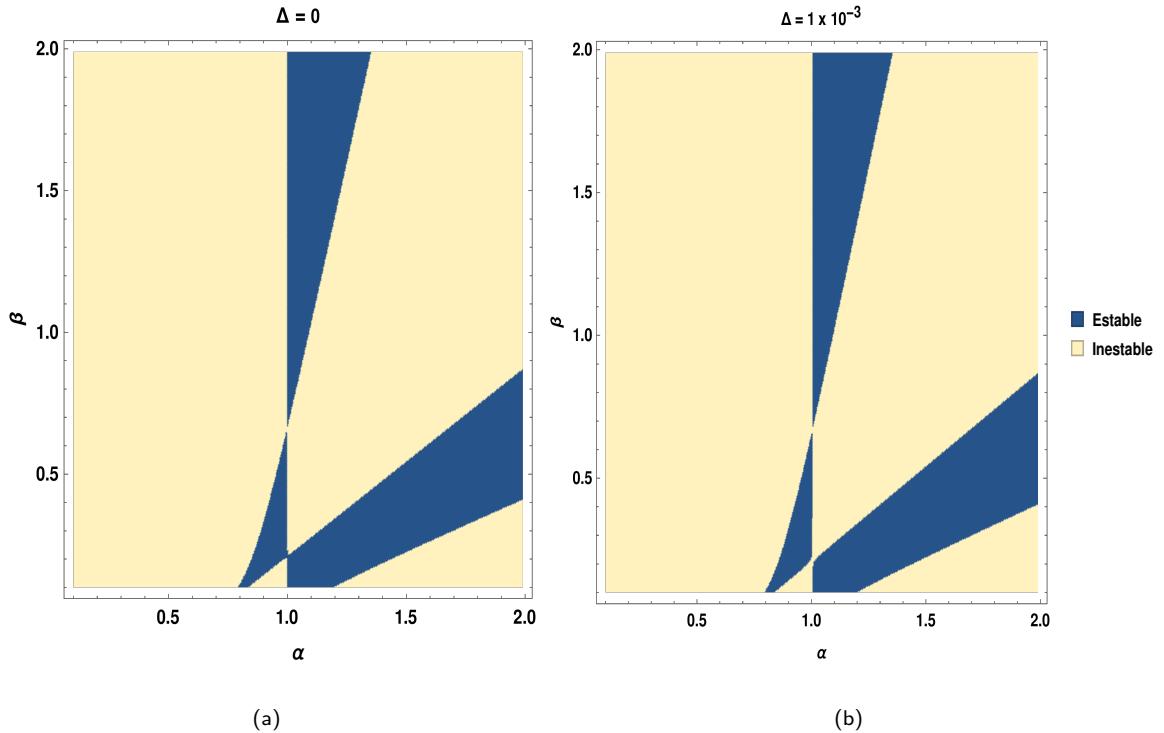


Figura 5.11: Zonas de estabilidad (Azul oscuro) en el espacio de parámetros  $(\alpha, \beta)$  para (a)  $\Delta = 0$ , (b)  $\Delta = 1 \times 10^{-3}$ , donde el criterio de estabilidad es  $0 \leq v_s^2 \leq 1$ .

Además de evitar que las fluctuaciones de energía oscura crezcan exponencialmente (lo que puede conducir a situaciones no físicas), es importante imponer la restricción de que estas pequeñas perturbaciones se propaguen como máximo a la velocidad de la luz,  $v_s^2 \leq c^2 = 1$ , evitando así problemas de causalidad [52, 54, 55]. Considerando lo anterior, en las Figura 5.11 y 5.12 se presenta el espacio de parámetros  $(\alpha, \beta)$  para diferentes valores de  $\Delta$ , donde la zonas sombreadas indican estabilidad ( $0 \leq v_s^2 \leq 1$ ). Es evidente al comparar los casos para distintos valore de  $\Delta$ , que las zonas de estabilidad en las Figura 5.11 y 5.12 presentan una reducción y desplazamiento al incrementar el parámetro  $\Delta$ .

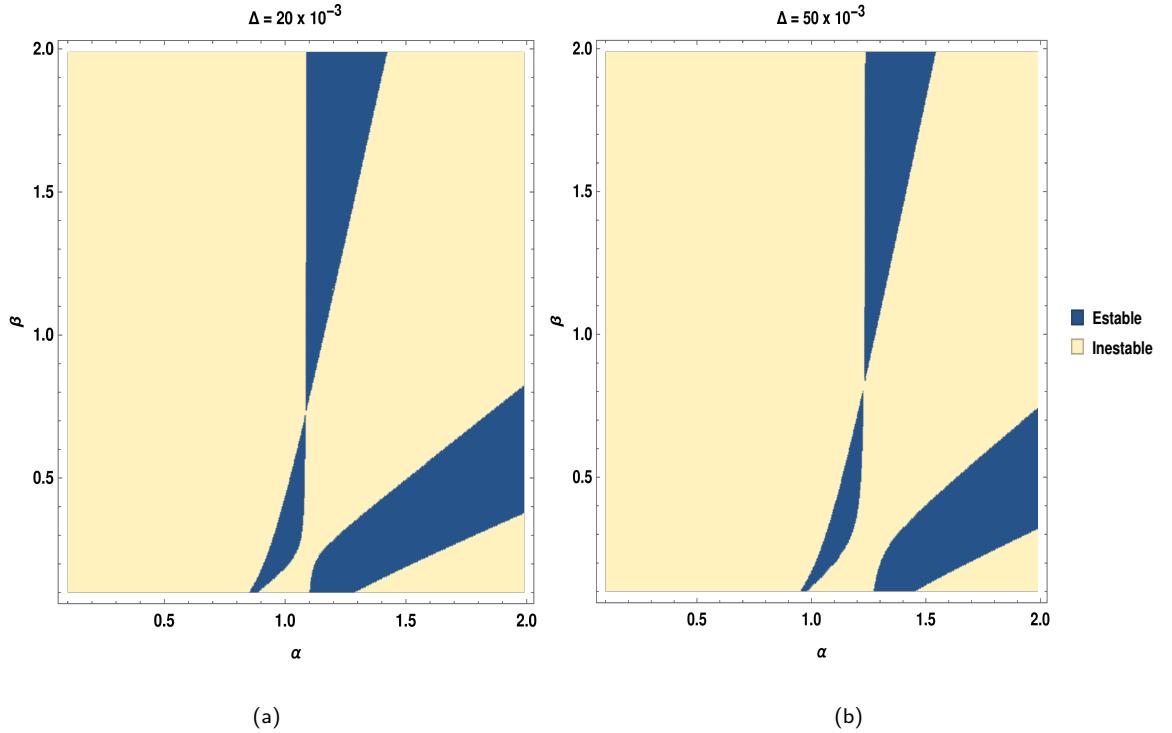


Figura 5.12: Zonas de estabilidad (Azul oscuro) en el espacio de parámetros  $(\alpha, \beta)$  para (a)  $\Delta = 20 \times 10^{-3}$ , (b)  $\Delta = 50 \times 10^{-3}$ , donde el criterio de estabilidad es  $0 \leq v_s^2 \leq 1$ .

## 5.6. Eras de dominancia

Se presenta en la Figura 5.13, la evolución de las densidades involucradas en el modelo para diferentes valores de  $\Delta$  en función del número de e-folds  $x = -\ln(1+z)$ . Se observa que el modelo exhibe en primera instancia una era de dominio de la radiación, seguida de materia no relativista y la era actual de dominancia de energía oscura, donde es despreciable la componente de radiación. En tiempos tempranos se observa que la componente de energía oscura del modelo puede no ser despreciable en comparación con la radiación, a diferencia del modelo  $\Lambda$ -CDM como se aprecia en la Figura 5.14, donde la componente  $\Omega_\Lambda$  de energía oscura es distinta de cero para los diferentes valores de  $\Delta$  en el pasado lejano, comportamiento asociado a los términos extras de materia (efectiva) y radiación (efectiva) que añade el corte IR de Granda-Oliveros [49] a  $H(z)$  (ver Apéndice A.48). Según el principio

holográfico la densidad de energía  $\propto L^{\Delta-2}$  (ver Ec. 5.1). Dado que se espera que la escala de longitud sea muy pequeña durante los tiempos tempranos, la densidad de energía generada por el presente modelo debería ser lo suficientemente grande como para desarrollar el escenario inflacionario, en efecto, se lo propone como un posible candidato para la inflación [56, 57].

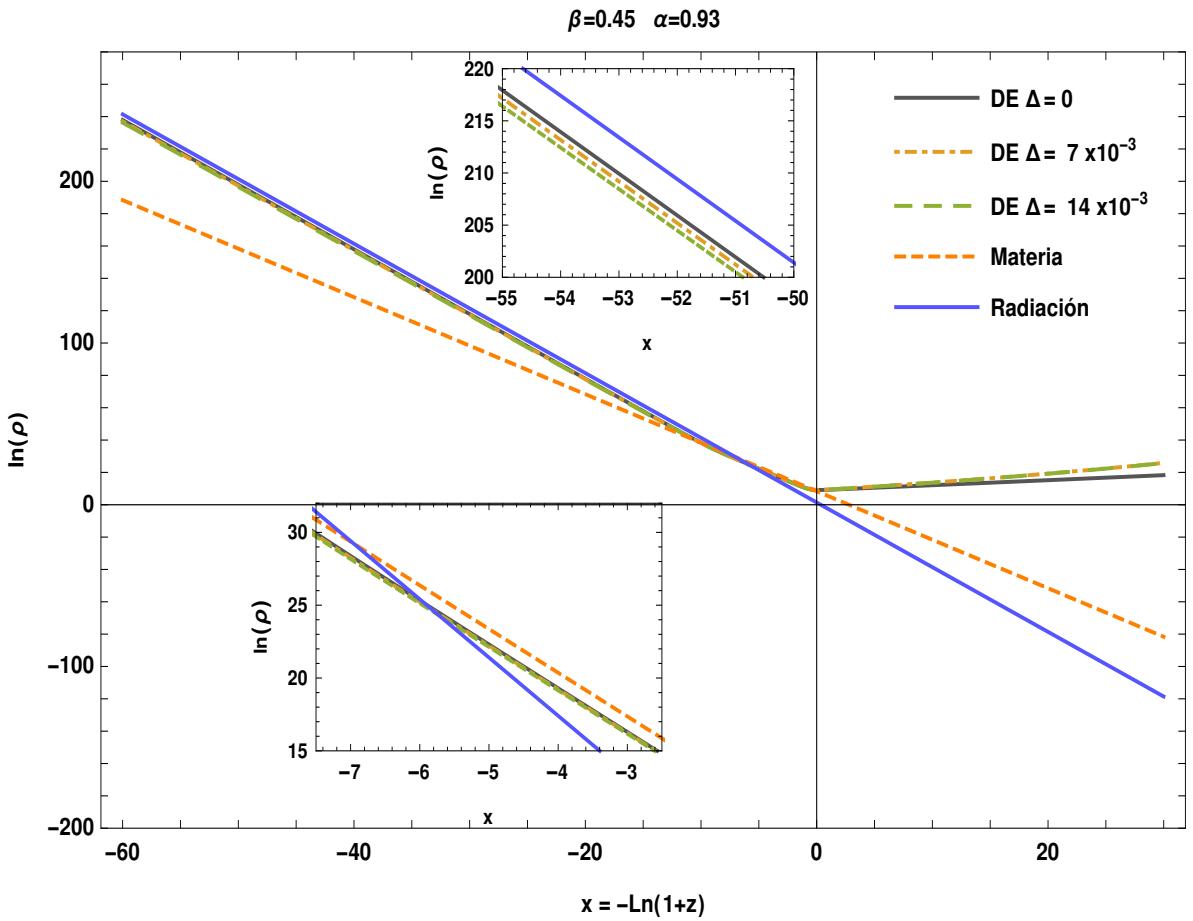


Figura 5.13: Evolución del logaritmo natural de las densidades de materia, energía oscura y radiación, para diferentes valores de  $\Delta$ . La izquierda a  $x = 0$  corresponde al pasado.

Con respecto a los tiempos futuros, se presenta en la Figura 5.15 la densidad de energía oscura  $\tilde{\rho}_\Lambda = \rho_\Lambda / 3H_0^2$  en función de  $z$  para distintos valores de  $\Delta$ . La evolución que se observa exhibe para todos los casos una singularidad tipo *Big Rip* en el futuro [45, 58], donde el aumento del parámetro de deformación provoca un incremento en los valores futuros.

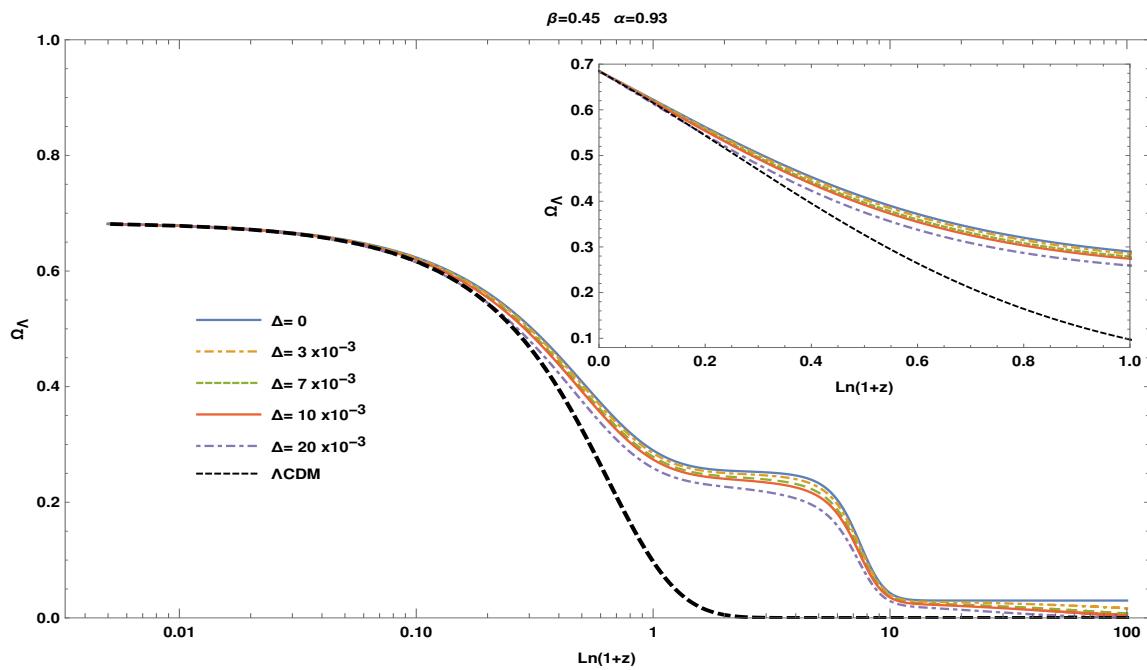


Figura 5.14: Evolución de la cantidad de energía oscura, para diferentes valores de  $\Delta$ . La derecha corresponde al pasado.

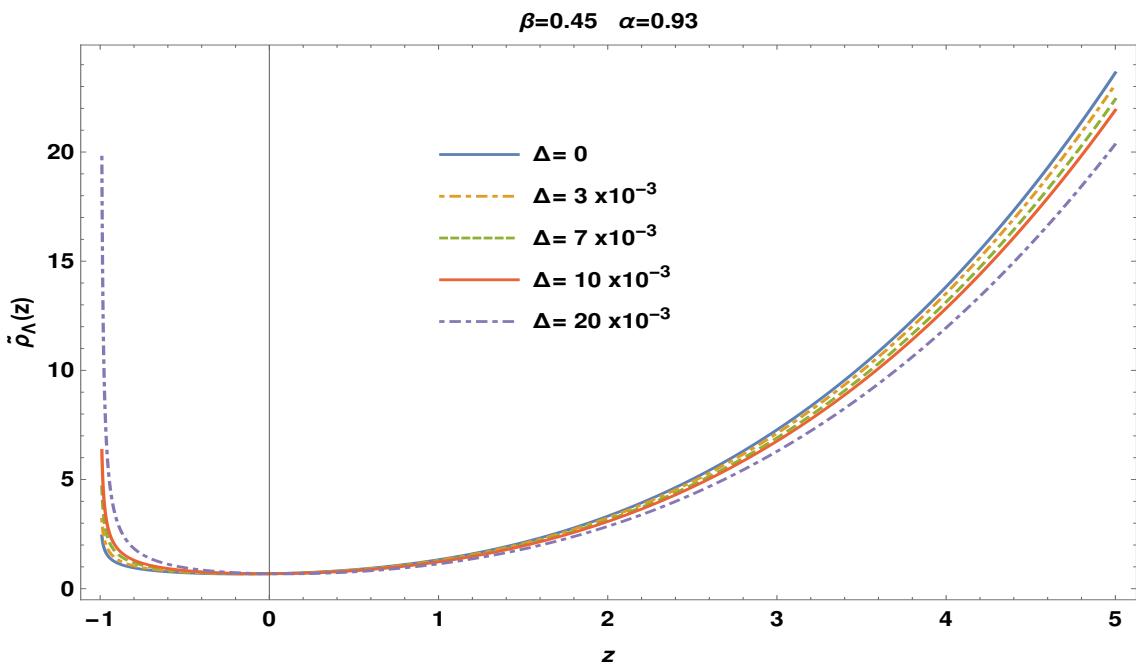


Figura 5.15: Evolución de la densidad de energía oscura para diferentes valores de  $\Delta$ .

# CAPÍTULO 6

## AJUSTE DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

En el capítulo anterior se desarrollaron los cálculos relacionados con el modelo, y se exhibió su fenomenología de acuerdo a algunos valores representativos de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\Delta$ , tomados como referencia de los valores obtenidos en [44] para  $\alpha$  y  $\beta$ , y [46] para  $\Delta$ . De manera general, la fenomenología obtenida no se separa mucho de las observaciones, por lo que se realizará un ajuste de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\Delta$  del modelo holográfico de energía oscura Ec. (5.4), utilizando datos observacionales recientes de  $H(z)$  [59], presentes en la Tabla 6.2. Para el ajuste se tomarán los valores actuales de los parámetros  $\Omega_{m0}$ ,  $\Omega_{r0}$ ,  $\Omega_{\Lambda0}$  y  $H_0$  reportados en [9].

### 6.1. Espacio de parámetros permitido

Con el objetivo de realizar el ajuste de los parámetros del modelo, es necesario contemplar el rango de estos parámetros que se analizará. Como se evidenció en las Figuras 5.11 y 5.12, existen zonas de inestabilidad ( $v_s^2 < 0$ ) en el espacio de parámetros que serán omitidas, sin embargo, también se impondrán las siguientes restricciones:  $w_0 < -1/3$  y  $q_0 < 0$ , con tal de garantizar resultados físicos consistentes con las observaciones.

En consecuencia, se puede apreciar en la Figura 6.1 la zona permitida en el espacio de  $(\alpha, \beta)$  para dos valores de  $\Delta$ . Donde los valores negativos de  $\alpha$  y  $\beta$  fueron excluidos al no cumplir con las restricciones impuestas. Tomando lo anterior en consideración y los resultados obtenidos en la Figura 6.1, se contemplaron los rangos presentes en la Tabla 6.1 para el ajuste de los parámetros.

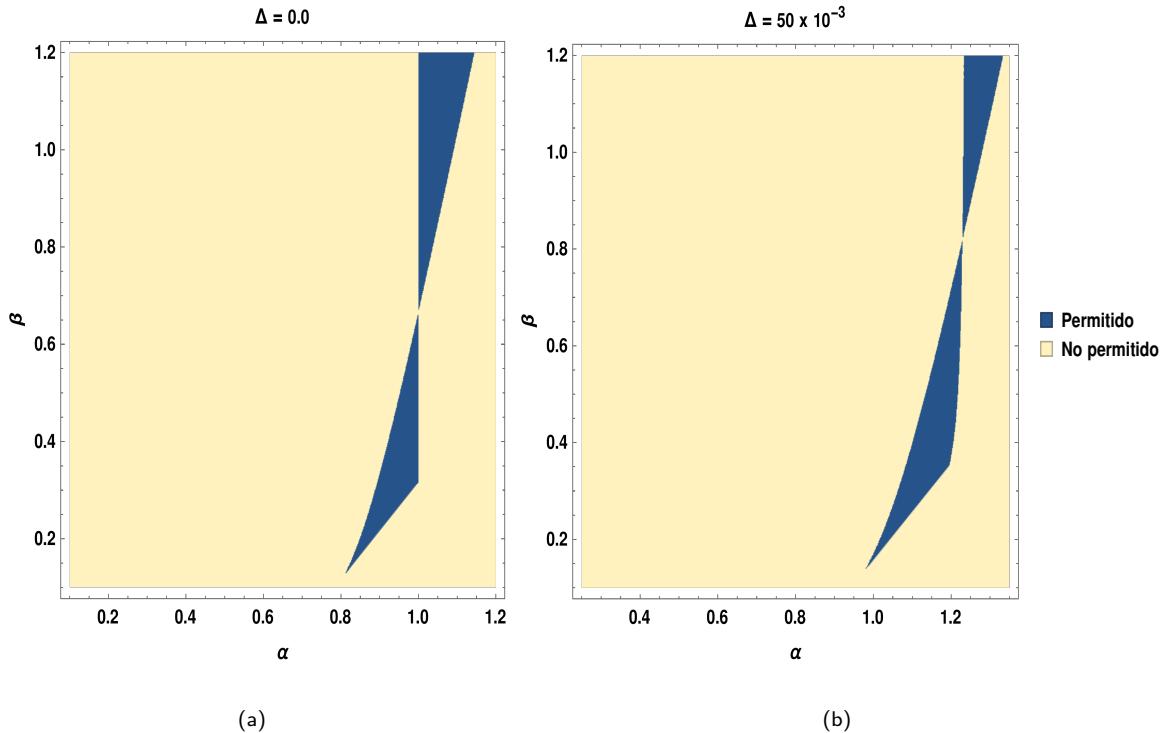


Figura 6.1: Zonas permitidas (Azul oscuro) en el espacio de parámetros  $(\alpha, \beta)$  para (a)  $\Delta = 0$ , (b)  $\Delta = 50 \times 10^{-3}$ , donde los criterios de aceptación son:  $0 \leq v_s^2 \leq 1$ ,  $w_0 < -1/3$  y  $q_0 < 0$ .

Parámetro	Rango de análisis
$\alpha$	$[0.7, 1.0]$
$\beta$	$[0.3, 0.9]$
$\Delta$	$[0.0, 30 \times 10^{-3}]$

Tabla 6.1: Rango del análisis permitido para los parámetros del modelo.

$z$	$H(z)^{(a)}$	$\sigma_{H(z)}$	Método <sup>(b)</sup>	Referencia
0.07	69	19.6	I	[60]
0.09	69	12	I	[61]
0.12	68.6	26.2	I	[60]
0.17	83	8	I	[61]
0.179	75	4	I	[62]
0.199	75	5	I	[62]
0.2	72.9	29.6	I	[60]
0.27	77	14	I	[61]
0.28	88.8	36.6	I	[60]
0.352	83	14	I	[62]
0.38	81.9	1.9	II	[63]
0.3802	83	13.5	I	[64]
0.4	95	17	I	[61]
0.4004	77	10.2	I	[64]
0.4247	87.1	11.2	I	[64]
0.4497	92.8	12.9	I	[64]
0.47	89	50	I	[65]
0.4783	80.9	9	I	[64]
0.48	97	62	I	[65]
0.51	90.8	1.9	II	[63]
0.593	104	13	I	[62]
0.61	97.8	2.1	II	[63]
0.68	92	8	I	[62]
0.781	105	12	I	[62]
0.875	125	17	I	[62]
0.88	90	40	I	[65]
0.9	117	23	I	[61]
1.037	154	20	I	[62]
1.3	168	17	I	[61]
1.363	160	33.6	I	[66]
1.43	177	18	I	[61]
1.53	140	14	I	[61]
1.75	202	40	I	[61]
1.965	186.5	50.4	I	[66]
2.34	223	7	II	[67]
2.36	227	8	II	[68]

Tabla 6.2: Datos observacionales de  $H(z)$  [59], <sup>(a)</sup>  $km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$ , <sup>(b)</sup> Los métodos I y II representan los cronómetros cósmicos y del tamaño radial de BAO respectivamente.

## 6.2. Ajuste a partir de los datos observacionales de $H(z)$

En esta sección se compara el escenario de la energía oscura holográfica de Barrow utilizando el corte IR de Granda-Oliveros con los datos observacionales de  $H(z)$ . El objetivo es extraer las restricciones sobre el parámetro del modelo  $\Delta$  que cuantifica la desviación de la entropía estándar, así como sobre los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Las mediciones de los valores del parámetro de Hubble usadas se encuentran tabuladas en la Tabla 6.2. Esta es una colección completa de datos de  $H(z)$  confiables actualmente disponibles [59]. De estas 36 mediciones de  $H(z)$ , 31 se determinan utilizando la técnica de los cronómetros cósmicos, y las cinco restantes se miden teniendo en cuenta las observaciones del BAO. Se puede hacer uso de estos datos en conjunto debido a que son estadísticamente independientes [69, 70]. En el análisis se consideró un rango con espaciado uniforme para los parámetros presente en la Tabla 6.1. Posteriormente, utilizando los datos para  $H(z)$ , se minimizó la función estadística  $\chi^2$  que depende de los parámetros del modelo dado. Esta función se define del siguiente modo [71]:

$$\chi_{H(z)}^2(\theta) = \sum_{i=1}^{36} \frac{(H_{th}(\theta, z_i) - H_{obs}(z_i))^2}{\sigma_i^2} . \quad (6.1)$$

Donde  $\theta = (\alpha, \beta, \Delta)$ ,  $H_{th}$  y  $H_{obs}$  son las predicciones teóricas y observaciones medidas del parámetro de Hubble respectivamente, mientras que  $\sigma_i$  es la desviación estándar asociada a la incertidumbre de la medición a un valor de corrimiento al rojo  $z_i$ . Con el fin de determinar los intervalos de confianza, se define:

$$\Delta\chi^2 = \chi^2(\theta) - \chi_{min}^2(\theta^*) , \quad (6.2)$$

donde  $\theta^*$  son los parámetros que minimizan la  $\chi^2$ . Para  $1\sigma$  (68.27 %),  $2\sigma$  (95.45 %) y  $3\sigma$  (99.73 %) en una dimensión,  $\Delta\chi^2$  toma los valores 1, 4 y 9 respectivamente, mientras que para dos dimensiones  $\Delta\chi^2$  toma los valores 2.30, 6.18 y 11.83 respectivamente [72]. Otra cantidad de importancia en los procesos de ajuste es defina como:  $\bar{\chi}^2 = \chi_{min}^2/(N - n)$ , donde N es el numero de datos y n el numero de parámetros libres. Si  $\bar{\chi}^2 \leq 1$ , el modelo en consideración es consistente con los datos [72].

En la Figura 6.2 se observa el comportamiento de  $\Delta\chi^2$  en el espacio tres-dimensional  $(\alpha, \beta, \Delta)$ . Donde el volumen transparente representa los valores  $\Delta\chi^2 < 20$ , sugiriendo que el incremento en el valor del parámetro de deformación  $\Delta$  no favorece al modelo, al menos en contraste con los datos observacionales de  $H(z)$ .

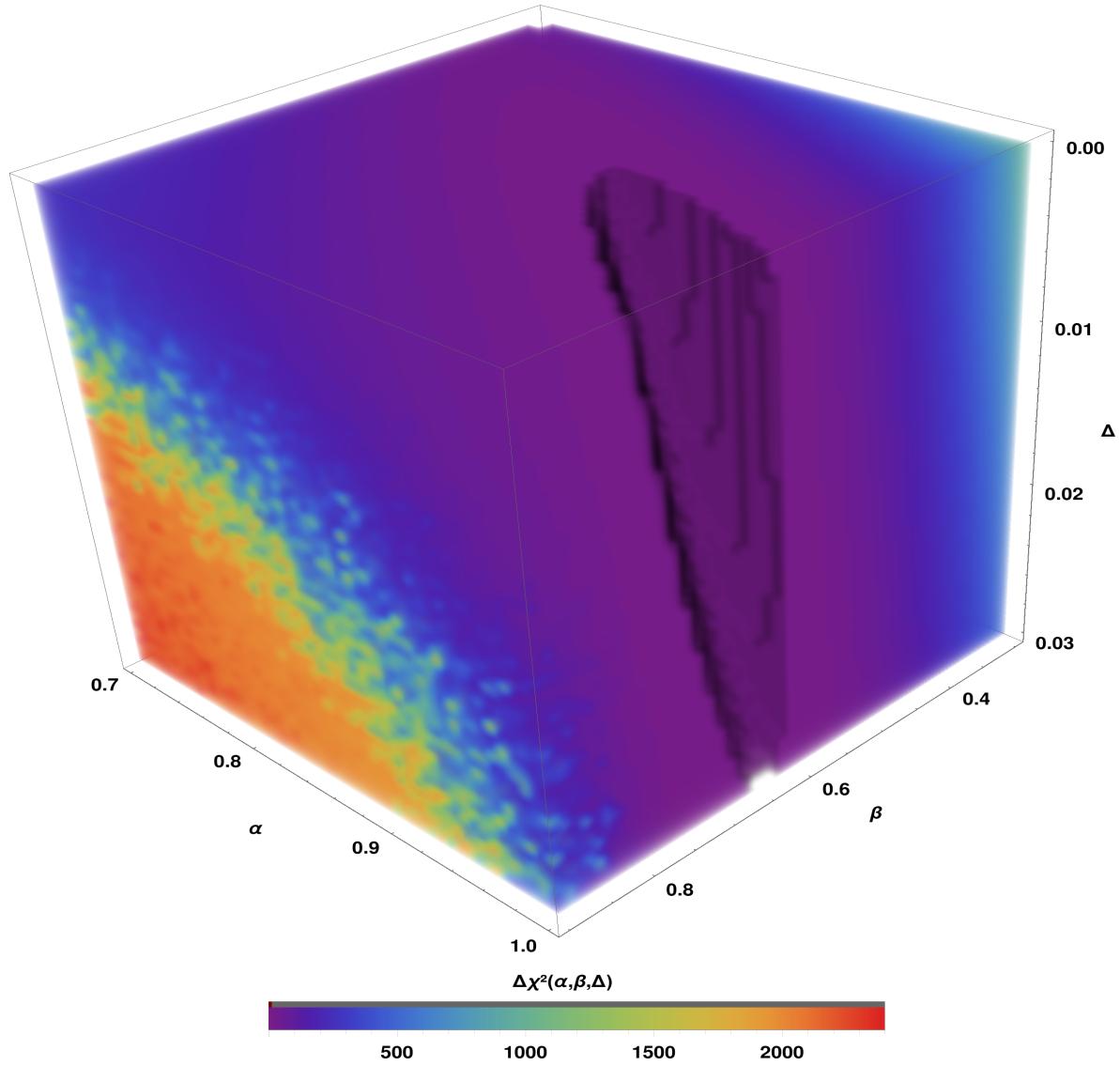


Figura 6.2: Espacio 3-D de parámetros  $(\alpha, \beta, \Delta)$  donde la escala de colores representa  $\Delta\chi^2$  del modelo propuesto teniendo en cuenta los datos observacionales de  $H(z)$ .

En las Figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se muestran los contornos de confianza (marginalización) hasta  $3\sigma$  en los espacios unidimensionales y bidimensionales para los parámetros del modelo. Se evidencia en las Figuras 6.3 y 6.5 que los datos de observación combinados proporcionan una restricción bastante estricta sobre  $\beta$ . Mientras que el valor estándar de  $\Delta = 0$  es el mínimo dentro de la región de  $1\sigma$ , concordando con lo evidenciado en la Figura 6.2. En la Tabla 6.3 se resumen los resultados del ajuste para los parámetros, el valor mínimo de la  $\chi^2$  y el valor de  $\bar{\chi}^2$  el cual es menor a 1, sugiriendo que los resultados obtenidos son consistentes con el conjunto de observaciones de  $H(z)$ .

	$\alpha$	$\beta$	$\Delta$	$\chi^2_{min}$	$\bar{\chi}^2$
$1\sigma$	$1.00^{+0.02}_{-0.02}$	$0.69^{+0.03}_{-0.02}$	$0.000^{+0.004}_{-0.000}$	22.599	$0.685 < 1$
$2\sigma$	$1.00^{+0.06}_{-0.06}$	$0.69^{+0.06}_{-0.07}$	$0.000^{+0.016}_{-0.000}$	-	-
$3\sigma$	$1.00^{+0.11}_{-0.11}$	$0.69^{+0.09}_{-0.13}$	$0.000^{+0.029}_{-0.000}$	-	-

Tabla 6.3: Mejores valores ajustados para los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\Delta$  con un nivel de confianza de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$ , utilizando los datos observacionales de  $H(z)$  [59].

$w_0$	$q_0$	$z_t$	$t_0$ [Gyr]
$-1.016^{+0.009}_{-0.005}$	$-0.543^{+0.009}_{-0.005}$	$0.658^{+0.020}_{-0.012}$	$14.24^{+0.11}_{-0.06}$

Tabla 6.4: Valor del parámetro de la ecuación de estado actual  $w_0$ , parámetro de desaceleración actual  $q_0$ , corrimiento al rojo de transición  $z_t$  y el estimado de la edad del universo  $t_0$ , para el modelo de estudio utilizando los valores del mejor ajuste dentro de una variación de  $1\sigma$ , encontrados con base a los datos observacionales de  $H(z)$  [59].

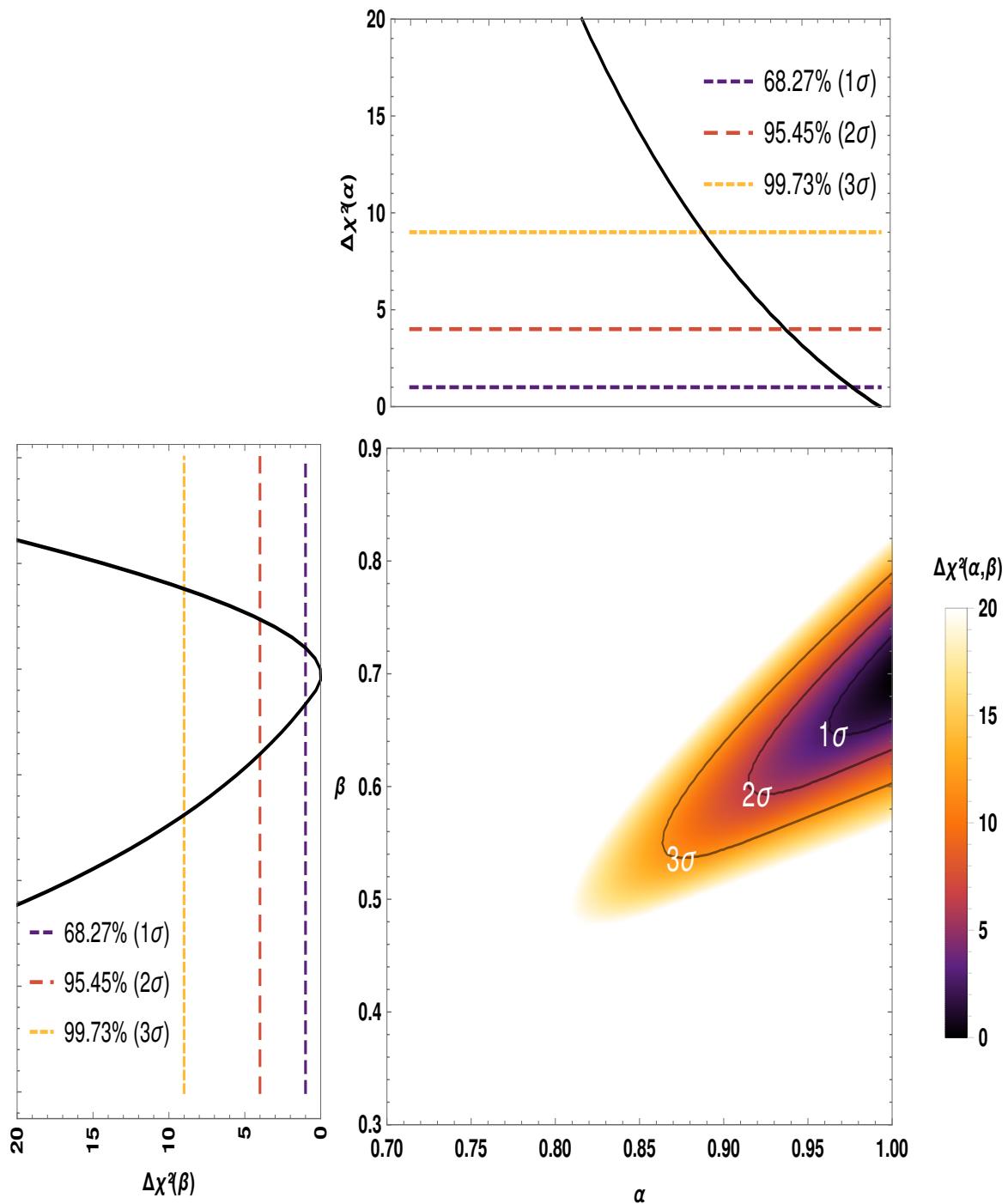


Figura 6.3: Intervalos de confianza en el espacio  $(\alpha, \beta)$  a un 68,27 %, 95,45 %, 99,73 % C.L. También se observa la marginalización de  $\Delta\chi^2$  sobre los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en la figura superior y de la izquierda, respectivamente.

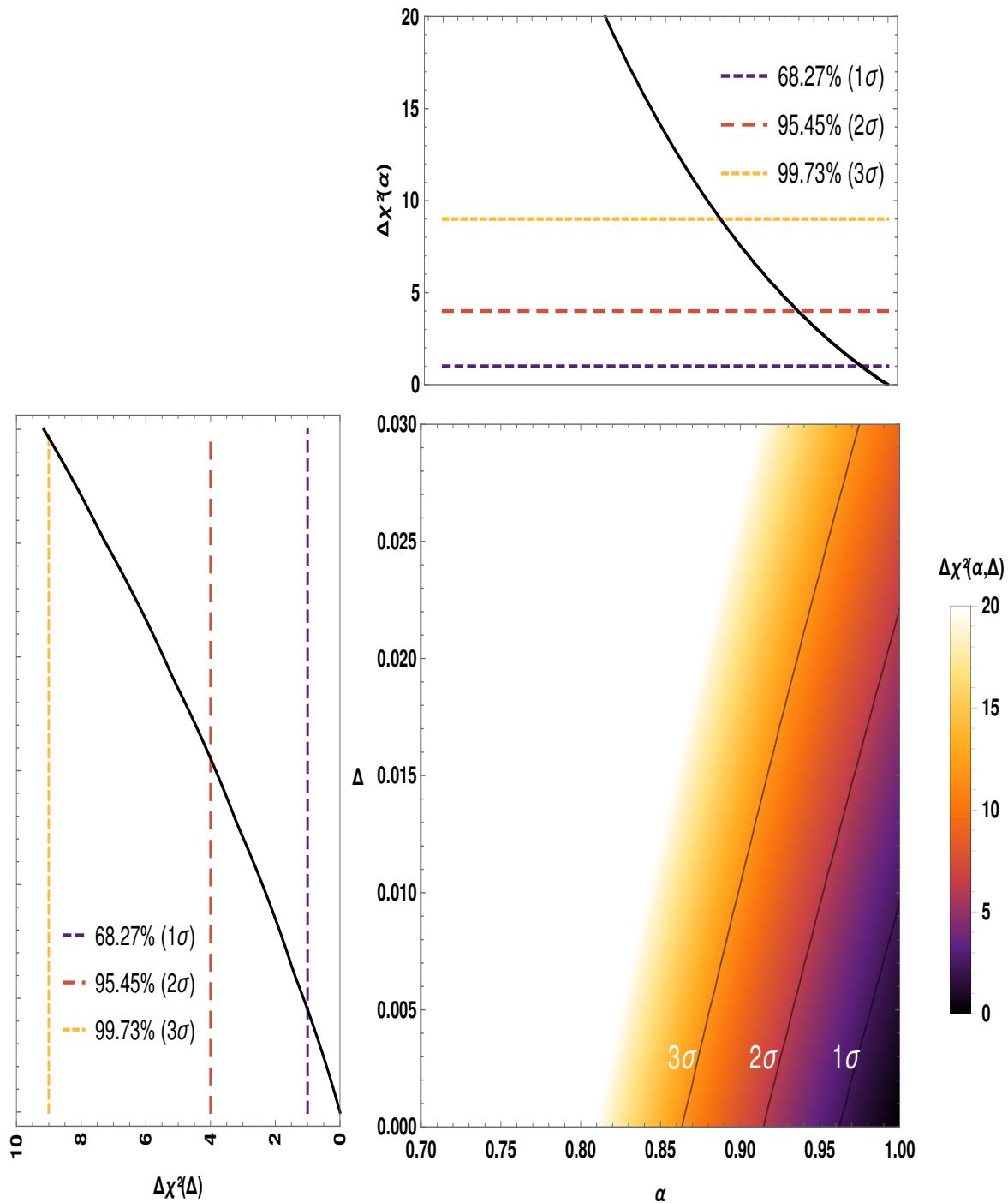


Figura 6.4: Intervalos de confianza en el espacio  $(\alpha, \Delta)$  a un 68,27 %, 95,45 %, 99,73 % C.L. También se observa la marginalización de  $\Delta\chi^2$  sobre los parámetros  $\alpha$  y  $\Delta$  en la figura superior y de la izquierda, respectivamente.

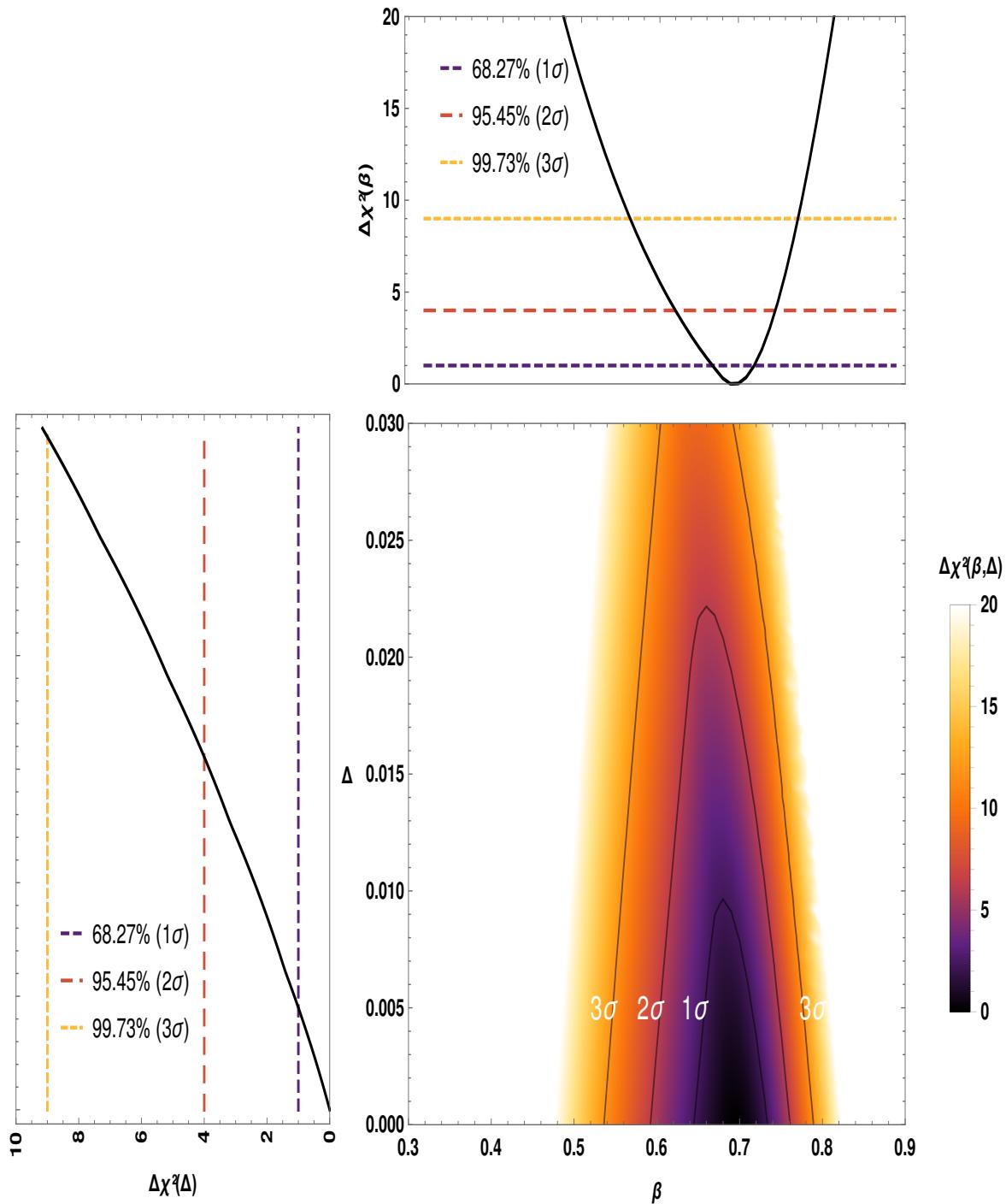


Figura 6.5: Intervalos de confianza en el espacio  $(\beta, \Delta)$  a un 68,27 %, 95,45 %, 99,73 % C.L. También se observa la marginalización de  $\Delta\chi^2$  sobre los parámetros  $\beta$  y  $\Delta$  en la figura superior y de la izquierda, respectivamente.

Por lo anterior, es posible considerar que los resultados obtenidos dan una buena aproximación a las regiones de confianza para los parámetros del modelo. Con respecto a las observaciones, la Figura 6.6 muestra que la tasa de expansión (parámetro de Hubble) estimada a partir de los valores del mejor ajuste de los parámetros del modelo es consistentes con las observaciones.

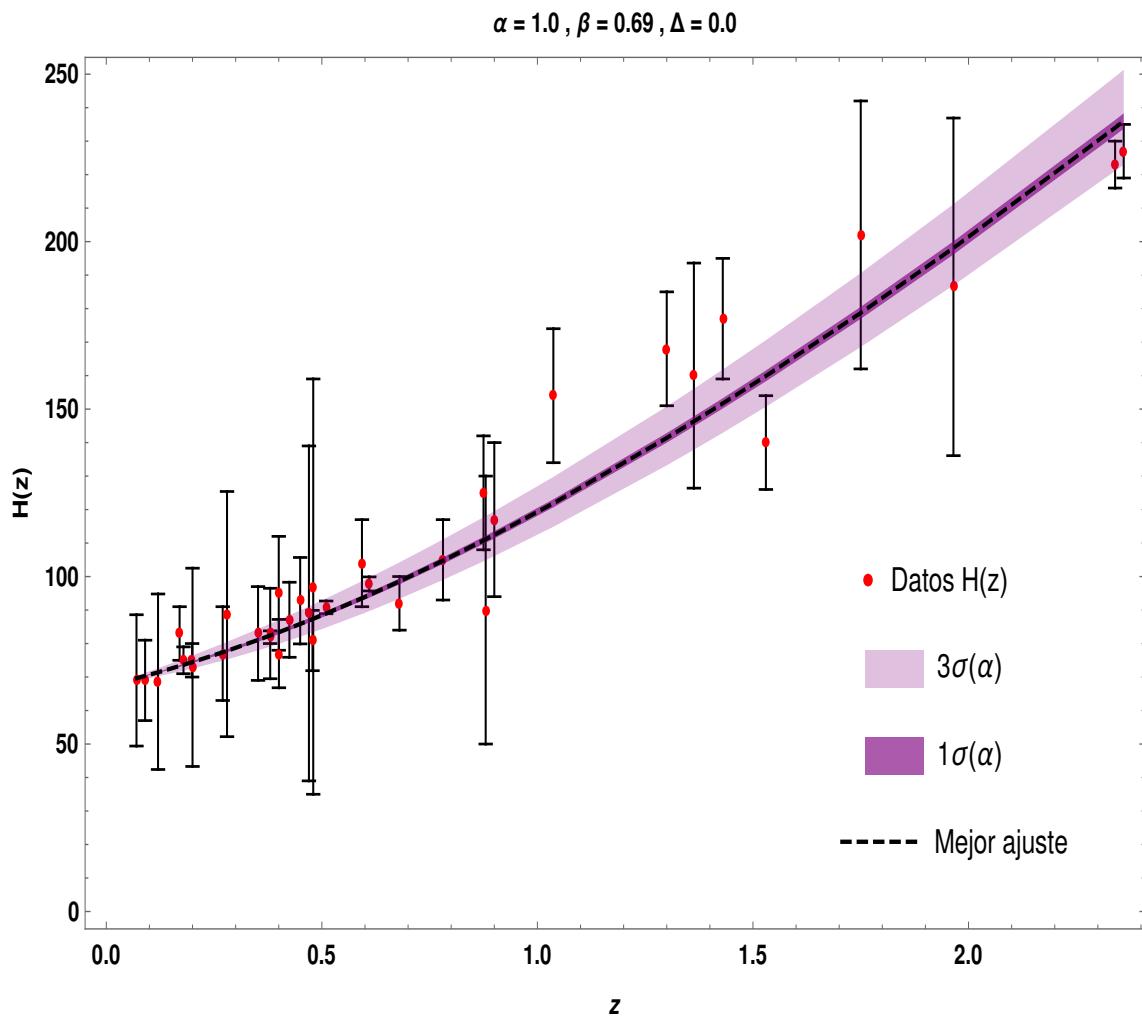


Figura 6.6: Parámetro de Hubble para el modelo cosmológico de estudio utilizando los valores del mejor ajuste obtenido y los datos observacionales de  $H(z)$ . Las regiones sombreadas representan los niveles de confianza de  $1\sigma$  y  $3\sigma$  (de las bandas de color más oscuras a las más claras) para la variación del parámetro  $\alpha$ .

De las Figuras 6.6 y 6.7, se puede observar que dentro de  $3\sigma$  de confianza, la variación de  $\alpha$  y  $\beta$ , aun reproduce en buena parte el comportamiento de los datos observacionales, concordando con lo sugerido por el valor de  $\chi^2$  obtenido.

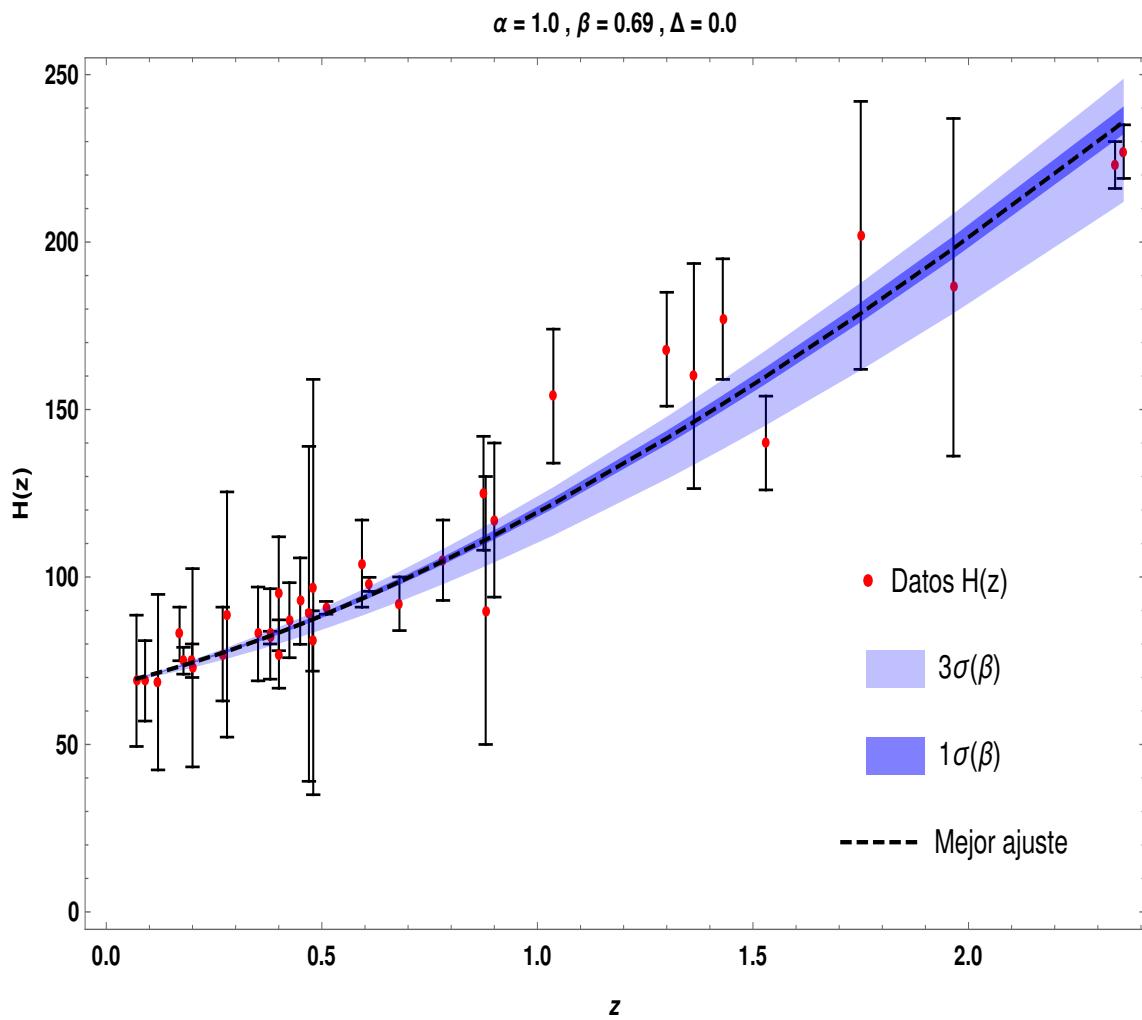


Figura 6.7: Parámetro de Hubble para el modelo cosmológico de estudio utilizando los valores del mejor ajuste obtenido y los datos observacionales de  $H(z)$ . Las regiones sombreadas representan los niveles de confianza de  $1\sigma$  y  $3\sigma$  (de las bandas de color más oscuras a las más claras) para la variación del parámetro  $\beta$ .

La concordancia con las observaciones de  $H(z)$  se hace mas evidente al comparar también el comportamiento con respecto al esperado por  $\Lambda$ CDM, como se puede visualizar en la Figura 6.8, donde el modelo con el mejor ajuste es cercano al comportamiento de  $\Lambda$ CDM, incluso al presentar una variación de  $3\sigma$  en los tres parámetros de manera simultanea.

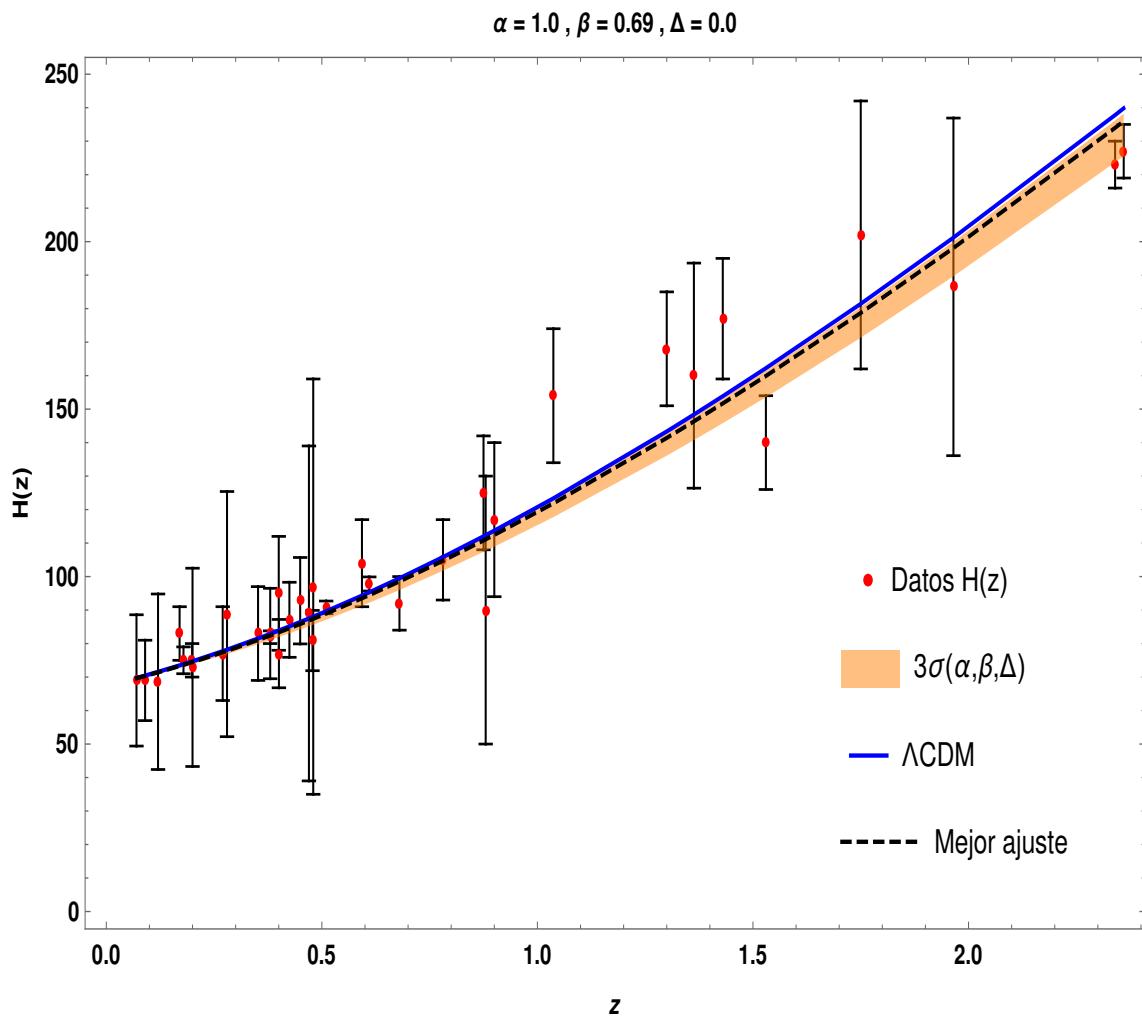


Figura 6.8: Parámetro de Hubble para el modelo cosmológico de estudio utilizando los valores del mejor ajuste obtenido y los datos observacionales de  $H(z)$ . La región sombreada representa el nivel de confianza  $3\sigma$  para la variación de los tres parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\Delta$  simultáneamente.

Finalmente, la fenomenología del modelo de estudio considerando los valores de los parámetros con el mejor ajuste dentro de  $1\sigma$  de variación, se resume en la Tabla 6.4, donde el valor actual del parámetro de la ecuación de estado es  $-1.016_{-0.005}^{+0.009}$ , lo cual es consistente con la constante cosmológica ( $w_0 = -1$ ) en  $1.78\sigma$  [9]. El parámetro de desaceleración en tiempo presente es estimado a  $-0.543_{-0.005}^{+0.009}$ , reflejando un buen acuerdo con  $q(z=0) = -0.640_{-0.187}^{+0.187}$  según las observaciones [73]. El corrimiento al rojo de transición que caracteriza el inicio de la aceleración tardía para el modelo se encuentra alrededor de  $0.658_{-0.012}^{+0.020}$ , y es comparable con la restricción observacional  $z_t = 0.65_{-0.07}^{+0.10}$  [74]. Es importante señalar que los valores extraídos de  $q_0$  y  $z_t$  en el presente modelo también son comparables a los valores correspondientes en [75] para el modelo  $\Lambda$ CDM ( $q_0 = -0.59$  y  $z_t = 0.74$ ).

Es posible realizar un estimado de la edad del universo a partir del parámetro de Hubble en términos del corrimiento al rojo  $z$  [76], como se aprecia en la siguiente expresión:

$$t_0 - t_B = \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z)H(z)} . \quad (6.3)$$

Donde  $t_B = 0$  es el tiempo al momento del *Big bang*, y  $t_0 = t(z=0)$  es el tiempo presente. A partir de los resultados numéricos obtenidos en el ajuste, se evaluó la integral de la Ec. (6.3) para el parámetro de Hubble del modelo con el mejor ajuste, obteniendo una edad estimada de  $14.24_{-0.06}^{+0.11}$  Gyr, siendo consistente con un nivel de confianza de  $1\sigma$  con las medidas a partir de las anisotropías del CMB  $14.0_{-0.5}^{+0.5}$  Gyr [77]. Cabe mencionar que la edad obtenida es compatible en magnitud con la reportada  $13.79_{-0.02}^{+0.02}$  Gyr por Planck 2018 [9].

### 6.3. Ajuste sobre la Magnitud absoluta (SNIa)

En ésta última sección, se realizará un ajuste alternativo de la magnitud absoluta  $M$  asociada al conjunto de datos observacionales en el rango  $0.01 < z < 2.3$  de 1048 Supernovas Tipo Ia (SNIa) [78], en el contexto de nuestro modelo holográfico de energía oscura con los mejores valores ajustados de los parámetros en la sección anterior ( $\alpha = 1.0$ ,  $\beta = 0.69$ ,  $\Delta = 0.0$ ), esto con el fin de desvelar el posible impacto y alcance del modelo propuesto.

Para llevar a cabo lo anterior, se comparará la magnitud aparente observacional de las supernovas con la predicción teórica de nuestro modelo, minimizando así la función  $\chi^2(M)$ :

$$\chi^2_{SNIa}(M) = \sum_{i=1}^{1048} \frac{(m_{b_{th}}(M, z_i) - m_{b_{obs}}(z_i))^2}{\sigma_i^2} . \quad (6.4)$$

Donde  $m_{b_{th}}$  y  $m_{b_{obs}}$  son las predicciones teóricas y observaciones de la magnitud aparente de la supernovas, mientras que  $\sigma_i$  es la desviación estándar asociada la incertidumbre de la medición a un valor de corrimiento al rojo  $z_i$ . La magnitud aparente teórica se calcula determinando la distancia de luminosidad,

$$dL(z_i) = c(1 + z_i) \int_0^{z_i} \frac{dz}{H(z)}, \quad (6.5)$$

la cual permite obtener la magnitud aparente a través de la relación (ver [79] para mas detalles):

$$m_{b_{th}}(M, z_i) = M + 5 \log_{10} \left( \frac{dL(z_i)}{H_0} \right) + 25 . \quad (6.6)$$

Usando los parámetros del modelo con el mejor ajuste y los valores para los parámetros cosmológicos  $\Omega_{m_0}$ ,  $\Omega_{r_0}$ ,  $\Omega_{\Lambda_0}$  y  $H_0$  reportados en [9], se estimó en el marco del presente modelo que el valor más probable de la magnitud absoluta corresponde al valor mínimo de  $\chi^2_{min} = 1038,219$ , como se observa en la Figura 6.9 donde se evidencian los intervalos de confianza unidimensional a  $1\sigma$  (68,27 %),  $2\sigma$  (95,45 %) y  $3\sigma$  (99,73 %) tabulados en la Tabla 6.3. El valor estimado de  $M = -17.097_{-0,012}^{+0,013}$  para nuestro modelo es comparable con las restricciones observacionales  $-19.214_{-0,037}^{+0,037}$  [79] y  $-18.83_{-0,37}^{+0,78}$  [80], además refleja un buen acuerdo con el valor observacional  $-18.46_{-0,41}^{+0,41}$  reportado recientemente en [81].

Finalmente, el valor de  $\bar{\chi}^2$  presente en la Tabla 6.3 reafirma que el resultado obtenido es consistente con el conjunto de observaciones, como se visualiza en la Figura 6.10, donde dentro de  $3\sigma$  de confianza, la variación de  $M$  reproduce en buena parte el comportamiento de los datos observacionales [78].

	$1\sigma$	$2\sigma$	$3\sigma$	$\chi^2_{min}$	$\bar{\chi}^2$
$M$	$-17.097^{+0,005}_{-0,004}$	$-17.097^{+0,008}_{-0,008}$	$-17.097^{+0,013}_{-0,012}$	1038.219	$0.9916 < 1$

Tabla 6.5: Mejor valor ajustado para la magnitud absoluta  $M$  de las SNIa, con un nivel de confianza de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$ , utilizando los parámetros del modelo con el mejor ajuste.

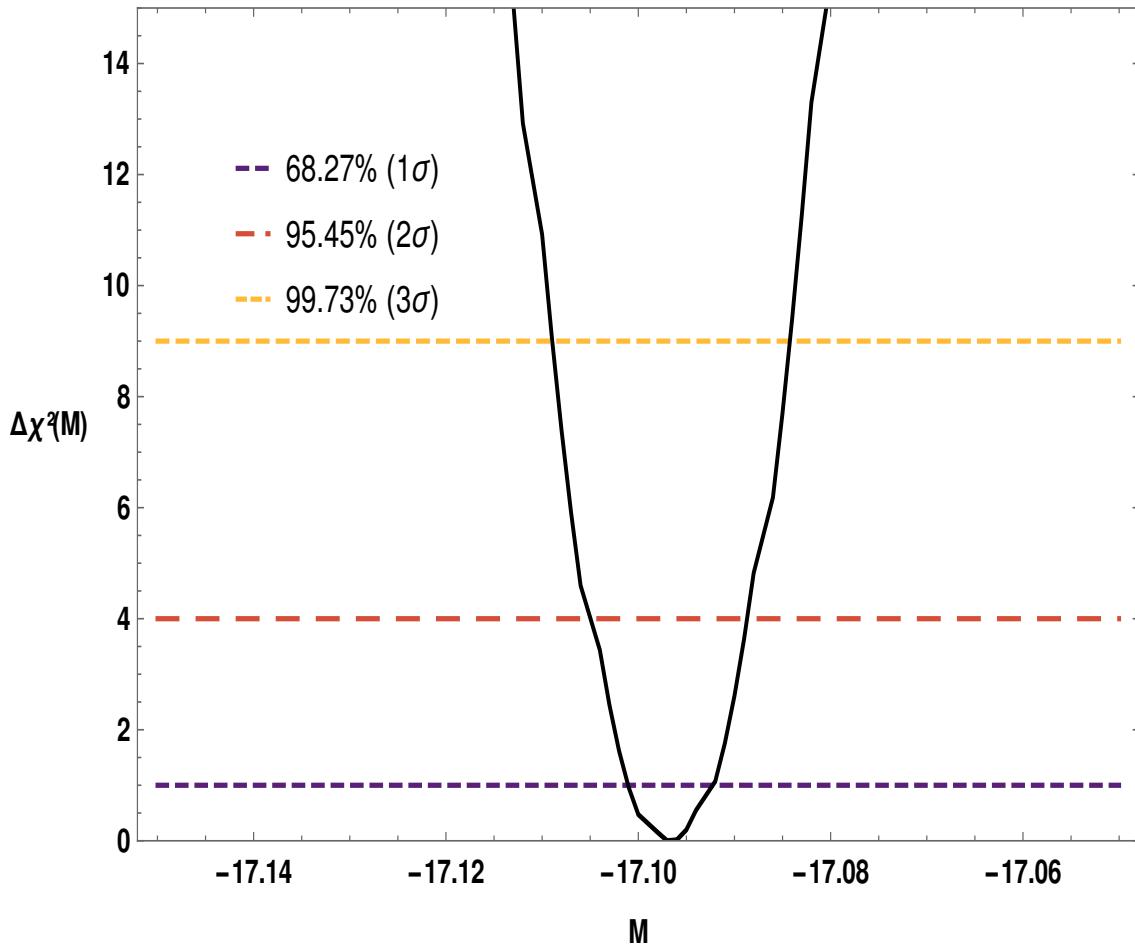


Figura 6.9: Intervalos de confianza unidimensionales para  $M$  a un 68,27 %, 95,45 %, 99,73 % C.L.

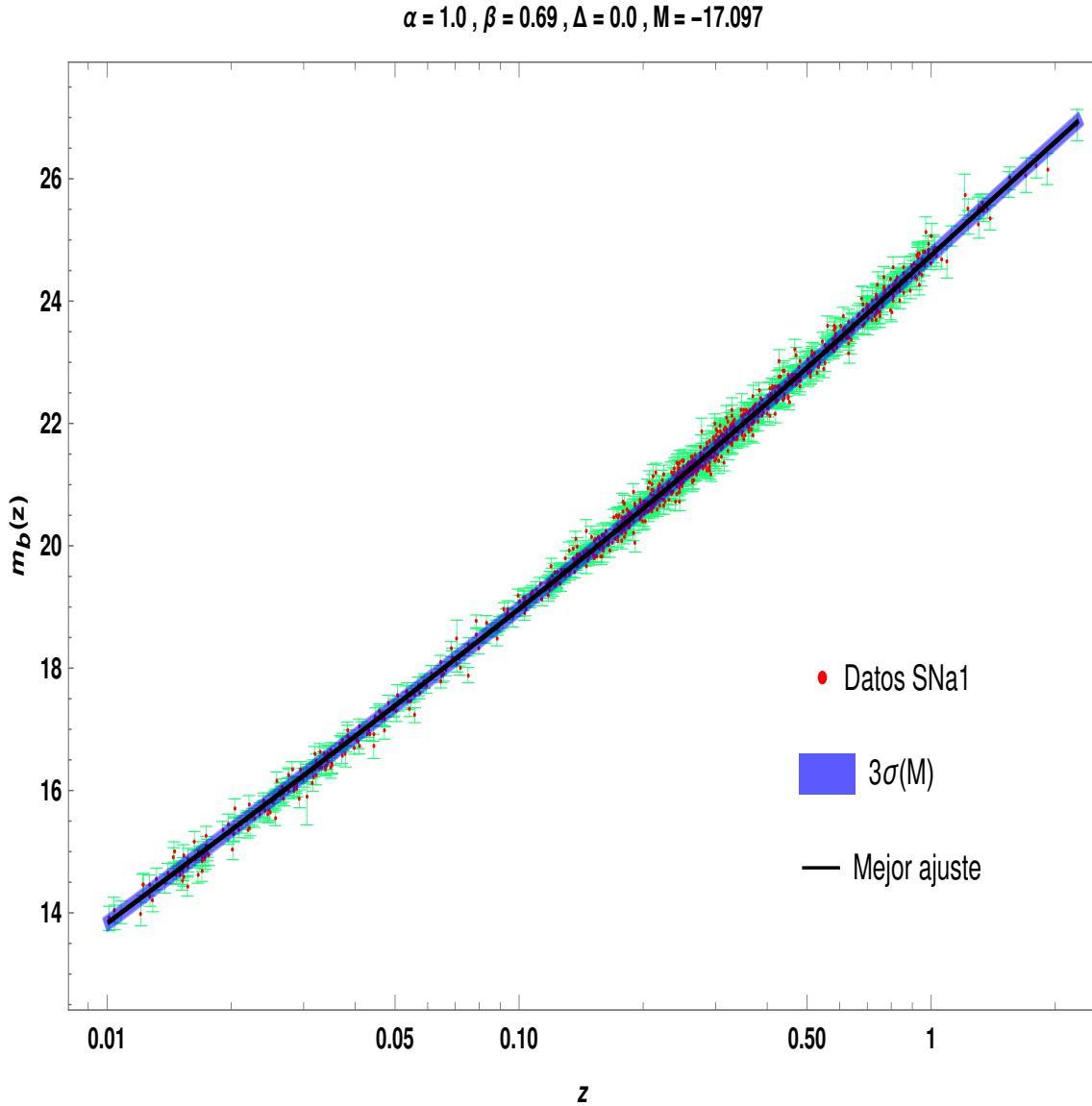


Figura 6.10: Magnitud aparente  $m_b(z)$  del modelo cosmológico de estudio utilizando los valores del mejor ajuste obtenido, y el valor mejor ajustado de  $M = -17.097$ , junto al conjunto de datos de SNIa [78]. La región sombreada representa el nivel de confianza  $3\sigma$  para la variación de la magnitud absoluta  $M$ .

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSIONES

En este trabajo, se estudió el modelo de energía oscura holográfica de Barrow considerando el corte infrarrojo de Granda-Oliveros en un universo plano  $k = 0$ . Para llevar a cabo el desarrollo del trabajo se cumplió con los objetivos específicos, por lo cual fue necesario determinar las ecuaciones Friedmann (5.4) correspondientes, y posteriormente a través de su solución numérica se investigó la fenomenología del modelo. Finalmente se realizó el ajuste de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y del parámetro de deformación  $\Delta$ , a partir de los cuales se ajustó el valor de la magnitud absoluta  $M$  para las Supernovas Tipo Ia. En base a lo anterior se pueden resaltar las siguientes conclusiones:

- A partir del modelo propuesto es posible obtener un régimen de expansión acelerada del universo en tiempos tardíos, en el que se exhibe una transición suave de desaceleración a un régimen acelerado en el pasado reciente.
- El nuevo parámetro de deformación  $\Delta$  disminuye los valores del parámetro de Hubble en tiempos tardíos a medida que aumenta, mientras que los valores futuros crecen, comportamiento afín con lo reportado en [47, 48]. En tiempos tempranos el nuevo parámetro de deformación  $\Delta$  pareciera reducir la diferencia de los valores entre el parámetro de Hubble del modelo propuesto y el de  $\Lambda$ -CDM.

- Al igual que los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , el nuevo parámetro de deformación  $\Delta$  introduce significativos cambios en los valores para el corrimiento al rojo de transición  $z_t$ , y para el valor actual del parámetro de desaceleración  $q_0$ .
- El aumento de  $\Delta$  provoca en el parámetro de la ecuación de estado una transición de quintaesencia a fantasma, tanto en tiempos tardíos como futuros. Comportamiento característico de los modelos tipo Quintom.
- El modelo presenta zonas de estabilidad ante perturbaciones desde la época temprana hasta el tiempo presente, sin embargo, las zonas de estabilidad presentan una reducción y desplazamiento (a valores mas altos) al incrementar el parámetro de deformación  $\Delta$ , lo que sugiere que este parámetro no debería tomar valores muy alejados de cero.
- El modelo exhibe una era de dominancia de la radiación, seguida por la materia no relativista y la era actual de dominancia de la energía oscura, sin embargo, en tiempos tempranos se observa que la componente de energía oscura del modelo puede no ser despreciable en comparación con la radiación. Colocándolo como un posible candidato para el estudio de la inflación [56, 57]. Con respecto a los tiempos futuros, el aumento del parámetro de deformación acrecienta el comportamiento tipo *Big Rip* del modelo [58].
- La zona en el espacio de parámetros donde se garantizan resultados físicos consistentes con las observaciones y estables, excluye a los valores negativos de  $(\alpha, \beta)$  y a valores grandes de  $\Delta$ .
- El ajuste de los parámetros del modelo (Tabla 6.3) a partir de los datos observacionales de  $H(z)$ , sugiere que el incremento en el valor del parámetro de deformación  $\Delta$  puede no favorecer al modelo, y proporciona una restricción estricta sobre  $\beta$ . Mientras que el valor estándar de  $\Delta = 0.0$  es el más probable dentro de la región de  $1\sigma$ , coincidiendo con lo reportado recientemente en [46, 82, 83]. Finalmente, la fenomenología del

modelo de estudio con los valores de los parámetros del mejor ajuste, es consistente con las observaciones dentro de  $1\sigma$  de confianza.

Como perspectivas a plan futuro, se planea estudiar las implicaciones del presente modelo (para  $\Delta = 0$  y  $\Delta \neq 0$ ) en la formación de estructuras, y realizar restricciones observacionales sobre los parámetros del modelo considerando varios conjuntos de datos y rangos más amplios.

Finalmente, se destaca que en base al presente trabajo se elaboró un artículo: A. Oliveros, M. A. Sabogal, Mario A. Acero, titulado “*Barrow holographic dark energy with Granda-Oliveros cut-off*”, disponible en: [arXiv:2203.14464](https://arxiv.org/abs/2203.14464), el cual está sometido para publicación en una revista internacional A1 acorde a Publindex.

## APÉNDICE A

### ECUACIONES DE FRIEDMANN

## Deducción de las ecuaciones de Friedmann del modelo

### Componentes del tensor de Ricci

El tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  presente en las ecuaciones de campo de Einstein Eq. (2.2) es la única contracción no nula del tensor de curvatura (teniendo en cuenta la simetría de signo de los índices). El tensor de curvatura está definido como:

$$R^l_{kji} \equiv \partial_j \Gamma^l_{ki} - \partial_i \Gamma^l_{kj} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{kj} \Gamma^l_{mi} , \quad (\text{A.1})$$

donde se utilizarán los índices latinos  $i, j, k, l$  que pueden tomar los valores de 0 a 3, y los símbolos de Christoffel (Conexiones) en términos de la métrica están dados por,

$$\Gamma^l_{ji} \equiv \frac{1}{2} g^{lm} (\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij}) . \quad (\text{A.2})$$

Considerando la métrica FRW de la Eq. (2.1), el tensor métrico  $g_{ij}$  tiene la forma,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} . \quad (\text{A.3})$$

A partir de las componentes de  $g_{ij}$  y sus derivadas se obtienen los símbolos de Christoffel no nulos,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{11} \\ &= -\frac{1}{2}(1)\partial_t\left(\frac{-a^2(t)}{1-kr^2}\right) = \frac{a(t)}{1-kr^2}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{02} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{22} \\ &= -\frac{1}{2}(1)\partial_t\left(-a^2(t)r^2\right) = a(t)\dot{a}(t)r^2\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{33} \\ &= -\frac{1}{2}(1)\partial_t\left(-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta\right) = a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_0 g_{11} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-kr^2}{-a^2(t)}\right)\partial_t\left(\frac{-a^2(t)}{1-kr^2}\right) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{20} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{02}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_0 g_{22} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2(t)r^2}\right)\partial_t\left(-a^2(t)r^2\right) = \frac{a(t)}{a(t)}\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{30} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{03}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_0 g_{33} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_t\left(-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta\right) = \frac{a(t)}{a(t)}\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{33} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1-kr^2}{-a^2(t)}\right)\partial_r\left(-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta\right) \\ &= -r\left(1-kr^2\right)\sin^2 \theta\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1-kr^2}{-a^2(t)}\right)\partial_r\left(-a^2(t)r^2\right) \\
&= -r\left(1-kr^2\right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-kr^2}{-a^2(t)}\right)\partial_r\left(\frac{-a^2(t)}{1-kr^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-kr^2\right)\partial_r\left(1-kr^2\right)^{-1} \\
&= \frac{kr}{1-kr^2}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2(t)r^2}\right)\partial_t\left(-a^2(t)r^2\right) = \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_r\left(-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta\right) = \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2(t)r^2}\right)\partial_\theta\left(-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta\right) = -\sin \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{32}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta}\right)\partial_\theta\left(-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta\right) = \cot \theta
\end{aligned} \tag{A.16}$$

En resumen los 19 símbolos de Christoffel distintos de cero:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \quad | \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2 \quad | \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2} \quad | \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2) \quad | \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta \quad (\text{A.17})$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad | \quad \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad | \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta$$

Utilizando los resultados en la Eq. (A.17), al realizar la contracción de índices del tensor de curvatura, la componente temporal del tensor de Ricci se puede expandir como,

$$\begin{aligned}
 R_{0l0}^l &= R_{00} = \partial_l \Gamma_{00}^l - \partial_0 \Gamma_{0l}^l + \Gamma_{00}^m \Gamma_{ml}^l - \Gamma_{0l}^m \Gamma_{m0}^l \\
 l = 0 \quad | \quad &\Gamma_{00}^m \Gamma_{m0}^0 - \Gamma_{00}^m \Gamma_{m0}^0 \\
 l = 1 \quad | \quad &-\partial_0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{00}^m \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{01}^m \Gamma_{m0}^1 \\
 l = 2 \quad | \quad &-\partial_0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{00}^m \Gamma_{m2}^2 - \Gamma_{02}^m \Gamma_{m0}^2 \\
 l = 3 \quad | \quad &-\partial_0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{00}^m \Gamma_{m3}^3 - \Gamma_{03}^m \Gamma_{m0}^3 \\
 \Rightarrow &= -\partial_0 \Gamma_{01}^1 - \partial_0 \Gamma_{02}^2 - \partial_0 \Gamma_{03}^3 + \dots \\
 m = 0 \quad | \quad &= 0 \\
 m = 1 \quad | \quad &-\Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 \\
 m = 2 \quad | \quad &-\Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 \\
 m = 3 \quad | \quad &-\Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3
 \end{aligned}$$

De manera que finalmente los términos que aportan son,

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -\partial_0 \Gamma_{01}^1 - \partial_0 \Gamma_0^2 - \partial_0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3 \\
 &= -\partial_t \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - \partial_t \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - \partial_t \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\
 &= -3\partial_t \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Por lo que la componente temporal del tensor de Ricci es,

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}. \tag{A.19}$$

Similar al procedimiento anterior, al realizar la contracción del tensor de curvatura, es posible determinar las demás componentes del tensor de Ricci. Para  $R_{11}$  se tiene,

$$\begin{array}{c}
 R_{11}^l = R_{11} = \partial_l \Gamma_{11}^l - \partial_1 \Gamma_{1l}^l + \Gamma_{11}^m \Gamma_{ml}^l - \Gamma_{1l}^m \Gamma_{ml}^l \\
 \hline
 l = 0 \quad | \quad \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{10}^m \Gamma_{m1}^0 \\
 \hline
 l = 1 \quad | \quad \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^m \Gamma_{m1}^1 - \Gamma_{11}^m \Gamma_{m1}^1 \\
 \hline
 l = 2 \quad | \quad -\partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^m \Gamma_{m2}^2 - \Gamma_{12}^m \Gamma_{m1}^2 \\
 \hline
 l = 3 \quad | \quad -\partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^m \Gamma_{m3}^3 - \Gamma_{13}^m \Gamma_{m1}^3 \\
 \hline
 \Rightarrow \quad = \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \dots \\
 \hline
 m = 0 \quad | \quad +\Gamma_{11}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{11}^{10} \Gamma_{02}^{12} + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 \\
 \hline
 m = 1 \quad | \quad -\Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 \\
 \hline
 m = 2 \quad | \quad -\Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 \\
 \hline
 m = 3 \quad | \quad -\Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3
 \end{array}$$

Los términos que aportan son:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
 &= \partial_t \left( \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \right) - \partial_r \left( \frac{1}{r} \right) - \partial_r \left( \frac{1}{r} \right) - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \left( \frac{a\bar{a}}{1 - k_1^2} \right) + \left( \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \right) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \right) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) + 2 \left( \frac{kr}{1 - kr^2} \right) \left( \frac{1}{r} \right) - 2 \left( \frac{1}{r} \right)^2
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Por tanto,

$$R_{11} = \frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)}{1 - kr^2} . \quad (\text{A.21})$$

Para  $R_{22}$  se tiene,

$$\begin{array}{c} R_{2l2}^l = R_{22} = \partial_l \Gamma_{22}^l - \partial_2 \Gamma_{2l}^l + \Gamma_{22}^m \Gamma_{ml}^l - \Gamma_{2l}^m \Gamma_{m2}^l \\ \hline l = 0 \quad | \quad \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{20}^m \Gamma_{m2}^0 \\ \hline l = 1 \quad | \quad \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^1 - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^1 \\ \hline l = 2 \quad | \quad \Gamma_{22}^2 \Gamma_{m2}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{m2}^2 = 0 \\ \hline l = 3 \quad | \quad -\partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^m \Gamma_{m3}^3 - \Gamma_{23}^m \Gamma_{m2}^3 \\ \hline \Rightarrow \quad = \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 \quad + \quad \dots \\ \hline m = 0 \quad | \quad \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 \\ \hline m = 1 \quad | \quad \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 \\ \hline m = 2 \quad | \quad -\Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 \\ \hline m = 3 \quad | \quad -\Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \end{array}$$

Los términos que aportan son,

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 \\ &\quad + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\ &= \partial_t (a\dot{a}r^2) + \partial_r (-r(1 - kr^2)) - \partial_\theta (\cot \theta) + (a\dot{a}r^2) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + (a\dot{a}r^2) \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \\ &\quad + [-r(1 - kr^2)] \left(\frac{1}{r}\right) + [-r(1 - kr^2)] \left(\frac{kr}{1 - kr^2}\right) - \left(\frac{1}{r}\right) [-r(1 - kr^2)] \\ &\quad - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) (a\dot{a}r^2) - \cot^2 \theta \\ &= a\ddot{a}r^2 + \dot{a}^2 r^2 - (1 - 3kr^2) + \csc^2 \theta + 2\dot{a}^2 r^2 - (1 - kr^2) - kr^2 \\ &\quad + (1 - kr^2) - \dot{a}^2 r^2 - \cot^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Por tanto,

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \quad (\text{A.23})$$

Por último, para  $R_{33}$  se tiene,

$$\begin{array}{c}
 R_{3l3}^l = R_{33} = \partial_l \Gamma_{33}^l - \partial_3 \Gamma_{3l}^l + \Gamma_{33}^m \Gamma_{ml}^l - \Gamma_{3l}^m \Gamma_{m3}^l \\
 \hline
 l = 0 \quad | \quad \partial_0 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{30}^m \Gamma_{m3}^0 \\
 \hline
 l = 1 \quad | \quad \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{33}^m \Gamma_{m1}^{11} - \Gamma_{31}^m \Gamma_{m3}^1 \\
 \hline
 l = 2 \quad | \quad \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^m \Gamma_{m2}^{22} - \Gamma_{32}^m \Gamma_{m3}^2 \\
 \hline
 l = 3 \quad | \quad \Gamma_{33}^m \Gamma_{m3}^{33} - \Gamma_{33}^m \Gamma_{m3}^3 = 0 \\
 \hline
 \Rightarrow \quad = \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \dots \\
 \hline
 m = 0 \quad | \quad \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 \\
 \hline
 m = 1 \quad | \quad \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 \\
 \hline
 m = 2 \quad | \quad = 0 \\
 \hline
 m = 3 \quad | \quad -\Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2
 \end{array}$$

Los términos que aportan son,

$$\begin{aligned}
 R_{33} &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
 &= \partial_t \left( a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta \right) + \partial_r \left( -r \left( 1 - kr^2 \right) \sin^2 \theta \right) + \partial_\theta \left( -\sin \theta \cos \theta \right) + 2 \left( a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta \right) \left( \frac{a}{\dot{a}} \right) \\
 &\quad + \left( -r \left( 1 - kr^2 \right) \sin^2 \theta \right) \left( \frac{kr}{1 - kr^2} \right) + \left( -r \left( 1 - kr^2 \right) \sin^2 \theta \right) \left( \frac{1}{r} \right) \\
 &\quad - \left( a \ddot{a} r^2 \sin^2 \theta \right) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - \left( -r \left( 1 - kr^2 \right) \sin^2 \theta \right) \left( \frac{1}{r} \right) - \cot \theta \left( -\sin \theta \cos \theta \right) \\
 &= \left( a \ddot{a} + \dot{a}^2 \right) r^2 \sin^2 \theta - \left( 1 - 3kr^2 \right) \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta \\
 &\quad - kr^2 \sin^2 \theta - \left( 1 - kr^2 \right) \sin^2 \theta - \dot{a} r^2 \sin^2 \theta + \left( 1 - kr^2 \right) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

Por lo que al simplificar se obtiene,

$$R_{33} = \left( a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k \right) r^2 \sin^2 \theta . \quad (\text{A.24})$$

Mientras que los demás términos fuera de la diagonal son nulos ( $\mu \neq \nu$ , notesé que ahora se trabajará en índices griegos), por lo que el tensor de Ricci tiene la forma final,

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{-3\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

El escalar de Ricci es entonces,

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R_{00}g^{00} + R_{11}g^{11} + R_{22}g^{22} + R_{33}g^{33} \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a}(1) + \left(\frac{a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k}{1-kr^2}\right)\left(\frac{1-kr^2}{-a^2(t)}\right) + (a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)r^2\left(\frac{-1}{a^2r^2}\right) \\ &\quad + (a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{-1}{a^2r^2 \sin^2 \theta}\right) \\ &= -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)}{a^2} - 2\frac{(a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k)}{a^2} \\ &= -\frac{3\ddot{a}}{a} - 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2k}{a^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

De manera simplificada se reduce a,

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right) \quad (\text{A.27})$$

## Componentes del tensor de energía-impulso

Considerando el contenido del universo a gran escala como un fluido perfecto, el tensor energía-impulso toma la forma:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}; \quad \text{Donde} \quad U_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow T_{\mu\nu} &= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T_{00} = \rho g_{00} \\ T_{ii} = -\rho g_{ii} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Siendo  $T_{00}$  la componente temporal y  $T_{ii}$  las componentes espaciales ( $i = 1, 2, 3$ ).

## Ecuaciones de Friedmann (en general)

Remplazando los resultados de la Eq. (A.28) y (A.25) en las ecuaciones de campo de Einstein Eq. (2.2), para la parte temporal, se tiene,

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} &= 8\pi GT_{00} \\ \Rightarrow -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-6) \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) &= 8\pi G\rho(t) \\ 3 \left[ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] &= 8\pi G\rho(t). \end{aligned}$$

Siendo la primera ecuación de Friedmann en términos del factor de escala  $a(t)$ ,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2}. \quad (\text{A.29})$$

Las ecuaciones de campo de Einstein, para la parte espacial se pueden expresar cómo,

$$R_{ii} - \frac{1}{2}Rg_{ii} = 8\pi GT_{ii}, \quad (\text{A.30})$$

se deduce a partir de las Eq. (A.25) y (A.3) que,

$$R_{ii} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)}{a^2}g_{ii}. \quad (\text{A.31})$$

Remplazando las Eq. (A.31) y (A.27) en la parte espacial de las ecuaciones de campo de Einstein Eq. (A.30), se obtiene:

$$-\frac{g_{ii}}{a^2} \left( a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k \right) - \frac{1}{2}(-6) \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) g_{ii} = -8\pi G p g_{ii} \quad (\text{A.32})$$

Multiplicando por  $g^{ii}$  y utilizando la propiedad  $g^{ii}g_{ii} = \delta_i^i = 1$ ,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2k}{a^2}\right) + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right) &= -8\pi G p \\ \Rightarrow \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a^2}\right) &= -4\pi G p \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Finalmente, remplazando el resultado de la Eq. (A.27) en la Eq. (A.33) se tiene,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi G\rho(t)+\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a^2}\right) &= -4\pi G p \\ \Rightarrow \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + \frac{4\pi G\rho(t)}{3} &= -4\pi G p \end{aligned}$$

Siendo esta expresión conocida como la segunda ecuación de Friedmann,

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \frac{-4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p) . \quad (\text{A.34})$$

### Ecuaciones de Friedmann para el modelo propuesto

En el caso del modelo propuesto  $k = 0$ ,  $\rho = \sum_i \rho_i$  y  $p = \sum_i p_i$  con  $i = m, r, \Lambda$ , las ecuaciones de Friedmann tienen la forma,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho , \quad (\text{A.35})$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p) . \quad (\text{A.36})$$

Tomando el parámetro de Hubble como  $H \equiv \dot{a}/a$ :

$$\dot{H} = \frac{d}{dt}(H) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \quad (\text{A.37})$$

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \quad \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 \quad (\text{A.38})$$

Por lo que se puede reescribir las ecuaciones de Friedmann en su forma habitual,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho . \quad (\text{A.39})$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + 3p) . \quad (\text{A.40})$$

## Contenido en el universo

Por definición la densidad de energía oscura holográfica de Barrow es,

$$\rho_\Lambda \equiv CL^{\Delta-2} . \quad (\text{A.41})$$

Remplazando el corte IR de Granda-Oliveros  $L^{-2} = \alpha H^2 + \beta \dot{H}$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda &= CL^{-2(1-\frac{1}{2}\Delta)} = C \left(L^{-2}\right)^{1-\frac{1}{2}\Delta} , \\ \rho_\Lambda &= C \left(\alpha H^2 + \beta \dot{H}\right)^{1-\frac{1}{2}\Delta} , \end{aligned}$$

y tomando por conveniencia  $C = 3M_p^2$ , se tiene que la densidad de energía oscura del modelo tiene la forma,

$$\rho_\Lambda = 3M_p^2 \left(\alpha H^2 + \beta \dot{H}\right)^{1-\frac{1}{2}\Delta} . \quad (\text{A.42})$$

A partir de la ecuación de continuidad y asumiendo una ecuación de estado de la forma  $w = p/\rho$ , se tiene,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1+w) = 0 ,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho(1+w)\frac{1}{a}\frac{da}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a} ,$$

Realizando la integración desde  $(\rho_0, a_0 = 1)$  hasta  $(\rho, a)$ , se tiene,

$$\ln \rho = -3(1+w) \ln a + \ln \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 a^{-3(1+w)} . \quad (\text{A.43})$$

Para el caso de la materia  $w = 0$  y para el caso de radiación  $w = 1/3$ , por tanto,

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3} , \quad \rho_r = \rho_{r0} a^{-4} . \quad (\text{A.44})$$

Remplazando las expresiones densidad de materia, radiación de la Eq. (A.44) y la expresión de la energía oscura del modelo Eq. (A.42) con  $M_p^2 = 1/8\pi G$ , la primera ecuación de Friedmann toma la forma,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{m0} a^{-3} + \frac{8\pi G}{3} \rho_{r0} a^{-4} + \left(\alpha H^2 + \beta \dot{H}\right)^{1-\frac{1}{2}\Delta} . \quad (\text{A.45})$$

## Ecuación diferencial de $H^2$ en función de $z$

Considerando el cambio de variable  $a(t) = a_0/(1+z)$ , donde  $a_0 = a(t=0) = 1$ ,

$$a(t) = \frac{1}{(1+z)} \Rightarrow da = \frac{-1}{(1+z)^2} dz = \frac{-a}{(1+z)} dz \Rightarrow \frac{da}{a} = \frac{-dz}{(1+z)},$$

$$\Rightarrow \frac{da/dt}{a} dt = \frac{-dz}{(1+z)} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} dt = H dt = \frac{-dz}{(1+z)} \Rightarrow dt = \frac{-dz}{H(1+z)},$$

Por tanto,

$$\dot{H} = \frac{d}{dt}(H) = -H(1+z) \frac{d}{dz}(H) = -\frac{(1+z)}{2} \frac{d}{dz}(H^2). \quad (\text{A.46})$$

Al realizar el cambio de variable, la primera ecuación de Friedmann queda de la forma,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{m0} (1+z)^3 + \frac{8\pi G}{3} \rho_{r0} (1+z)^4 + \left[ \alpha H^2 - (1+z) \frac{\beta}{2} \frac{d}{dz}(H^2) \right]^{1-1/2\Delta},$$

$$\Rightarrow \left( H^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_{m0} (1+z)^3 - \frac{8\pi G}{3} \rho_{r0} (1+z)^4 \right)^{\frac{2}{2-\Delta}} = \alpha H^2 - (1+z) \frac{\beta}{2} \frac{d}{dz}(H^2),$$

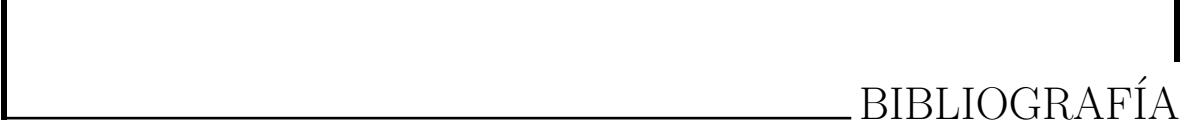
Recordando que  $\Omega_{i0} H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{i0}$  con  $i = m, r$ , se obtiene finalmente la ecuación diferencial para el parámetro de Hubble al cuadrado ( $H^2$ ) en términos del corrimiento al rojo ( $z$ ) del modelo propuesto,

$$(1+z) \frac{\beta}{2} \frac{d}{dz}(H^2) - \alpha H^2 + [H^2 - \Omega_{m0} H_0^2 (1+z)^3 - \Omega_{r0} H_0^2 (1+z)^4]^{\frac{2}{2-\Delta}} = 0. \quad (\text{A.47})$$

Donde las densidades involucradas satisfacen  $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$ . En el caso  $\Delta = 0$ , la solución de la ecuación diferencial Eq. (A.47) es,

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ 1 + \frac{(2\alpha - 3\beta)}{(2 - 2\alpha + 3\beta)} \right] \Omega_{m0} (1+z)^3 + H_0^2 \left[ 1 + \frac{(\alpha - 2\beta)}{(1 - \alpha + 2\beta)} \right] \Omega_{r0} (1+z)^4 + H_0^2 \left( 1 - \frac{2\Omega_{m0}}{(2 - 2\alpha + 3\beta)} - \frac{\Omega_{r0}}{(1 - \alpha + 2\beta)} \right) (1+z)^{\frac{2(\alpha-1)}{\beta}}, \quad (\text{A.48})$$

reportada por los autores del modelo en [23], donde se puede observar en los paréntesis cuadrados de la Eq. (A.48) las contribuciones de materia (efectiva) y radiación (efectiva).



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. G. Riess, *et al.*, “*Observational evidence from Supernovae for an accelerating universe and a Cosmological Constant,*” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, pp. 1009–1038, Sep. 1998. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/300499>
- [2] S. Perlmutter, *et al.*, “*Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae,*” *The Astrophysical Journal*, vol. 517, no. 2, pp. 565–586, Jun. 1999. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/307221>
- [3] D. N. Spergel, *et al.*, “*First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters,*” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 148, no. 1, pp. 175–194, Sep. 2003. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/377226>
- [4] D. N. Spergel, *et al.*, “*Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Implications for cosmology,*” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 170, no. 2, pp. 377–408, Jun. 2007. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/513700>
- [5] K. Abazajian, *et al.*, “*The Second data release of the Sloan Digital Sky Survey,*” *The Astronomical Journal*, vol. 128, no. 1, pp. 502–512, Jul. 2004. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/421365>

- [6] M. Tegmark, *et al.*, “*Cosmological parameters from SDSS and WMAP*,” *Phys. Rev. D*, vol. 69, p. 103501, May. 2004. [Online]. Disponible: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.103501>
- [7] K. Abazajian, *et al.*, “*The Third data release of the Sloan Digital Sky Survey*,” *The Astronomical Journal*, vol. 129, no. 3, pp. 1755–1759, Mar. 2005. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/427544>
- [8] R. A. Knop, *et al.*, “*New constraints on  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , and  $w$  from an independent set of 11 High-Redshift Supernovae observed with the Hubble Space Telescope*,” *The Astrophysical Journal*, vol. 598, no. 1, pp. 102–137, Nov. 2003. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/378560>
- [9] N. Aghanim, *et al.*, “*Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters*,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, p. A6, 2020. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>
- [10] V. Sahni y A. Starobinsky, “*The case for a positive cosmological  $\Lambda$ -term*,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 9, no. 04, pp. 373–443, 2000. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1142/S0218271800000542>
- [11] S. Weinberg, “*The cosmological constant problem*,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, Ene. 1989. [Online]. Disponible: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>
- [12] T. Padmanabhan, “*Cosmological constant—the weight of the vacuum*,” *Physics Reports*, vol. 380, no. 5, pp. 235 – 320, 2003. [Online]. Disponible: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(03\)00120-0](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(03)00120-0)
- [13] E. J. Copeland, M. Sami, y S. Tsujikawa, “*Dynamics of dark energy*,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 15, no. 11, pp. 1753–1935, Nov. 2006. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1142/S021827180600942X>

- [14] M. Li, *et al.*, “*Dark energy*,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 56, no. 3, pp. 525–604, Sep. 2011. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/56/3/24>
- [15] G. 't Hooft, “*Dimensional reduction in quantum gravity*,” *Conf. Proc. C*, vol. 930308, pp. 284–296, 1993. [Online]. Disponible: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9310026>
- [16] J. D. Bekenstein, “*Black holes and entropy*,” *Phys. Rev. D*, vol. 7, pp. 2333–2346, Abr. 1973. [Online]. Disponible: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>
- [17] S. W. Hawking, “*Particle creation by black holes*,” *Communications in mathematical physics*, vol. 43, no. 3, pp. 199–220, 1975. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1007/BF02345020>
- [18] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, y A. E. Nelson, “*Effective Field Theory, Black Holes, and the Cosmological Constant*,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 4971–4974, Jun. 1999. [Online]. Disponible: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4971>
- [19] W. Fischler y L. Susskind, “*Holography and cosmology*,” *arXiv preprint hep-th/9806039*, 1998. [Online]. Disponible: [arXiv:hep-th/9806039](https://arxiv.org/abs/hep-th/9806039)
- [20] S. D. Hsu, “*Entropy bounds and dark energy*,” *Physics Letters B*, vol. 594, no. 1, pp. 13 – 16, 2004. [Online]. Disponible: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269304007658>
- [21] R. Bousso, “*A covariant entropy conjecture*,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 1999, no. 07, pp. 004–004, Jul. 1999. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/07/004>
- [22] M. Li, “*A model of holographic dark energy*,” *Physics Letters B*, vol. 603, no. 1, pp. 1 – 5, 2004. [Online]. Disponible: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269304014388>

- [23] L. N. Granda y A. Oliveros, “*Infrared cut-off proposal for the holographic density,*” *Physics Letters B*, vol. 669, no. 5, pp. 275 – 277, 2008. [Online]. Disponible: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269308012677>
- [24] J. D. Barrow, “*The area of a rough black hole,*” *Physics Letters B*, vol. 808, p. 135643, 2020. [Online]. Disponible: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320304469>
- [25] E. N. Saridakis, “*Barrow holographic dark energy,*” *Phys. Rev. D*, vol. 102, p. 123525, Dic. 2020. [Online]. Disponible: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.123525>
- [26] I. Zlatev, L. Wang, y P. J. Steinhardt, “*Quintessence, Cosmic coincidence, and the Cosmological constant,*” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 896–899, Feb. 1999. [Online]. Disponible: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.896>
- [27] R. Caldwell, “*A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state,*” *Physics Letters B*, vol. 545, no. 1, pp. 23 – 29, 2002. [Online]. Disponible: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269302025893>
- [28] K. K. Wu, O. Lahav, y M. J. Rees, “*The large-scale smoothness of the universe,*” *Nature*, vol. 397, no. 6716, pp. 225–230, 1999. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1038/16637>
- [29] A. Friedmann, “*On the curvature of space,*” *Zeitschrift für Physik*, vol. 10, pp. 377–386, 1922. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1007/BF01332580>
- [30] H. P. Robertson, “*Kinematics and world-structure,*” *The Astrophysical Journal*, vol. 82, p. 284, 1935. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/143681>
- [31] A. Friedmann, “*Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes,*” *Zeitschrift für Physik*, vol. 21, no. 1, pp. 326–332, 1924. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1007/BF01328280>
-

- [32] H. P. Robertson, “*Kinematics and World-Structure II.*” *The Astrophysical Journal*, vol. 83, p. 187, 1936. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/143716>
- [33] A. G. Walker, “*On Milne’s theory of World-Structure,*” *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 2, no. 1, pp. 90–127, 1937. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.90>
- [34] A. Einstein, “*A. Einstein, Sitz. Preuss. Akad. d., Wiss. Phys. Math*,” *vol. 142*, p. 87, 1917. [Online]. Disponible: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:H428RSAN>
- [35] E. Hubble, “*A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,*” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 15, no. 3, pp. 168–173, 1929. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>
- [36] L. Susskind, “*The world as a hologram,*” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, no. 11, pp. 6377–6396, 1995. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1063/1.531249>
- [37] W. Hillebrandt y J. C. Niemeyer, “*Type Ia supernova explosion models,*” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 38, no. 1, pp. 191–230, 2000. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1146/annurev.astro.38.1.191>
- [38] A. G. Riess, et al., “*Type Ia supernova discoveries at  $z \geq 1$  from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on Dark Energy evolution,*” *The Astrophysical Journal*, vol. 607, no. 2, pp. 665–687, Jun. 2004. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/383612>
- [39] J. M. Bardeen, B. Carter, y S. W. Hawking, “*The four laws of black hole mechanics,*” *Communications in mathematical physics*, vol. 31, no. 2, pp. 161–170, 1973. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1007/BF01645742>
- [40] M. Baggio, “*Gravity, holography and applications to condensed matter,*” *arXiv preprint arXiv:1610.02681*, 2016. [Online]. Disponible: <https://arxiv.org/abs/1610.02681>

- [41] M. Kowalski, *et al.*, “*Improved cosmological constraints from new, old, and combined Supernova data sets,*” *The Astrophysical Journal*, vol. 686, no. 2, pp. 749–778, Oct. 2008. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/589937>
- [42] E. Komatsu, *et al.*, “*Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy probe observations: Cosmological interpretation,*” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 180, no. 2, pp. 330–376, Feb. 2009. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/0067-0049/180/2/330>
- [43] C. Gao, F. Wu, X. Chen, y Y.-G. Shen, “*Holographic dark energy model from Ricci scalar curvature,*” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 043511, Feb. 2009. [Online]. Disponible: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.043511>
- [44] Y. Wang y L. Xu, “*Current observational constraints to the holographic dark energy model with a new infrared cutoff via the Markov chain Monte Carlo method,*” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 083523, Abr. 2010. [Online]. Disponible: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.083523>
- [45] A. Oliveros y M. A. Acero, “*New holographic dark energy model with non-linear interaction,*” *Astrophysics and Space Science*, vol. 357, no. 1, p. 12, 2015. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1007/s10509-015-2310-y>
- [46] F. K. Anagnostopoulos, S. Basilakos, y E. N. Saridakis, “*Observational constraints on Barrow holographic dark energy,*” *The European Physical Journal C*, vol. 80, no. 826, 2020. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8360-5>
- [47] S. Rani y N. Azhar, “*Braneworld inspires cosmological implications of barrow holographic dark energy,*” *Universe*, vol. 7, no. 8, p. 268, 2021. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.3390/universe7080268>
- [48] Q. Huang, *et al.*, “*Dynamical analysis and statefinder of barrow holographic dark energy,*” *The European Physical Journal C*, vol. 81, no. 8, pp. 1–17, 2021. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09480-3>
-

- [49] I. Akhlaghi, *et al.*, “*Model selection and constraints from holographic dark energy scenarios,*” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 477, no. 3, pp. 3659–3671, 2018. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1093/mnras/sty903>
- [50] J. Jesus, *et al.*, “*Gaussian process estimation of transition redshift,*” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2020, no. 04, p. 053, 2020. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2020/04/053>
- [51] B. Feng, M. Li, Y.-S. Piao, y X. Zhang, “*Oscillating quintom and the recurrent universe,*” *Physics Letters B*, vol. 634, no. 2-3, pp. 101–105, 2006. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.01.066>
- [52] I. Quiros, *et al.*, “*On the phantom barrier crossing and the bounds on the speed of sound in non-minimal derivative coupling theories,*” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 35, no. 7, p. 075005, 2018. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aaaе24>
- [53] P. J. E. Peebles y B. Ratra, “*The cosmological constant and dark energy,*” *Reviews of modern physics*, vol. 75, no. 2, p. 559, 2003. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.559>
- [54] G. Ballesteros y J. Lesgourgues, “*Dark energy with non-adiabatic sound speed: initial conditions and detectability,*” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2010, no. 10, p. 014, 2010. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/10/014>
- [55] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, “*The large scale structure of space-time,*” vol. 1, p. 091, 1973. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511524646>
- [56] S. Maity y P. Rudra, “*Inflation driven by barrow holographic dark energy,*” *Journal of Holography Applications in Physics*, vol. 2, no. 1, pp. 1–12, 2022. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.08160>

- [57] A. Oliveros y M. A. Acero, "Inflation driven by a holographic energy density," *Europhysics Letters*, vol. 128, no. 5, p. 59001, 2020. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/128/59001>
- [58] G. Chakraborty, et al., "Thermodynamics of barrow holographic dark energy with specific cut-off," *Symmetry*, vol. 13, no. 4, p. 562, 2021. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.3390/sym13040562>
- [59] S. Cao, et al., "Cosmological constraints on the coupling model from observational Hubble parameter and Baryon Acoustic Oscillation measurements," *Universe*, vol. 7, no. 3, p. 57, 2021. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.3390/universe7030057>
- [60] C. Zhang, et al., "Four new observational  $H(z)$  data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven," *Research in Astronomy and Astrophysics*, vol. 14, no. 10, p. 1221, 2014. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/1674-4527/14/10/002>
- [61] J. Simon, L. Verde, y R. Jimenez, "Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential," *Physical Review D*, vol. 71, no. 12, p. 123001, 2005. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.123001>
- [62] M. Moresco, et al., "Improved constraints on the expansion rate of the universe up to  $z \sim 1.1$  from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2012, no. 08, p. 006, 2012. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/006>
- [63] S. Alam, et al., "The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation spectroscopic survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 470, no. 3, pp. 2617–2652, 2017. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1093/mnras/stx721>
- [64] M. Moresco, et al., "A 6 % measurement of the Hubble parameter at  $z \sim 0.45$ : direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration," *Journal of Cosmology*
-

- and Astroparticle Physics*, vol. 2016, no. 05, p. 014, 2016. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/05/014>
- [65] A. Ratsimbazafy, *et al.*, “Age-dating luminous red galaxies observed with the Southern African Large Telescope,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 467, no. 3, pp. 3239–3254, 2017. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1093/mnras/stx301>
- [66] M. Moresco, “Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at  $z \sim 2$ ,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, vol. 450, no. 1, pp. L16–L20, 2015. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv037>
- [67] T. Delubac, *et al.*, “Baryon acoustic oscillations in the Ly $\alpha$  forest of BOSS DR11 quasars,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 574, p. A59, 2015. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201423969>
- [68] A. Font-Ribera, *et al.*, “Quasar-Lyman  $\alpha$  forest cross-correlation from BOSS DR11: Baryon acoustic oscillations,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2014, no. 05, p. 027, 2014. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/05/027>
- [69] M. Moresco, *et al.*, “Setting the stage for cosmic chronometers II. impact of stellar population synthesis models systematics and full covariance matrix,” *The Astrophysical Journal*, vol. 898, no. 1, p. 82, 2020. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab9eb0>
- [70] S. Alam, *et al.*, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation spectroscopic survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 470, no. 3, pp. 2617–2652, 2017. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1093/mnras/stx721>

- [71] P. R. Bevington y D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences; 3rd ed.* McGraw-Hill Education, 2003, ISBN: [9780072472271](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.010001).
- [72] J. Beringer, *et al.*, “Review of particle physics,” *Physical Review D-Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 86, no. 1, p. 010001, 2012. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.010001>
- [73] S. Capozziello y A. A. Sen, “Model-independent constraints on dark energy evolution from low-redshift observations,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 484, no. 4, pp. 4484–4494, 2019. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1093/mnras/stz176>
- [74] A. A. Mamon, “Constraints on a generalized deceleration parameter from cosmic chronometers,” *Modern Physics Letters A*, vol. 33, no. 10n11, p. 1850056, 2018. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1142/S0217732318500566>
- [75] A. A. Mamon, K. Bamba, y S. Das, “Constraints on reconstructed dark energy model from SN Ia and BAO/CMB observations,” *The European Physical Journal C*, vol. 77, no. 1, pp. 1–10, 2017. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4590-y>
- [76] S. Weinberg, “Cosmology,” pp. 64–65, OUP Oxford, 2008, ISBN: [9780191523601](https://doi.org/10.1086/338655).
- [77] L. Knox, N. Christensen, y C. Skordis, “The age of the universe and the cosmological constant determined from cosmic microwave background anisotropy measurements,” *The Astrophysical Journal*, vol. 563, no. 2, p. L95, 2001. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1086/338655>
- [78] D. M. Scolnic, *et al.*, “The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample,” *The Astrophysical Journal*, vol. 859, no. 2, p. 101, 2018. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab9bb>

- [79] G. Efstathiou, “*To  $H_0$  or not to  $H_0$ ?*” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 505, no. 3, pp. 3866–3872, 2021. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.1093/mnras/stab1588>
- [80] J.-C. Zhang, K. Jiao, y T.-J. Zhang, “*Model-independent measurement of the Hubble constant and the absolute magnitude of Type Ia Supernovae,*” *arXiv preprint arXiv:2101.05897*, 2021. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.05897>
- [81] S. Wyatt, *et al.*, “*Strong near-infrared Carbon absorption in the transitional Type Ia SN 2015bp,*” *The Astrophysical Journal*, vol. 914, no. 1, p. 57, 2021. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abf7c3>
- [82] M. Asghari y A. Sheykhi, “*Observational constraints of the modified cosmology through barrow entropy,*” *arXiv preprint arXiv:2110.00059*, 2021. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.00059>
- [83] K. Jusufi, M. Azreg-Aïnou, M. Jamil, y E. N. Saridakis, “*Constraints on barrow entropy from M87 and S2 star observations,*” *Universe*, vol. 8, no. 2, p. 102, 2022. [Online]. Disponible: <https://doi.org/10.3390/universe8020102>