دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی مکانیک
CFD

معادله ی برگرز

(پروژه 1 CFD)

محمد سجاد خان بابایی

1402

فهرست

مقدمه

در این گزارش به بررسی و جل معادله ی برگرز که در زیر آورده شده است می پردازیم در ابتدا این معادلات را با تغییر متغییر به سه معادله ی w ، v و u مرتبه یک تبدیل کرده و سپس معادلات را descritize می شود و شرایط اولیه با تغییر متغییر های انجام شد بدست می آید. به دلیل وجود ترم غیر خطی معادلات را خطی کرده و سپس ماتریس کلر باکس را تشکیل می دهیم سپس با استفاده از روش توماس این ماتریس را حل می شود.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u_{xx} = -uu_x \qquad 0 \le x \le 1 \qquad t \ge 0$$

بدست آوردن معادلات مرتبه 1

برای وارد کردن معادلات در ماتریس کلر باکس باید معادله ی برگرز را به معادلات مرتبه یک تبدیل کرد برای بدست آوردن این معادلات از تغییر متغییر های زیر استفاده شده است.

$$V_x = U$$

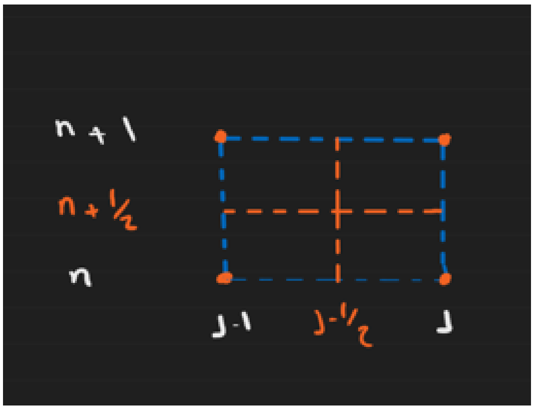
$$W = U_x$$

با استفاده از این تغییر متغییر ها می توان معادله را به صورت زیر باز نویسی کرد.

$$U_t - W_x = UW$$

Descritize کردن معادلات

برای descritize کردن معادلات نود های زیر در نظر گرفته شده است



با توجه به نود های تعریف شده می توان معادلات را به صورت زیر descritize کرد.

$$V_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{n+1} = \frac{V_j^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$U_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{n+1} = \frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$U_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - U_{j-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} + O(\Delta x^2)$$

$$W_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_j^{n+\frac{1}{2}} - U_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$UW_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_{j-1}^{n}W_{j-1}^{n} + U_j^nW_j^n + U_{j-1}^{n+1}W_{j-1}^{n+1} + U_j^nW_j^{n+1}}{4}$$

باتوجه به نود ها می توان برای پارامتر هایی که در بین نود ها قرار دارند از میانگین گیری استفاده کرد.

با توجه به این موضوع و جایگذاری پارامتر ها در سه معادله اصلی به معادلات زیر خواهیم رسید.

$$\frac{V_j^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = \frac{U_{j-1}^{n+1} + U_j^{n+1}}{2}$$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = \frac{W_{j-1}^{n+1} - W_j^{n+1}}{2}$$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} - U_j^n - U_{j-1}^n}{2\Delta t} - \frac{W_j^{n+1} - W_j^n - W_{j-1}^{n+1} - W_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{U_{j-1}^n W_{j-1}^n + U_j^n W_j^n + U_{j-1}^{n+1} W_{j-1}^{n+1} + U_j^{n+1} W_j^{n+1}}{4}$$

غیرخطی سازی

همان طور که در معادلات قبلی مشاهده می شود ترم غیر خطی در آن ها قرار دارد یک از راه های خطی کردن ترم ای غیر خطی استفاده از معادله زیر است.

$$U_j^{n+1}{}_{k+1} = U_j{}_k^{n+1} + \delta U_j^{n+1}{}_k$$

که در این معادله $U_j{}_k^{n+1}$ مقدار U در حل قبلی است که معلوم است و ترم $\delta U_j^{n+1}{}_k$ مقدار تغییرات است. هدف اصلی حل بدست آوردن این ترم است.

با توجه به معادله ی بالا می توان 3 معادله را به صورت زیر بدست آورد.

$$\left(\frac{\delta V_j^{n+1}-\delta V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)_k - \left(\frac{\delta U_{j-1}^{n+1}-\delta U_j^{n+1}}{2}\right)_k = -\left(\frac{\delta V_j^{n+1}-\delta V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)_k + \left(\frac{\delta U_{j-1}^{n+1}-\delta U_j^{n+1}}{2}\right)_k$$

$$\left(\frac{\delta U_j^{n+1}-\delta U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)_k - \left(\frac{\delta W_{j-1}^{n+1}-\delta W_j^{n+1}}{2}\right)_k = \left(\frac{\delta W_{j-1}^{n+1}-\delta W_j^{n+1}}{2}\right)_k - \left(\frac{\delta U_j^{n+1}-\delta U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)_k$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{\Delta t} + W_{j-1}^{n+1}{}_k\right)\delta U_{j-1}^{n+1}{}_k + \left(\frac{2}{\Delta t} + W_j^{n+1}{}_k\right)\delta U_j^{n+1}{}_k + \left(\frac{2}{\Delta x} + U_{j-1}^{n+1}{}_k\right)\delta U_{j-1}^{n+1}{}_k \\
&\quad + \left(-\frac{2}{\Delta x} + U_j^{n+1}{}_k\right)\delta U_j^{n+1}{}_k \\
&\quad = 4\left(\frac{U_j^n + U_{j-1}^n}{2\Delta t} + \frac{W_j^n + W_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{U_{j-1}^n W_{j-1}^n + U_j^n W_j^n}{4}\right)_k \\
&\quad + 4\left(-\frac{U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta t} + \frac{W_j^{n+1} + W_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right)_k - \left(U_j^{n+1}W_j^{n+1}\right)_k - \left(U_{j-1}^{n+1}W_{j-1}^{n+1}\right)_k
\end{aligned}$$

برای راحت نوشتن معادلات در کلر باکس سمت چپ معادلات را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$R_j^* = -\left(\frac{\delta V_j^{n+1}-\delta V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)_k + \left(\frac{\delta U_{j-1}^{n+1}-\delta U_j^{n+1}}{2}\right)_k$$

$$R_j^{**} = \left(\frac{\delta W_{j-1}^{n+1} - \delta W_j^{n+1}}{2}\right)_k - \left(\frac{\delta U_j^{n+1} - \delta U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)_k$$

$$R_j = \frac{U_j^n + U_{j-1}^n}{2\Delta t} + \frac{W_j^n + W_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{U_{j-1}^n W_{j-1}^n + U_j^n W_j^n}{4}$$

$$R_j^{***} = 4\left(-\frac{U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta t} + \frac{W_j^{n+1} + W_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right)_k - \left(U_j^{n+1} W_j^{n+1}\right)_k - \left(U_{j-1}^{n+1} W_{j-1}^{n+1}\right)_k$$

شرایط اولیه و شرایط مرزی

با توجه به تغییر متغییر هایی که در معادله ی اصلی ایجاد شده است می توان به شرایط مرزی های زیر رسید.

$$U(0,t) = 0$$

$$V(0,t) = 0$$

$$\int_0^1 U(x,t)dx = \frac{1}{2(1+t)} \rightarrow V(I,t) - V(0,t) = V(I,t) = \frac{1}{2(1+t)}$$

برای شرایط اولیه نیز با توجه به تغییر متغییر ها می توان با مشتق گیری و انترال گیری به 3 شرط اولیه زیر رسید.

$$U(x,0) = X$$

$$V(x,0) = \int xdx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$U_x = W(x,0) = 1$$

Keller Box

با توجه به 3 معادلات به دست آمده در قسمت های قبل ماتریس کلر باکس به صورت زیر بدست آمده است.

توجه شود برای جلوگیری از singularity ترتیب معادلات به صورت V ، U و W است. دو معادله ی اول و یک معادله ی اخر از شرایط مرزی بدست آمده است.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta x_1} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta x_{j-1}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta \mathrm{t}} + W_{j-1} & \frac{2}{\Delta x_{j-1}} + U_{j-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x_{j-1}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta \mathrm{t}} + W_j & \frac{-2}{\Delta x_{j-1}} + U_j \\ 0 & -\frac{1}{\Delta x_j} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad j \neq 1, I$$

$$C_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta x_j} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x_{I-1}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta \mathrm{t}} + W_I & \frac{-2}{\Delta x_{I-1}} + U_I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

سمت چپ کلر باکس به صورت زیر می باشد.

$$RHS_1 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ R_2^{**} \end{matrix}$$

$$RHS_j = \begin{matrix} R_j^{**} \\ 4R_j + R_j^{***} \\ R_{j+1}^{**} \end{matrix} \qquad j \neq 1, I$$

$$RHS_I = \begin{matrix} R_j^{**} \\ 4R_j + R_j^{***} \\ 0 \end{matrix}$$

توجه شود که برای استفاده از کلر باکس بالا باید مقدار پیش فرض نودهای روی سطح I از مقدار شرایط مرزی استفاده شود.

روش توماس

همان طور که در قسمت قبل قابل مشاهده است keller box به صورت ماتریس سه قطری بلوکی است و یک از راه های حل این روش به صورت مستقیم روش توماس است.

این روش از دو قسمت forward و backward تشکیل شده است در قسمت forward سعی می شود با انجام عملیات های ماتریسی بلوک های A را به ترتیب صفر و ماتریس های B را یکه کرد.

سپس در قسمت backward در جهت عکس روش forward حرکت کرد و مقادیر U, W و V را بدست می آوریم.

این روش در کد پیاده سازی شده است و می توانید آن را در آدرس زیر مشاهده کنید.

https://github.com/msajad79/Burgers_equation_CFD

توسعه و حل در پایتون

پیاده سازی و حل این معادله در زبان برنامه نویسی پایتون انجام شده است برای مشاهده آن می توانید به آدرس زیر مراجعه کنید.

https://github.com/msajad79/Burgers_equation_CFD

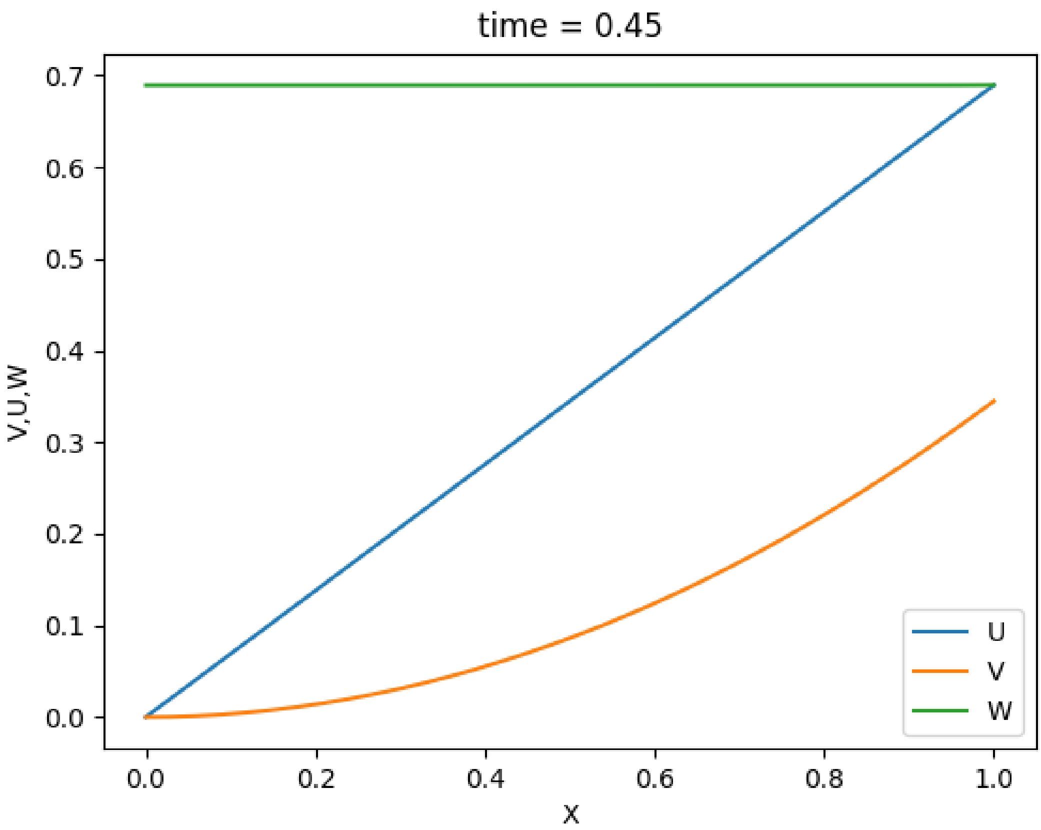
نتایج

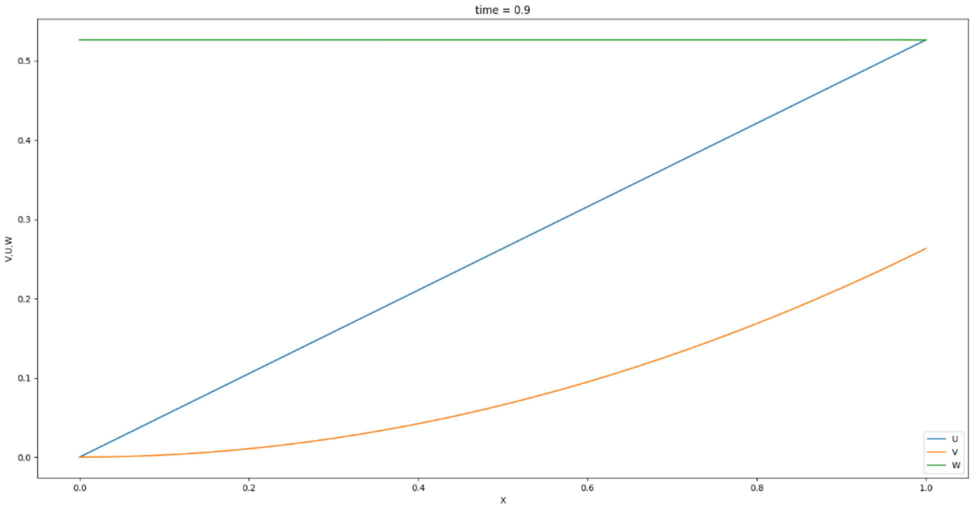
حل این معادله با پرامتر های زیر حل شده است.

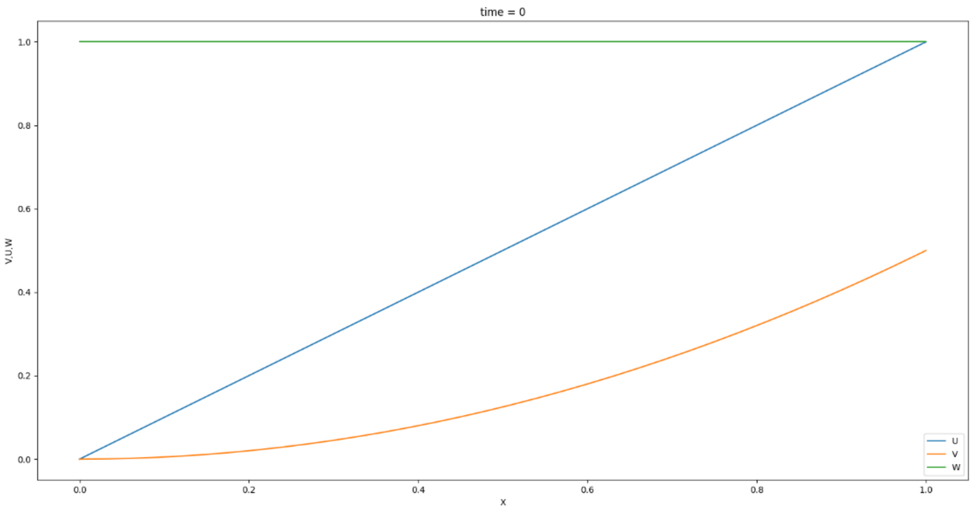
$$\Delta x = 0.03$$

$$\Delta t = 0.03$$

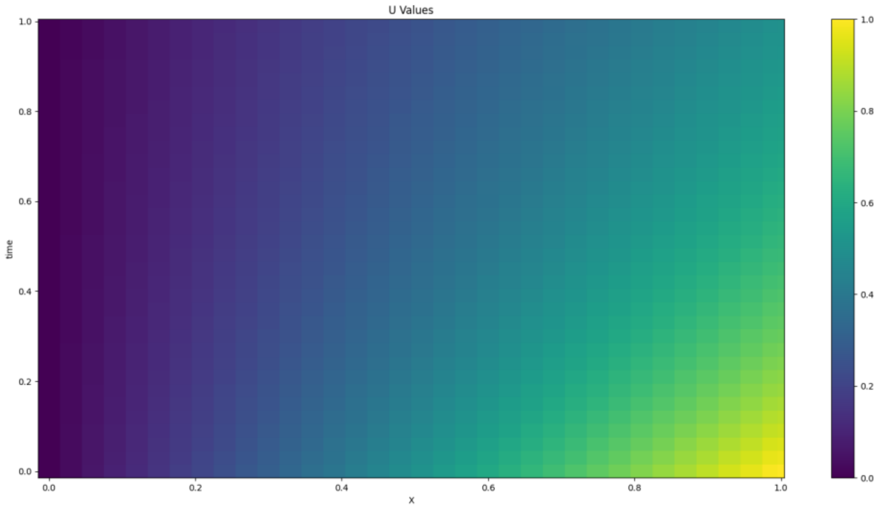
نمودار های U، V و W در سه تایم استپ به صورت زیر بدست می آید.

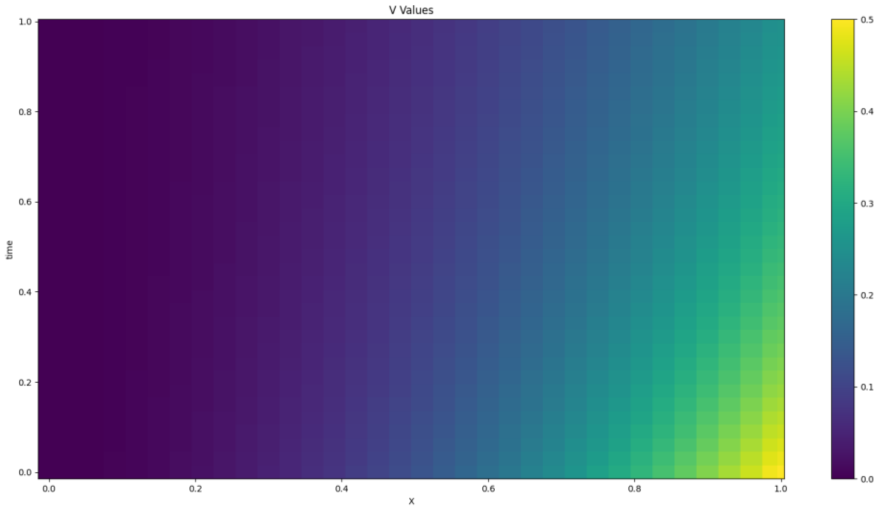


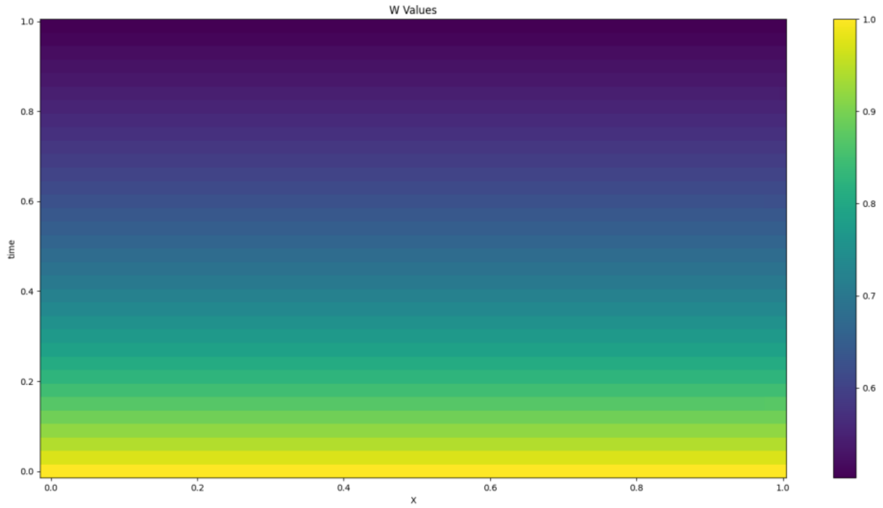




مقادیر U، V و W را در طول زمان نیز می توان در زیر مشاهده کرد.


U Values
time
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


V Values
time
x
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5


W Values
time
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0

Validation

از حل تحلیلی می توان به این نتیجه رسید که مقدار u خطی است و برابر است با:

$$V = \left(\frac{1}{2(1+t)}\right)X^2$$

با مشتق گیری مقادیر V و U نیز بدست می آید.

$$U = \frac{1}{1+t}X$$

$$W = \frac{1}{1+t}$$

است که نمودار های بدست آمده در کد نیز به همین صورت است.