# Optimización Numérica: Tarea 1

rodrigo.mendoza@itam.mx

19 Septiembre 2019

Ejercicios marcados con ★ son para entregar.
Demuestre lo siguiente:

1. El cono dual de cualquier conjunto $S$ es un cono cerrado y convexo.

2. Sea $S^{**} := (S^*)^*$, entonces $S \subset S^{**}$.

3. (★) Sea $C$ un conjunto convexo. Si $S \subset C$, entonces $S^{**} \subset C$.

4. Si $S \neq \emptyset$, $S^{**}$ es el cono convexo cerrado más pequeño que contiene a $S$.

5. Si $C$ es un cono convexo cerrado no vacío, entonces $C^{**} = C$.

6. Si un conjunto $S$ es *sólido* (su interior es no vacío), entonces $S^*$ es puntiagudo.

7. (★) Un conjunto es convexo ssi su intersección con cualquier línea es convexa.

8. Un conjunto es afín ssi su intersección con cualquier línea es afín.

9. (★) La cubierta convexa de un conjunto $S$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a $S$.

10. La cubierta cónica de $\{XX^T : \mathbb{R}^{n\times k}, \text{rango}(X) = k\}$ es el conjunto de matrices simétricas positivas definidas de rango mayor o igual a $k$ (y la matriz cero).

11. Sea $X$ una variable aleatoria en $\mathbb{R}$ con $\Pr[X = a_i] = p_i$, $i \in [n]$ y $a_1 < a_2 < \cdots < n$. Si $p \in \mathbb{R}^n$, ¿Cuál de las siguientes condiciones es convexa en $p$?
    a) (★) $\alpha \leq \mathbb{E}f(X) \leq \beta$
    b) $\Pr[X > \alpha] < \beta$
    c) $\text{Var}[X] \leq \alpha$
    d) $\text{Var}[X] \geq \alpha$
    e) $\text{cuartil}(X) \geq \alpha$
    f) (★) $\text{cuartil}(X) \leq \alpha$

12. (★) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \in \text{Im}(A)$. Se cumple que $c^T x = d$ para todo $x$ tal que $Ax = b$ ssi existe un vector $\lambda$ tal que $c = A^T\lambda$ y $d = b^T\lambda$.

13. Use el inciso anterior para demostrar que existe $x$ tal que $x > 0$ y $Ax = b$ ssi no existe $\lambda$ tal que $A^T\lambda \geq 0$, $A^T\lambda \neq 0$, $b^T\lambda \leq 0$.

14. (★) Una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa ssi $2\int_0^1 f(x + \lambda(y - x))d\lambda \leq f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Pista: Use la desigualdad de Jensen).

15. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable y $\{x : x \geq 0\} \subset \text{dom} f$, entonces $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)dt$ es convexa. $(\text{dom}(F) = \{x : x > 0\}$.

16. Demuestre que una función dos veces diferenciable es convexa ssi el dominio de $f$ es convexo y $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ para todo $x \in \text{dom}(f)$. (Pistas: primero considere el caso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y use las condiciones de primer orden para convexidad).

17. Demuestre que la divergencia de Kullback-Leibler $D_{KL}$ satisface $D_{KL}(u, v) \geq 0$ para todo $u, v \in \{x : x > 0\}$.

18. Demuestre también que $D_{KL}(u, v) = 0$ ssi $u = v$.
19. (★) Demuestre que una función $f$ es convexa ssi para todo $x \in \text{dom} f$ y todo $v$, $g(t) = f(x + tv)$ es convexa en su dominio $\text{dom} g = \{t : x + tv \in \text{dom} f\}$.
20. (★) Verifique que $f(X) = \log \det X$ es cóncava en $\text{dom}(f) = \mathbf{S}^n_{++}$. (Pista: Considere $X = Z + tV$ para $Z, V \in \mathbf{S}^n$).
21. (★) Adapte su demostración para demostrar que $f(X) = \text{traza}(X^{-1})$ es convexa en $\text{dom}(f) = \mathbf{S}^n_{++}$.
22. Adapte su demostración de nuevo para demostrar que $f(X) = \det(X)^{1/n}$ es cóncava en $\text{dom}(f) = \mathbf{S}^n_{++}$.
23. Demuestre que para $p > 1$, $f(x, t) = \|x\|_p^p / t^{p-1}$ es convexa en $\{(x, t) : t > 0\}$.
24. Demuestre que $f(x) = \|Ax + b\|_2^2/(c^T x + d)$ es convexa en $\{x : c^T x + d > 0\}$ donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.
25. Sean $\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \cdots \geq \lambda_n(X)$ los eigenvalores de la matriz $X \in \mathbf{S}^n$. Demuestre que $\sum_{i=1}^k \lambda_i(X)$ es convexa en $\mathbf{S}^n$. (Pista: Use la caracterización variacional $\sum_{i=1}^k \lambda_i(X) = \sup\{\text{traza}(V^T X V) : V \in \mathbb{R}^{n \times k}, V^T V = I\}$).
26. Derive los conjugados de las siguientes funciones:
    a) (★) $f(x) = \max_i x_i$ en $\mathbb{R}^n$
    b) $f(x) = x^p$ en $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\}$
27. (★) Demuestre que el conjugado de $f(X) = \text{traza}(X^{-1})$ en $\text{dom}(f) = \mathbf{S}^n_{++}$ está dado por $f^*(Y) = -2\text{traza}(-Y)^{-1/2}$ con $\text{dom} f^* = -\mathbf{S}^n_{+}$ (Pistas: (i) $\nabla f(X) = -X^{-2}$, (ii) Demuestre que $Y \notin \text{dom} f^*$ si $Y \succ 0$).
28. Sea $f(x, z)$ convexa en $(x, z)$ y $g(x) = \inf_z f(x, z)$. Demuestre que $g^*(y) = f^*(y, 0)$.
29. Demuestre que las siguientes funciones son log-cóncavas:
    a) $f(x) = e^x/(1 + e^x)$ en $\mathbb{R}^n$
    b) $f(x) = (\prod_{i=1}^n x_i)/\sum_{i=1}^n x_i$ en $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\}$
    c) $f(X) = (\det X)/(\text{traza} X)$ en $\{X \in \mathbf{S}^n : X \succ 0\}$.(Pista: Considere $X = A + tB$)
30. De Boyd & Vandenbergh:
    a) Ejercicio 5.5
    b) Ejercicio 5.6
    c) (★) Ejercicio 5.7
    d) (★) Ejercicio 5.10
    e) Ejercicio 5.20
    f) Ejercicio 5.25
    g) Ejercicio 5.26
    h) Ejercicio 5.30
    i) Ejercicio 5.36
    j) (★) Ejercicio 5.37
    k) Ejercicio 5.40
    l) Ejercicio 5.41