DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Procesos estocásticos CM0433
Taller de Seguimiento 1

Profesor: Nicolás MORENO   Grupo: 01   18 de agosto de 2022.

Los métodos de Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) son utilizado para simular valores de cierta densidad objetivo f cuya forma cerrada no sea conocida o simplemente no la podemos simular fácilmente. La estrategia de muestreo detrás del MCMC, es construir una cadena de Markov irreducible y aperiódica cuya distribución estacionaria sea la función objetivo f. Esto es, para un t suficientemente grande, una realización X_t de esta cadena tendrá una distribución cercana a f y además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) = \mathbf{E}_f(h(X))$$

lo cual obviamente nos permite aproximar integrales (por eso Monte Carlo en el nombre del método).

Problema 1. Para ejemplificar esto, defina la siguiente cadena de Markov $x_t = \beta x_{t-1} + \varepsilon_t$, donde ε_t es una secuencia iid con distribución normal(0,1). Realice simulaciones de x_t con $\beta = 0{,}9$ para obtener que la distribución estacionaria es normal$(0, 1/(1-\beta^2))$. Justifique muy bien la conclusión anterior, utilizando métodos gráficos y test.

Existen varias estrategias para construir la cadena de Markov cuya distribución estacionaria coincida con f, una de ellas es el algoritmo de Metropolis-Hasting. Dada una función objetivo f, se le asocia una densidad $q(x|y)$ la cual, en la practica, sea más fácil de simular. El soporte de la función $q(\cdot|y)$ debe contener el soporte de f.

Algoritmo 1: Metropolis-Hasting

1. Simule $Y_t \sim q(y|x_t)$
2. Tome
$$X_{t+1} = \begin{cases} Y_t & \text{con probabilidad} \quad \rho(x_t, Y_t) \\ x_t & \text{con probabilidad} \quad 1-\rho(x_t, Y_t) \end{cases}$$
donde $\rho(x, y) = min\left\{\frac{f(y)q(x|y)}{f(x)q(y|x)}, 1\right\}$

Problema 2. Utilizando el algoritmo anterior. Simule variables aleatorias de una Beta$(2, 6)$. Realice comprobaciones gráficas y aplique tests apropiados.

El esquema bayesiano se puede explicar de la siguiente manera. Suponga que observamos unos datos Y que provienen de una distribución que depende de un parámetro θ, digamos $p(y|\theta)$, el parámetro θ tiene a su vez una distribución que se llama a priori, denotada por $p(\theta)$, entonces la distribución a posteriori (la distribución del parámetro dado los datos) aparece como una aplicación del teorema de Bayes.

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta)p(y|\theta)}{p(y)}$$

Es en este contexto donde el algoritmo Metropolis-Hasting es comúnmente utilizado para samplear desde la distribución $p(\theta|y)$. Naturalmente, la función de densidad a priori se puede utilizar como la función candidata $q(\cdot|y)$ de nuestro algoritmo.

Problema 3.

- Simule (sin usar MCMC) una muestra aleatoria de tamaño 100 de la siguiente mezcla de distribuciones.

$$(1-\alpha)\ \text{normal}(7, 0{,}5^2) + \alpha\ \text{normal}(10, 0{,}5^2)$$

  donde $\alpha = 0{,}7$.

- Utilizando la data simulada en el punto anterior y suponiendo que α tiene una distribución a priori Beta$(1,1)$ y Beta$(2,10)$ simule una muestra desde la distribución a posteriori utilizando el algoritmo Metropolis-Hasting y estime $\mathbf{E}(\theta|y)$ para ambas a prioris.

Entregables: Un breve informe que fundamente la respuestas a la preguntas planteadas y un archivo de texto con los algoritmos (R o MATLAB)

Fecha de entrega: Jueves 25 de agosto antes de las 18H00.