

TRABAJO FINAL

Nombres:

Valentina Moreno Ramírez
Martín Sánchez Reyes

Fecha: 24 de Noviembre de 2023

Profesor: Juan Pablo Pérez Monsalve

Universidad EAFIT

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Medellín

2022

1. Valoración de una opción

Punto N°1

Considere un activo financiero denominado Activo 1 que está dominado por la ecuación diferencial estocástica,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t; \quad t \in [0, T]$$

Donde μ es rendimiento esperado, σ es la volatilidad implícita y $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es el MBEU definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Utilice la fórmula de Black-Scholes para valoración de opciones, para valorar una opción call europea donde el subyacente es el activo financiero en un mundo neutral al riesgo. La valoración debe realizarse para un vencimiento de 1 año y para un posible strike (K). La elección del strike debe hacerse de tal manera que la opción esté in the money y $r \in [0, 20\%]$. Contraste los resultados utilizando los métodos numéricos de simulación de Monte Carlo, diferencias finitas (grafique la superficie de la opción) y árboles binomiales para la valoración de opciones. Interprete los resultados.
2. Con los mismos parámetros definidos con anterioridad proceda a valorar una opción call americana y contraste los resultados con los hallazgos del ítem 1. Utilice para ello el método numérico de árboles binomiales. Interprete los resultados.

Se utilizaron los siguientes parámetros para la valoración del valor de la opción call europea y americana usando los métodos numéricos enunciados anteriormente:

- Precio actual del activo $S_0 = 50$
- Volatilidad (σ) = 40 %
- Tasa de interés libre de riesgo (r) = 5 %
- Precio de ejercicio (K) = 40
- Tiempo hasta el vencimiento (T) = 1 año

Cabe aclarar que el valor del strike de 40 se considera bien elegido y "in the money" porque es inferior al precio actual del activo, que es 50. Esto significa que al ejercer la opción de compra, el activo se puede adquirir a un precio menor (40) que su valor de mercado actual (50), lo que representa una ganancia inmediata si se vende el activo en el mercado.

El valor del número de subintervalos de tiempo en los que se dividiría el tiempo hasta el vencimiento (N) se fue modificando para evaluar la convergencia de cada método numérico.

El modelo Black-Scholes es considerado frecuentemente como el mejor método para valorar opciones debido a su simplicidad y precisión en ciertos contextos. A diferencia de los métodos numéricos como árboles binomiales, diferencias finitas y el método de Monte Carlo, el modelo Black-Scholes ofrece una solución analítica cerrada para el precio de una opción europea, por ende el valor de este será considerado como el resultado exacto del precio de la opción. Usando los parámetros dichos se obtuvo un resultado de **14.488203788416673**.

Iniciando la comparativa utilizando el método de Montecarlo y variando el número de subintervalos de tiempo, se evidencian los resultados en la siguiente tabla:

Método de Montecarlo				
N	Número de simulaciones	Número de trayectorias	Valor	Diferencia porcentual
200	1000	10000	14.475216893336041	0.0896 %
300	1000	10000	14.710536595014956	-1.534 %
500	1000	10000	14.469059152980728	0.1321 %
1000	1000	10000	14.339443739339945	1.0267 %

Se observa como el aumentar el número de subintervalos en los que se divide el tiempo no presenta una mejora significativa en los resultados de este método numérico.

Ahora modificando el número de trayectorias y simulaciones se obtienen los siguientes valores:

Método de Montecarlo				
N	Número de simulaciones	Número de trayectorias	Valor	Diferencia porcentual
300	1000	10000	14.703022591280067	-1.482 %
300	2000	10000	14.567879118086465	-0.549 %
300	3000	10000	14.537620925466966	-0.341 %
300	4000	10000	14.322582016128477	1.143 %

Método de Montecarlo				
N	Número de simulaciones	Número de trayectorias	Valor	Diferencia porcentual
300	2000	10000	14.602074143276063	-0.785 %
300	2000	15000	14.41572965203053	0.5002 %
300	2000	20000	14.579272195759383	-0.6286 %
300	2000	30000	14.461735495135166	0.1826 %

Las variaciones en los valores y las diferencias porcentuales reflejan la naturaleza estocástica y de muestreo del método de Montecarlo, además no hay una tendencia clara hacia la convergencia en ninguno de los casos, lo que sugiere que ni el aumento del número de simulaciones ni el de trayectorias garantiza una mayor precisión por sí solo. Sin embargo, la diferencia en el número de trayectorias fue el que presentó errores relativos más bajos y además notamos que los valores en general de las diferencias no son porcentualmente altos por lo que se concluye que el método está bien programado.

Continuando con el método de árboles binomiales, esta técnica modela la evolución del precio de un activo a lo largo del tiempo mediante un árbol de decisiones. En cada nodo, el precio del

activo puede subir o bajar, creando distintos escenarios futuros. El valor de una opción call se determina retrocediendo desde la fecha de vencimiento hacia el presente, evaluando en cada nodo la opción de ejercer o no la opción, tomando en cuenta la tasa de interés. Este método es flexible y se adapta a diferentes condiciones del mercado.

El método de diferencias finitas es otra técnica importante en el ámbito financiero, utilizada para valorar opciones, incluyendo las opciones call. Este enfoque matemático se basa en aproximar las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial de Black-Scholes mediante diferencias finitas. Esencialmente, el método convierte la ecuación diferencial, que es continua, en un conjunto de ecuaciones algebraicas discretas que pueden ser resueltas numéricamente.

Al aplicar el método de diferencias finitas, el rango de valores posibles del activo subyacente y el tiempo hasta el vencimiento de la opción se dividen en una red o malla. En cada punto de esta malla, el valor de la opción se calcula de manera iterativa, avanzando paso a paso en el tiempo. Dependiendo del enfoque específico (explícito, implícito o Crank-Nicolson), las diferencias finitas pueden variar en estabilidad y precisión.

A continuación los resultados de ambos métodos usando los parámetros mencionados anteriormente, un N de 365 para el método de árboles binomiales y en el método de diferencias finitas, establecemos S_{max} como el triple del valor inicial del activo S_0 y el tamaño de los saltos de precio, ds en 0.4, lo que definirá la granularidad con la que se modelará la variación de precios del activo.

	Árboles binomiales	Diferencias Finitas
Valor	14.483774308978006	14.486310553257418
Diferencia porcentual	0.0305730 %	-0.013067 %

Los resultados de los métodos de árboles binomiales y diferencias finitas, se comparan favorablemente con el valor calculado por el modelo de Black-Scholes. La proximidad de estos valores al resultado de Black-Scholes demuestra que ambos métodos proporcionan estimaciones bastante precisas en este caso. La mínima diferencia porcentual entre los valores obtenidos por los métodos de árboles binomiales y diferencias finitas respecto al valor de Black-Scholes indica una alta consistencia en la valoración de opciones, además de presentar mejores resultados el método de diferencias finitas con los parámetros dados. A pesar de las diferencias inherentes en sus enfoques y métodos de cálculo, todos convergen a resultados similares, lo que sugiere que cada uno de ellos es una herramienta válida y confiable para la valoración de opciones bajo las condiciones dadas.

Por último para el método de diferencias finitas, se graficó la superficie de la opción, la cual se puede observar en la siguiente figura:

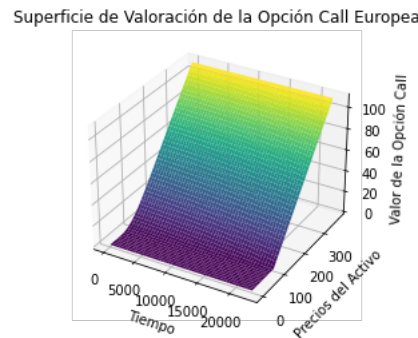


Figura 1: Superficie de la opción mediante diferencias finitas

La superficie muestra cómo el valor de la opción call europea evoluciona con el tiempo y el precio del activo subyacente. La opción tiene un año hasta su vencimiento, y la malla utilizada para el método de diferencias finitas está finamente granulada, como lo sugiere el número de particiones, proporcionando una alta resolución en la modelización.

Observamos que el valor de la opción incrementa con el precio del activo, lo cual es esperado, ya que una opción call otorga al titular el derecho a comprar el activo a un precio de ejercicio ($K=40$), y mientras mayor sea el precio del activo en comparación con K , mayor será el beneficio potencial. Dado que S_0 es mayor que K , la opción está 'in-the-money' desde el principio, lo que se refleja en la gráfica por los valores más altos cerca del precio actual del activo.

La volatilidad del 40 % es sustancial y contribuiría a un valor de opción más alto debido al potencial de movimientos ascendentes del precio del activo. Conforme nos acercamos al vencimiento de la opción (moviéndonos hacia la derecha en el eje del tiempo), el valor de la opción se reduce debido al 'decay' temporal o decadencia temporal, especialmente para los precios del activo que están cerca del precio de ejercicio. Para precios muy por encima del precio de ejercicio, el valor de la opción se acerca más a su valor intrínseco, que es la diferencia entre el precio del activo y el precio de ejercicio.

Por último con los parámetros definidos anteriormente procedimos a valorar la opción call americana usando árboles binomiales. Para esto modificamos el código de árboles binomiales en el cálculo hacia atrás de la opción, de tal manera que

$$f_{\text{call}} = \max \{f, \max \{S_t - K, 0\}\}$$

$$\text{donde } f = e^{-r\Delta t} [pF_u + (1 - p)f_d].$$

Tras varios cálculos con diferentes parámetros, notamos que los valores del valor de la opción eran iguales, esto debido a que las opciones call americanas y europeas sobre activos que no distribuyen dividendos suelen tener el mismo valor debido a que no es óptimo ejercer la opción americana antes de su vencimiento. Esto se debe a que al ejercer anticipadamente, se pierde el

valor tiempo de la opción sin obtener un beneficio compensatorio, ya que el activo subyacente no disminuye su valor por el pago de dividendos. Por lo tanto, en ausencia de dividendos, los inversores prefieren mantener la opción call americana hasta el vencimiento, alineando su comportamiento y valor con el de una opción call europea.

Punto N°2

Considere un activo financiero denominado Activo 2 que está dominado por la ecuación diferencial estocástica,

$$dS_t = \alpha (\mu - S_t) dt + \sigma S_t dB_t; \quad t \in [0, T]$$

Donde α es la tasa de reversión a la media, μ es el nivel de reversión a la media, σ es el parámetro asociado con la volatilidad y $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es el MBEU definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. Obtenga la ecuación en derivadas parciales de segundo orden que define el precio (f) de una opción financiera sobre S_t en un mundo (1) neutral al riesgo y (2) ajustado al riesgo. A partir del método de diferencias finitas explícitas obtenga la expresión que define el precio del derivado financiero para todos los nodos internos de la malla, esto es,

$$f_{i,j} = a_j f_{i+1,j-1} + b_j f_{i+1,j} + c_j f_{i+1,j+1}$$

2. Proceda a realizar la valoración de una opción call europea para el activo subyacente (S_t) definido en un mundo de riesgo ajustado utilizando para ello el método de Monte Carlo. La valoración debe realizarse para un vencimiento de 6 meses y para un posible strike (K). La elección del strike debe hacerse de tal manera que la opción esté in the money, $\lambda \in [0, 10\%]$ y $r \in [0, 20\%]$. Interprete los resultados.

1.1. Valoración neutral al riesgo

Partiendo de que el subyacente sigue la ecuación

$$dS_t = \alpha (\mu - S_t) dt + \sigma S_t dB_t \quad (1)$$

, y siguiendo Black Scholes, se tiene que para el valor f de un derivado sobre el activo modelado sigue el proceso

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \alpha (\mu - S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma S_t dB_t \quad (2)$$

Tomando siempre la función evaluada en el valor del subyacente como su argumento espacial $f(t, S_t)$. Discretizando 1 y 2 tenemos

$$\Delta S_t = \alpha (\mu - S_t) \Delta t + \sigma S_t \Delta B_t \quad (3)$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \alpha (\mu - S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma S_t \Delta B_t \quad (4)$$

Armando un portafolio adecuado, con una posición en corto en el derivado y una posición en largo de tamaño $\frac{\partial f}{\partial x}$ de partes del activo, el cambio en el portafolio es

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta S_t \quad (5)$$

De este modo, reemplazando las ecuaciones discretizadas y simplificando obtenemos:

$$\Delta \Pi = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \Delta t \quad (6)$$

Siendo un portafolio libre de riesgo, se tiene que crece a una tasa exponencial igual a una tasa libre de riesgo y por tanto $\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$, y así resulta la forma

$$r f = \frac{\partial f}{\partial t} + r S_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (7)$$

Usando los esquemas de diferencias finitas vistos en clase: progresiva en tiempo y centrada en espacio para la primera y segunda derivada, llevamos a los coeficientes

$$\begin{aligned} a_i &= k \left(\frac{\sigma^2 j^2}{2} - \frac{r j}{2} \right) \\ b_i &= k \left(\frac{1}{\Delta t} - \sigma^2 j^2 \right) \\ c_i &= k \left(\frac{\sigma^2 j^2}{2} + \frac{r j}{2} \right) \end{aligned}$$

Con $k = \frac{\Delta t}{r \Delta t + 1}$

1.2. Valoración Monte Carlo

Para la valoración Monte Carlo del activo, obtenemos la ecuación ajustada al riesgo, discretizamos la expresión de la dinámica del activo y de este modo se simula hasta un tiempo T de maduración. Sobre el cual se evalúa el pay out del derivado (en el caso de call europea $\max(S_T - k, 0)$), obteniendo así un número d de payouts estimados. Una vez descontados por la tasa libre de riesgo y promediados, se obtiene un estimado m . Repitiendo este proceso M veces, obtenemos una estimación de Monte Carlo para el valor del derivado.

2. Análisis de sensibilidad

Conservando el Activo 1 y los parámetros asociados (según sea el caso), determine e interprete,

1. La variación en el precio de la opción ante el incremento del número de sub-intervalos en la maya respecto al precio del subyacente (N_s). Se debe verificar por el método numérico de diferencias finitas para la opción conformada sobre el Activo 1.
2. El incremento del número de sub-intervalos en el árbol respecto al tiempo (N). Se debe verificar por el método numérico de arboles binomiales para la opción conformada sobre el Activo 1 y para la opción call americana.

Iniciando con la variación en el número de sub-intervalos de la maya presente en el método de diferencias finitas, en la siguiente tabla podemos observar diferentes resultados de acuerdo a dicho cambio.

Diferencias Finitas			
N_s	ds	Valor de la opción	Diferencia porcentual
75	2	14.479185452679808	0.0622 %
150	1	14.484753090893907	0.0238 %
300	0.5	14.48614371230863	0.0142 %
375	0.4	14.486310553257418	0.0131 %
750	0.2	14.486532994485675	0.0115 %
1500	0.1	14.486588602764506	0.0111 %

Al analizar los datos obtenidos a través del método de diferencias finitas y compararlos con el valor exacto proporcionado por el método de Black-Scholes, que es 14.488203788416673, se observa una mejora notable en la precisión del valor calculado de la opción a medida que aumentamos el número de sub-intervalos (N_s). Esta tendencia es evidente en la reducción progresiva de la diferencia porcentual respecto al valor de referencia de Black-Scholes. Por ejemplo, con $N_s = 75$, la diferencia es del 0.0622 %, que disminuye significativamente a solo el 0.0111 % cuando $N_s = 1500$.

Otro aspecto interesante es la relación inversa entre el tamaño del sub-intervalo (ds) y la precisión en el cálculo del valor de la opción. A medida que ds se hace más pequeño, lo que implica una malla más fina en el método de diferencias finitas, la precisión del cálculo mejora. Esto es coherente con los principios del método de diferencias finitas, donde una mayor densidad de puntos en la malla generalmente resulta en una mejor aproximación del valor real.

Sin embargo, es importante destacar que la tasa de mejora en la precisión disminuye marginalmente a medida que N_s aumenta. Esto sugiere la existencia de un punto de rendimientos decrecientes, donde incrementos adicionales en la densidad de la malla generan solo mejoras marginales en la precisión. Esto es crucial para la toma de decisiones, especialmente cuando se consideran los costos computacionales asociados con mallas más finas. En resumen, los resultados indican que el método de diferencias finitas proporciona una aproximación cada vez más precisa

al valor de la opción calculado por el método de Black-Scholes a medida que se aumenta la densidad de la malla. No obstante, es fundamental encontrar un equilibrio entre la precisión deseada y la eficiencia computacional, ya que a medida que se aumentaba el número de puntos en la malla aumentaba considerablemente el tiempo de cómputo.

Siguiendo con la variación del parámetro N en el método de árboles binomiales; se obtuvieron los siguientes resultados, cabe aclarar que con los parámetros expuestos en el activo 1 tanto la opción call europea como la americana presentan resultados iguales, por lo que solo se evidenciará una tabla con los resultados que representarían el valor de ambas opciones.

Árboles Binomiales		
N	Valor de la opción	Diferencia porcentual
200	14.483774308978006	0.0306 %
500	14.489136767150207	-0.0064 %
600	14.488302885123634	-0.00068 %
800	14.487716064050996	0.00336 %
1000	14.488342703445188	-0.00096 %
2000	14.488816727112855	-0.0042 %
3000	14.488434424117408	-0.00159 %
4000	14.488459923367587	-0.00176 %
4500	14.488372451054476	-0.00116 %
5000	14.488344160884878	-0.00097 %
6000	14.488389915217246	-0.00128
7000	14.488338465360412	-0.00092 %

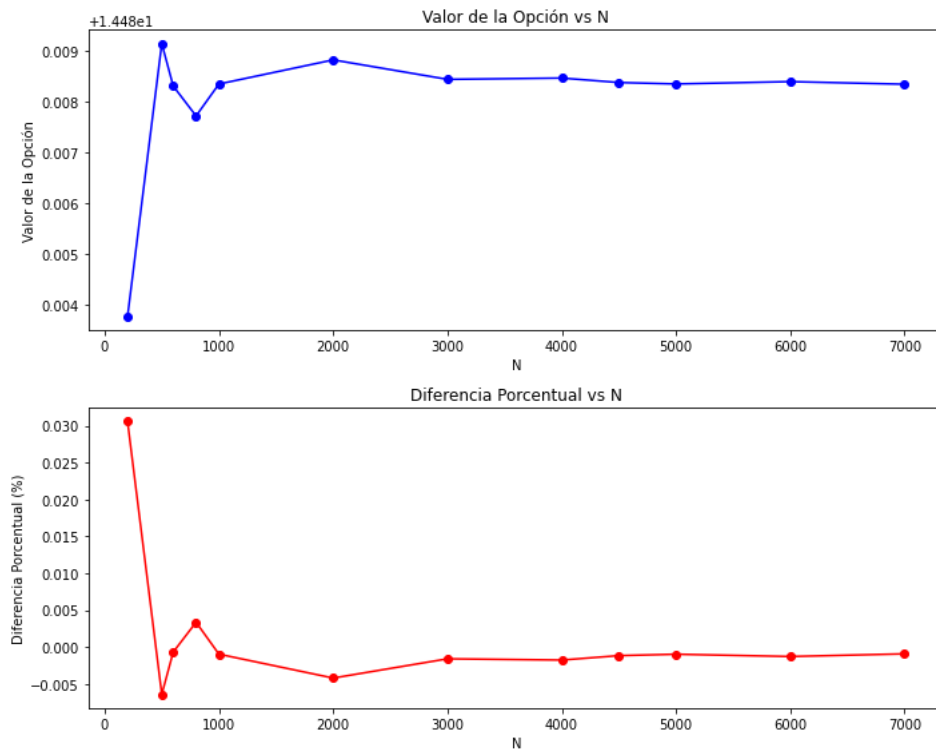


Figura 2: Convergencia Árboles binomiales

En primer lugar, se observa que el valor de la opción tiende a estabilizarse a medida que aumenta el número de pasos (N). A pesar de leves fluctuaciones, el valor converge hacia un rango más definido desde un $N = 1000$, indicando que con un número mayor a el enunciado de particiones, este método puede estimar el valor de una opción con precisión. Por otro lado, la disminución del error porcentual con incrementos en N subraya que una mayor cantidad de particiones mejora la precisión del modelo. Esto es crucial, considerando que el método de árboles binomiales es más rápido en términos de tiempo de cómputo en comparación con el método de diferencias finitas, aunque requiere un mayor número de particiones para alcanzar una precisión comparable. Esta eficiencia computacional lo hace atractivo para situaciones donde la velocidad es fundamental, como en el trading de opciones. La consistencia en los resultados, particularmente en valores altos de N , refuerza la confiabilidad del método. Sin embargo, estos hallazgos también resaltan un trade-off común en la computación financiera: el equilibrio entre tiempo de cómputo y precisión. Aunque los árboles binomiales son rápidos, necesitan un mayor número de particiones para lograr una precisión deseada, lo cual implica un uso más intensivo de recursos computacionales. En conclusión, el método de árboles binomiales se presenta como una herramienta eficiente y efectiva para la valoración de opciones, particularmente cuando el tiempo de cómputo es una consideración crítica y se cuenta con la capacidad para manejar un alto número de particiones.

3. Simulación de modelo de Heston

El modelo de Heston es un modelo de volatilidad estocástica. Como se implica en el nombre, modela el proceso de la volatilidad, no como una constante (a diferencia de modelos como el de Black Scholes), sino como otro proceso de difusión correlacionado al proceso del activo. Su formulación matemática está dada por:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dB_{1,t}$$

$$dv_t = \alpha (\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dB_{2,t}$$

Por medio de la discretización de Euler Maruyama, obtenemos

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{(\mu - \frac{v_{t_i}}{2})\Delta t + \sqrt{v_{t_i}}\Delta B_{1,t_i}}$$

$$v_{t_{i+1}} = v_{t_i} + \alpha(\theta - v_{t_i})\Delta t + \sigma \sqrt{v_{t_i}}\Delta B_{2,t_i}$$

Se simula en Python el esquema anterior con las condiciones iniciales $S_0 = 100$, $v_0 = 1$ y la simulación se hace con $n=252$, $d=10000$.

Caso 1: $\mu = 0,6$, $\alpha = 20$, $\theta = 0,4$, $\sigma = 0,2$

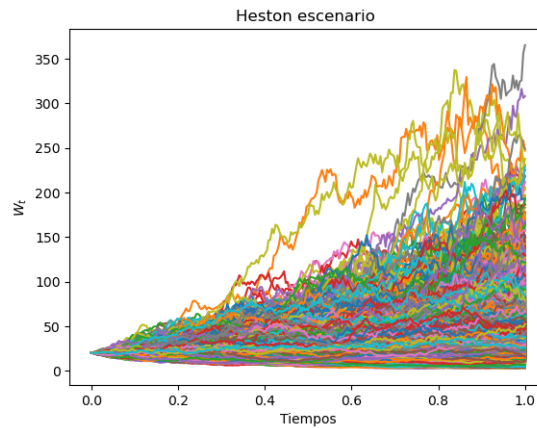


Figura 3: Precio simulado escenario 1

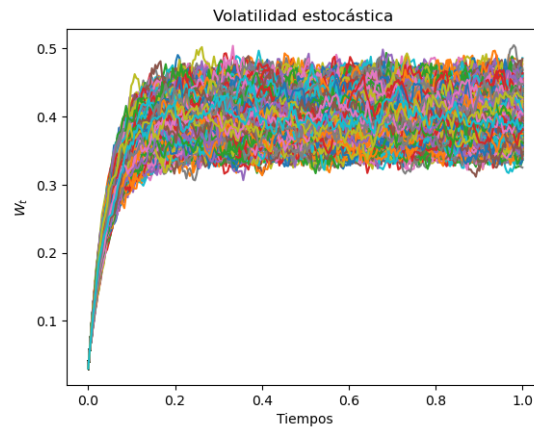


Figura 4: Volatilidad simulada escenario 1

Transversalmente, se obtienen estadísticos de media y varianza para ambos procesos:

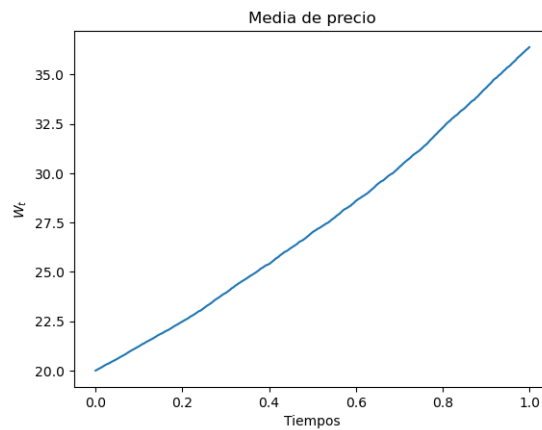


Figura 5: Tendencia precio escenario 1

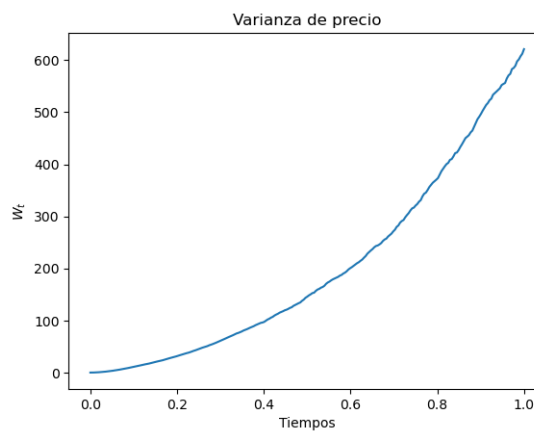


Figura 6: Varianza precio escenario 1

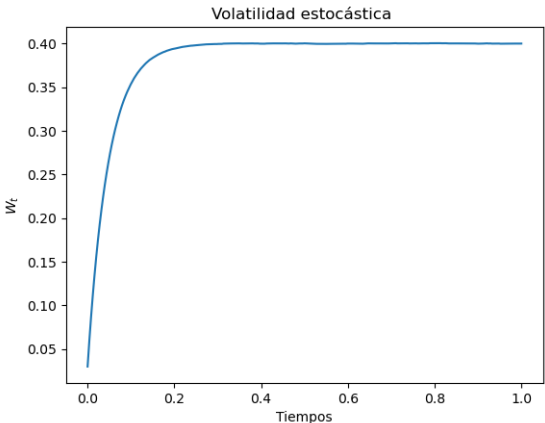


Figura 7: promedio de volatilidades en cada tiempo

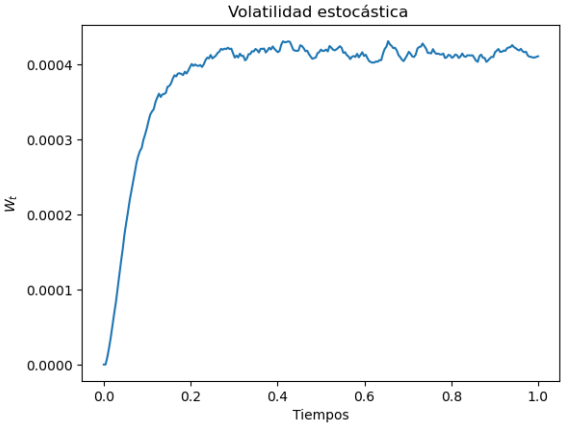


Figura 8: Varianza de volatilidad

Se evalúa el PACF para el proceso de precio:

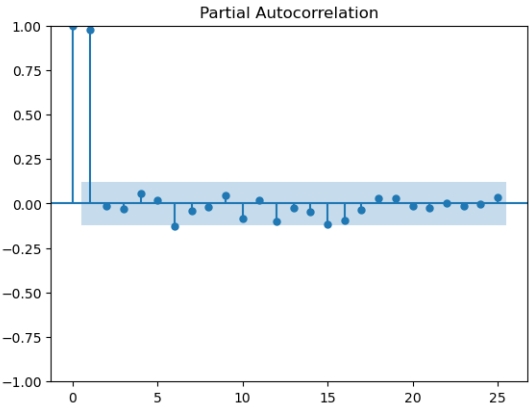


Figura 9: media de volatilidad

Evidenciando que no hay autocorrelación parcial en el proceso, aunque es de esperar que haya autocorrelación.

En la situación inicial, se varía el parámetro ρ en valores 0,7 y $-0,7$ buscando evaluar la diferencia en la distribución en el tiempo final de simulación.

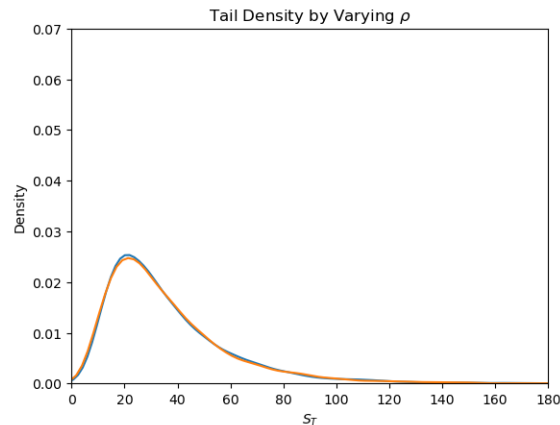


Figura 10: Comparación densidad bajo variación de ρ

El exponente de hurst resulta en una media de 0.34 para este escenario, siendo poco representativo de su tipo de trayectoria y siendo muy similar al exponente medio obtenido por las trayectorias de la volatilidad que sí son un proceso de reversión a la media.

Dando unas condiciones iniciales para la volatilidad y un alpha no muy grande, podemos ver un comportamiento opuesto en las trayectorias de volatilidad.

Con $v_0 = 2$, $\mu = 0,8$, $\alpha = 10$, $\theta = 0,8$, $\sigma = 0,5$, $\rho = 0,1$ obtenemos

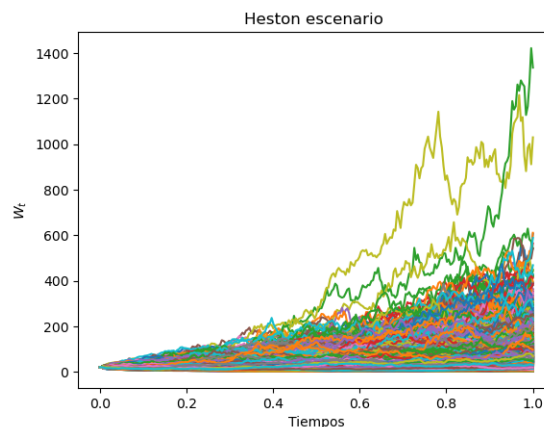


Figura 11: Heston bajo escenario 2

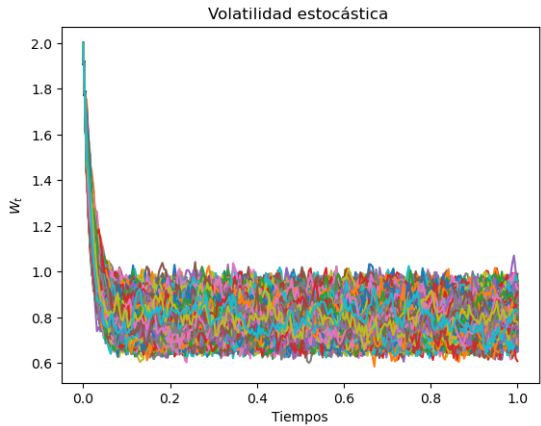


Figura 12: Volatilidad 2

Con funciones de media y varianza estimadas:

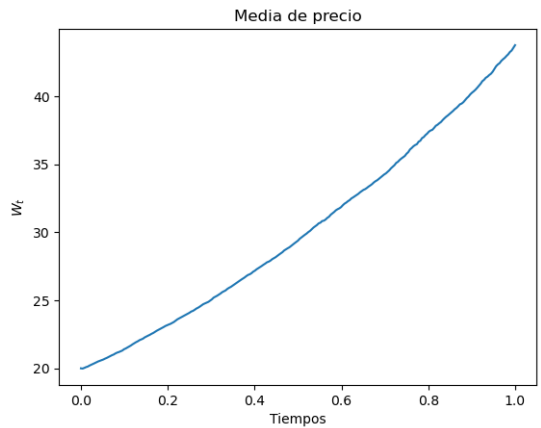


Figura 13: Media precio 2

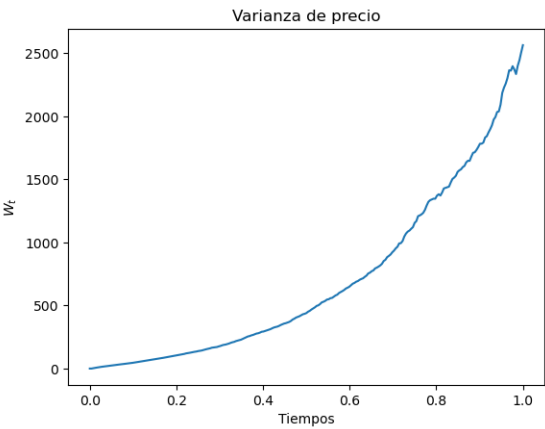


Figura 14: Varianza precio 2

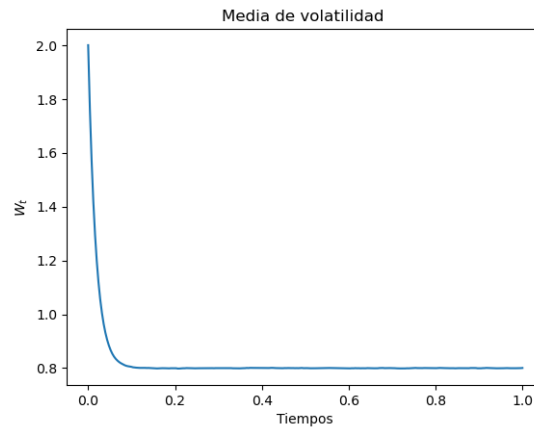


Figura 15: Media de volatilidad 2

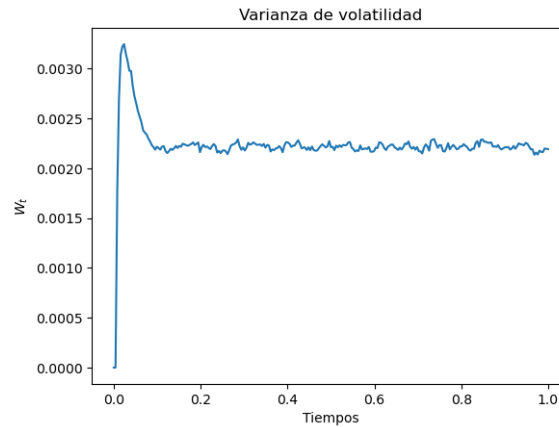


Figura 16: Varianza de volatilidad 2

En este caso, el exponente de Hurst para el proceso de volatilidad indica, con un valor medio de 1.4, una tendencia de reversión a la media mucho más marcada. Curiosamente, luego de haber reducido el valor de α , o la rapidez de ajuste del proceso de volatilidad. El proceso de precio sigue teniendo un valor medio de 0.35 aproximadamente.

Los resultados de autocorrelación parcial son similares.

Se hicieron los mismos procesos para el conjunto $\mu = 1,5$, $\alpha = 30$, $\theta = 0,02$, $\sigma = 0,1$ obteniendo procesos mucho más ajustados, como es de esperar:

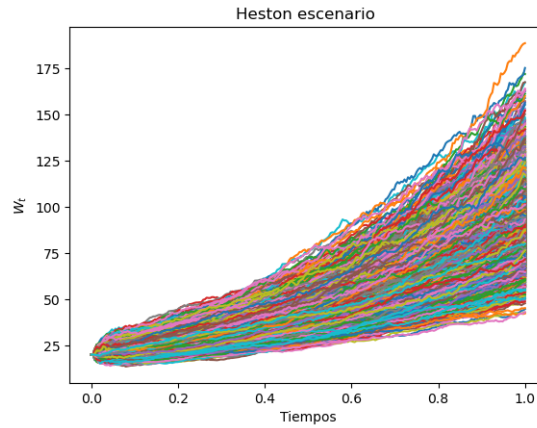


Figura 17: Heston bajo escenario 3

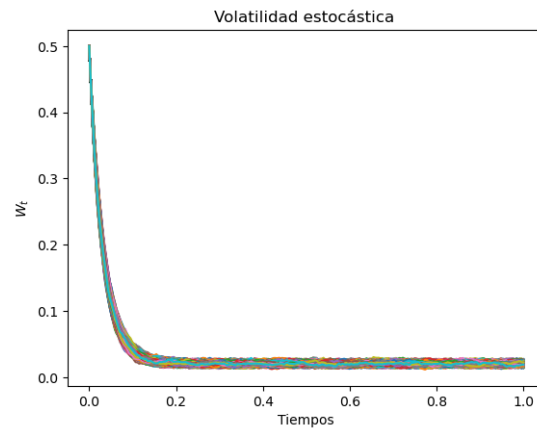


Figura 18: Volatilidad 3

Para este último escenario, incluimos los logretornos del proceso de precio y de volatilidad:

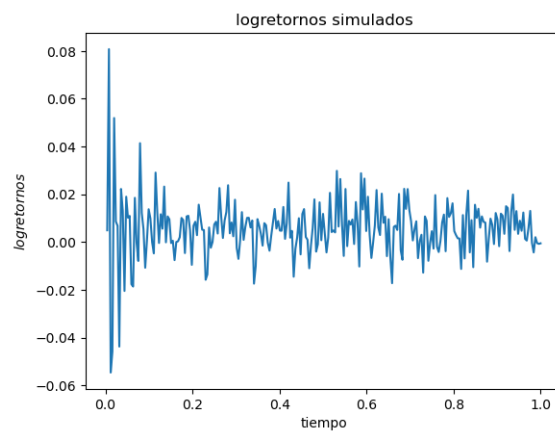


Figura 19: logretornos precio

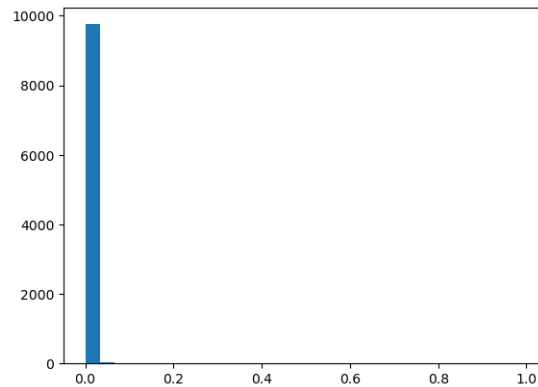


Figura 20: Pvalores prueba de normalidad

Como se ha indicado en literatura, se comprueba claramente la no normalidad del proceso del logaritmo de retornos. Es un proceso de colas pesadas.

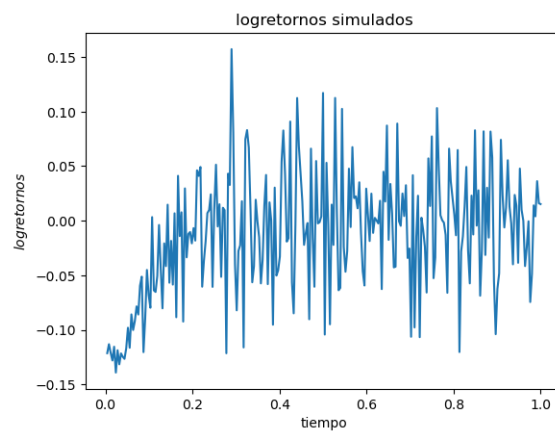


Figura 21: Log retornos probabilidad

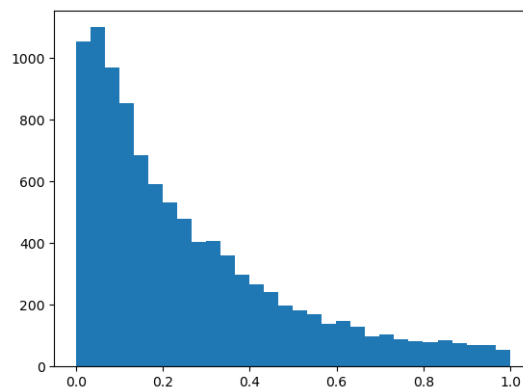


Figura 22: Distribución pvalores normalidad de log retornos de volatilidad

La distribución de pvalores para el proceso de volatilidad nos verifica un alto porcentaje de trayectorias que no son rechazadas como normales.