

TRABAJO TEÓRICO-PRÁCTICO

TERCERA UNIDAD

Nombres:

Valentina Moreno Ramírez
Martín Sánchez Reyes

Fecha: 5 de Noviembre de 2023

Profesor: Juan Pablo Pérez Monsalve

Universidad EAFIT

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Medellín

2022

Pronostico N°1: Ecuación diferencial estocástica homogénea

Punto N°1

A nivel analítico realice una breve descripción de la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea y enuncie las aplicaciones de sus variantes.

Se dice que una ecuación diferencial estocástica lineal homogénea es de la forma:

$$dX_t = F(t)X_t dt + G(t)X_t dB_t; \quad \text{con} \quad X_{t_0} = X_0 \quad (1)$$

Definida sobre $[t_0, T]$, donde $\{F, G\}$ son funciones deterministas continuas de valores en \mathbb{R} y $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano estándar unidimensional.

La ecuación tiene por solución explícita el proceso de difusión dado por:

$$X_t = X_0 \exp \left[\int_{t_0}^t \left(F(s) - \frac{1}{2} G(s)^2 \right) ds + \int_{t_0}^t G(s) dB_s \right] \quad (2)$$

Esta fórmula proporciona una descripción de cómo evoluciona en el tiempo una variable aleatoria, la cual está sujeta a influencias estocásticas. En este contexto, X_t simboliza el estado del sistema en un determinado momento t , las funciones $F(t)$ y $G(t)$ representan, respectivamente, los componentes determinista y estocástico que inciden en la evolución temporal de X_t .

El componente $F(t)X_t$ refleja la tendencia determinista del sistema, es decir, cómo se comportaría el sistema sin la influencia del ruido estocástico. En contraste, $G(t)X_t dB_t$ representa el efecto del ruido estocástico en el sistema, donde dB_t es un proceso de Browniano que captura las fluctuaciones estocásticas.

Este tipo de EDE desempeñan un papel crucial en una variedad de disciplinas, proporcionando herramientas matemáticas esenciales para modelar sistemas dinámicos influenciados por ruido aleatorio. En el campo de las finanzas cuantitativas, estas ecuaciones son fundamentales, destacándose el modelo de Vasicek para tasas de interés a corto plazo como un ejemplo específico de aplicación [Ramos(2013)]. En la física, se utilizan para describir la evolución de partículas en medios estocásticos, lo que resulta crucial para el avance en tecnologías como los semiconductores y los dispositivos cuánticos [Gardiner(2009)]. En ingeniería de control, estas ecuaciones permiten modelar y analizar sistemas dinámicos sujetos a perturbaciones aleatorias, contribuyendo al diseño de controladores robustos [Åström and Wittenmark(2013)]. En biología y ecología, se emplean para entender la dinámica poblacional y la propagación de enfermedades en contextos inciertos [Allen(2010)]. Finalmente, en las ciencias ambientales, las EDEs lineales homogéneas son indispensables para modelar la dispersión de contaminantes, integrando las fluctuaciones aleatorias en las condiciones ambientales [Oksendal(2013)].

Punto N°2

En un escenario controlado lleve a cabo un proceso de simulación para al menos 10,000 trayectorias para el parámetro asociado con la tendencia $\mu \in [0, 1]$ y el parámetro asociado con la difusión $\sigma \in [0, 0.4]$ considerando un total de 252 observaciones. Realice un análisis longitudinal y transversal de las trayectorias analizadas. Extraiga condiciones a nivel de distribución, autocorrelación parcial, dimensión fractal, varianza de largo plazo, entre otras. Es este caso asuma como mínimo tres escenarios de combinación de parámetros.

Se llevó a cabo la simulación para la ecuación del movimiento browniano geométrico, tanto con la solución exacta dada por $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$ como por la aproximación numérica de Euler Maruyama del diferencial correspondiente, que con Δt constante resulta en:

$$S_{t_{i+1}} = (1 + \mu \Delta t) S_{t_i} + \sigma S_{t_i} \Delta B_{t_i}$$

Donde $\Delta B_{t_i} = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$. Se simula bajo los escenarios

$$\mu = 0,3 \quad \sigma = 0,2$$

$$\mu = 0,5 \quad \sigma = 0,4$$

$$\mu = 0,8 \quad \sigma = 0,2$$

Y presentamos un resumen de su simulación, en conjunto con la comparación empírica y teórica de media y varianza.

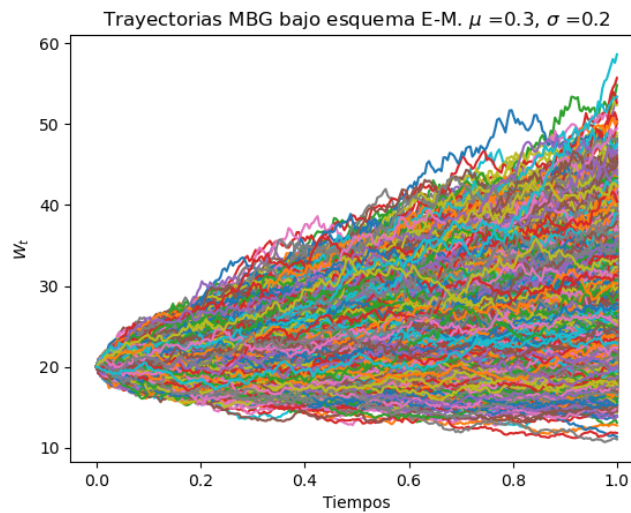


Figura 1: Resultado de simulación caso 1

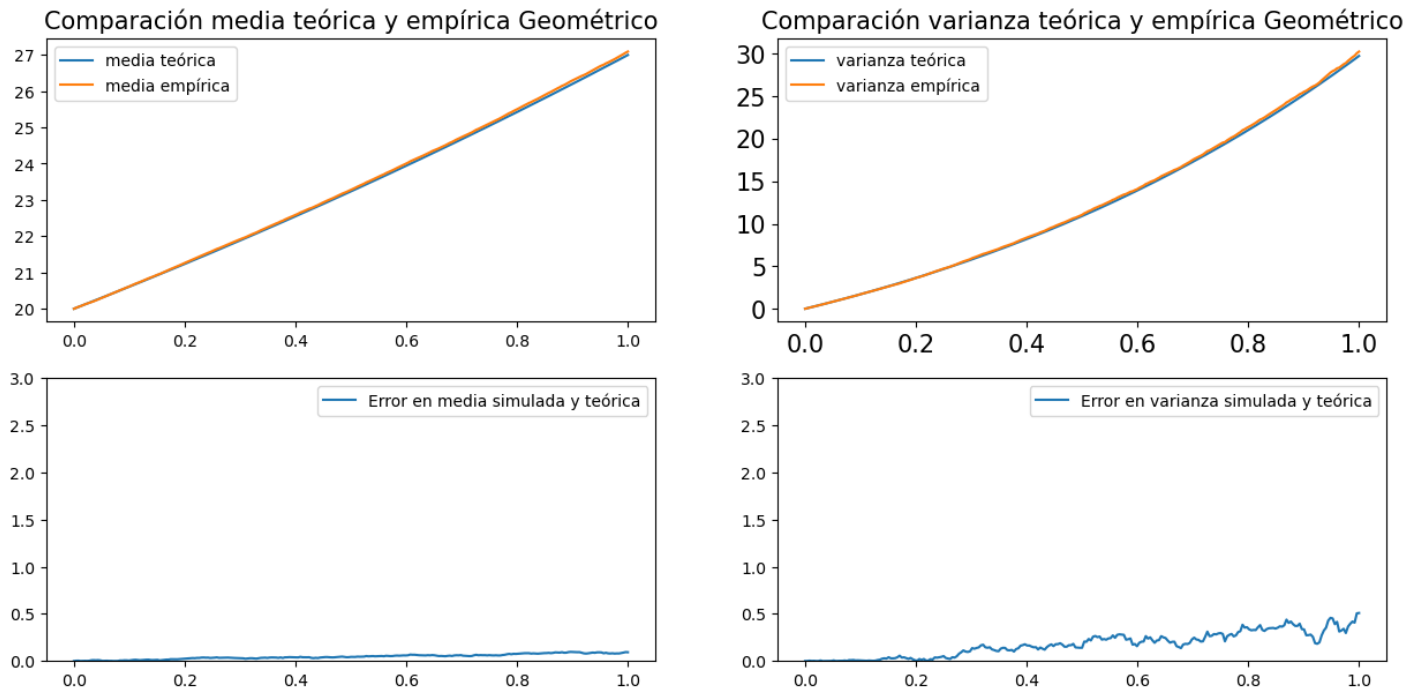


Figura 2: Evaluación media y varianza

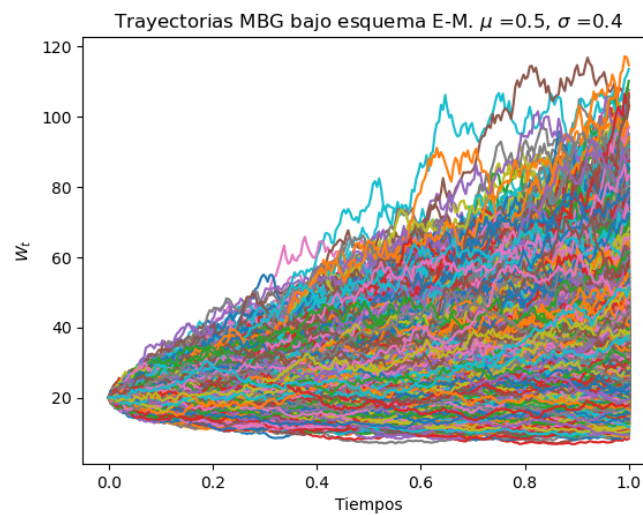


Figura 3: Resultado de simulación caso 2

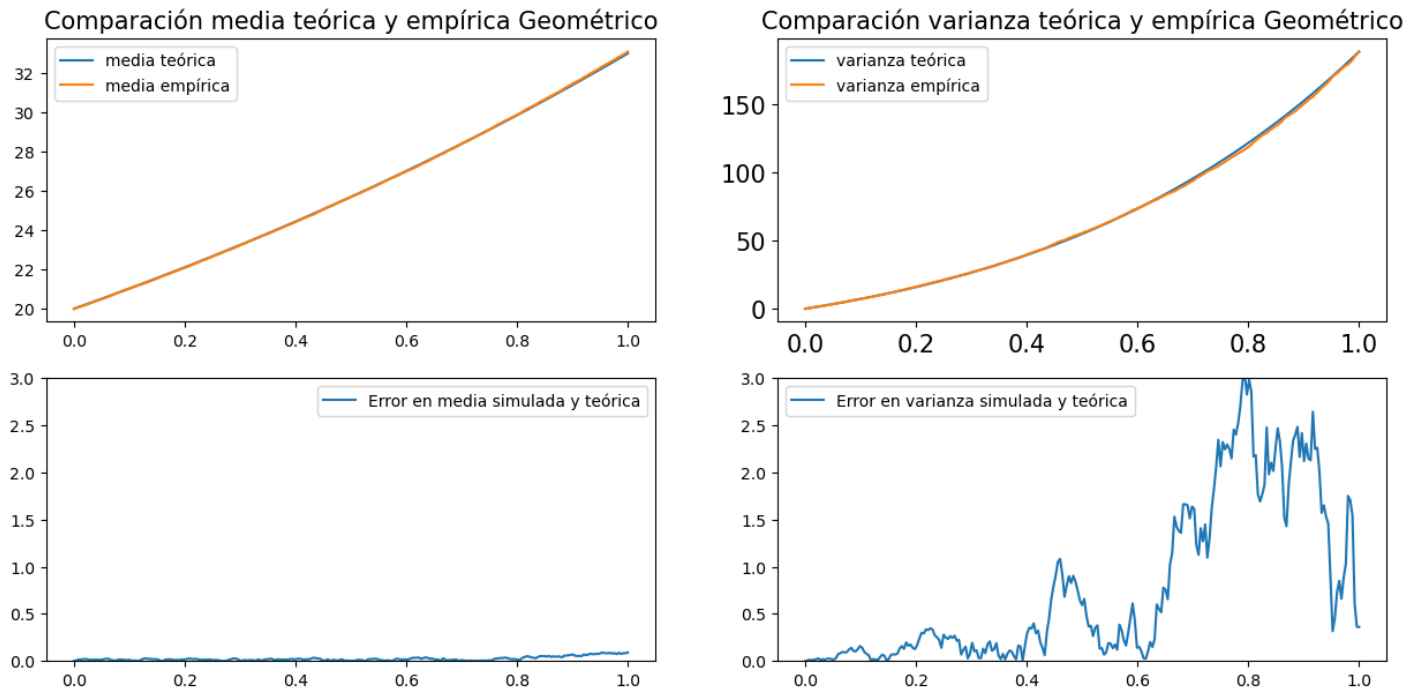


Figura 4: Evaluación media y varianza

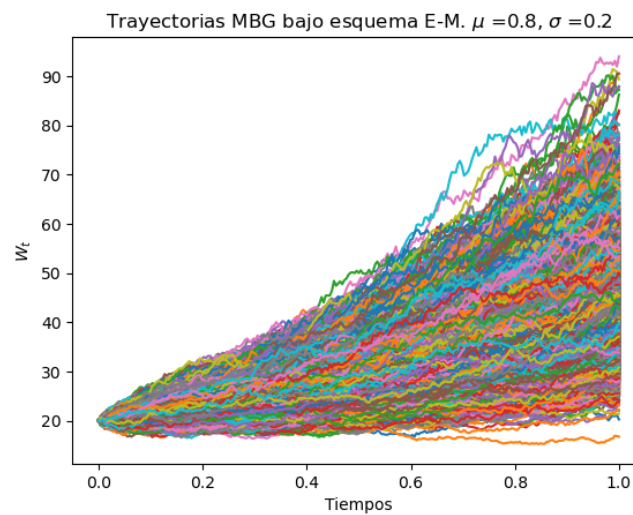


Figura 5: Resultado de simulación caso 2

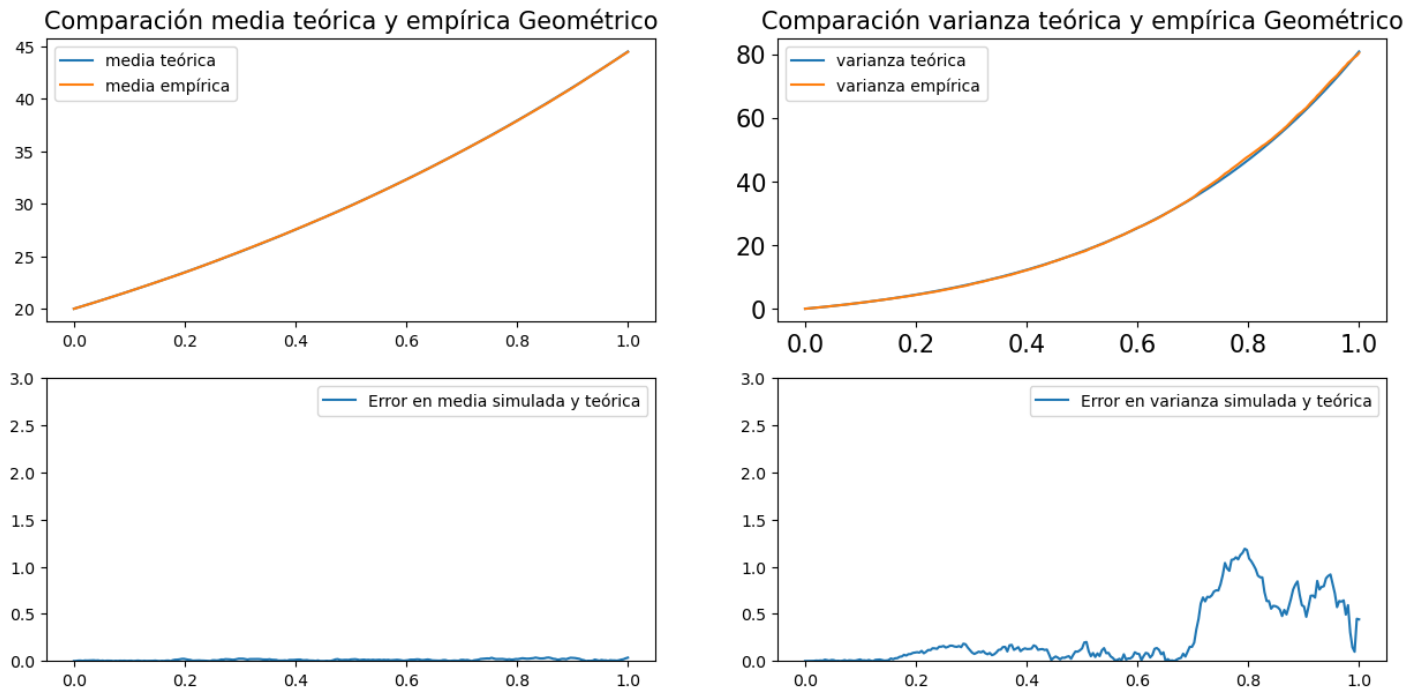


Figura 6: Evaluación media y varianza

La esperanza teórica calculada se basa en lo estudiado en la unidad 1 del curso, con lo que obtenemos $E(S_t) = S_0 e^{\mu t}$ y $Var(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$.

Cuadro 1: Hurst Exponent for Different Scenarios

Escenario	Exponente de Hurst
$\mu = 0,3, \sigma = 0,2$	0.353
$\mu = 0,5, \sigma = 0,4$	0.37
$\mu = 0,8, \sigma = 0,2$	0.378

Para todos los escenarios, si nos basáramos únicamente en el exponente de Hurst, nos inclinaríamos a pensar que se trata de un proceso de reversión a la media.

De los datos se obtuvieron los log-retornos:

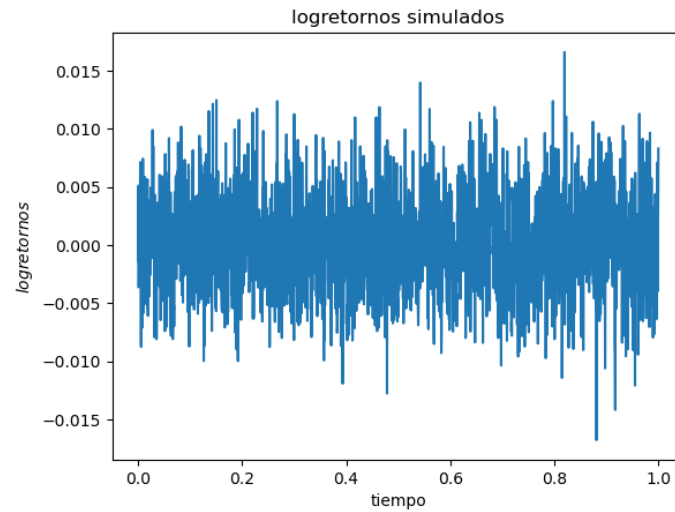


Figura 7: Log retornos simulados

Se presenta un histograma de los pvalores obtenidos de hacer la prueba de normalidad Jarque Bera a los log-retornos de los datos simulados:

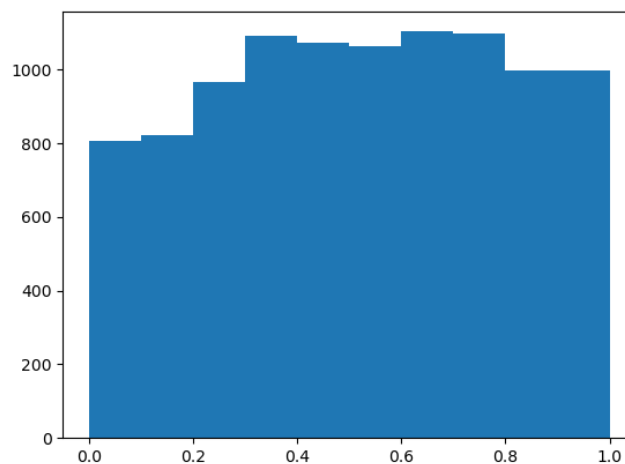


Figura 8: Distribución de p-valores prueba de normalidad

Aunque se ve una buena proporción de las trayectorias cuya normalidad no se rechaza, esperábamos una distribución más contundente que indicara la normalidad clara de los datos de retorno. Hicimos esta prueba cambiando el tamaño de trayectorias a 2000 y el número de trayectorias a 100, con los siguientes resultados:

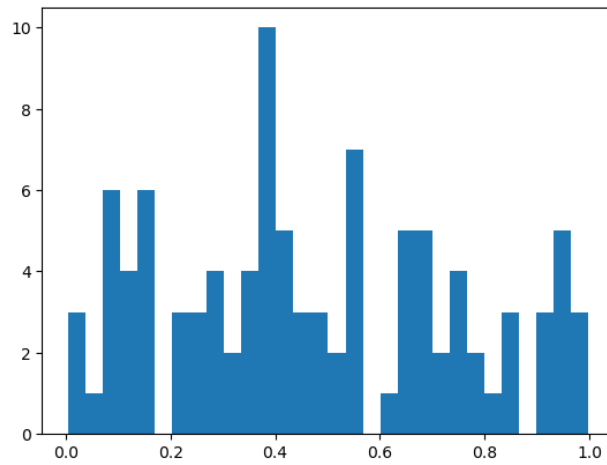


Figura 9: Distribución p-valores

Todo lo anterior se muestra para los parámetros $\mu = 0,8, \sigma = 0,2$. A su vez se verifica que no existe autocorrelación ni autocorrelación parcial entre log retornos simulados:

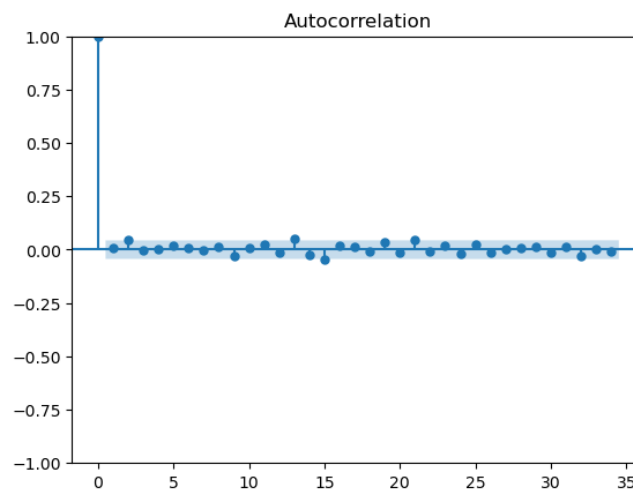


Figura 10: ACF para log retornos simulados

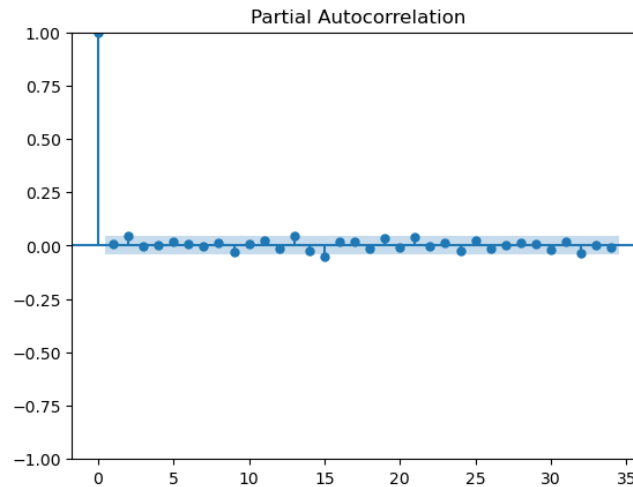


Figura 11: PACF de log retornos simulados

Se usan datos históricos de valor de acciones de John Deere, empresa de manufactura e industrial. Tomando el período de 2021-2022, se comprueba un exponente de Hurst similar a los datos simulados de 3, pero se rechaza la hipótesis de normalidad de los log retornos.

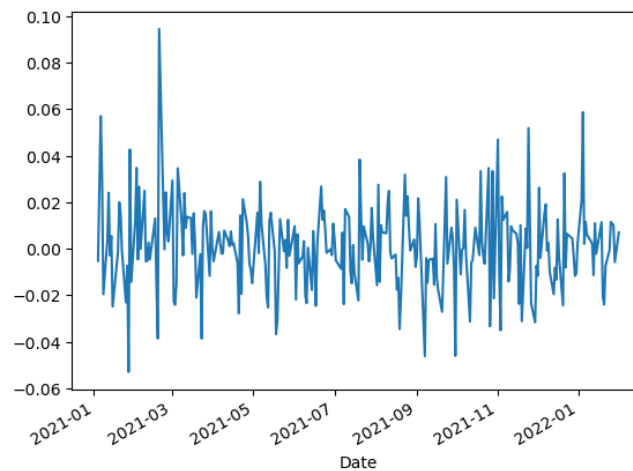


Figura 12: Log retornos John Deere

Aun así, el histograma de distribución de los log retornos es en buena medida simétrico aunque con algo de leptocurtosis.

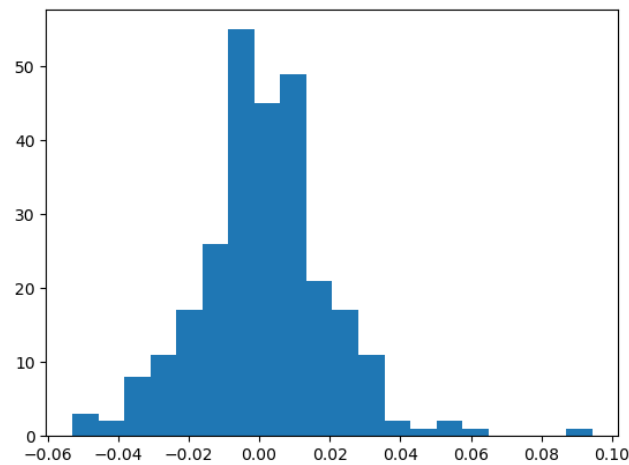


Figura 13: Histograma de log retornos

A continuación se presenta también la gráfica de autocorelación de sus log retornos, con lo que asumiremos independencia.

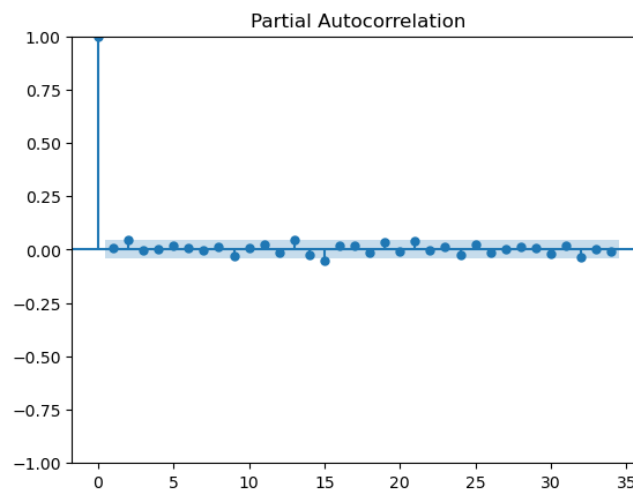


Figura 14: PACF de log retornos simulados

Por la dificultad de obtener retornos ajustados adecuadamente a una distribución normal, hacemos uso de estos datos para la estimación de los parámetros de la ecuación dada.

0.1. Estimación

Usando la estimación por máxima verosimilitud se puede mostrar que los estimadores de drift y volatilidad constantes son $\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i=1}^n R_{t_i}}{n}$ y $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n (R_{t_i} - \bar{R})^2$, donde R_{t_i} son los retornos porcentuales.

Obtenemos los valores

$$\hat{\mu} = 0,354, \quad \hat{\sigma} = 0,296$$

Valores con los que procedemos a hacer nuevamente escenarios de simulación.

Con los parámetros estimados se simula un modelo y se compara con los datos reales históricos. Presentamos una comparativa incluyendo las bandas de confianza.

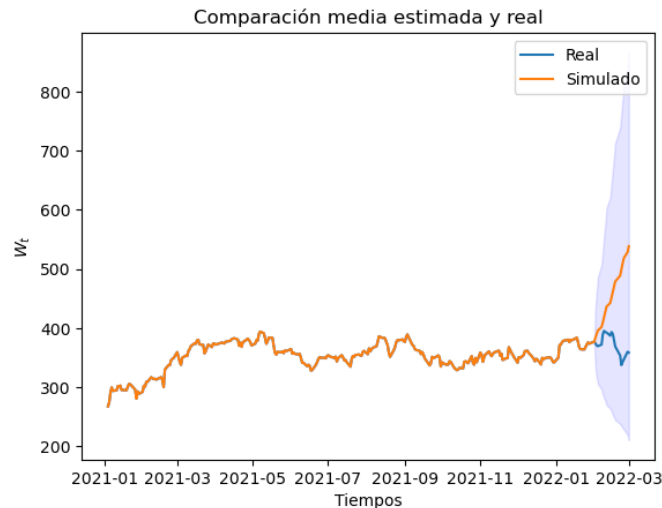


Figura 15: Resultado de simulación comparado

Pronostico N°2

Punto N°1

A nivel analítico realice una breve descripción del proceso de reversión a la media con tendencia funcional y enuncie las aplicaciones de sus variantes. Para este apartado es necesario que describa acertadamente las condiciones bajo las cuales es posible asignarle esta ecuación a un conjunto de datos.

La reversión a la media es una rutina que realiza una variable durante una serie temporal y consiste en volver al valor medio independientemente de cual sea el valor actual de la variable. Un proceso con reversión a la media tiende a cambiar su comportamiento de crecimiento o decrecimiento en el momento en que se alcanzan extremos (históricos). Además de esto, se ha planteado la idea de un proceso con reversión a la media como aquel en el cual los retornos tienen una autocorrelación negativa.

Un proceso con reversión a la media está dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = \alpha (\mu - S_t) + \sigma S_t^r \quad (3)$$

Donde el parámetro constante α es llamado velocidad de la reversión, μ es la media de largo plazo, σ la volatilidad del proceso y B_t un movimiento Browniano. Además, dado que generalmente muchos de los procesos son lineales, r toma los valores de uno o cero, en cuyos casos se obtiene

un proceso con ruido proporcional (Ecuación de Pilipovic) o uno con ruido aditivo (Ecuación de Hull & White).

Adicionalmente a la ecuación 3 se plantean ecuaciones más generales para modelar los procesos con reversión a la media, como es el caso de la ecuación 4 en la cual la media de largo plazo exhibe un comportamiento dependiente del tiempo, como una función determinista o como un proceso estocástico por sí misma.

$$dS_t = \alpha(\mu_t - S_t)dt + \sigma S_t^r dB_t \quad (4)$$

En las ecuaciones 3 y 4 se tiene una condición inicial de $X_0 = x$ donde $\alpha > 0$ y $\sigma > 0$.

Para aplicar con éxito un modelo de reversión a la media con tendencia funcional a un conjunto de datos, es crucial observar primero el comportamiento de los datos y confirmar que muestran una tendencia a regresar a una tendencia central que varía a lo largo del tiempo. Esto justificará el uso de una función de tendencia. Adicionalmente, es esencial tener acceso a una cantidad suficiente de datos observados. Esto permitirá llevar a cabo una estimación precisa de los parámetros del modelo, tales como la velocidad de reversión α , la volatilidad σ , y la forma específica de los $\mu(t)$. La función de tendencia podría identificarse mediante técnicas estadísticas como la regresión no lineal o basándose en conocimientos previos sobre el fenómeno bajo estudio.

Para modelar un conjunto de datos con un proceso de reversión a la media es importante considerar la estacionariedad de la serie de tiempo de las desviaciones de la tendencia $(X_t - \mu(t))$, ya que esta es una suposición clave en muchos modelos de series temporales. Si la función de autocorrelación de la serie de tiempo tiene ciertas ondulaciones, puede ser un indicador de reversión a la media. También es importante tener en cuenta que la media y la varianza a largo plazo de este tipo de ecuación diferencial estocástica lineal en sentido estricto tienden a ser constantes.

Los procesos de reversión a la media son una herramienta estadística esencial utilizada en una amplia gama de campos para modelar fenómenos que tienden a regresar a un nivel medio o de equilibrio a lo largo del tiempo. En finanzas y economía, estos modelos son cruciales; por ejemplo, Vasicek [Vasicek(1977)] introdujo un modelo influyente para tasas de interés a corto plazo, marcando un hito en la valoración de instrumentos financieros y gestión de riesgos, mientras que Fama y French [Fama and French(1988)] descubrieron patrones de reversión a la media en rendimientos de acciones a largo plazo, influyendo significativamente en la teoría de inversión.

En el ámbito de las ciencias ambientales, procesos como estos se aplican para entender las fluctuaciones en parámetros climáticos, tal como lo hizo Schwartz [Schwartz(2007)] al aplicar estos modelos al sistema climático de la Tierra. En medicina, especialmente en epidemiología, se utilizan para analizar la evolución de enfermedades crónicas, como mostraron Laird y Ware

[Laird and Ware(1982)]. En la agricultura, estos modelos ayudan a prever rendimientos de cultivos, integrando factores variados como las condiciones climáticas y prácticas agrícolas [Tomek and Robinson(1990)]. En ingeniería, especialmente para el monitoreo de maquinaria, la reversión a la media es crucial para modelar el desgaste y la degradación a lo largo del tiempo [Jardine et al.(2006)Jardine, Lin, and Banjevic].

Punto N°2

Descargue los datos alguna variable climática de alguna región de Europa a través de European climate assessment & dataset desde el 31/6/2019 hasta el 31/6/2021. En dicha serie debe ser notoria la presencia de una tendencia funcional periódica sujeta de ser modelada con una función trigonométrica. Garantice las condiciones que permiten a este conjunto de datos ser modelados a partir de la ecuación en cuestión. Realice además una breve descripción de la región bajo análisis.

Se escogió la región de Innsbruck para llevar a cabo el proceso de análisis del clima usando los datos conseguidos a través de el European climate assessment & dataset. Es una ciudad del oeste de Austria, capital del estado de Tirol. Está localizada en el valle del Eno, en medio de altas montañas, el Nordkette (Hafelekar, 2334 m.s.n.m.) al norte, Patscherkofel (2246 m.s.n.m.) y Nockspitze (2403 m.s.n.m.) al sur. Es de fama internacional por la práctica de deportes invernales.

Debido a su altitud y posición en Europa central, Innsbruck tiene un clima hemiboreal es decir a medio camino entre las zonas templada y subártica que sitúa a la ciudad en la misma zona climática que Moscú, Estocolmo o Montreal. La temperatura media anual es de 9 °C. Los inviernos son más fríos que la mayoría de las ciudades europeas, con una temperatura mínima media en enero de -7 °C, que habitualmente lleva aparejada grandes nevadas. El clima en verano es impredecible: un día puede ser fresco y lluvioso, con temperaturas rondando los 15-16 °C, mientras que el siguiente puede ser caluroso y soleado con temperaturas por encima de los 30 °C. De todas formas, a cualquier hora durante las noches de verano se mantiene bastante fresco y la temperatura en ocasiones baja de los 10 °C. A continuación una gráfica ?? se observa la temperatura en esta zona entre 30-06-2019 y el 30-06-2021.

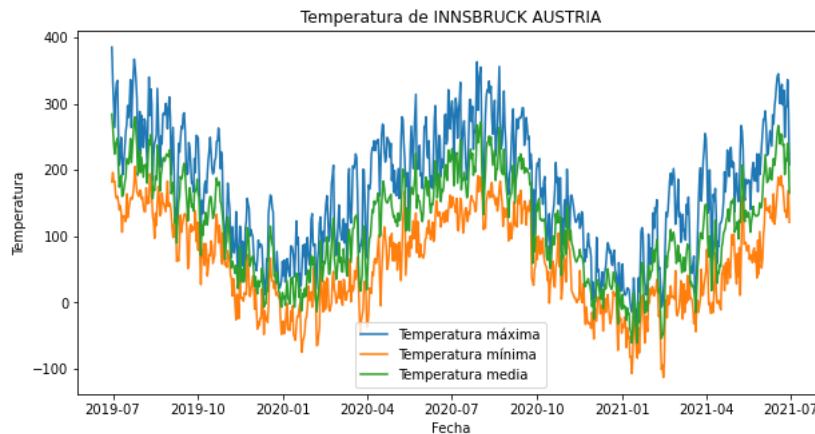


Figura 16: Temperatura máxima, mínima y promedio

De la figura 16 podemos observar como en los meses de final e inicio de año la temperatura toma valores mínimos y en los meses centrales la temperatura toma valores máximos, siguiendo un comportamiento que se basa en el fenómeno estacional de la zona, y dada la forma de la gráfica podemos decir que este el comportamiento del clima en la zona se asemeja a la función trigonométrica seno o coseno. A continuación realizaremos más pruebas estadísticas para verificar que el proceso en efecto se pueda modelar con un proceso de reversión a la media; para mayor exactitud a una media funcional, ya que la temperatura media de la ciudad de Insbruck depende de la estación y el tiempo en el que nos encontremos, ya sea verano, otoño, invierno o primavera.

Siguiendo con los test para verificar si nuestros datos se ajustan a un proceso de Ornstein–Uhlenbeck, procedemos a calcular el exponente de Hurst, este es una medida estadística utilizada para analizar la persistencia o la memoria a largo plazo de una serie de tiempo. Un exponente de Hurst (H) cercano a 0.5 indica un proceso aleatorio (como un paseo aleatorio), mientras que un valor mayor que 0.5 sugiere persistencia y un valor menor que 0.5 implica antipersistencia, es decir, que estamos bajo una serie temporal con autocorrelación negativa. Lo cual significa que una observación positiva probablemente precederá una observación negativa y vice-versa. En este supuesto se asume que la serie temporal tiende a revertir a la media. En nuestro caso obtuvimos un valor 0.34009, lo que nos indica antipersistencia en los datos.

Por último, uno de los supuestos en este tipo de modelos es que la media y la varianza a medida que t crece toman valores contantes, verifiquemos esto calculando la media y la varianza acumulada en cada punto del tiempo

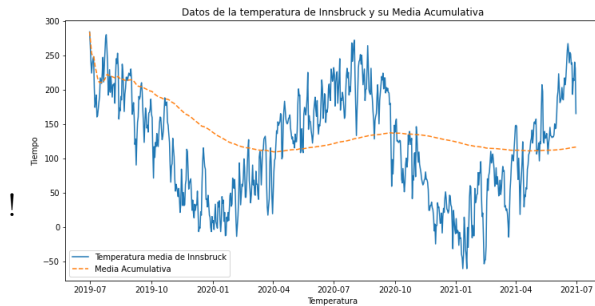


Figura 17: Medida acumulativa de la temperatura

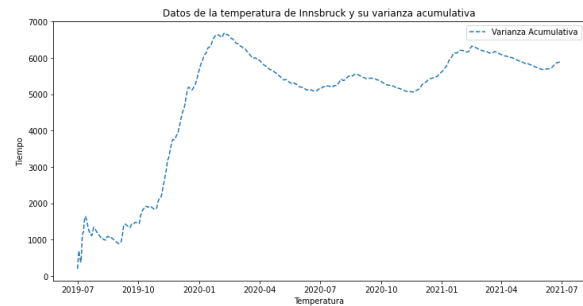


Figura 18: Varianza acumulativa de la temperatura

De las gráficas 17 y 18 podemos observar como los valores de la media y la varianza a medida que el tiempo transcurre comienzan a oscilar en torno a un valor, en el caso de la media alrededor de 160 y en la varianza sobre 5.500. Tras realizar el cálculo de las estadísticas descriptivas de la serie de tiempo y realizar la comparación con los valores a los que va convergiendo la media y la varianza del proceso podemos concluir que estos valores cuando $t \leftarrow \infty$ convergen a un valor constante.

Ya con varias condiciones que nos indican que podemos modelar el proceso con la ecuación diferencial estocástica lineal en sentido estricto con nivel de tendencia funcional procederemos a estimar parámetros del proceso.

Punto N°3

Proceda a estimar los parámetros para el proceso de reversión a la media con tendencia funcional. Posteriormente realice un pronóstico eficiente para un tiempo igual al considerado para la estimación de los parámetros (01/7/2021-01/7/2023) y contraste con los datos reales out the sample.

A partir de los datos de temperatura de la figura 16 se ve claramente que existe una fuerte variación estacional. La temperatura media parece ser de aproximadamente en 30°C durante los veranos y -5°C durante los inviernos, parece que debería ser posible modelar la dependencia estacional con una función seno, además de esta función tenemos que agregar un término que nos permita captar la débil tendencia de la temperatura a subir cada año (calentamiento global) por lo que a nuestra media funcional le añadimos un término dependiente de t y por último debido a que las temperaturas medias mínima y máxima anual generalmente no ocurren el 1 de enero y el 1 de julio, respectivamente, se debe introducir un ángulo de fase. De esta manera la función que describe la media de la temperatura a lo largo del tiempo queda de la siguiente manera:

$$a_1 + a_2 t + a_3 \sin(\omega t \varphi) \quad (5)$$

Como se sabe que el período de las oscilaciones es de un año tenemos que $\omega = \frac{2\pi}{365}$.

Para encontrar valores numéricos de las constantes en 5, la función

$$Y_t = a_1 + a_2 t + a_3 \sin(\omega t) + a_4 \cos(\omega t) \quad (6)$$

se ajusta a los datos de temperatura utilizando el método de mínimos cuadrados. Esto significa encontrar el vector de parámetros $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ que resuelve

$$\min_{\xi} \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|^2 \quad (7)$$

donde \mathbf{Y} es el vector con elementos de 5 y \mathbf{X} es el vector de datos. Las constantes en el modelo 6 se obtienen entonces como

$$\begin{aligned} A &= a_1, \\ B &= a_2, \\ C &= \sqrt{a_3^2 + a_4^2}, \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{a_4}{a_3}\right) - \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Por lo que nuestra función que describe la medida con respecto al paso del tiempo queda de la siguiente manera:

$$\mu_t = 126,55 - 0,0289t + 96,299 \sin\left(\frac{2\pi}{365}t - 1,868\right) \quad (9)$$

Graficando la función junto con las temperaturas diarias del proceso obtenemos la siguiente gráfica, en la que ponemos observar que en efecto se calculo la media en cada punto t .

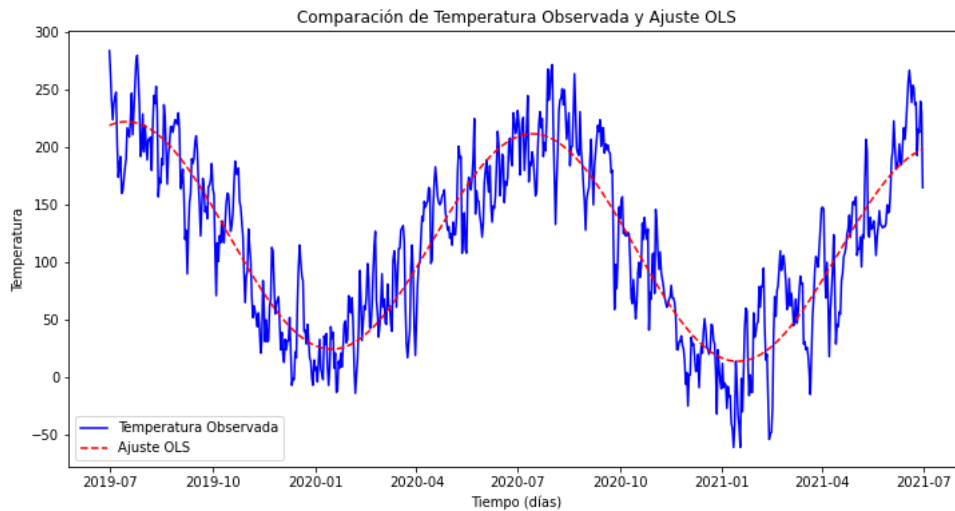


Figura 19: Aproximación de la media funcional usando OLS

Para calcular la volatilidad de proceso, se optó por usar una función por partes que describiera la volatilidad de la temperatura por mes, esto con el fin de mejorar los resultados de los pronósticos. El estimador se basa en la variación cuadrática de la temperatura en el tiempo t , y se calcula

de la siguiente manera dado un mes específico μ de N_μ días, denotamos los resultados de las temperaturas observadas durante el mes μ por $T_j : j = 1; \dots; N_\mu$, la volatilidad del mes μ será:

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{N_\mu} \sum_{j=0}^{N_\mu-1} (T_{j+1} - T_j)^2 \quad (10)$$

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Mes	Volatilidad
Enero	0.50800051
Febrero	3.17887766
Marzo	2.28600229
Abril	0.38729833
Mayo	0.12700013
Junio	8.45043408
Julio	2.3200203
Agosto	3.3200233
Septiembre	5.80947502
Octubre	0.12700013
Noviembre	1.29909445
Diciembre	0.76200076

Cuadro 2: Volatilidad en la temperatura por mes

Podemos observar de la tabla 2 que en verano poseemos una volatilidad alta, esto comprueba que nuestro estimador está bien calculado ya que con la investigación previa del clima de la zona se dijo que la temperatura durante estos meses es impredecible.

Por último calcularemos el coeficiente de reversión a la media α , este tiene la siguiente fórmula:

$$\hat{a}_n = -\log \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_{i-1} \{T_i - T_i^m\}}{\sum_{i=1}^n Y_{i-1} \{T_{i-1} - T_{i-1}^m\}} \right) \quad (11)$$

donde

$$Y_{i-1} \equiv \frac{T_{i-1}^m - T_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

T_i es la temperatura en el tiempo i y $\sigma_i^2 - 1$ es la varianza de la temperatura en el tiempo i .

Tras el cálculo de este parámetro del proceso obtuvimos un valor de 0.31261. Un valor de velocidad de reversión de esta escala significa que el proceso se ajustará hacia su media a largo plazo a una velocidad moderada. No es ni extremadamente rápido ni extremadamente lento.

Ya con nuestro modelo listo procedemos a realizar el pronóstico de la temperatura entre 01/7/2021-01/7/2023.

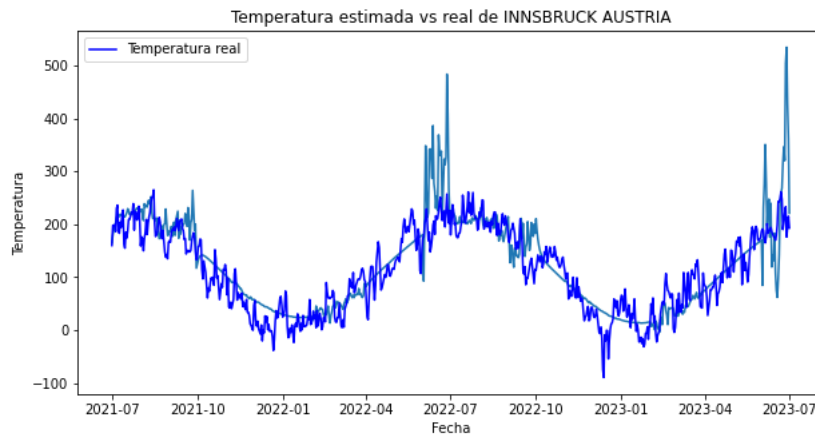


Figura 20: Pronostico de la temperatura de

Podemos observar que captamos bien la media estacional del proceso al ver como los datos pronosticados tienen un comportamiento similar al de los datos reales. Durante los meses de verano podemos observar mucha volatilidad en los datos ya que se intenta pronosticar una temperatura muy cambiante y que no depende de la media del mes. Para verificar que nuestros resultados no estuvieran muy alejados de los datos reales calculamos el error como sigue:

$$error = |T_{real} - T_{pronosticada}| \quad (12)$$

A continuación la gráfica:

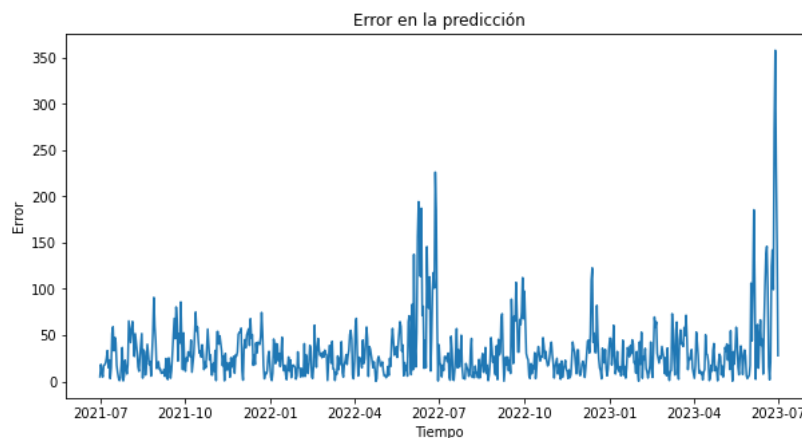


Figura 21: Error de la predicción

Como hemos estado observando es complicado para el proceso pronosticar los meses de verano, por ende estos poseen un error mucho más grande que los otros meses, sin embargo tras calcular el error promedio presente en los datos este fue de 3.2°C (Teniendo en cuenta que la temperatura en el dataset se encuentra en una escala $\times 10$), que a pesar de ser un valor alto, este es aceptable ya que estamos hablando de un contexto de modelos climáticos con proyecciones a largo plazo.

Pronostico N°3

Punto N°1

Considere la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea. Para dicha ecuación demuestre la convergencia fuerte de la solución numérica tanto de Euler-Maruyama como de Milstein. Para ello recurra a resultados visuales y de tipo estadístico. Considere un punto inicial con $N = 10$ incrementos hasta llegar a $N = 10000$.

La ecuación diferencial estocástica lineal homogénea tiene la siguiente forma:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (13)$$

Sus discretizaciones son:

- Por Euler Maruyama $X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \mu X_{t_{i-1}} \Delta t + \sigma X_{t_{i-1}} \Delta B_{t_i}$
- Por Milstein $X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \mu X_{t_{i-1}} \Delta t + \sigma X_{t_{i-1}} \Delta B_{t_i} + \frac{1}{2} \sigma X_{t_{i-1}} ((\Delta B_{t_i})^2 - \Delta t_i)$
- Solución exacta $X_{t_i} = X_{t_{i-1}} e^{\frac{\mu + \sigma^2}{2} \Delta t_i} + \sigma \Delta B_{t_i}$

La convergencia fuerte se define como: defina $\epsilon_S = \mathbb{E} |X_T - X_T^{(n)}|$ como el coeficiente de error entre la EDE, luego una buena aproximación de X_t se llama solución numérica fuerte. Se dice que $X_t^{(n)}$ es una solución numérica fuerte de la EDE si $\epsilon_s \rightarrow 0$

Realizaremos simulaciones con diferentes N para cada una de las discretizaciones de la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea, a su vez que calculamos el valor de la función ϵ_S para así comprobar la convergencia fuerte de las soluciones numéricas.

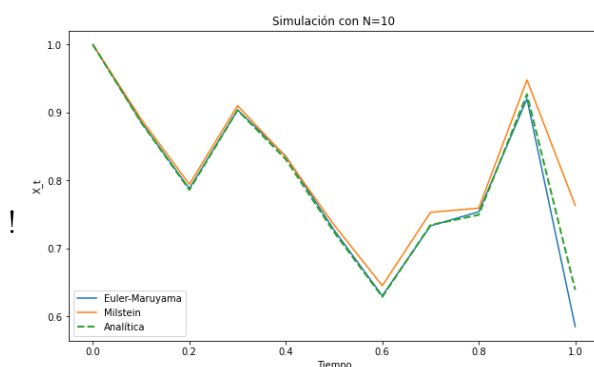


Figura 22: Simulación con $N = 10$

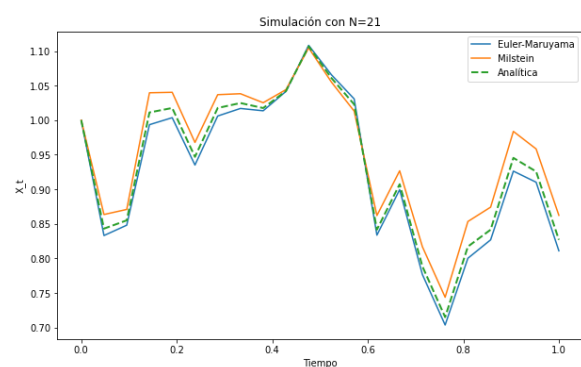


Figura 23: Simulación con $N=21$

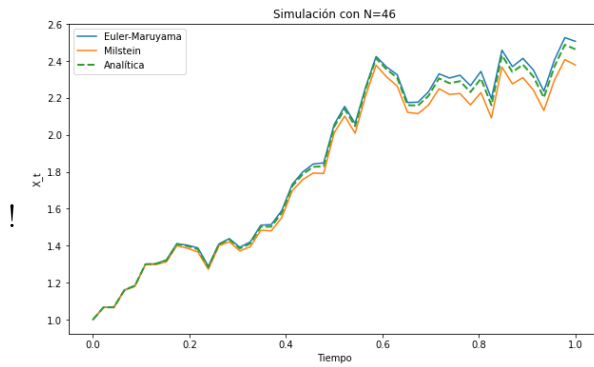


Figura 24: Simulación con $N = 46$

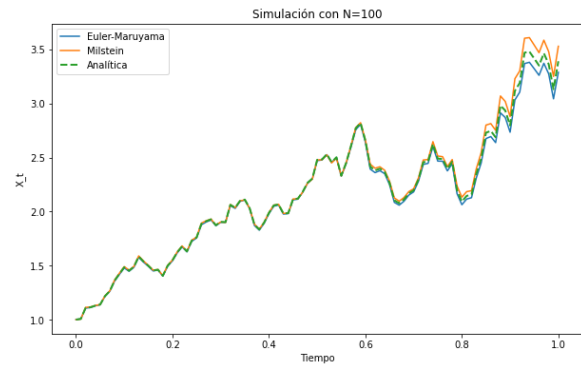


Figura 25: Simulación con $N = 100$

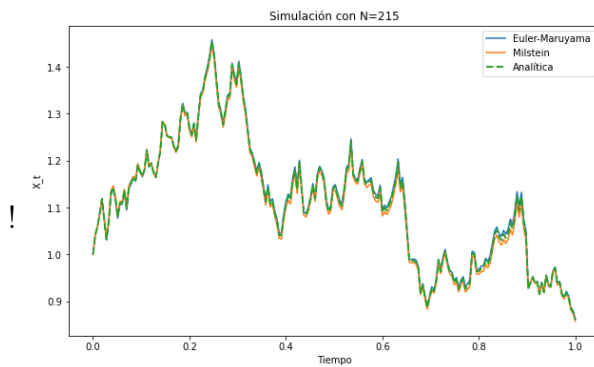


Figura 26: Simulación con $N = 215$

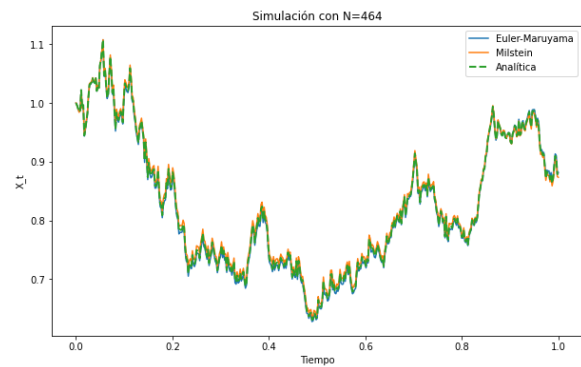


Figura 27: Simulación con $N=464$

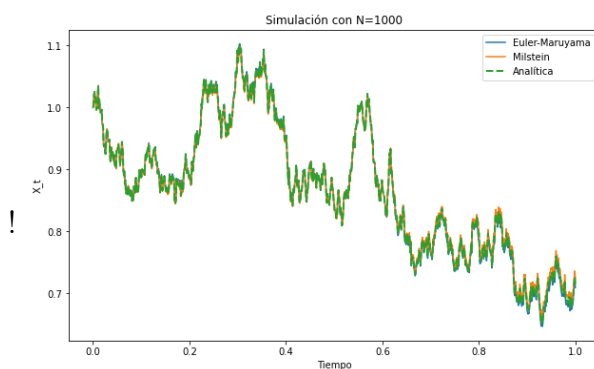


Figura 28: Simulación con $N = 1000$

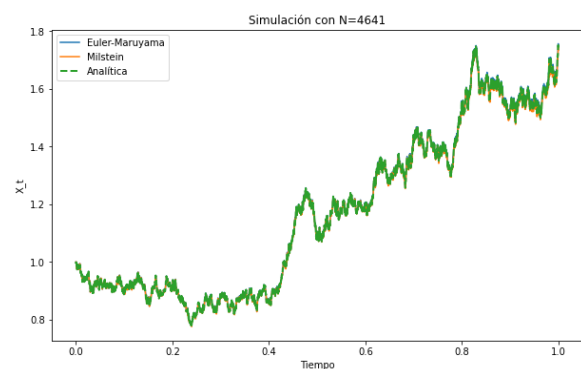


Figura 29: Simulación con $N=4641$

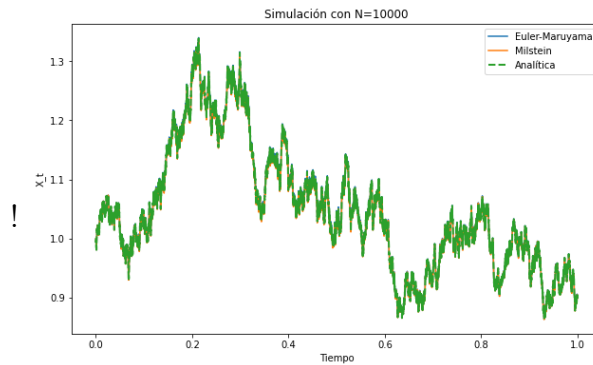


Figura 30: Simulación con $N = 10000$

N	10	21	46	100	215	464	1000	2154	4641	10000
Δt	0.1	0.048	0.022	0.01	0.005	0.0021	0.001	0.0005	0.00021	0.0001
ϵ_S Euler Maruyama	0.0071	0.005	0.0161	0.0211	0.0036	0.003	0.0018	0.0011	0.0015	0.0008
ϵ_S Milstein	0.02042	0.02	0.0359	0.0245	0.0053	0.0049	0.0028	0.0016	0.0022	0.0012

Podemos ver que medida que Δt se hace más pequeño cuando aumentamos el valor de N , ϵ_s también lo hace, obteniendo valores muy cercanos a 0.

Tras realizar una gráfica que calcula el error cuadrático medio entra la solución exacta y la solución numérica podemos ver evidentemente la convergencia de las soluciones numéricas, teniendo mejor convergencia la solución de Euler - Maruyama

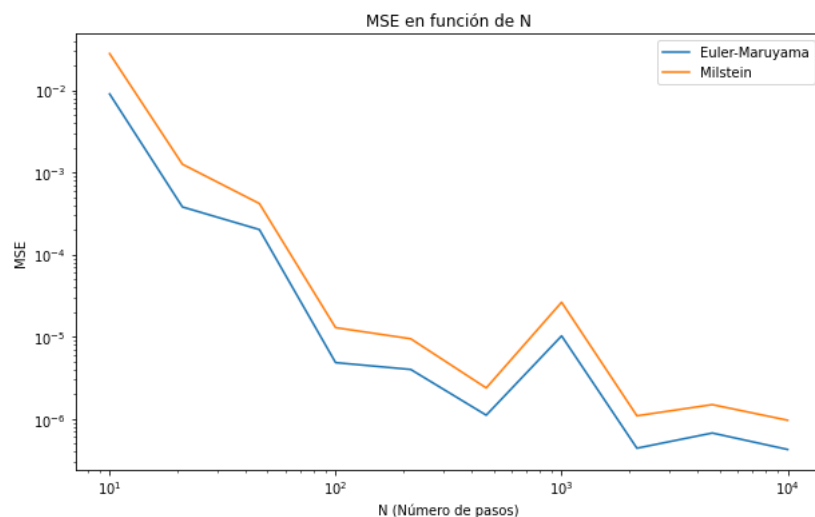


Figura 31: Convergencia del error cuadrático medio

Punto N°2

Considere la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea y la ecuación diferencial estocástica lineal en sentido estricto del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Para ambas ecuaciones demuestre en términos computacionales qué pasa con el valor esperado y la varianza cuando $t \rightarrow \infty$.

Calculemos el valor esperado y la varianza de la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea.

Sea $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ con solución exacta $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t] &= \mathbb{E}\left[S_t = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}\right] = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}[e^{\sigma B_t}] \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{\sigma^2}{2}t} = S_0 e^{\mu t}\end{aligned}$$

Ahora la varianza

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[S_t] &= S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{V}[e^{\sigma B_t}] = S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}[e^{2\sigma B_t}] - \mathbb{E}[e^{\sigma B_t}]^2 \\ &= S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\sigma^2 t} (e^{\sigma^2 t} - 1) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)\end{aligned}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_t] = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{V}[S_t] = \infty$$

Demostremos esto computacionalmente usando los parámetros $\mu = 0,1$ y $\sigma = 0,1$

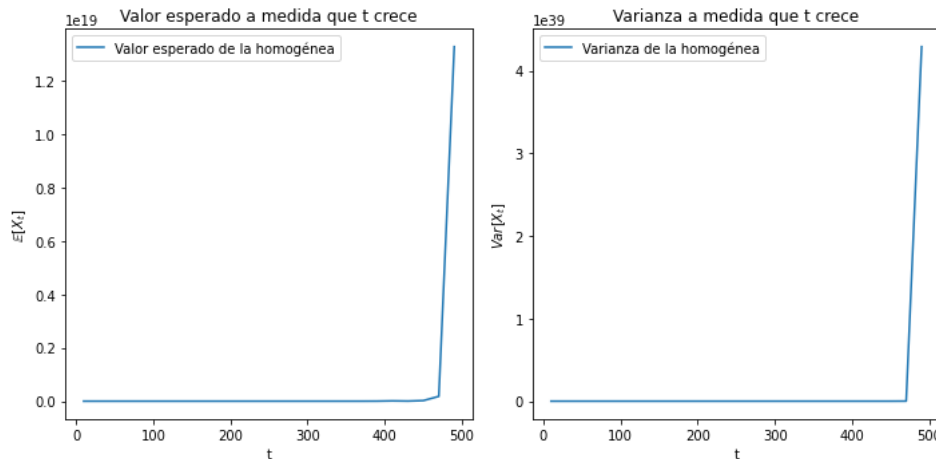


Figura 32: Valor esperado y varianza a largo plazo

Como era esperado ambos valores a medida que t avanza crecen exponencialmente, por lo que su límite cuando $t \rightarrow \infty$ es ∞ .

Siguiendo con la ecuación diferencial estocástica lineal en sentido estricto del tipo Ornstein-Uhlenbeck.

Sea $dS_t = \alpha(\mu - S_t)dt + \sigma dB_t$ con su solución exacta $S_t = S_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} du$

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t} \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{\alpha u} du \right] = S_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t})$$

Ahora la varianza

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[S_t] &= \sigma^2 e^{-2\alpha t} \mathbb{V} \left[\int_0^t e^{\alpha u} du \right] = \sigma^2 e^{-2\alpha t} \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t e^{\alpha u} dB_u \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{\alpha u} dB_u \right]^2 \right) \\ &= \sigma^2 e^{-2\alpha t} \left(\frac{e^{\alpha t} - 1}{2\alpha} \right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \end{aligned}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_t] = \mu \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{V}[S_t] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

Demostremos esto computacionalmente usando los parámetros $\alpha = 0,1, \mu = 0,6, \sigma = 0,4$

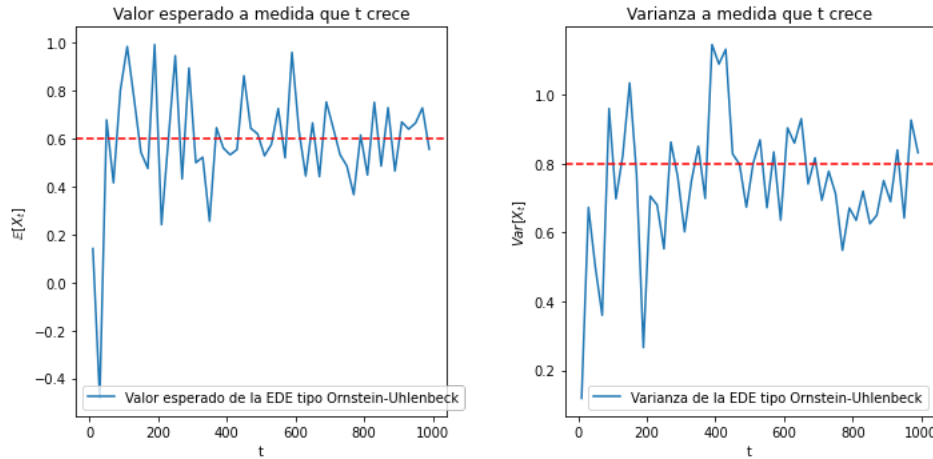


Figura 33: Valor esperado y varianza a largo plazo

Se esperaba que el valor esperado a medida que t crece se asemejara al valor de el parámetro μ , esto se evidencia en la gráfica 34. Del mismo modo con la varianza se esperaba que tomara valores alrededor de 0.8, lo cual es evidente en la gráfica. Al aumentar el tiempo en el que se transcurria la simulación observamos como se mejoran los resultados

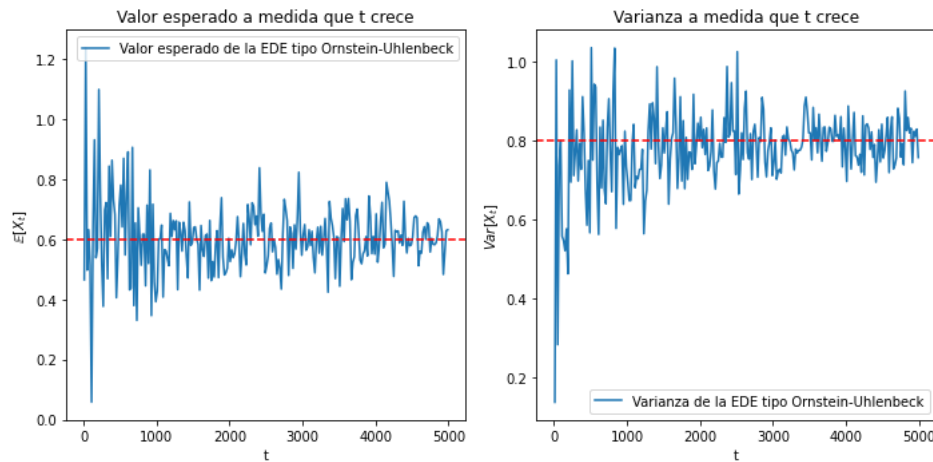


Figura 34: Valor esperado y varianza a largo plazo con un tiempo de simulación mayor

Referencias

- [Allen(2010)] Linda J S Allen. An introduction to stochastic processes with applications to biology. 2010.
- [Fama and French(1988)] Eugene F Fama and Kenneth R French. Dividend yields and expected stock returns. 1988.
- [Gardiner(2009)] Crispin Gardiner. Stochastic methods: a handbook for the natural and social sciences. 2009.
- [Jardine et al.(2006)]Jardine, Lin, and Banjevic] Andrew K S Jardine, Daming Lin, and Dragan Banjevic. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. 2006.
- [Laird and Ware(1982)] Nan M Laird and James H Ware. Random-effects models for longitudinal data. *Biometrics*, 1982.
- [Oksendal(2013)] Bernt Oksendal. Stochastic differential equations: an introduction with applications. 2013.
- [Ramos(2013)] Salvador Tamarit Ramos. El modelo estocástico de vasicek para la predicción de tipos de interés. 2013.
- [Schwartz(2007)] Stephen E Schwartz. Heat capacity, time constant, and sensitivity of earth's climate system. 2007.
- [Tomek and Robinson(1990)] William G Tomek and Kenneth L Robinson. *Agricultural product prices*. Cornell University Press, 1990.
- [Vasicek(1977)] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. 1977.

[Åström and Wittenmark(2013)] Karl Johan Åström and Björn Wittenmark. Adaptive control. 2013.