



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTRUCTURA MODULAR EN REDES COMPLEJAS  
APLICADAS AL ESTUDIO DE LA DINÁMICA  
TEMPORAL Y ESPACIAL EN FORMACIÓN DE  
PATRONES DE OPINIÓN.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

MIGUEL ÁNGEL SÁNCHEZ CORTÉS

TUTOR

DR. SERGIO ANTONIO ALCALÁ CORONA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2024

*A mi madre y a mi padre, por darme alas para volar.*

*Al amor de mi vida, con quien quiero volar siempre.*

*A mi hermana, a quien voy a enseñar a volar.*

# Agradecimientos

A mi mamá, por ser mi mejor amiga y compañera de vida durante todos estos años, por enseñarme el significado del amor incondicional y por siempre creer en mí antes que nadie.

A mi papá, por siempre ayudarme a levantar hasta en los peores momentos, empujarme a dar lo mejor de mí y enseñarme el valor que tiene hacer las cosas que te gustan con pasión.

A mi abuelito y abuelita, por ser mis segundos papá y mamá, haberme cuidado como si fuera un hijo más y haber estado siempre a mi lado para aconsejarme, apoyarme y apapacharme.

A Gloria, el amor de mi vida, por regalarme un día a día lleno de luz y amor, por hacerme siempre sentir en casa aún estando tan lejos de ella y por querer compartir la vida conmigo, espero para siempre.

También a todos los amigos que hice durante estos años, en especial a Vale, Germán y Tania, sin los cuales esta carrera no hubiera sido posible. A mis hermanos, José Juan, Rodrigo y Toño, que me han acompañado desde hace muchos años. A Regina, Lore, Ferssie y Mon, que ocupan un lugar especial en mi corazón. Y también a Kitty, supervisora incansable de este proyecto desde el primer día.

Por otra parte, agradezco a mi asesor, el Dr. Sergio Antonio Alcalá, por la paciencia, los consejos y todas las pláticas que llevaron a la conclusión de este proyecto. Al Dr. Luis Enrique Correa por ser mi segundo asesor y haberme abierto las puertas de su equipo para idear este proyecto y por las horas de discusión detrás de él. A los profesores que forjaron mi carrera y mi pasión por la Física y los Sistemas Complejos, el Prof. Jesús Flores Téllez, el Dr. Gerardo García Naumis y el Dr. Víctor Romero Rochín.

# Abstract

The Eurovision Song Contest (ESC) represents a unique and important example of an annual exchange of opinions among the participating countries of the European Union. The study of this contest has gained interest over the years as there is evidence of the formation of voting groups within the contest, the existence of which may reflect the sentiment or opinion that each of the participating countries has towards the others, outside of any economic or governmental bias.

In this work, we study the voting networks of the ESC from 2016 to 2023 using the Complex Networks framework. We characterize the voting groups that form within the contest as communities of countries that are strongly connected and persist over time. Additionally, we propose two models for predicting votes in the ESC and analyze the influence of these voting groups on predicting the contest's results.

We found evidence of a significant modular structure in the voting networks of the ESC when votes have a high value (greater than or equal to 8 points) and of the formation of time-persistent voting groups when the vote is high and given by the public. Some of the voting blocs identified in this work replicate the results of previous studies, such as the *quasi-Nordic* bloc formed by Denmark, Norway, Finland, Iceland, Estonia, and Sweden, and the *quasi-Mediterranean* bloc formed by Albania, Switzerland, and Italy. Furthermore, the influence of the voting groups within the ESC was found to be insufficient to predict its results using the proposed prediction models.

# Resumen

El Concurso de la Canción de Eurovisión (ESC) representa un ejemplo único e importante de intercambio anual de opiniones entre los países participantes de la Unión Europea. El estudio de este concurso ha ganado interés a lo largo de los años, pues existe evidencia de la formación de grupos de votación dentro del concurso, cuya existencia puede ser reflejo del sentimiento u opinión que cada uno de los países participantes tiene hacia los demás, al margen de cualquier sesgo económico o gubernamental.

En este trabajo, estudiamos las redes de votación del ESC durante el periodo 2016-2023 bajo el paradigma de las Redes Complejas. Caracterizamos los grupos de votación que se forman dentro del concurso como comunidades de países que están fuertemente conectados entre sí y cuyas conexiones persisten en el tiempo. Además, proponemos dos modelos para predecir votos en el ESC y analizamos la influencia de estos grupos de votación en la predicción de los resultados del concurso.

Se encontró evidencia de una estructura modular significativa en las redes de votación del ESC cuando los votos tienen un valor alto (mayor o igual a 8 puntos) y de la formación de grupos de votación persistentes en el tiempo cuando el voto es alto y otorgado por el público. Algunos de los bloques de votación identificados en este trabajo replican los resultados de estudios previos, como el bloque *cuasi-nórdico* formado por Dinamarca, Noruega, Finlandia, Islandia, Estonia y Suecia, y el bloque *cuasi-mediterráneo* formado por Albania, Suiza e Italia. Además, se encontró que la influencia de los grupos de votación dentro del ESC no es suficiente para predecir sus resultados utilizando los modelos de predicción propuestos.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Física y Sistemas Complejos . . . . .	1
1.1.1. Auto-organización en un Sistema Complejo . . . . .	2
1.1.2. Redes Complejas . . . . .	3
1.2. La Sociedad Europea como un Sistema Complejo . . . . .	4
1.2.1. El Concurso de la Canción de Eurovisión . . . . .	6
1.3. Objetivo y el trabajo de investigación . . . . .	7
1.3.1. Objetivos y la pregunta de investigación . . . . .	8
1.3.2. Organización del trabajo . . . . .	9
<b>2. Ciencia de Redes</b>	<b>10</b>
2.1. Formalismo Matemático . . . . .	10
2.1.1. La Matriz de Adyacencia . . . . .	11
2.1.2. Redes con Pesos . . . . .	12
2.1.3. Redes Multi-capas y Temporales . . . . .	14
2.2. Propiedades y Métricas en Redes . . . . .	15
2.2.1. El Grado y la Distribución de Grado . . . . .	15

2.2.2. Coeficiente de Clustering . . . . .	18
2.2.3. Reciprocidad . . . . .	20
2.3. Modelos de Redes . . . . .	21
2.3.1. Red Aleatoria . . . . .	22
2.3.2. Modelo de Configuración . . . . .	25
2.4. Modularidad en Redes . . . . .	27
2.4.1. Homofilia y Asortatividad en Redes . . . . .	28
2.4.2. Medida de Modularidad $Q$ . . . . .	30
2.4.3. Método de Detección de Módulos de Louvain . . . . .	32
2.4.4. Método de Infomap . . . . .	35
<b>3. Metodología para Encontrar Patrones de Opinión</b> . . . . .	<b>40</b>
3.1. Las Redes de Votación del Eurovisión . . . . .	41
3.1.1. Formato del Concurso de la Canción de Eurovisión . . . . .	41
3.1.2. Construcción de Las Redes de Votación . . . . .	44
3.1.3. El Modelo de Configuración Dirigido . . . . .	47
3.1.3.1. Clustering en las Redes de Votación . . . . .	49
3.1.3.2. Reciprocidad en las Redes de Votación . . . . .	50
3.1.3.3. Asortatividad de Grado en las Redes de Votación . . . . .	51
3.2. Estructura Modular en las Redes de Votación . . . . .	52
3.2.1. Detección de Comunidades en las Redes de Votación . . . . .	52
3.2.1.1. Método de Louvain . . . . .	53
3.2.1.2. Método de Infomap . . . . .	54
3.2.2. Análisis de Clusters en las Redes de Votación . . . . .	55
3.2.2.1. La Matriz de Frecuencias . . . . .	58
3.2.2.2. Clustering Jerárquico Aglomerativo . . . . .	59
3.2.2.3. Distancia entre Clusters . . . . .	61
3.2.2.4. La Matriz de Distancia entre Países . . . . .	62
3.3. Simulación de la Votación . . . . .	63

3.3.1. Las Redes Multiplex de Votación . . . . .	64
3.3.2. Simulación del Eurovisión 2023: Primer Método . . . . .	65
3.3.3. Simulación del Eurovisión 2023: Primer Método + Ruido . . . . .	68
3.3.4. Simulación del Eurovisión 2023: Método de Comunidades . . . . .	69
3.3.5. Precisión de las Simulaciones . . . . .	71
3.3.5.1. El Índice de Brier . . . . .	71
3.3.5.2. El Índice de Habilidad de Brier . . . . .	72
<b>4. Resultados</b>	<b>75</b>
4.1. Las Redes de Votación del Eurovisión . . . . .	75
4.1.1. El Modelo de Configuración Dirigido . . . . .	76
4.1.1.1. Coeficiente de Clustering . . . . .	78
4.1.1.2. Reciprocidad . . . . .	79
4.1.1.3. Asortatividad de Grado (In-Degree) . . . . .	81
4.2. Estructura Modular en las Redes de Votación . . . . .	82
4.2.1. Detección de Comunidades en las Redes de Votación . . . . .	82
4.2.1.1. Método de Louvain . . . . .	82
4.2.1.2. Método de Infomap . . . . .	84
4.2.2. Análisis de Clusters en las Redes de Votación . . . . .	85
4.2.2.1. La Matriz de Frecuencias . . . . .	85
4.2.2.2. Grupos de Votación en el Eurovisión . . . . .	87
4.3. Simulación de la Votación . . . . .	92
4.3.1. Votación del Jurado . . . . .	93
4.3.2. Votación del Público . . . . .	94
<b>5. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Apéndice de Teoría</b>	<b>A</b>
A.1. El Vector de Entrenamiento . . . . .	A

## *ÍNDICE GENERAL*

VIII

<b>B. Apéndice de Algoritmos</b>	<b>C</b>
B.1. Modelo de Configuración Dirigido . . . . .	C
B.2. Detección de Comunidades . . . . .	D
B.3. Clustering Jerárquico . . . . .	E
B.4. Simulación de la Votación . . . . .	F
<b>C. Apéndice de Tablas</b>	<b>G</b>
C.1. Simulación: Primer Método . . . . .	G
C.2. Simulación: Método de Comunidades (Louvain) . . . . .	I
C.3. Simulación: Método de Comunidades (Infomap) . . . . .	K
<b>D. Apéndice de Figuras</b>	<b>N</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>XI</b>

# Índice de figuras

1.1. Auto-organización en el Modelo XY. . . . .	2
1.2. Red de Co-aparición de Personajes en la Novela <i>Les Misérables</i> . . . . .	4
1.3. Red de Votación para el Concurso de la Canción de Eurovisión (2021). . . . .	5
2.1. Ejemplos de Redes No-Dirigidas y Dirigidas. . . . .	11
2.2. Ejemplos de Redes con Pesos No-Dirigidas y Dirigidas. . . . .	13
2.3. Redes Multi-capas y Multiplex. . . . .	14
2.4. Red y su Distribución de Grado . . . . .	16
2.5. Red Metabólica . . . . .	18
2.6. Clustering Local de un Nodo. . . . .	19
2.7. Reciprocidad en una Red. . . . .	21
2.8. Redes Aleatorias para $p = 0$ y $p = 1$ . . . . .	22
2.9. Distribución de Grado para una Red Aleatoria . . . . .	24
2.10. Modelo de Configuración. . . . .	25
2.11. Red con Estructura Modular. . . . .	28
2.12. Redes Asortativas y Disasortativas . . . . .	29
2.13. Modularidad en la Red de Club de Karate. . . . .	32
2.14. Visualización del Algoritmo de Louvain. . . . .	33
2.15. Algoritmo de Louvain en la Red de Club de Karate. . . . .	35
2.16. Método de Infomap. . . . .	37
2.17. Método de Infomap en la Red de Club de Karate. . . . .	39

3.1. Etapas del Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	42
3.2. Sistema de Votación del Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	43
3.3. Construcción de las Redes de Votación . . . . .	46
3.4. Modelo de Configuración Dirigido. . . . .	48
3.5. Construcción de las Redes de Votación (sin dirección). . . . .	53
3.6. Detección de Módulos en Redes Temporales. . . . .	57
3.7. Algoritmo de Clustering Jerárquico. . . . .	60
3.8. Medidas de Distancia. . . . .	61
3.9. Red Multiplex de Votación con Pesos. . . . .	65
3.10. Algoritmo de Simulación del Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	67
4.1. Distribución de grado $P(k)$ para la red de votos altos del público del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023. . . . .	77
4.2. Coeficiente de Clustering para las Redes de Votación y el Modelo de Configuración. . . . .	78
4.3. Reciprocidad para las Redes de Votación y el Modelo de Configuración. . . . .	80
4.4. Asortatividad de Grado para las Redes de Votación y el Modelo de Configuración. . . . .	81
4.5. Modularidad $Q$ para la partición óptima de las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	83
4.6. <i>Codelength L</i> para la partición óptima de las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	84
4.7. Matriz de Frecuencias para Redes de Votos Altos del Público del Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	86
4.8. Clusters de Países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión (Votos Altos del Público). . . . .	88
4.9. Mapa de los Grupos de Votación en el Concurso de la Canción de Eurovisión (Método de Louvain). . . . .	91

D.1. Comunidades obtenidas para la Red de Votos altos del Público para el Concurso de la Canción de Eurovisión 2021 (Método de Louvain).	N
D.2. Comunidades obtenidas para la Red de Votos altos del Público para el Concurso de la Canción de Eurovisión 2022 (Método de Infomap).	Ñ
D.3. Matriz de Frecuencias para Redes de Votos Altos del Jurado del Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	O
D.4. Clusters de Países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión (Votos Altos del Jurado). . . . .	P
D.5. Mapa de los Grupos de Votación en el Concurso de la Canción de Eurovisión (Método de Infomap). . . . .	Q

# Índice de tablas

4.1. Propiedades de las Redes de Votación para el Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	75
4.2. Clusters de Países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión. . . . .	90
4.3. Resultados del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 (Top 5). . . . .	93
4.4. Índice de Habilidad de Brier para los Votos del Jurado . . . . .	94
4.5. Índice de Habilidad de Brier para los Votos del Público . . . . .	95
C.1. Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Primer Método con $\alpha = 0$ . . . . .	G
C.2. Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Primer Método con $\alpha = 0.1$ . . . . .	H
C.3. Resultados de la Simulación para los Votos del Público usando el Primer Método con $\alpha = 0$ . . . . .	H
C.4. Resultados de la Simulación para los Votos del Público usando el Primer Método con $\alpha = 0.1$ . . . . .	I
C.5. Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Método de Comunidades (Louvain) con $\alpha = 0$ . . . . .	I
C.6. Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Método de Comunidades (Louvain) con $\alpha = 0.1$ . . . . .	J
C.7. Resultados de la Simulación para los Votos del Público usando el Método de Comunidades (Louvain) con $\alpha = 0$ . . . . .	J

C.8. Resultados de la Simulación para los Votos del Pùblico usando el Método de Comunidades (Louvain) con $\alpha = 0.1$ . . . . .	K
C.9. Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Método de Comunidades (Infomap) con $\alpha = 0$ . . . . .	K
C.10. Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Método de Comunidades (Infomap) con $\alpha = 0.1$ . . . . .	L
C.11. Resultados de la Simulación para los Votos del Pùblico usando el Método de Comunidades (Infomap) con $\alpha = 0$ . . . . .	L
C.12. Resultados de la Simulación para los Votos del Pùblico usando el Método de Comunidades (Infomap) con $\alpha = 0.1$ . . . . .	M

# Índice de algoritmos

- |    |  |   |
|----|--|---|
| 1. | <b>Modelo de Configuración Dirigido.</b> . . . . .                             | C |
| 2. | <b>Medición de las propiedades para el Modelo de Configuración Dirigido.</b> D | D |
| 3. | <b>Algoritmo de Louvain.</b> . . . . .   | D |
| 4. | <b>Algoritmo de Infomap.</b> . . . . .   | E |
| 5. | <b>Algoritmo de Clustering Jerárquico Aglomerativo.</b> . . . . .              | E |
| 6. | <b>Algoritmo de Simulación de la Votación del Eurovisión.</b> . . . . .        | F |

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Física y Sistemas Complejos

Un sistema complejo consiste en una colección de elementos con propiedades internas y que interactúan de forma no lineal entre si. Dichos elementos constituyentes, modifican el estado de sus propiedades debido a un intercambio de energía o información con los demás elementos del sistema o bien con el entorno, lo que puede modificar fácilmente su estructura interna y sus patrones de actividad. Como consecuencia de esta dinámica, aparecen comportamientos colectivos globales que no están regidos por ningún factor central o externo, ni están plasmados en las características individuales de cada elemento, sino que emergen a partir de las propias interacciones internas del sistema.

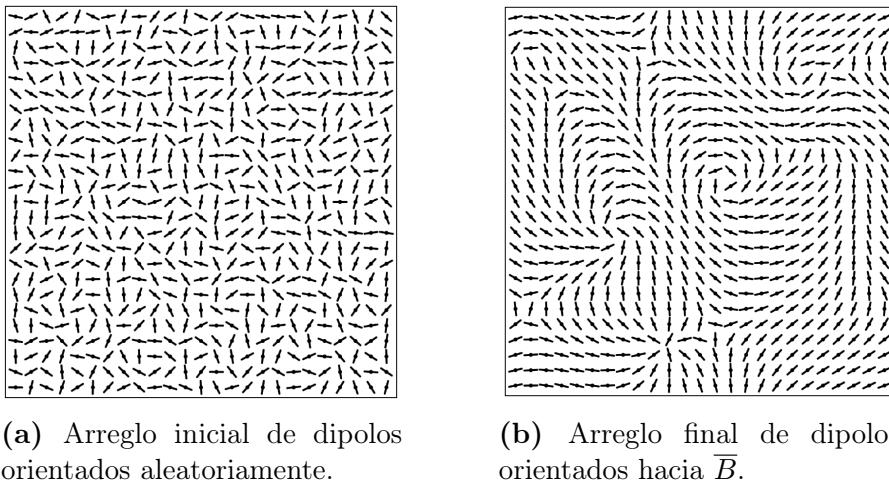
La definición anterior tiene la ventaja de que toma en cuenta las propiedades físicas más características de la estructura y la dinámica de los sistemas complejos, lo que conduce a su uso más amplio en física. De esta manera, la teoría y metodología de la física en general, resulta útil y muy adecuada para abordar el análisis de sistemas complejos, donde se han desarrollado diversas técnicas, dependiendo del tipo de sistema, las escalas que presente, y del tipo de comportamiento que se quiera estudiar [1]. Algunos ejemplos son: la dinámica no lineal y el análisis de redes [2], que han ayudado a describir algunos aspectos en sistemas

sociales como por ejemplo la emergencia de patrones asociados a opiniones.

### 1.1.1. Auto-organización en un Sistema Complejo

Los sistemas complejos, a pesar de estar construidos de distintos elementos a nivel microscópico, pueden exhibir patrones macroscópicos y un comportamiento muy similar entre sí. Algunos de estos comportamientos, o propiedades, pueden ser considerados manifestaciones de universalidad de los fenómenos físicos que son representados por dichos sistemas, aunque esto aún es un problema abierto en el estudio de la Física de los Sistemas Complejos.

Una de las propiedades que distinguen a los Sistemas Complejos de otros sistemas físicos es la *auto-organización* [1]. Dicha propiedad consiste en un proceso continuo de modificación de la estructura y dinámica interna de un sistema tal que surge orden espontáneamente en el sistema y la complejidad en el mismo aumenta. Este fenómeno es particularmente notorio en sistemas biológicos y sociales, pues la cooperación entre agentes de dichos sistemas contribuye a la formación de diferentes niveles de organización.



**Figura 1.1: Auto-organización en el Modelo XY<sup>1</sup>.** (a) Antes de comenzar el experimento, los dipolos magnéticos están orientados aleatoriamente. (b) La orientación de cada dipolo  $n$  está cuantificada por una variable angular  $\theta_n \in [0, 2\pi]$  y al iniciar el experimento, cada dipolo interactúa con sus ocho vecinos más cercanos alineando su orientación hacia la dirección del campo magnético promedio  $\bar{B}$  de los mismos.

En la Figura 1.1 se puede observar un ejemplo de auto-organización en un sistema físico dado por una simulación del *Modelo XY* de la Física Estadística. Este modelo consiste en un arreglo bi-dimensional de dipolos magnéticos orientados inicialmente de manera aleatoria que pueden rotar libremente alrededor de su centro de masa y se alinean con el campo magnético promedio  $\bar{B}$  que los rodea. Esto sucede al mismo tiempo para todo el sistema. Al iniciar el experimento, todos los dipolos rotan de tal forma que surgen regiones de orientación similar tales que todos los dipolos están alineados de manera aproximada. Es decir, surge orden espontáneamente en el sistema.

### 1.1.2. Redes Complejas

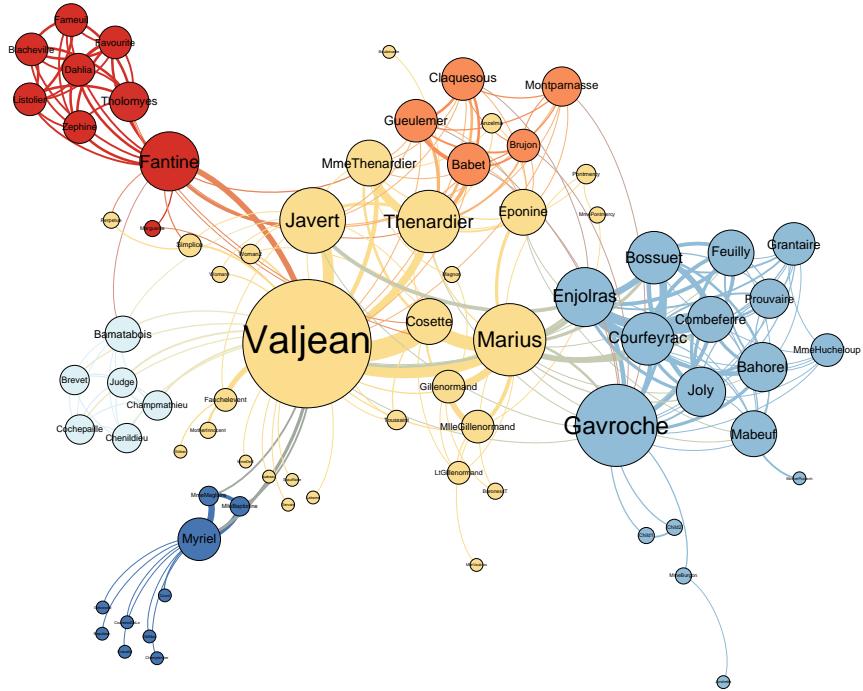
Dentro del estudio de sistemas complejos, tal vez el campo que ha crecido más recientemente, es el estudio de redes complejas [3–7], el cual, más allá de un tema de interés o una herramienta más, se ha convertido en un objeto de estudio en si, particularmente en revistas de Física [8–12]. Desde el inicio del presente siglo XXI, ha surgido un movimiento sustancial en la investigación de redes, debido a la reciente posibilidad de reunir y analizar datos a gran escala a través de computadoras cada vez más potentes y bases de datos cada vez más grandes [13–16]. Lo anterior, ha abierto la puerta a poder estudiar cada vez más sistemas complejos de interés científico, que se pueden representar y modelar como redes.

Así, el estudio derivado de la teoría de gráficas, se ha fortalecido con las ideas y herramientas propias de la Física Estadística [3, 17–21], que han ayudado a capturar y modelar de una manera formal, las propiedades estadísticas de gran escala (propiedades macroscópicas) de las redes, logrando entender mejor las propiedades globales que emergen a partir de las individuales y cómo la *estructura* de la red [5, 22–24], afecta la función y *dinámica* [25, 26] de los sistemas complejos que representan. De esta manera, el estudio de redes complejas ha abierto su propio campo de estudio, conocido hoy en día como Ciencia de Redes o *Network Science* en inglés [27–33].

---

<sup>1</sup>Simulación e imágenes obtenidas del proyecto *Complexity Explained* [34].

Existen muchos ejemplos de redes, ya sean redes sociales o biológicas, una red puede ser definida en casi cualquier sistema que esté formado por elementos que interactúan entre sí. Por ejemplo, en la Figura 1.2 se puede observar un ejemplo de una red social: la red de co-aparición en la obra *Les Misérables* de Victor Hugo.



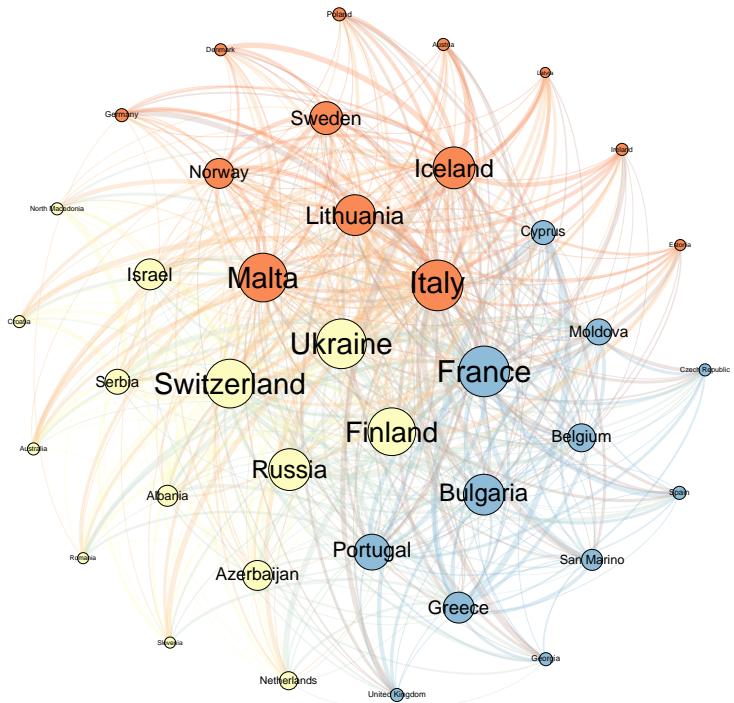
**Figura 1.2: Red de Co-aparición de Personajes en la Novela *Les Misérables***<sup>2</sup>. Cada nodo es un personaje y los enlaces son las co-apariciones entre cada uno de ellos durante la obra, donde el grosor indica la frecuencia con que cada co-aparición sucede. A su vez, el tamaño de los nodos es proporcional a su grado (sección 2.2.1) y el color indica las comunidades (sección 2.4) en la red.

## 1.2. La Sociedad Europea como un Sistema Complejo

La sociedades de las diferentes naciones del continente europeo parecen exhibir muchas de las características que definen a un Sistema Complejo [37]. Dicho sistema puede modelarse como una red de muchos países (véase la Figura 1.3) cuyas interacciones dependen tanto

<sup>2</sup>Visualización de la red creada con *Gephi* [35] creando la red de co-aparición utilizando datos obtenidos por D.E. Knuth [36].

de la geografía como de la historia entre cada uno de ellos, es decir, las interacciones entre estos países son no-locales tanto en el espacio como en el tiempo. A su vez, dicho sistema es un sistema auto-organizado, pues gracias a la toma de decisiones colectiva entre muchos de los países, el continente presenta una estructura independiente de los agentes externos que aparecen en la escala global, y también, ha presentado a lo largo de la historia fenómenos emergentes como las Guerras Mundiales o el llamado *Brexit* [38], cuyas apariciones no podrían haber sido predichas simplemente por las interacciones entre los mismos países.



**Figura 1.3: Red de Votación para el Concurso de la Canción de Eurovisión (2021)<sup>3</sup>.** Cada nodo es un país participante y los enlaces son los votos entre cada uno de ellos durante la final del concurso, donde el grosor indica el puntaje de dichos votos. A su vez, el tamaño de los nodos es proporcional a su grado 2.2.1 y el color indica las comunidades 2.4 en la red.

Gracias a estos fenómenos, así como a muchos otros que han surgido a través de la historia; y a pesar de que algunos de los gobiernos e industrias europeas podrían estar interesadas en

---

<sup>3</sup>Visualización de la red creada con *Gephi* [35] utilizando datos obtenidos de una base de datos del Concurso de la Canción de Eurovisión [39]

fortalecer lazos o formar alianzas con otros países miembros del mismo continente (un ejemplo puede ser la creación de la Unión Europea); la opinión popular está llena de prejuicios y a veces, las diferencias o afinidades entre los países miembros del continente europeo, llevan a estructuras que difieren en gran medida con la visión concebida por los gobiernos o por las industrias de cada país.

La discusión anterior nos lleva a hacernos una pregunta interesante: ¿Qué fenómeno podríamos medir para poder examinar la afinidad de un país hacia cualquier otro y su persistencia con el tiempo? El fenómeno ideal, como se busca en las ciencias exactas, tendría que ser transparente, cuantificable y repetible, lo que implica que tendríamos que repetir el mismo experimento en todos los países, bajo las mismas condiciones por un número significativo de años. A su vez, dicho fenómeno no tendría que depender de asuntos comerciales o políticos y tendría que ser algo universal y entendible para cualquier miembro de la población de cada país de tal manera que no dependa del lenguaje, clase social o educación de un individuo y capture el sentimiento y carácter individual de cada país en un instante de tiempo.

### 1.2.1. El Concurso de la Canción de Eurovisión

Un fenómeno que cumple con las características anteriores, puede ser encontrado en el famoso concurso de música entre los países del continente europeo, conocido como el *Concurso de la Canción de Eurovisión* (o ESC, por sus siglas en inglés). Fundado en 1956 [40], y a pesar de haber sufrido distintos cambios al pasar de los años, el Concurso de la Canción de Eurovisión sigue manteniendo su formato básico hasta la actualidad: cada país participante interpreta una canción y esta canción es calificada por los demás países<sup>4</sup>. Independientemente de su contenido cultural o musical, este concurso representa un ejemplo único e importante de un intercambio anual de opiniones y/o bienes entre los países participantes de la Unión Europea, y a su vez, representa un foro en el cual los países pueden expresar sus opiniones respecto a cada uno de ellos fuera de cualquier sesgo económico o gubernamental.

---

<sup>4</sup>A través de un jurado calificado, y actualmente, también a través del público

En consecuencia, si asumimos, por ejemplo, que una canción puede sonar “bien” o no, entonces debería recibir una magnitud similar de votos de todos los países participantes. Por tanto, cualquier diferencia grande en los patrones de votación podría reflejar algunas *diferencias* sociológicas importantes entre países. Más aún, si asumimos que cada país tiene igual probabilidad de producir una canción “agradable al oído”, entonces cualquier sesgo sistemático que surja en los patrones de votación [41] de un país *A* hacia un país *B* nos puede decir algo acerca de la *afinidad* entre estos dos países. En este sentido, la votación en el ESC puede ser visto como el equivalente sociológico del *Índice Big Mac* [42] en Economía, que compara el valor medido de un producto particular entre diferentes países.

El Concurso de la Canción de Eurovisión ha ganado interés a través de los años pues diversos estudios han mostrado evidencia de la formación de grupos o *bloques* de votación dentro del concurso [37, 43, 44] que incluso pueden afectar el resultado final de la votación<sup>5</sup> [41]. Aunque el *por qué* de la formación de estos grupos sigue siendo un tema de investigación abierto, se ha sugerido que estos grupos surgen gracias a aspectos geográficos, culturales o incluso religiosos [45, 46]. A su vez, se ha mostrado que en general la votación del jurado es menos sensible a factores no relacionados con la *calidad* de una canción a comparación de la votación del público [47, 48].

### 1.3. Objetivo y el trabajo de investigación

En este trabajo, se utiliza el formalismo de redes complejas para analizar los patrones de votación del jurado y del público en el Concurso de la Canción de Eurovisión, esto se hace a través del espacio (entre países) y el tiempo (a través de los años). Específicamente, se plantea una metodología para encontrar *grupos de votación* dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión detectando comunidades dentro de sus redes de votación y analizando su

---

<sup>5</sup>Véase la sección 3.1.1 para una explicación detallada del sistema de votación.

evolución a través de un periodo de tiempo. A su vez, se pretende analizar la influencia de estos módulos en los resultados finales del concurso a través de un modelo de predicción del mecanismo de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión.

Es importante mencionar que la metodología utilizada en este trabajo no es exclusiva del problema en cuestión y puede ser aplicada a otro tipo de sistemas que evolucionan en el tiempo; pues el Concurso de la Canción de Eurovisión, en su definición más básica, puede verse como un *conjunto* de entidades intercambiando bienes. En otro contexto, ejemplos de estos bienes pueden ser: opiniones (en sociología), comida (en biología), dinero (en economía), etc.

### 1.3.1. Objetivos y la pregunta de investigación

El objetivo principal definido para el trabajo de investigación es: **Identificar módulos en las redes del Concurso de la Canción de Eurovisión a través del tiempo, utilizar esta información para encontrar grupos de votación dentro del concurso y analizar su influencia para poder predecir los resultados finales del mismo.**

Como objetivos particulares, se plantea lo siguiente:

- Construir y analizar las redes del Concurso de la Canción de Eurovisión a través de un periodo de tiempo y comparar sus propiedades con aquellas obtenidas para un modelo de red aleatoria.
- Encontrar módulos en las redes del Concurso de la Canción de Eurovisión a través de un periodo de tiempo y analizar su evolución temporal para caracterizar *grupos de votación* de países cuyas relaciones dentro del concurso persisten con el tiempo.
- Modelar el mecanismo de votación para el Concurso de la Canción de Eurovisión e intentar predecir sus resultados utilizando la información obtenida de las redes de votación y de los grupos de votación previamente encontrados.

De lo anterior, la pregunta principal que se pretende responder mediante el trabajo de investigación es la siguiente: **¿Los módulos encontrados en las redes del Concurso de la Canción de Eurovisión, pueden ayudar a predecir los resultados de dicho concurso?**

### 1.3.2. Organización del trabajo

De esta manera la tesis se divide en cuatro capítulos más. El capítulo 2 del estudio, está dedicado a detallar matemáticamente las definiciones, modelos, y propiedades más importantes de las Redes Complejas, así como detallar los aspectos necesarios para encontrar módulos en redes complejas y algunos de los métodos principales para hacerlo. El lector puede omitir este capítulo y entrar directamente al capítulo 3, donde se expone la propuesta metodológica y usar este capítulo como una referencia (a modo de libro de texto) para entender mejor el capítulo 3.

Así entonces, en el capítulo 3 se expone la metodología propuesta para detectar módulos y analizar la evolución de dichos módulos a través del tiempo en las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión. A su vez, se presenta un modelo del mecanismo de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión para tratar de predecir los resultados de dicho concurso utilizando información de la red y de los módulos previamente encontrados. En el capítulo 4 se exponen y discuten los resultados de aplicar esta metodología a las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión y del modelo de predicción. Finalmente en el capítulo 5 se exponen las conclusiones del proyecto de investigación.

# Capítulo 2

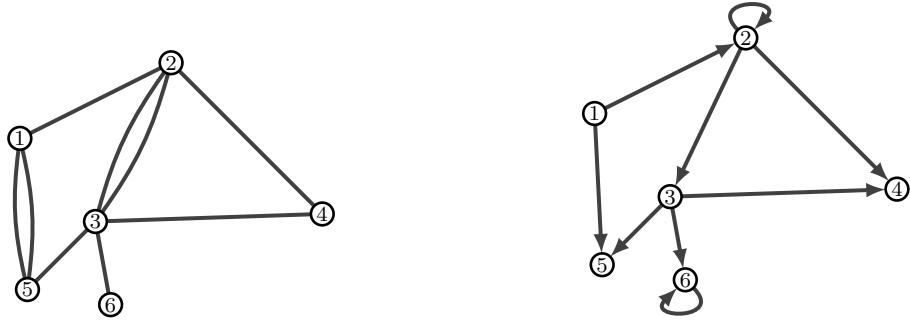
## Ciencia de Redes

### 2.1. Formalismo Matemático

Una red o *grafo*, como se conoce en matemáticas, está definida [7, 29, 33] como una colección de elementos, llamados nodos, conectados por un conjunto de enlaces. Los enlaces de una red pueden ser *dirigidos* o *no-dirigidos* y una red se conoce como *dirigida* cuando todos sus enlaces son dirigidos y *no-dirigida* cuando todos sus enlaces son no-dirigidos.

**Definición 2.1 (Red dirigida/ no-dirigida).** Matemáticamente, una red *no-dirigida* (*dirigida*)  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$  está compuesta por dos conjuntos  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{L}$ , tales que  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  y  $\mathcal{L}$  es un conjunto de pares de elementos de  $\mathcal{N}$ . Los elementos de  $\mathcal{N} \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$  son conocidos como los *nodos* de la red G, mientras que los elementos de  $\mathcal{L} \equiv \{l_1, l_2, \dots, l_K\}$  son conocidos como los *enlaces* de la red. Los números de elementos en  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{L}$  están denotados por  $N$  y  $K$  respectivamente.

En la Figura 2.1 se muestran unos ejemplos sencillos de redes dirigidas y no dirigidas. Como se puede ver, existen redes que contienen mas de un enlace entre el mismo par de nodos, en este caso se dice que la red tiene *multi-enlaces*. A su vez, también existen redes con enlaces que conectan a un nodo con si mismo, en este caso se dice que la red tiene *auto-enlaces*.



(a) Red multi-enlaces no dirigida.

(b) Red con auto-enlaces dirigida.

**Figura 2.1: Ejemplos de Redes No-Dirigidas y Dirigidas.** A una red que no tiene multi-enlaces ni auto-enlaces se le conoce como una red *simple*. A una red con multi-enlaces se le conoce como *multi-red*.

### 2.1.1. La Matriz de Adyacencia

La representación matemática fundamental de una red está dada por su *matriz de adyacencia* [7, 29, 33]  $\mathcal{A}$ , que es una matriz cuadrada de  $N \times N$  cuyas entradas  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) son iguales a 1 cuando el enlace  $l_{ij}$  existe e iguales a 0 en cualquier otro caso. La diagonal de la matriz de adyacencia está compuesta por ceros en el caso de redes simples y por tanto es simétrica para redes sin dirección.

**Definición 2.2 (Matriz de adyacencia).** Formalmente, la matriz de adyacencia  $\mathcal{A}$  de una red dirigida (no-dirigida) está definida como la matriz de  $N \times N$  con elementos  $A_{ij}$  tales que:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si existe un enlace desde } j \text{ a } i \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.1)$$

**Nota:** En el caso de una red no-dirigida, si existe un enlace desde  $j$  a  $i$ , también existe un enlace desde  $i$  a  $j$ , por lo que la definición anterior es válida para ambos casos.

Es posible representar los multi-enlaces y auto-enlaces utilizando la matriz de adyacencia. Un multi-enlace se define estableciendo al elemento de matriz correspondiente  $A_{ij}$  igual a la multiplicidad del enlace. En el caso de los auto-enlaces, para el caso de las redes no-dirigidas,

el elemento diagonal  $A_{ii}$  se establece como 2, pues esencialmente un auto-enlace de  $i$  a  $i$  tiene dos puntas, donde ambas están conectadas al nodo  $i$ . Por estas razones, para el caso de las redes dirigidas, el elemento diagonal  $A_{ii}$  se establece como 1.

**Ejemplo 2.1 (Matrices de adyacencia).** Para exemplificar lo expuesto anteriormente, se pueden construir las matrices de adyacencia correspondientes para las redes de la Figura 2.1:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

**Nota:** Definimos a  $\mathcal{A}$  como la matriz para la red no-dirigida y a  $\mathcal{B}$  como la matriz para la red dirigida.

### 2.1.2. Redes con Pesos

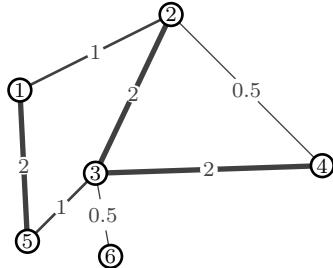
Muchas veces, al modelar sistemas utilizando el formalismo de redes, es necesario otorgar mas importancia a ciertos enlaces sobre otros. A este tipo de redes se les conoce como redes *pesadas* [49, 50] y pueden ser representadas matemáticamente por una matriz de adyacencia  $\mathcal{A}$  con elementos  $A_{ij}$  igual a los *pesos*  $w_i$  que tienen las conexiones correspondientes.

**Definición 2.3 (Matriz de adyacencia con pesos).** Formalmente, la matriz de adyacencia  $\mathcal{A}$  de una red con pesos está definida como la matriz de  $N \times N$  con elementos  $A_{ij}$  tales que:

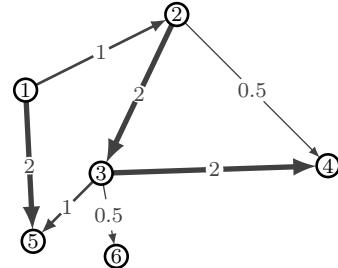
$$A_{ij} = \begin{cases} w_i, & \text{si existe un enlace desde } j \text{ a } i \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.3)$$

**Ejemplo 2.2 (Matrices de adyacencia con pesos).** Para ejemplificar lo expuesto anteriormente, se pueden construir las siguientes matrices de adyacencia, que representan a las redes construidas en la Figura 2.2:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$



(a) Red con pesos no-dirigida.



(b) La misma red con pesos, dirigida.

**Figura 2.2: Ejemplos de Redes con Pesos No-Dirigidas y Dirigidas.** Pueden existir tanto redes dirigidas y no-dirigidas con pesos. Notemos que el ancho de los enlaces de la red son más gruesos o más delgados dependiendo del peso que tiene cada uno de ellos.

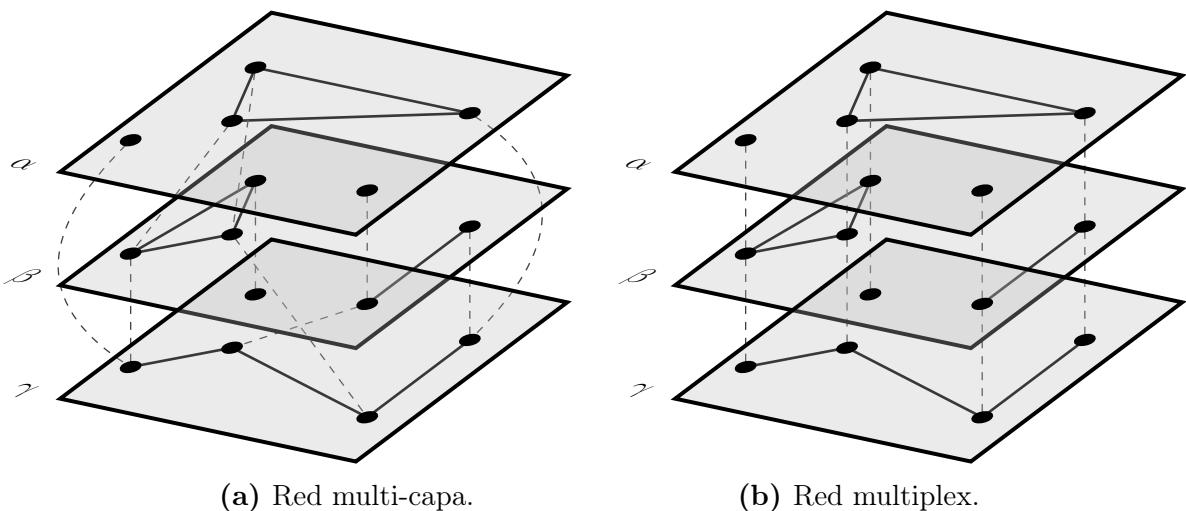
Las redes de la Figura 2.2 pueden ejemplificar cualquier tipo de sistema, por ejemplo, en una red trófica, las interacciones entre depredador y presa pueden tener mas *peso* entre ciertas parejas de animales que en otras, dependiendo de la importancia que tenga la presa para la supervivencia del depredador.

### 2.1.3. Redes Multi-capa y Temporales

En una red compleja, los nodos y los enlaces no necesariamente deben de ser del mismo tipo.

En este caso, la estructura de la red puede ser representada por una *red multi-capa* [51–53], que está definida como un conjunto de redes individuales tales que cada una representa un tipo particular de nodos y sus conexiones. A su vez, los nodos de cada red individual están conectados con nodos de otra red individual a través de enlaces secundarios llamados *intra-enlaces* (véase la Figura 2.3).

Un caso especial importante son las llamadas *redes multiplex*, que ocurren cuando los nodos en cada capa son del mismo tipo. Estas redes representan sistemas donde existe un sólo tipo de nodos, pero más de un tipo de enlace. Un ejemplo de estas redes podría ser una red de transporte, cuyos nodos sean países, pero los enlaces puedan ser viajes en avión, tren o automóvil.



**Figura 2.3: Redes Multi-capa y Multiplex.** Una red multi-capa consiste en un conjunto de capas (en este caso,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ ), donde cada una contiene su propia red, y cuyos nodos están conectados entre sí y con otras capas vía los intra-enlaces (líneas punteadas). Una red multiplex es un caso especial donde los nodos representan el mismo conjunto de objetos en cada capa.

**Definición 2.4 (Red Multi-capa/Multiplex).** Formalmente, una red multi-capa está definida como un par  $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ , donde  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in \{1, \dots, M\}\}$  es una familia de redes  $G_\alpha = (\mathcal{N}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$  (con dirección o sin dirección, con pesos o sin pesos) llamadas capas de  $\mathcal{M}$ , y donde:

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{L}_{\alpha\beta} \subseteq X_\alpha \times X_\beta : \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}, \alpha \neq \beta\} \quad (2.5)$$

es el conjunto de inter-conexiones entre nodos de diferentes capas  $G_\alpha$  y  $G_\beta$ , con  $\alpha \neq \beta$ . Una red multiplex es un caso especial de una red multi-capa donde  $X_1 = X_2 = \dots = X_M = X$  y las únicas inter-conexiones posibles entre nodos son aquellas en la que cada nodo está conectado únicamente consigo mismo en el resto de las capas, i.e.,  $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \{(x, x) : x \in X\} \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}, \alpha \neq \beta$ .

Otro caso especial importante de las redes multi-capa son las *redes dinámicas o temporales*, que son redes cuya estructura cambia a través del tiempo. Estas redes pueden ser utilizadas para modelar redes de epidemias o redes de transporte que evolucionan en el tiempo. En muchos ejemplos, solo los enlaces cambian con el tiempo y no los nodos, por lo que en este caso tendríamos el caso especial de las redes multiplex.

## 2.2. Propiedades y Métricas en Redes

### 2.2.1. El Grado y la Distribución de Grado

Una propiedad clave de cada nodo de una red es su *grado* [7, 29, 33], que representa el número de enlaces que tiene dicho nodo hacia los demás. Por ejemplo, el grado puede representar el número de co-apariciones que tuvo un personaje en la red de la Figura 1.2, o puede representar la cantidad de votos que recibió un país en la red de la Figura 1.3. Formalmente:

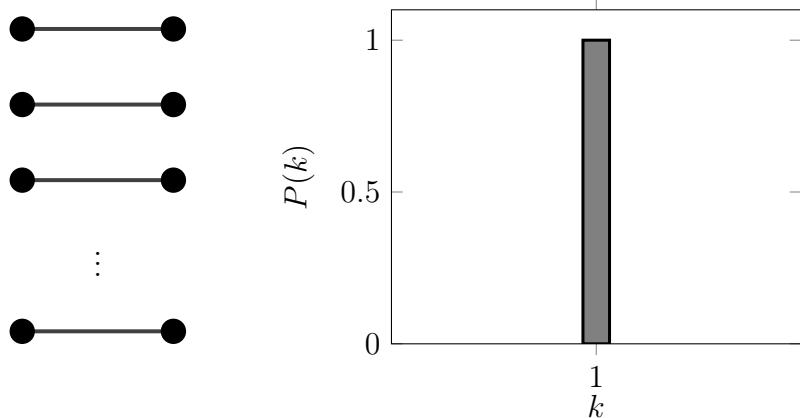
**Definición 2.5 (Grado de un nodo).** El grado  $k_i$  de un nodo  $i$  está definido como el número de enlaces incidentes en dicho nodo. Para una red sin dirección con  $N$  nodos, el

grado puede obtenerse de la matriz de adyacencia de la siguiente manera:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} \quad (2.6)$$

Para una red dirigida, el grado del nodo tiene dos componentes: el número de enlaces que salen del nodo  $k_i^{\text{out}}$ , conocido como el *out-degree* y el número de enlaces que entran al nodo  $k_i^{\text{in}}$ , conocido como el *in-degree*. Por tanto, el grado total del nodo está definido como:  $k_i = k_i^{\text{out}} + k_i^{\text{in}}$ .

A veces es útil pensar no solamente en el grado de un nodo, si no en la *fracción*  $P(k)$  de nodos en la red que tienen un cierto grado  $k$ . Este conjunto de valores es conocido como la *distribución de grado* [7, 29, 33] de la red y nos dice la frecuencia con la que nodos de diferentes grados aparecen en la red. En la Figura 2.4 se puede observar un ejemplo de una red no-dirigida cuya distribución de grado es  $P(k) = 1$  para  $k = 1$  y  $P(k) = 0$  para  $k \neq 1$ .



(a) Red formada por  $n$  pares de nodos. (b) Distribución de grado de la red.

**Figura 2.4: Red y su Distribución de Grado.** En este ejemplo podemos observar una red no-dirigida formada por  $n$  pares de nodos, donde cada nodo tiene grado  $k = 1$ . Esto hace que la probabilidad de que un nodo tenga dicho grado sea  $P(k) = 1$  para  $k = 1$  y  $P(k) = 0$  para  $k \neq 1$ .

**Definición 2.6 (Distribución de grado).** Formalmente,  $P(k)$ , está definida como la probabilidad de que un nodo seleccionado aleatoriamente tenga grado  $k$ . Para una red con  $N$  nodos, la distribución de grado es el histograma normalizado dado por:

$$P(k) = \frac{N_k}{N} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} P(k) = 1, \quad (2.7)$$

donde  $N_k$  es el número de nodos con grado  $k$ .

Para redes dirigidas existen dos tipos de distribuciones de grado: la distribución del *in-degree*,  $P(k^{\text{in}})$ , y la distribución del *out-degree*,  $P(k^{\text{out}})$ , y están definidas para cada caso de la misma manera con la ecuación 2.7. A su vez, al ser  $P(k^{\text{in/out}})$  una probabilidad, podemos calcular el grado promedio de una red de la siguiente forma:

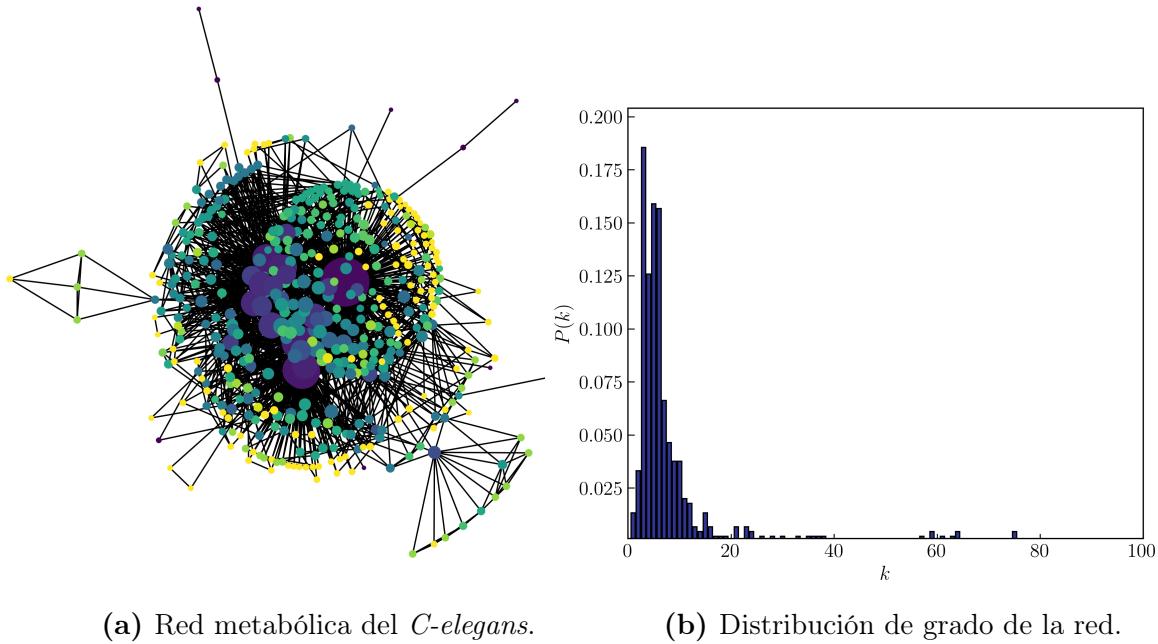
$$\langle k^{\text{in/out}} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k^{\text{in/out}}) \quad (2.8)$$

Normalmente, en una red de “mundo real” con un número de nodos  $N$  grande, los grados cada nodo varían de gran manera, es por eso que a veces es útil hacer una gráfica de la distribución de grado en función de  $k$  de estas redes, para observar de manera general la estructura de dicha red.

En el ejemplo de la Figura 2.5 podemos observar que la mayoría de los nodos en la red tienen un grado  $k < 20$ , lo que implica que la distribución tiene una “cola larga” después de este valor, que corresponde a los nodos con un grado  $k$  muy alto. Esta red tiene  $N = 453$  nodos, y su grado máximo es  $k_{\max} = 237$ , lo que significa que el nodo mejor conectado está conectado al 52 % de nodos de toda la red. A estos nodos con un grado alto de conexión se les conoce como *hubs*.

---

<sup>1</sup>Visualización de la red creada con *NetworkX* [54] utilizando datos obtenidos del repositorio de datos *Network Data Repository* [55].

(a) Red metabólica del *C-elegans*.

(b) Distribución de grado de la red.

**Figura 2.5: Red Metabólica<sup>1</sup>.** En este ejemplo podemos observar una red metabólica no dirigida para el bio-organismo *C-elegans* y su distribución de grado. Cada nodo es un sustrato y los enlaces son reacciones metabólicas. A su vez, el tamaño de los nodos es proporcional a su grado 2.2.1 y el color indica el clustering 2.2.2 para cada nodo.

En general, parece ser que la mayoría de las redes de “mundo real” tienen distribuciones de grado con una cola de *hubs* con valores de  $k$  muy altos como en el ejemplo anterior. Esta propiedad de la distribución de grado puede ser utilizada para caracterizar redes este tipo de redes y también para generar buenos modelos que repliquen la estructura de la red original.

## 2.2.2. Coeficiente de Clustering

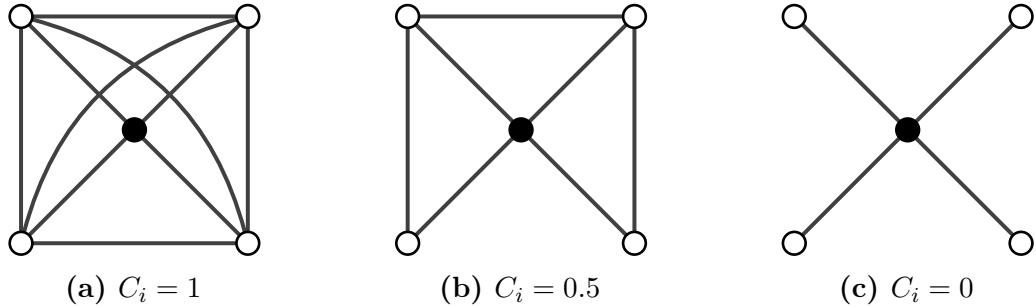
Las redes de “mundo real” en la mayoría de los casos representan sistemas complejos y por tanto, presentan auto-organización. Esta propiedad se observa en la tendencia de dichas redes para formar agrupaciones de nodos fuertemente conectados entre sí dentro de la red. Esta tendencia, llamada en inglés *clustering* [10, 56], puede ser cuantificada por el llamado *coeficiente de clustering*, cuya función es capturar el grado al cual los vecinos de un nodo dado se enlazan uno con otro.

**Definición 2.7 (Coeficiente de Clustering).** Formalmente, para un nodo  $i$  con grado  $k_i$ , podemos definir su coeficiente de clustering *local* de la siguiente manera <sup>2</sup>:

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (2.9)$$

donde  $L_i$  representa el número de enlaces entre los vecinos del nodo  $i$ .  $0 \leq C_i \leq 1$ .

$C_i$  mide la densidad local de enlaces en una red: entre más conectada esté la vecindad de un nodo  $i$ , mayor es su coeficiente de clustering local. En la Figura 2.6 podemos observar un ejemplo de lo que significan los distintos valores de  $C_i$  para una nodo cualquiera:



**Figura 2.6: Clustering Local de un Nodo.** El coeficiente de clustering local,  $C_i$ , para el nodo central mide la densidad de enlaces local para la vecindad de dicho nodo. Cuando  $C_i = 0$ , ninguno de los vecinos del nodo  $i$  (en negro) se enlaza uno con otro. En cambio, cuando  $C_i = 1$ , todos los vecinos del nodo  $i$  están enlazados uno con otro.

El coeficiente de clustering también puede ser obtenido para una red entera calculando el *promedio*,  $C$ , de  $C_i$  para cada nodo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Matemáticamente este promedio es:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i, \quad (2.10)$$

---

<sup>2</sup>A pesar de que esta definición es exclusiva para redes no-dirigidas y sin pesos, se puede generalizar para otro tipo de redes como lo hecho por G. Fagiolo en [56].

puede ser interpretado como la probabilidad de que dos vecinos de un nodo seleccionado aleatoriamente estén conectados entre sí.

Notemos que la red de la Figura 2.5 tiene un valor para el coeficiente de clustering promedio de  $C \simeq 0.646$ . Este valor es alto si lo comparamos con  $C \simeq 0.019$ , que sería el valor de clustering promedio que tendría que tener la red si mantuviéramos la misma cantidad de nodos  $n$  y asumiéramos que la probabilidad de que un nodo esté conectado a otro nodo es la misma para cualquier nodo en la red.

Estos valores altos para  $C$  parecen ser comunes para las redes de “mundo real” y en especial para las *redes sociales* [57, 57],<sup>3</sup> pues en estas redes, es erróneo asumir que todos los nodos tienen la misma probabilidad de estar conectados unos con otros. En cambio, los datos sugieren que la probabilidad de que dos nodos estén conectados es mucho mayor si están conectados a un nodo en común, que si no lo están.

### 2.2.3. Reciprocidad

El coeficiente de clustering definido en la sección anterior 2.2.2 también puede verse como una medida de la frecuencia con la que aparecen *triángulos*<sup>4</sup> en una red. Los triángulos son importantes, sobre todo en una red no-dirigida, porque son el bucle más pequeño que se puede tener en una red (y también el más común). Sin embargo, en redes *dirigidas* este no es el caso, pues se pueden tener bucles de *tamaño* 2, formados por pares de nodos con enlaces dirigiéndose uno hacia el otro. Estos bucles también pueden ser de interés pues la frecuencia con la que aparecen determina la *probabilidad* de que si un nodo apunta hacia otro, el otro apunte también hacia él.

La frecuencia con la que aparecen bucles de *tamaño* 2 en una red dirigida está medida por la *reciprocidad* [7, 58]. La reciprocidad está definida como la fracción de enlaces en una red que

---

<sup>3</sup>Redes cuyos nodos son personas que interactúan entre sí.

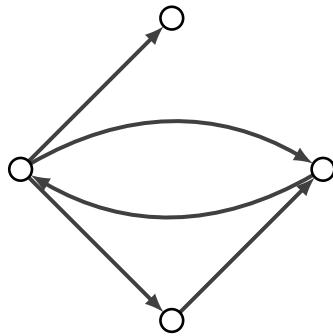
<sup>4</sup>Bucle formados por tres nodos, también llamados bucles de *tamaño* 3.

son *recíprocos*. Decimos que un enlace es *recíproco* si cuando existe un enlace de un nodo  $i$  a un nodo  $j$ , también existe un enlace del nodo  $j$  al nodo  $i$ .

**Definición 2.8 (Reciprocidad).** Formalmente, podemos escribir una expresión para la reciprocidad en términos de la matriz de adyacencia 2.1, de la siguiente manera:

$$r_{\leftrightarrow} = \frac{1}{m} \sum_{ij} A_{ij} A_{ji} = \frac{1}{m} \text{Tr}(\mathcal{A}^2), \quad (2.11)$$

donde  $m$  es el número total de enlaces (dirigidos) en la red y  $\mathcal{A}$  es la matriz de adyacencia.  $0 \leq r_{\leftrightarrow} \leq 1$ . Podemos observar un ejemplo de cómo calcular este valor en la Figura 2.7:



**Figura 2.7: Reciprocidad en una Red.** En esta red existen 5 enlaces dirigidos, de los cuales 2 son recíprocos, es por eso que el valor de  $r_{\leftrightarrow}$  para esta red es  $r_{\leftrightarrow} = 2/5 = 0.4$ . Este valor es similar al obtenido para la red social dirigida de la Figura 1.3, que es de  $r_{\leftrightarrow} \simeq 0.404$ . En este caso, hay un 40 % de probabilidad de que si un país votó por otro, el otro también votará por él.

## 2.3. Modelos de Redes

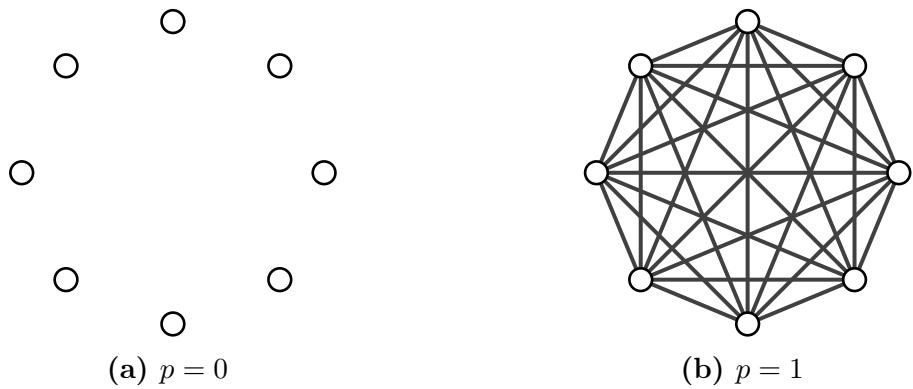
Existe una gran cantidad de modelos de redes complejas que buscan imitar la estructura de una red o los patrones de conexión en la misma. Estos modelos nos permiten crear redes artificiales que sirven fundamentalmente para dos cosas: para entender mejor el *porque* de la estructura de las redes de “mundo real”, es decir, por qué se ven de cierta manera y cuáles son los parámetros que la caracterizan, y para proveer un marco de referencia sobre el cual

podemos entender mejor procesos que suceden en redes, tales como epidemias o mecanismos de búsqueda en internet.

### 2.3.1. Red Aleatoria

Uno de los modelos más simples que se pueden construir para una red compleja es el modelo de *Red Aleatoria*, también conocido como *Modelo de Erdős-Rényi* [7, 59], en honor a los científicos Paul Erdős y Alfréd Rényi. Este modelo consiste en construir una red,  $G(n, p)$ , siguiendo los siguientes pasos:

1. Se define una cantidad  $n$  de nodos aislados (sin conexiones) y una probabilidad  $p$  de que se enlacen unos con otros.
2. Se selecciona un par de nodos aleatoriamente y se conectan con probabilidad  $p$ .
3. Se repite el paso anterior para cada uno de los  $n(n - 1)/2$  pares de nodos.



**Figura 2.8: Redes Aleatorias para  $p = 0$  y  $p = 1$ .** Dentro del modelo de la red aleatoria tenemos dos casos límite: (a) Cuando  $p = 0$ , la red aleatoria no tiene enlaces. (b) Cuando  $p = 1$ , todos los nodos de la red aleatoria están enlazados con todos.

En la Figura 2.8 podemos observar dos ejemplos de redes obtenidas utilizando el procedimiento anterior. Técnicamente, la definición del Modelo de Erdős-Rényi no es en términos de una sola red aleatoria, si no, en términos de un ensamble de redes y la distribución de probabilidad de todas las redes posibles.

**Definición 2.9 (Modelo de Red Aleatoria).** Formalmente,  $G(n, p)$ , es el ensamble de redes simples con  $n$  nodos en los que cada red  $G$  aparece con probabilidad:

$$P(G) = p^m(1 - p)^{\binom{n}{2} - m}, \quad (2.12)$$

donde  $m$  es el número de enlaces en la red.

La red aleatoria  $G(n, p)$ , al ser un modelo muy simple, falla en capturar algunas de las propiedades que tendría una red de “mundo real” con sus mismos parámetros. Particularmente, este modelo difiere drásticamente con estas redes en dos propiedades: *el coeficiente de clustering* 2.7 y *la distribución de grado* 2.6:

Recordemos que el *coeficiente de clustering* de una red es una medida de probabilidad de que dos vecinos de un nodo seleccionado aleatoriamente en dicha red estén conectados entre sí. En una red aleatoria, la probabilidad de que *cualquier* nodo esté conectado con otro es la misma y es igual a  $p$ . Por tanto, el *valor esperado* del coeficiente de clustering para una red aleatoria está dado por <sup>5</sup>:

$$\langle C \rangle = p = \frac{\langle k \rangle}{n - 1}, \quad (2.13)$$

donde  $\langle k \rangle$  es el valor esperado de  $k$  en la red.

Este valor para  $\langle C \rangle$  difiere en gran manera con la mayoría de las “redes de mundo real”, pues mientras que en estas redes los valores de  $\langle C \rangle$  tienden a ser altos, en una red aleatoria, si la red es dispersa (es decir, si  $n \gg \langle k \rangle$ ), la expresión 2.13 tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Un ejemplo de esta diferencia fue mencionado en la sección 2.2.2, pues el coeficiente de cluste-

---

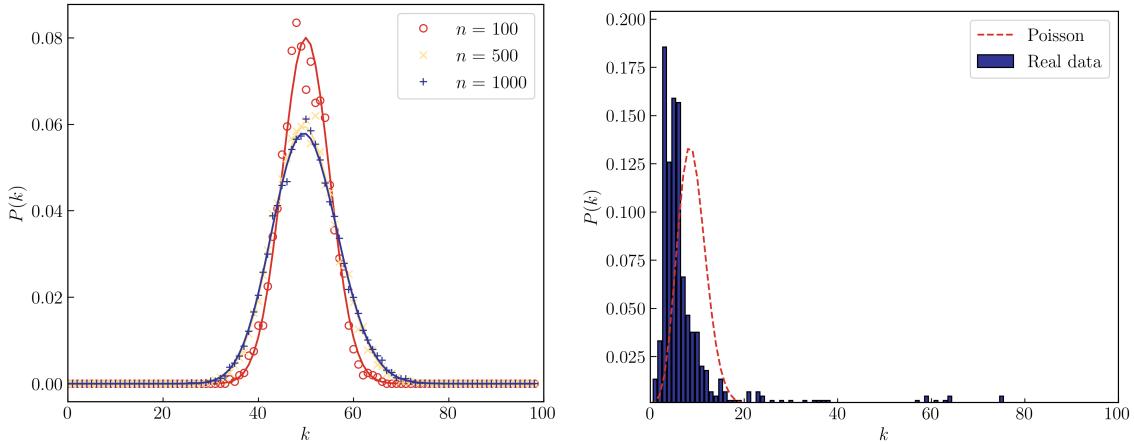
<sup>5</sup>El grado promedio de una red con  $m$  enlaces es  $2m/n$ . Por tanto,  $\langle k \rangle$  para  $G(n, p)$  es:  $\langle k \rangle = \langle \frac{2m}{n} \rangle = \frac{2\langle m \rangle}{n} = \frac{2}{n} \binom{n}{2} p = (n - 1)p$ . Donde se utilizó que  $\langle m \rangle$  para una red aleatoria es simplemente el promedio entre todos los  $\binom{n}{2}$  pares de nodos, es decir,  $\langle m \rangle = \binom{n}{2} p$ .

ring promedio para la red de la Figura 2.5 es  $\langle C \rangle \simeq 0.646$  mientras que para su red aleatoria equivalente,  $\langle C \rangle \simeq 0.019$ .

En el caso de la distribución de grado, se puede obtener de manera directa que en el Modelo de Red Aleatoria,  $k$  se distribuye de manera *binomial*. Es decir,  $G(n, p)$  tiene una distribución de grado binomial cuya expresión se ve de la siguiente manera:

$$P(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \quad (2.14)$$

Para redes dispersas ( $n \gg \langle k \rangle$ ), la expresión 2.14 se puede expandir en Taylor para finalmente tomar el límite  $n \rightarrow \infty$  y obtener una distribución de *Poisson* de la forma  $P(k) \rightarrow e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$ . Esta distribución difiere en gran medida a la que se observaría para una red de “mundo real” (véase Figura 2.9), pues como se discutió en la sección 2.2.1, estas redes normalmente son dispersas y tienen distribuciones de grado de *cola larga*, donde la mayoría de los valores para  $k$  son bajos.



(a)  $P(k)$  para distintas simulaciones de  $G(n, p)$  con  $n = 100, 500, 1000$ . (b)  $P(k)$  para la red de la Figura 2.5 y su distribución de Poisson equivalente.

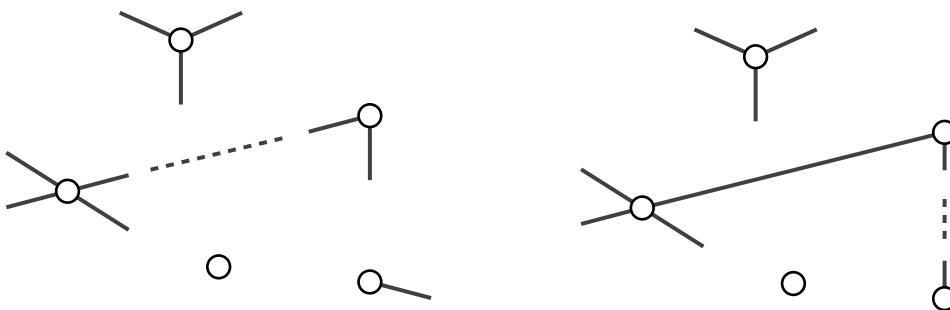
**Figura 2.9: Distribución de Grado para una Red Aleatoria.** (a) Para una red aleatoria,  $P(k)$ , tiende a una distribución de Poisson cuando  $n \rightarrow \infty$ . (b) A su vez, existe una gran diferencia entre la distribución de grado una red de “mundo real” comparada con su distribución de Poisson equivalente si fuera una red aleatoria.

Se puede modificar el Modelo de Red Aleatoria visto anteriormente de tal forma que la distribución de grado de sus nodos no esté restringida a tener una distribución de Poisson. Incluso, es posible modificar dicho modelo de tal forma que la red tenga *cualquier* distribución de grado que se necesite.

### 2.3.2. Modelo de Configuración

El más estudiado de los modelos de red aleatoria con distribución de grado general es conocido como el *Modelo de Configuración* [7, 9]. En este modelo no está determinada la distribución de probabilidad de donde se obtienen los grados para cada nodo, sino que está determinado el grado exacto  $k_i$  de cada nodo individual  $i = 1, \dots, n$  en la red. El proceso para crear una red aleatoria con dicha *secuencia* de grados es el siguiente:

1. Se provee a cada nodo  $i$  en la red con un total de  $k_i$  “medios-enlaces” (o *stubs* en inglés). En total se tienen  $\sum_i k_i = 2m$  stubs en total, donde  $m$  es el número total de enlaces.
2. Se eligen dos stubs de manera aleatoria y se conectan para formar un enlace, como se indica en la Figura 2.10.
3. Se repite el paso anterior para cada uno de los  $2m - 2$  stubs restantes.



(a) Se eligen dos stubs de manera aleatoria. (b) Se conectan para formar un enlace.

**Figura 2.10: Modelo de Configuración.** A cada nodo  $i$  de una red se le asignan  $k_i$  “medios-enlaces” para después unirlos de manera aleatoria hasta que todos los nodos tengan grado  $k_i$ . El resultado del proceso anterior es una posible configuración de enlaces que resulta en una red donde cada nodo tiene una secuencia de grados determinada previamente.

Formalmente, el *Modelo de Configuración* está definido en términos de un *ensamble* de configuraciones de enlaces tales que cada configuración aparece con la misma probabilidad si tiene la secuencia de grados deseada y con probabilidad 0 si tiene una secuencia de grados distinta.

A pesar de ser un modelo de redes más robusto, al igual que el *Modelo de Red Aleatoria*, el Modelo de Configuración tiene algunas particularidades que lo hacen menos satisfactorio como modelo para redes de “mundo real”. Algunas de estas particularidades a tomar en cuenta son las siguientes:

- Debe existir un número *par* de stubs en el modelo si se quiere terminar con una red en la que no existan stubs sobrantes sin enlazar. Matemáticamente, esto quiere decir que la suma  $\sum_i k_i$  de los grados debe resultar en un número par. Esta condición es necesaria para asegurar que el resultado del modelo sea una red con una secuencia de grado determinada, sin embargo, depende de la red que se esté modelando y limita la aplicabilidad de este modelo.
- No existe una condición en el proceso de creación de la red que prevenga a la misma de contener auto-enlaces o multi-enlaces. Esto a su vez limita la aplicabilidad del modelo, pues, a pesar que muchas redes de “mundo real” contienen auto-enlaces o multi-enlaces, la mayoría no. Sin embargo, se puede mostrar que las densidades de auto-enlace y multi-enlace, dadas por las siguientes expresiones<sup>6</sup>:

$$\rho_{\text{auto}} = \frac{1}{2n} \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle} ; \quad \rho_{\text{multi}} = \frac{1}{2n} \left[ \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle} \right]^2 \quad (2.15)$$

tienden<sup>7</sup> a 0 cuando el tamaño de la red  $n \rightarrow \infty$ , lo que implica que siempre y cuando la red sea lo suficientemente larga, los efectos de estos enlaces son despreciables.

---

<sup>6</sup>En estas expresiones se utiliza la definición de *momento* de la distribución de grado:  $\langle k^m \rangle = \frac{1}{n} \sum_i k_i^m$

<sup>7</sup>Siempre y cuando  $\langle k \rangle$  y  $\langle k^2 \rangle$  tengan valores fijos cuando  $n \rightarrow \infty$ .

- Finalmente, al igual que el Modelo de Red Aleatoria 2.3.1, el Modelo de Configuración parece ser un modelo poco prometedor para redes con un coeficiente de clustering alto. Esto se puede observar, pues la expresión para el valor esperado del *coeficiente de clustering* de este modelo, dada por:

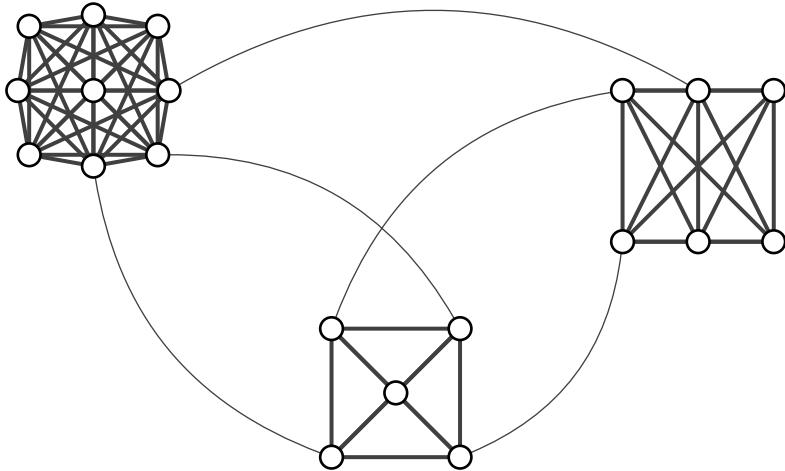
$$\langle C \rangle = \frac{1}{n} \frac{[\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle]^2}{\langle k \rangle^3} \quad (2.16)$$

también tiende a 0 en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  (siempre y cuando  $\langle k \rangle$  y  $\langle k^2 \rangle$  se mantengan fijos). Esto es que, al igual que en el Modelo de Red Aleatoria, si la red es dispersa (es decir, si  $n \gg \langle k \rangle$ ), la expresión 2.16 tiende a tener valores pequeños comparados con los que se esperaría medir en una red real.

Notemos que tanto el Modelo de Red Aleatoria 2.3.1 como el Modelo de Configuración, al ser dos de los modelos para redes más estudiados, pueden generalizarse para redes dirigidas (y otro tipo de redes) de manera muy similar a lo expuesto anteriormente. Sin embargo, por simplicidad, se estudiaron los casos más simples, pues las propiedades más importantes de estos modelos se mantienen incluso para las versiones más generales de los mismos.

## 2.4. Modularidad en Redes

Frecuentemente las redes complejas, en especial las redes sociales, se dividen naturalmente en *módulos* de acuerdo a alguna característica particular del sistema que se esté representando. Estos módulos, o *comunidades*, están definidos como conjuntos de nodos tales que la densidad de enlaces entre los nodos miembros de un mismo módulo es mayor que la densidad de enlaces entre miembros de módulos distintos (véase Figura 2.11). A las redes que presentan este tipo de estructura se les conoce como redes con estructura modular, o *networks with community structure*, en inglés [60–72].



**Figura 2.11: Red con Estructura Modular.** En este ejemplo se puede observar una red compuesta por diferentes *módulos*, tales que cada nodo está fuertemente conectado con los nodos de su mismo módulo, y débilmente conectado con los nodos que pertenecen a un módulo distinto.

La estructura modular es una de las características estructurales (topológicas) más relevantes dentro del estudio de las redes complejas y es ubicua en la mayoría de ellas, como es el claro ejemplo de las redes biológicas o sociales [73–79]. Es por esto que encontrar este tipo de estructura, así como proponer métodos para hacerlo, es uno de los temas abiertos más ampliamente abordados dentro de la física de redes [80–90].

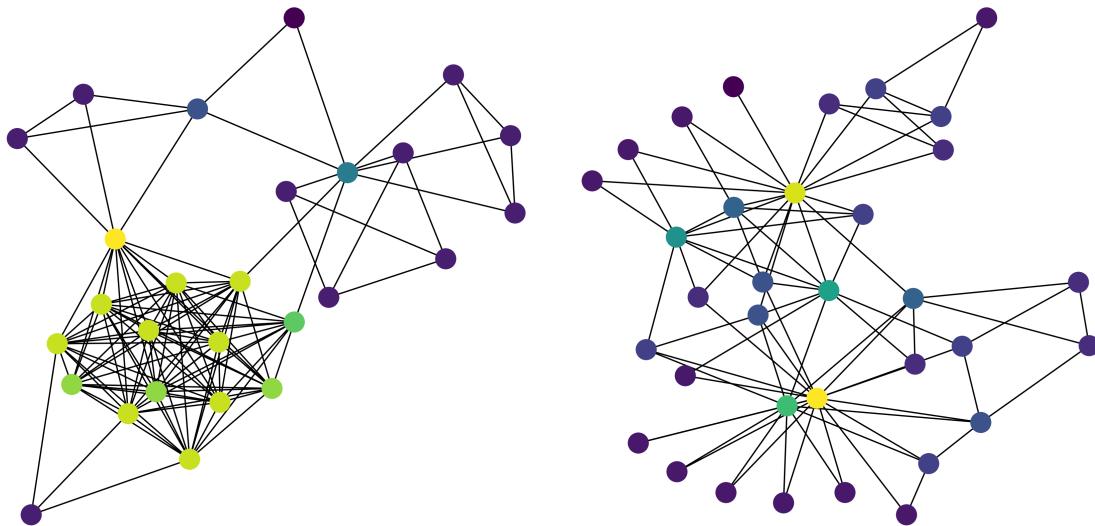
#### 2.4.1. Homofilia y Asortatividad en Redes

Existen muchas explicaciones sobre la aparición de módulos en una red. En especial, los módulos son muy comunes en las redes sociales, pues los actores en estas redes tienden a formar amistades, relaciones, y muchos otros tipos de enlaces dependiendo de casi cualquier característica, como puede ser: la edad, la nacionalidad, el lenguaje, la cultura, etc... Esta tendencia de los actores en una red de asociarse con otros a los que perciben similares o con los que comparten alguna característica en especial es conocida como *homofilia* o *asortatividad* [91,92]<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup>En las redes sociales (y en otro tipo de redes) también puede surgir la *disasortatividad*, que es la tendencia de los actores de una red a asociarse con otros a las que perciben distintos a ellos.

La asortatividad no es una propiedad exclusiva de las redes sociales, puede encontrarse en casi cualquier tipo de red, y es por eso que resulta ser una explicación general y muy convincente de la formación de módulos en las redes complejas. A su vez, cuantificar la asortatividad, ofrece una herramienta importante para poder comprender el surgimiento de la estructura modular en las redes, y sobre todo, para encontrar dichas estructuras dentro de la red.



(a) Asortatividad en una red de interacción entre cebras de la misma especie. (b) Disasortatividad en la Red de Club de Karate de Zachary [93].

**Figura 2.12: Redes Asortativas y Disasortativas<sup>9</sup>.** (a) Una red que es asortativa por grado presenta un núcleo de nodos con grado alto fuertemente conectados (en verde) rodeados por una periferia de nodos con grado bajo (en morado). (b) Una red disasortativa por grado presenta una estructura más uniforme, con nodos de grado alto (en verde) conectados con nodos de grado bajo (en morado).

Existen redes complejas que son asortativas de acuerdo a características *ordenadas*, es decir, características cuantificables como: la edad, el ingreso, el grado (véase la Figura 2.12), etc...

La asortatividad en este caso puede cuantificarse calculando el *coeficiente de correlación* entre

---

<sup>9</sup>Visualización de las redes creada con *NetworkX* [54] utilizando datos obtenidos del repositorio de datos *Network Data Repository* [55].

los valores escalares de alguna característica para cada nodo en la red. Este coeficiente es conocido como el *coeficiente de asortatividad*.

**Definición 2.10 (Coeficiente de Asortatividad).** Formalmente, si  $x_i$  y  $x_j$  son los valores para el nodo  $i$  y el nodo  $j$  de la cantidad escalar que nos interesa (la edad, el ingreso, el grado, etc...) . La asortatividad en una red de acuerdo a esta característica puede cuantificarse con el *coeficiente de asortatividad* [7, 91], dado por la siguiente expresión:

$$r = \frac{\sum_{ij} (A_{ij} - k_i k_j / 2m) x_i x_j}{\sum_{ij} (k_i \delta_{ij} - k_i k_j / 2m) x_i x_j}, \quad (2.17)$$

donde  $A_{ij}$  son las entradas de la matriz de adyacencia,  $k_i$  es el grado del nodo  $i$ ,  $m$  es el número de enlaces en la red, y  $\delta_{ij}$  es la función *delta de Kroenecker*.

La expresión 2.17 está definida de la misma forma que se define el coeficiente de correlación de *Pearson* en estadística [94], pues el numerador es una covarianza y el denominador es una varianza de los valores  $x_i$  y  $x_j$ . Es por esto que el valor de  $r$  varía entre 1 (para una red perfectamente asortativa) y  $-1$  (para una red perfectamente disasortativa). Notemos, por ejemplo, que las redes de la Figura 2.12 tienen valores de  $r \simeq 0.71$  y  $r \simeq -0.47$  respectivamente.

Las redes complejas también pueden ser asortativas de acuerdo a características *sin orden*, como pueden ser: la nacionalidad, la raza, el género, etc... En este caso decimos que una red es asortativa si una *fracción* significativa de enlaces en la red está compuesta por enlaces entre nodos del mismo tipo (o nodos en la misma comunidad).

#### 2.4.2. Medida de Modularidad $Q$

Una manera de cuantificar qué tan significativa es esta fracción de enlaces consiste en calcular la *modularidad*  $Q$  (*modularity*, en inglés) de la red: esta medida, propuesta por Newman *et al.* [80–82], se puede encontrar calculando la *diferencia* entre la fracción de enlaces que

existen dentro de la misma comunidad (enlaces *intra-comunidad*) y el valor esperado de la misma cantidad en una red con las mismas comunidades (*i.e.* la misma *partición*), pero con conexiones aleatorias entre los nodos.

**Definición 2.11 (Modularidad).** Formalmente, si definimos a  $C_i$  como el grupo, clase, o *comunidad* a la que pertenece el nodo  $i$ , con  $C_i = 1, \dots, N$ , y donde  $N$  es el número total de comunidades en la red. Entonces, también podemos definir a la medida de *modularidad*  $Q$  de la red de la siguiente manera:

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left[ A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \delta(C_i, C_j), \quad (2.18)$$

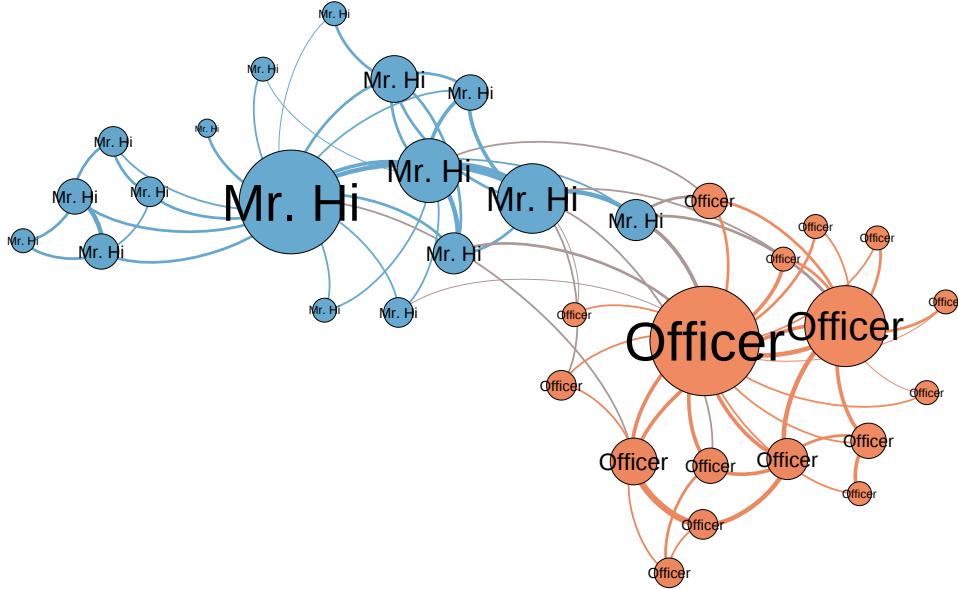
donde  $m$  es el número total de aristas de la red,  $k_i$  es el grado del nodo  $i$ ,  $A_{ij}$  son los elementos de la matriz de adyacencia y si los nodos  $i$  y  $j$  están en la misma comunidad (*i.e.*  $C_i = C_j$ ) entonces la función *delta de Kroenecker*,  $\delta(C_i, C_j) = 1$  y si no lo están ( $C_i \neq C_j$ ) entonces  $\delta(C_i, C_j) = 0$ .

Como ejemplo, podemos calcular  $Q$  para la red de la Figura 2.13 y su partición, en este caso obtenemos que  $Q \simeq 0.39$ . La modularidad  $Q$  es una medida que cuantifica qué tanto están conectados los nodos de un mismo tipo en una red. Específicamente, notemos que, si el número de enlaces *intra-comunidad* no es mejor que el *modelo nulo* (aleatorio), se obtiene que  $Q = 0$  y por el contrario, si el valor se acerca al máximo  $Q = 1$ , este indica que la red tiene una fuerte estructura modular.

Es importante destacar que la modularidad  $Q$  puede tener distintos valores para distintos arreglos de comunidades (particiones), y sobre todo, que dichas particiones pueden tener un valor alto o bajo de  $Q$  dependiendo de qué tan conectadas estén las comunidades dentro de la red. Es por esto que encontrar una partición “óptima” que maximice el valor de  $Q$  en una red con estructura modular es un problema muy importante dentro del estudio de detección de comunidades y dentro de la física de redes.

---

<sup>10</sup>Visualización de las redes y datos creados utilizando *NetworkX* [54]



**Figura 2.13:** Modularidad en la Red de Club de Karate<sup>10</sup>. Este es un ejemplo del surgimiento de estructura modular en una red social. La Red de Club de Karate de Zachary [93] es una red de amistad de miembros de un club de karate universitario. Al surgir un conflicto entre el administrador (*officer*) y el instructor (*Mr. Hi*), el club se divide en dos comunidades dependiendo a quién apoya cada persona.

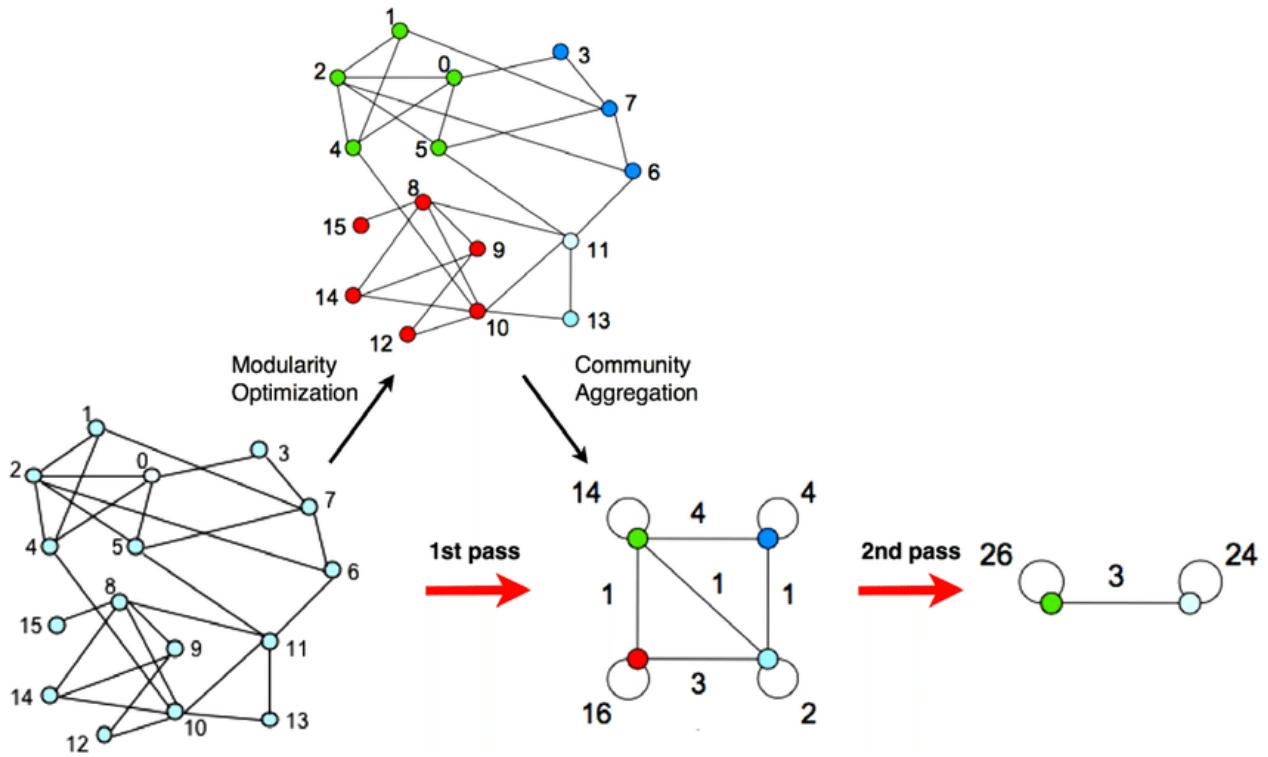
#### 2.4.3. Método de Detección de Módulos de Louvain

Uno de los métodos más populares de detección de comunidades, basado en la optimización de la modularidad  $Q$ , es el *método de Louvain*<sup>11</sup> [95]. El algoritmo de Louvain es un algoritmo *aglomerativo*, que consiste en tomar nodos individuales y agruparlos para después agrupar los grupos obtenidos con otros grupos y así sucesivamente hasta encontrar una configuración que maximice la modularidad  $Q$ .

Este algoritmo es muy popular gracias a su rapidez, pues en contraste con algunos otros algoritmos utilizados para detección de comunidades, está más limitado por las demandas de almacenamiento que por el tiempo computacional. Este último esencialmente crece como  $O(m)$  [96]<sup>12</sup> y puede analizar una red de 118 millones de nodos en tan sólo 152 minutos.

<sup>11</sup>Llamado así en honor a la ciudad natal de sus creadores, Louvain, en Bélgica.

<sup>12</sup> $O(m)$  indica la complejidad temporal del algoritmo respecto a  $m$ , es decir, qué tan rápido crece el tiempo computacional respecto al número de enlaces  $m$ . En este caso, crece linealmente con  $m$ .



**Figura 2.14:** Visualización del Algoritmo de Louvain<sup>13</sup>. Cada iteración está compuesta de dos fases: la primera consiste en maximizar la modularidad  $Q$  realizando cambios individuales dentro de las comunidades de la red y la segunda consiste en crear una nueva red, donde los nodos son las comunidades obtenidas anteriormente.

El algoritmo de Louvain está dividido en dos fases que se repiten iterativamente. Sea una red con pesos y  $N$  nodos, el algoritmo está conformado por los siguientes pasos (véase la Figura 2.14):

■ **Fase 1.**

1. Primero, se asigna a cada nodo  $i$  de la red su propia comunidad, de tal forma que hayan igual número de comunidades como hay nodos en la red.
2. Después, para cada nodo  $i$ , se consideran los vecinos  $j$  de  $i$ , y se evalúa la *ganancia* de la cantidad de modularidad  $Q$  que existiría si se moviera al nodo  $i$  de su

<sup>13</sup>Diagrama obtenido de Blondel et al. [95]

comunidad a la comunidad del nodo  $j$ . Al final, se mueve al nodo  $i$  a la comunidad que maximiza dicha ganancia.

3. Este proceso es realizado repetidamente y secuencialmente para todos los nodos.

Esta fase concluye hasta que se obtiene un máximo *local* de la modularidad, es decir, cuando ningún movimiento individual puede maximizar más la modularidad.

■ **Fase 2.**

1. En esta segunda fase, se construye una nueva red cuyos nodos son las comunidades encontradas en la fase anterior. Los pesos de los enlaces de esta nueva red están dados por la suma de los pesos de los enlaces entre nodos entre cualesquiera dos comunidades. Los enlaces entre nodos de la misma comunidad se representan como auto-enlaces en esta nueva red.
2. Una vez concluida esta fase, se vuelve a aplicar la primera fase del algoritmo a la red pesada que se construyó y se itera todo de nuevo.
3. Estas dos fases son iteradas hasta que no hayan más cambios y se obtenga un máximo para la modularidad  $Q$ .

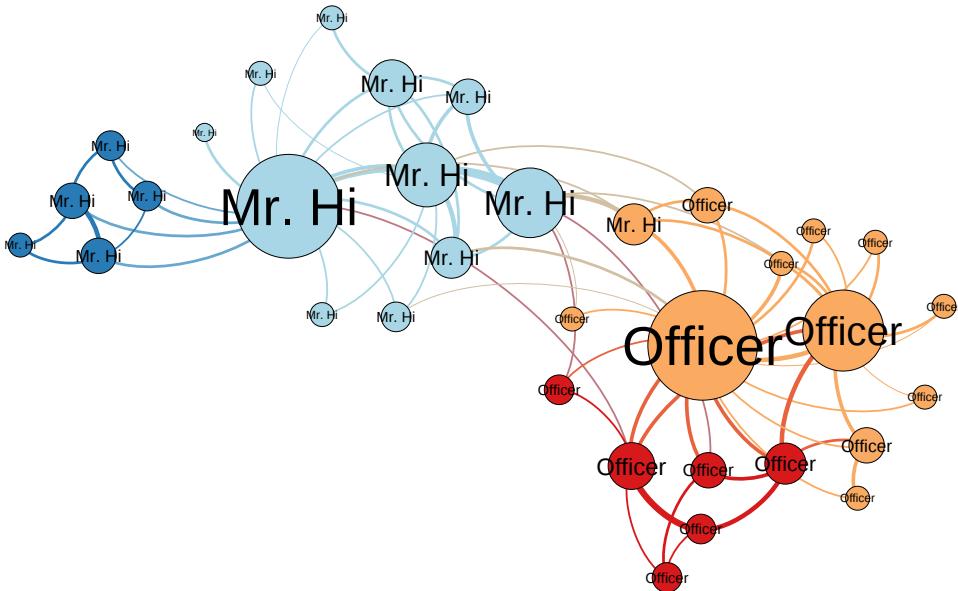
Es importante notar que aunque existe un valor alto en la modularidad  $Q$  no quiere decir necesariamente que se han encontrado las comunidades *reales* en una red. Por ejemplo, en la Figura 2.15 podemos observar una aplicación del algoritmo anterior en la Red de Club de Karate de Zachary [93]. En este caso, podemos observar que el algoritmo clasificó de manera errónea<sup>14</sup> la red en 4 comunidades en vez de 2 (como en la red real) a pesar que la modularidad de esta partición es mayor que la de la partición original 2.13.

En este tipo de algoritmos basados en la optimización de la modularidad es *imposible* realizar una optimización exhaustiva de  $Q$ , debido a la cantidad de formas en las que es posible particionar una red y debido a que el máximo real de  $Q$  está fuera de alcance, ya que se ha

---

<sup>14</sup>Esto se basa en el supuesto de que la división original en realidad reproduce la separación de la red social en dos comunidades.

demostrado que la optimización de la modularidad es un problema NP-Completo [97]. A su vez, la cantidad de modularidad  $Q$  no está bien definida para redes *dirigidas*, es por esto que se puede optar por utilizar otros métodos de detección de comunidades que no estén basados en la optimización de la modularidad, como métodos basados en la Física Estadística o en la Teoría de la Información.



**Figura 2.15: Algoritmo de Louvain en la Red de Club de Karate**<sup>15</sup>. A diferencia de la partición original propuesta por el autor 2.13, el algoritmo de Louvain encontró una partición de 4 comunidades para la red, con una  $Q$  óptima de  $Q \simeq 0.44$ . Para obtener este resultado se realizó 1000 veces el algoritmo y se escogió la partición con el valor para  $Q$  más alto.

#### 2.4.4. Método de Infomap

Uno de los mejores métodos para detectar módulos en redes complejas, basado en la descripción de una caminata aleatoria<sup>16</sup>en una red a través de *teoría de la información*, es conocido como el método *Infomap* [99]. La idea detrás de este método es que en una red con estructura modular, al existir una gran cantidad de enlaces *intra-comunidad* y una poca cantidad de

<sup>15</sup>Visualización de la red creada con *Gephi* [35] y la detección de comunidades realizada en Python utilizando el algoritmo de Louvain a través de la paquetería *Community detection for NetworkX's* [98].

enlaces entre comunidades, una caminata aleatoria tiende a mantenerse mucho más tiempo *dentro* de las comunidades, esto pues, al haber pocos enlaces entre comunidades la caminata tardará mucho tiempo en encontrarlos. Este método captura el *flujo de información* en la red, por lo que las comunidades consisten en grupos de nodos entre los cuales el flujo de información persiste por un largo tiempo.

Para cuantificar el contenido de información de una caminata aleatoria, Rosvall y Bergstrom [100] convierten la caminata aleatoria en una *cadena de bits*, es decir, una cadena única de ceros y unos que describe exactamente la caminata (véase la Figura 2.16B). Para hacer esto, se considera una posible partición de la red en comunidades y se le asignan dos etiquetas en forma de cadenas de bits a cada comunidad: una etiqueta de “entrada” y una de “salida”. Cada vez que la caminata aleatoria entra o sale de una comunidad se registra dicha etiqueta. De la misma forma, para la caminata *dentro* de las comunidades, se asignan etiquetas binarias a los nodos y se registran las etiquetas cada vez que la caminata pasa por un nodo. El conjunto de etiquetas de entrada, salida, y de los nodos forma la representación en cadena de bits de la caminata aleatoria (véase la Figura 2.16C).

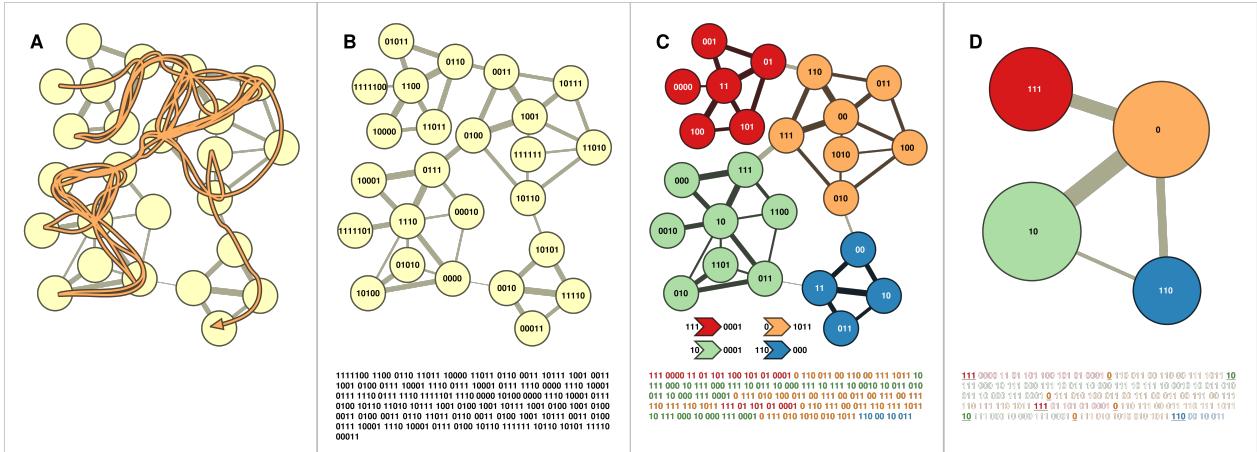
Para asignar las etiquetas para cada posible partición se utiliza la *codificación de Huffman* [101], que es la forma óptima de describir una distribución estacionaria de frecuencias en código binario. En dicha codificación entre más frecuente es un variable aleatoria  $X$  se le asocia una cadena de bits (codeword) más corta. De esta manera, si es más probable visitar un nodo, o una estructura (módulo) en la red, esta tendrá asociada una *codeword* más corta.

Así, si pudiéramos tener una descripción corta de una caminata en la red, entonces tendríamos una buena descripción de las estructuras (módulos) más relevantes dentro de la misma. Esto implicaría que la descripción de la caminata aleatoria con la longitud de bits *más corta*

---

<sup>16</sup>Una caminata aleatoria en una red es creada tomando pasos aleatorios repetidamente: Empezando en cualquier nodo inicial, se escoge aleatoriamente uno de sus vecinos y se camina hacia él, y así se repite el proceso para cada paso.

sería la que describa de mejor forma los módulos más relevantes dentro de la red y por ende, la que describa la mejor partición en comunidades para la red.



**Figura 2.16: Método de Infomap.** **A.** Observamos un ejemplo de una trayectoria para una caminata aleatoria en una red. **B.** Podemos etiquetar a cada nodo en la red utilizando la *codificación de Huffman* y describir la caminata aleatoria mediante cadenas de bits. **C.** Utilizando una descripción de la caminata eficiente se pueden localizar estructuras (módulos y/o nodos) en la red. **D.** Es necesario minimizar la *Map Equation* de la misma forma que se maximizaba la cantidad  $Q$  para el Algoritmo de Louvain 2.4.3.

La pregunta ahora es entonces: ¿cómo encontrar la codificación óptima (de longitud más corta) que describa los módulos de la red en términos de una caminata aleatoria en la misma? Esta pregunta se puede responder usando *teoría de la información*.

El *teorema de codificación de Shannon* [102, 103] establece que para la descripción *más corta* de una caminata aleatoria en una cadena de bits, el número promedio  $L$  de bits por paso de la caminata aleatoria es igual a la *entropía*<sup>17</sup> de dicha caminata, que en este caso está dada, para una partición  $M$ , a través de la denominada *Map Equation* [104, 105]:

$$L(M) = q_{\sim}H(Q) + \sum_{i=1}^m p_{\circlearrowright}^i H(\mathcal{P}^i) \quad (2.19)$$

<sup>17</sup>La entropía de Shannon está definida como el nivel promedio de *información* inherente a los posibles resultados de una variable aleatoria. Matemáticamente, para una distribución de probabilidad:  $H(Q) = -\sum_i q_i \log_2(q_i)$ , con el logaritmo tomado en base 2 para medir la entropía en bits.

Esta ecuación tiene dos términos: el primero, que es la entropía de los movimientos de la caminata aleatoria *entre* módulos, y el segundo, que es la entropía de los movimientos de la caminata aleatoria *dentro* de los módulos. Aquí,  $q_{\sim}$  es la probabilidad de que la caminata aleatoria cambie de módulo para cualquier paso,  $\mathcal{Q}$  la distribución de probabilidad normalizada de movimientos entre cada uno de los  $m$  módulos y  $H(\mathcal{Q})$  su entropía. Así mismo,  $p_{\circlearrowright}^i$  es la fracción de movimientos *intra-comunidad* que ocurrieron en el módulo  $i$  mas la probabilidad de salir del módulo  $i$ <sup>18</sup>, con  $\mathcal{P}_i$  la distribución de probabilidad normalizada de los movimientos dentro de cada módulo y con  $H(\mathcal{P}_i)$  su entropía.

De esta manera, el problema de encontrar estructuras modulares (comunidades) en la red, se convierte en un problema de optimización cuyo objetivo es minimizar la función  $L(M)$  que da la descripción óptima de la caminata aleatoria en la red. Así entonces, el algoritmo de Infomap procede de manera muy similar al enfoque dado por el método de Louvain 2.4.3 (ver Figura 2.16D):

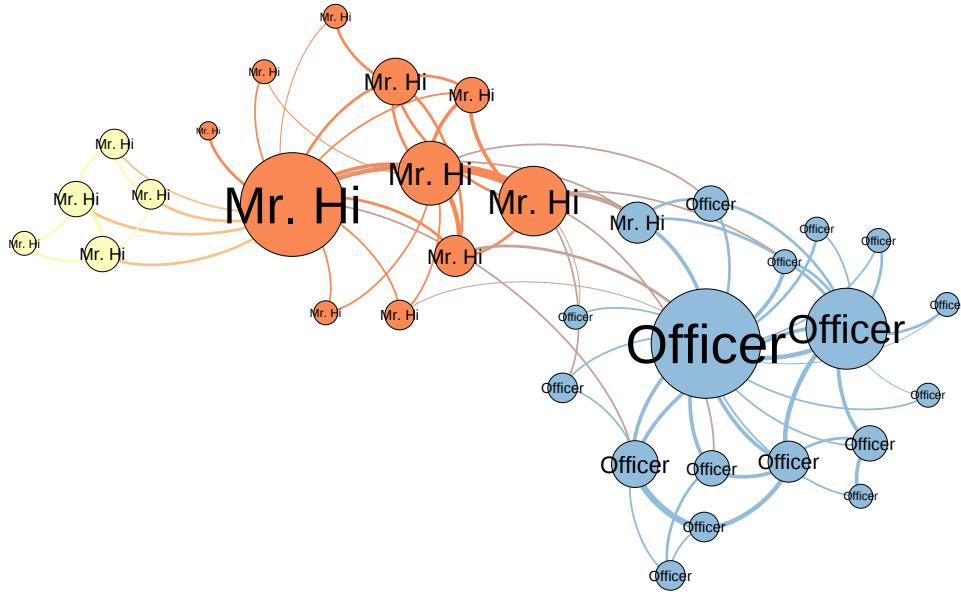
1. Al principio, cada nodo está asignado a su propio módulo. Luego, en un orden secuencial aleatorio, cada nodo se mueve al módulo vecino que resulte en la mayor *disminución* de 2.19. Si ningún movimiento resulta en una disminución de 2.19, el nodo permanece en su módulo original. Este procedimiento se repite, cada vez en un nuevo orden secuencial aleatorio, hasta que ningún movimiento genera una disminución de 2.19.
2. Luego se reconstruye la red, con los módulos del último nivel formando nuevos nodos en este nivel y, se repite el paso anterior en esta nueva red de tal forma que los nodos se van uniendo en nuevos *supermódulos*. Esta reconstrucción jerárquica de la red se repite hasta que 2.19 no se pueda reducir más. Con este procedimiento, se puede encontrar una agrupación bastante buena de la red en muy poco tiempo.

A pesar de ser un algoritmo complejo de implementar, el método de Infomap se ha vuelto muy popular gracias a su rapidez y sus excelentes resultados.

---

<sup>18</sup>Tal que  $\sum_i^m p_{\circlearrowright}^i = 1 + q_{\sim}$

En la Figura 2.17 podemos observar una aplicación del algoritmo anterior en la Red de Club de Karate de Zachary [93]. En este caso, podemos observar que el algoritmo clasificó de manera errónea (esto se basa en el supuesto de que la división original en realidad reproduce la separación de la red social en dos comunidades) la red en 3 comunidades en vez de 2, como en la red real.



**Figura 2.17:** Método de Infomap en la Red de Club de Karate<sup>19</sup>. A diferencia de la partición original propuesta por el autor 2.13, el método de Infomap encontró una partición de 3 comunidades para la red, con una  $L$  óptima de  $L \simeq 4.087$ . Para obtener este resultado se realizó 1000 veces el algoritmo y se escogió la partición con el valor para  $L$  más bajo.

---

<sup>19</sup>Visualización de la red creada con *Gephi* [35] y la detección de comunidades realizada en Python utilizando el algoritmo de Infomap a través del *Infomap Python API* [106].

# Capítulo 3

## Metodología para Encontrar Patrones de Opinión

La metodología propuesta para encontrar grupos de votación dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión y estudiar su influencia para poder predecir los resultados del concurso, se puede resumir en tres aspectos muy generales que se presentan a continuación:

1. La construcción y el análisis estructural de las redes de votación del concurso comparando algunas de sus propiedades con las que se esperarían de un modelo aleatorio con su misma distribución de grado 2.3.2 (véase la sección 3.1).
2. La detección de módulos en dichas redes (a través de los años) utilizando los métodos de Louvain 2.4.3 e Infomap 2.4.4 para después encontrar grupos de votación dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión utilizando información de los módulos y un algoritmo de *clustering* jerárquico (véase la sección 3.2).
3. El modelado y posterior simulación de la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión utilizando un método de muestreo en una red multi-capa con pesos 2.1.3 y la información de los módulos en las redes de votación encontrados en el análisis anterior (véase la sección 3.3).

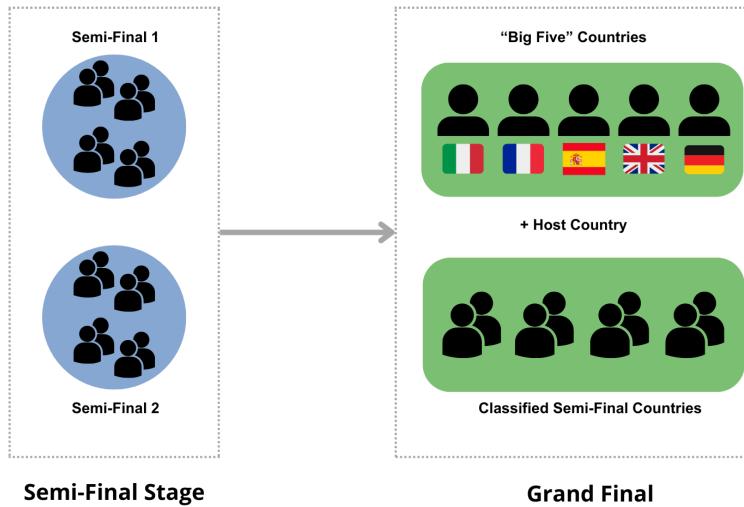
## 3.1. Las Redes de Votación del Eurovisión

En esta sección, se detalla el proceso de construcción de las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión y el análisis estructural respectivo, comparando sus propiedades con las que se esperarían si se modelara esta red utilizando el Modelo de Configuración Dirigido, una generalización del modelo presentado en la sección 2.3.2.

### 3.1.1. Formato del Concurso de la Canción de Eurovisión

El Concurso de la Canción de Eurovisión es un concurso internacional de composición de canciones, organizado por la Unión Europea de Radiodifusión (*European Broadcasting Union* en inglés) y que cuenta con participantes elegidos por los miembros de dicha organización que representan a países dentro y fuera del continente europeo. Cada uno de los países participantes puede elegir una canción y un artista para representarlo dentro del concurso a través de un concurso nacional, un proceso interno o con otro método definido previamente. Desde su fundación en 1956, el número de participantes en el Concurso de la Canción de Eurovisión no ha sido constante y ha crecido de manera gradual con el paso del tiempo. Actualmente, el concurso alcanza 40 participantes totales e incluye países fuera del continente europeo, como es el caso de Australia o Armenia.

El formato y el mecanismo de votación del concurso también ha cambiado a lo largo del tiempo. En contraste con los primeros concursos, donde solamente había una final y solamente un jurado calificado podía formar parte de la votación, actualmente el Concurso de la Canción de Eurovisión consiste en dos etapas: semi-final y final, en las cuales los países participantes presentan sus canciones y votan para determinar al ganador del concurso. La votación se realiza mediante un sistema de puntos asignados por un jurado calificado y los espectadores de cada país. El país que acumule la mayor cantidad de puntos es declarado ganador del Concurso de la Canción de Eurovisión.



**Figura 3.1: Etapas del Concurso de la Canción de Eurovisión.** El Concurso de la Canción de Eurovisión consiste en dos etapas: semi-final y final. Durante las semi-finales grupos de países compiten para obtener un lugar en la final. A su vez, existen países cuya calificación a la final es automática, como es el caso del país vencedor del año anterior y los países miembros del llamado "*Big Five*", compuesto por Italia, Francia, España, el Reino Unido y Alemania.

Como se puede observar en la Figura 3.1, la etapa semi-final consiste a su vez en dos semifinales, donde grupos de países participantes presentan sus canciones y compiten por un lugar en la final. Cada una de las semifinales es independiente de la otra, es decir, no participan los mismos países y la elección de los países que participan en cada una de las semifinales es hecha a través de un sorteo. El objetivo de estas semifinales es elegir a los países con las mejores canciones para participar en la final, donde dichos países se volverán a presentar junto con el país anfitrión y los países del llamado "*Big Five*" (Italia, Francia, España, Reino Unido y Alemania), pues estos últimos califican directamente a la etapa final del concurso.

Tanto en la semi-final como en la final el sistema de votación es el mismo con la distinción que en las semifinales solamente pueden votar aquellos países que participan en cada respectiva semi-final, junto con 3 de los 6 países pre-calificados<sup>1</sup>. Por otro lado en la final, pueden votar todos los países participantes tanto en las semifinales como en la misma final.

<sup>1</sup>Para cada final del Concurso de la Canción de Eurovisión siempre están pre-calificados “The Big Five”: Francia, España, Reino Unido, Alemania, Italia y el país anfitrión del concurso.



**Figura 3.2: Sistema de Votación del Concurso de la Canción de Eurovisión.** En esta figura se observa un ejemplo del sistema de votación para el Concurso de la Canción de Eurovisión para un país votante cualquiera  $A$ . Este sistema consiste en otorgar un conjunto de puntos  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$  a los 10 países con las mejores canciones según un jurado calificado y otro conjunto de puntos  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$  a los 10 países con las mejores canciones según el público.

Los votos asignados por cada país votante en cualquier etapa del concurso son otorgados por un jurado calificado y por el público del concurso de la siguiente manera (véase la Figura 3.2):

1. Cada país **votante**  $A$  otorga un conjunto de puntos  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$  de parte de un **jurado calificado** a los 10 países  $X_A = \{B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$  que considera tuvieron las “mejores” canciones. Notemos que  $X_A \subset Z$ , donde  $Z$  es el conjunto total de países que participan (ya sea en la semi-final o en la final).
2. Cada país **votante**  $A$  otorga otro conjunto de puntos  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$  de parte del **público** a los 10 países  $Y_A = \{L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U\}$  que considera tuvieron las “mejores” canciones. Notemos que  $Y_A \subset Z$ , donde  $Z$  es el conjunto total de países que participan<sup>2</sup>(ya sea en la semi-final o en la final).

Dada la manera en que se asignan los puntos y que se pueden obtener los datos de la votación de una base de datos [39], se puede construir fácilmente una red de votación por cada año del concurso representando a los países votantes con nodos y a los votos intercambiados (ya sea del jurado o del público) por enlaces. El hecho de que han habido un gran número de cambios en el formato del Concurso de la Canción de Eurovisión a través del tiempo, significa que se deben elegir con cuidado los datos con los cuales crear estas redes para su posterior análisis, con el fin de obtener resultados significativos con respecto a los patrones espacio-temporales de la votación en el concurso.

### 3.1.2. Construcción de Las Redes de Votación

Para este trabajo de investigación se decidió construir y analizar las redes de votación (para el jurado y el público) del Concurso de la Canción de Eurovisión utilizando datos obtenidos de [39] únicamente para las *finales* del concurso y para el periodo comprendido entre los años 2016-2023, excluyendo el 2020, pues no hubo concurso debido a la pandemia de COVID-19. La motivación detrás de esta decisión surge de dos cuestiones importantes:

- En 2016 es cuando se introduce el sistema de votación actual, explicado anteriormente, haciendo la distinción entre la votación hecha por el jurado y la votación hecha por el público. Esta distinción es importante pues, en contraste con la votación del público, se esperaría que la votación por parte del jurado a través de los años esté guiada de manera más objetiva por la *calidad* de las canciones que por el *sentimiento* de un país hacia otro [47].
- En las semi-finales del concurso solamente pueden votar aquellos países que forman parte de sus respectivas semi-finales, junto con 3 de los 6 países pre-calificados. En contraste, en la gran final del concurso, *todos* los países participantes tanto en las

---

<sup>2</sup>Notemos que los países votantes y los países participantes no necesariamente son los mismos. Por ejemplo, en la final del concurso pueden votar todos los países que participaron tanto en las semi-finales como en la final. También notemos que  $X_A$  y  $Y_A$  pueden o no compartir elementos. No existe una restricción en cuanto a la elección de países excepto que un país no puede votar por sí mismo.

semi-finales como en la final pueden votar por sus concursantes favoritos. De todos los países votantes en las finales del concurso para el periodo 2016-2023, alrededor del 75 % vota en ***todas*** las ediciones del concurso. Esto es importante pues, los países que pueden votar en la final del concurso son mucho más constantes que los que pueden votar en la semi-final<sup>3</sup> y esto ayuda a caracterizar de mejor manera las relaciones temporales y por ende las agrupaciones de países dentro del concurso.

A su vez, se decidió dividir estas redes de votación en *sub-redes*, tomando como parámetro los *valores* de los votos intercambiados entre países. Esto, pues se esperaría que existiera más *sesgo* entre países al otorgar votos con valores ***altos***, que al otorgar votos con valores ***bajos***. Es por esto que al final, se construyen **6** redes distintas para cada edición del Concurso de la Canción de Eurovisión dentro del periodo 2016-2023 de la siguiente manera:

- Las redes de votos del público (o *televoting*, en inglés):
  - Red de votos ***altos*** (*High Value Votes*, en inglés): Una red dirigida con pesos, donde los nodos son los países y existe un enlace entre ellos solamente si el voto del público  $v$  de un nodo  $i$  a un nodo  $j$  está dentro del rango  $8 \leq v \leq 12$ . El peso de cada enlace está dado por el valor de  $v$ .
  - Red de votos ***medios*** (*Medium Value Votes*, en inglés): Una red dirigida con pesos, donde los nodos son los países y existe un enlace entre ellos solamente si el voto del público  $v$  de un nodo  $i$  a un nodo  $j$  está dentro del rango  $5 \leq v \leq 7$ . El peso de cada enlace está dado por el valor de  $v$ .
  - Red de votos ***bajos*** (*Low Value Votes*, en inglés): Una red dirigida con pesos, donde los nodos son los países y existe un enlace entre ellos solamente si el voto del público  $v$  de un nodo  $i$  a un nodo  $j$  está dentro del rango  $1 \leq v \leq 4$ . El peso de cada enlace está dado por el valor de  $v$ .

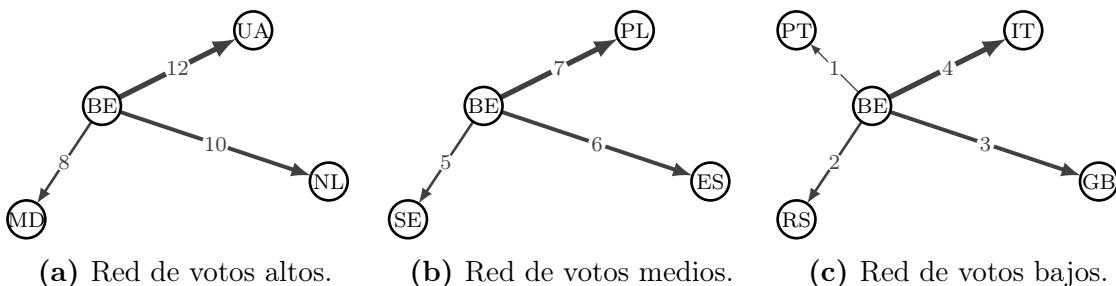
---

<sup>3</sup>Nótese que esto sólo se cumple para los países que votan en las finales, pues los países que participan en las finales, i.e., que reciben votos, cambian notoriamente dependiendo del año y sólo 6 países han participado en todas las finales desde el 2016: Francia, España, Reino Unido, Alemania, Italia y Suecia.

- Las redes de votos del jurado (o *jury voting*, en inglés):

- Red de votos *altos* (*High Value Votes*, en inglés): Una red dirigida con pesos, donde los nodos son los países y existe un enlace entre ellos solamente si el voto del jurado  $v$  de un nodo  $i$  a un nodo  $j$  está dentro del rango  $8 \leq v \leq 12$ . El peso de cada enlace está dado por el valor de  $v$ .
- Red de votos *medios* (*Medium Value Votes*, en inglés): Una red dirigida con pesos, donde los nodos son los países y existe un enlace entre ellos solamente si el voto del jurado  $v$  de un nodo  $i$  a un nodo  $j$  está dentro del rango  $5 \leq v \leq 7$ . El peso de cada enlace está dado por el valor de  $v$ .
- Red de votos *bajos* (*Low Value Votes*, en inglés): Una red dirigida con pesos, donde los nodos son los países y existe un enlace entre ellos solamente si el voto del jurado  $v$  de un nodo  $i$  a un nodo  $j$  está dentro del rango  $1 \leq v \leq 4$ . El peso de cada enlace está dado por el valor de  $v$ .

Gracias a lo anterior es que para este trabajo se analizan **42** redes distintas en total: **3** redes por valor de voto (alto, medio o bajo)  $\times$  **2** tipos de voto (jurado o público)  $\times$  **7** años de análisis (desde el 2016 al 2023). En la Figura 3.3 se muestra un ejemplo del proceso de construcción para las redes de votación.



**Figura 3.3: Construcción de las Redes de Votación.** Como ejemplo, en (a) se construye la red de votos altos del público dados por Bélgica en la edición 2022 del concurso, sin contar los enlaces salientes de los demás países. En (b) y en (c) se construyen las redes de votos medios y bajos respectivamente. Este proceso se debe repetir para todos los países participantes hasta construir las 3 redes distintas de votos altos, medios y bajos de esta edición en particular.

### 3.1.3. El Modelo de Configuración Dirigido

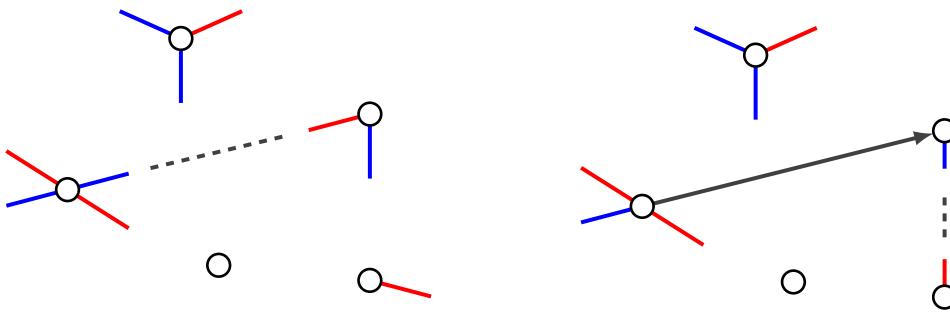
Una vez construidas las redes de votación utilizando el proceso anterior 3.1.2 es importante obtener perspectiva sobre los resultados obtenidos empíricamente de los datos de votación. Para obtener dicha perspectiva es necesario tener algo útil con qué comparar los datos obtenidos. En este trabajo se decidió comparar los datos de votación con lo que se obtendría si el Concurso de la Canción de Eurovisión fuera un concurso *aleatorio*. Específicamente, se decidió comparar a las redes de votación obtenidas con un modelo de red aleatoria (véase sección 2.3.1 y 2.3.2) tal que dicho modelo contenga el mismo número de nodos que la red original y a su vez estos nodos comparten el mismo *in-degree*  $k^{in}$  y el mismo *out-degree*  $k^{out}$  que sus equivalentes en la red original<sup>4</sup>.

Este modelo es conocido como *Modelo de Configuración Dirigido* [9, 107, 108] y es una generalización para redes dirigidas del modelo presentado en la sección 2.3.2. En este modelo no está determinada la distribución de probabilidad de donde se obtienen los grados,  $k_i^{in}$  y  $k_i^{out}$ , para cada nodo, sino que está determinado el grado exacto,  $k_i^{in}$  y  $k_i^{out}$ , de cada nodo individual  $i = 1, \dots, n$  en la red. El proceso para crear una red aleatoria con dicha secuencia de grados para una red dirigida con  $n$  nodos es el siguiente:

1. Se provee a cada nodo  $i$  en la red con un total de  $k_i^{in}$  “medios-enlaces” de entrada (o *in-stubs* en inglés) y un total de  $k_i^{out}$  “medios-enlaces” de salida (o *out-stubs* en inglés). En la red, se tiene que cumplir que  $\sum_i k_i^{in} = \sum_i k_i^{out}$ , esto para asegurar que no queden medios-enlaces libres al final del proceso.
2. Se eligen un par de *stubs* de manera aleatoria, tal que uno es de entrada y otro de salida, y se conectan para formar un enlace, como se indica en la Figura 3.4.
3. Se repite el paso anterior para cada uno de los pares de stubs restantes hasta que no quede ninguno libre.

---

<sup>4</sup>De esta manera en el modelo se mantiene el número de *votos* entrantes y salientes para cada país.



(a) Se eligen dos stubs de manera aleatoria. (b) Se conectan para formar un enlace.

**Figura 3.4: Modelo de Configuración Dirigido.** A cada nodo  $i$  de una red se le asignan  $k_i^{\text{in}}$  *in-stubs* (en rojo) y  $k_i^{\text{out}}$  *out-stubs* (en azul), para después unirlos de manera aleatoria hasta que todos los nodos tengan *in-degree*  $k_i^{\text{in}}$  y *out-degree*  $k_i^{\text{out}}$ , respectivamente. El resultado del proceso anterior es una posible configuración de enlaces que resulta en una red donde cada nodo tiene una secuencia de grados determinada previamente.

Formalmente, al igual que en el caso *no-dirigido*, el Modelo de Configuración Dirigido está definido en términos de un *ensamble* de configuraciones de enlaces tales que cada configuración aparece con la misma probabilidad si tiene la secuencia de grados deseada y con probabilidad 0 si tiene una secuencia de grados distinta.

No existe una condición en el proceso de creación de la red que pueda prevenirla de contener auto-enlaces o multi-enlaces dirigidos. Esto limita la aplicabilidad del modelo con el caso real, pues en este caso, un país no puede votar por sí mismo o votar dos veces por un mismo país el mismo tipo de voto<sup>5</sup>. Es por esto que se decidió modelar las redes obtenidas en 3.1.2 utilizando el Modelo de Configuración Dirigido y eliminando todos los auto-enlaces y multi-enlaces que surgen al final proceso, para obtener una red *simple* (véase el proceso computacional en el Apéndice B 1). La ventaja principal de esta modificación es que para este caso, las distribuciones de grado  $P(k^{\text{in}})$  y  $P(k^{\text{out}})$  de los redes obtenidas se mantienen esencialmente iguales a las distribuciones de grado reales y tienden a ellas cuando  $n \rightarrow \infty$  [107]. Esto quiere decir que en estas redes modeladas, los votos que “salen” y que “entran” se mantienen esencialmente iguales a los de las redes reales y tienden a estos cuando  $n \rightarrow \infty$ .

<sup>5</sup>Un país sí puede votar dos veces por un mismo país si un voto está dado por el jurado y el otro voto por el público, pero no pueden existir dos votos de un país hacia el mismo país para el mismo tipo de voto.

Una vez modeladas las 42 redes de votación construidas en 3.1.2 utilizando el Modelo de Configuración, se procedió a comparar algunas de sus propiedades más importantes con las propiedades obtenidas en las redes reales. Específicamente, se midieron el coeficiente de clustering, la reciprocidad y la assortatividad de *in-degree* en las redes reales y se compararon sus valores con los *valores esperados* que se obtendrían al medir estas propiedades en los modelos de red aleatoria construidos anteriormente.

### 3.1.3.1. Clustering en las Redes de Votación

La primera propiedad que se comparó entre las redes construidas en 3.1.2 y los modelos de red construidos anteriormente fue el *clustering* en las redes. Esta propiedad se puede cuantificar utilizando el coeficiente de clustering  $C$  (véase la sección 2.2.2), que mide la tendencia de las redes a formar *agrupaciones* de nodos fuertemente conectados entre sí.

**Definición 3.1 (Coeficiente de Clustering (Redes Dirigidas)).** Este coeficiente, dado por las ecuaciones 2.9 y 2.10, puede ser generalizado para redes *dirigidas* utilizando la siguiente expresión propuesta por G. Fagiolo [56]:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad ; \quad C_i = \frac{2}{k_i^{\text{tot}}(k_i^{\text{tot}} - 1) - 2k_i^{\leftrightarrow}} T_i, \quad (3.1)$$

donde  $N$  es el número de nodos en una red,  $k_i^{\text{tot}} = k_i^{\text{in}} + k_i^{\text{out}}$  el grado total de un nodo  $i$ ,  $k_i^{\leftrightarrow}$  es el número de enlaces *recíprocos* que tiene un nodo  $i$  y  $T_i$  el número de triángulos dirigidos que pasan por  $i$ .

Medir el coeficiente de clustering resulta importante en el contexto de las redes sociales [109, 110], pues se ha mostrado que este tipo de redes toman valores altos para  $C$  en comparación de lo que se obtendría para modelos *aleatorios* de las mismas redes (en una red de interacción, dos conocidos de una misma persona tienen mayor probabilidad de conocerse

---

<sup>5</sup>Véase el proceso computacional en el Apéndice B 2.

entre ellos). Al existir evidencia de la formación de grupos o *comunidades* de votos en el Concurso de la Canción de Eurovisión [37, 43, 44], se esperaría que las redes construidas en 3.1.2 tuvieran un valor para  $C$  más alto que lo que se obtendría para las mismas redes modeladas utilizando el Modelo de Configuración definido en 3.1.3.

Se midió el coeficiente de clustering  $C$  (ecuación 3.1) para cada una de las 42 redes de votación definidas en 3.1.2 y a su vez, para obtener relevancia estadística, se contrastó con el *valor esperado*  $\langle C \rangle$  que se obtiene al medir dicha propiedad para un conjunto de redes distintas obtenidas utilizando el Modelo de Configuración <sup>6</sup>definido en 3.1.3.

### 3.1.3.2. Reciprocidad en las Redes de Votación

Otra propiedad importante para las redes dirigidas que se comparó entre las redes construidas en 3.1.2 y los modelos de red construidos en 3.1.3 es la *reciprocidad* en la red. Esta propiedad se puede cuantificar utilizando el *coeficiente de reciprocidad*  $r_{\leftrightarrow}$  (véase la sección 2.2.3), que mide la *probabilidad* de que existan enlaces recíprocos en una red.

**Definición 3.2 (Coeficiente de Reciprocidad).** Este coeficiente (véase la ecuación 2.11) está definido para redes dirigidas [58] como:

$$r_{\leftrightarrow} = \frac{L^{\leftrightarrow}}{L}, \quad (3.2)$$

donde  $L^{\leftrightarrow}$  es el número de enlaces *recíprocos* en la red y  $L$  es el número total de enlaces.

La reciprocidad  $r_{\leftrightarrow}$  puede ser vista como una medida de *camaradería* entre países [37] dentro de las redes de votación, pues un enlace recíproco entre dos países puede ser interpretado como un *quid pro quo* entre estos dos países. De esta manera, si las redes construidas en 3.1.2 tuvieran un valor para  $r_{\leftrightarrow}$  más alto que lo que se obtendría para las mismas redes modeladas utilizando el modelo definido en 3.1.3, esto significaría que existen relaciones de *intercambio* de votos entre países más fuertes que lo que se esperaría si la votación fuera hecha de manera

---

<sup>6</sup>Véase el proceso computacional en el Apéndice B 2.

aleatoria.

Se midió la reciprocidad  $r_{\leftrightarrow}$  para cada una de las 42 redes de votación definidas en 3.1.2 y a su vez, para obtener relevancia estadística, para cada una de estas redes se contrastó el valor de  $r_{\leftrightarrow}$  con el *valor esperado*  $\langle r_{\leftrightarrow} \rangle$  que se obtiene al medir dicha propiedad para un conjunto de redes distintas obtenidas utilizando el Modelo de Configuración <sup>7</sup>definido en 3.1.3.

### 3.1.3.3. Asortatividad de Grado en las Redes de Votación

Por último, también fue de interés estudiar si existe *asortatividad de grado* (véase la sección 2.4.1) dentro de las redes construidas en 3.1.2. Esta propiedad puede ser cuantificada utilizando el *coeficiente de asortatividad*  $r$  (véase la ecuación 2.17), que mide la tendencia de un nodo para conectarse con otros nodos de grado similar. En el caso de redes dirigidas, al existir una distinción entre el *in-degree* y el *out-degree* de la red, este coeficiente se puede generalizar para medir la tendencia de un nodo para conectarse con otros nodos de *in/out-degree* similar [111].

**Definición 3.3 (Asortatividad de  $\alpha$  – degree (Redes Dirigidas)).** Sea  $\alpha \in \{\text{in}, \text{out}\}$ , sea  $m$  el número de enlaces en una red y sean  $\{1, \dots, m\}$  las etiquetas de los enlaces para dicha red. Dado un enlace  $i$ , sean  $j_i^\alpha$  el  $\alpha$  – degree de su nodo de origen y  $k_i^\alpha$  el  $\alpha$  – degree de su nodo objetivo. Definimos el coeficiente de asortatividad de  $\alpha$  – degree utilizando el coeficiente de correlación de Pearson [94] de la siguiente manera:

$$r(\alpha, \alpha) = \frac{\sum_i [(j_i^\alpha - \bar{j}^\alpha)(k_i^\alpha - \bar{k}^\alpha)]}{\sqrt{\sum_i (j_i^\alpha - \bar{j}^\alpha)^2} \sqrt{\sum_i (k_i^\alpha - \bar{k}^\alpha)^2}}, \quad (3.3)$$

donde  $\bar{j}^\alpha = m^{-1} \sum_i j_i^\alpha$  y  $\bar{k}^\alpha = m^{-1} \sum_i k_i^\alpha$  son los  $\alpha$  – degree promedio de los nodos origen y objetivo respectivamente.

Notemos que todos los nodos en las redes construidas en 3.1.2, tienen *out-degree*  $k^{\text{out}} =$  constante (pues el número de votos altos, medios y bajos que se dan está pre-establecido),

---

<sup>7</sup>Véase el proceso computacional en el Apéndice B 2.

por lo que para este caso la ecuación 3.3 no está definida y no tiene sentido hablar estudiar el coeficiente de asortatividad de *out-degree*. Sin embargo, el coeficiente de asortatividad de *in-degree* sí está bien definido para estas redes y puede cuantificar hasta qué grado los países en el concurso se *organizan* unos con otros de acuerdo al número de votos que reciben.

Se midió el coeficiente de asortatividad de *in-degree*,  $r(\text{in}, \text{in})$ , para cada una de las 42 redes de votación definidas en 3.1.2 y a su vez, para obtener relevancia estadística, para cada una de estas redes se contrastó el valor de  $r(\text{in}, \text{in})$  con el *valor esperado* que se obtiene al medir dicha propiedad para un conjunto de redes distintas obtenidas utilizando el Modelo de Configuración <sup>8</sup>definido en 3.1.3.

## 3.2. Estructura Modular en las Redes de Votación

En esta sección, se detalla el proceso para encontrar grupos de votación dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión. Para hacer esto se utilizan los métodos de Louvain e Infomap para detectar módulos dentro de las redes construidas en 3.1.2 y después se utiliza esta información para analizar la evolución temporal de dichos módulos dentro del concurso y para encontrar *clusters* de países dentro del mismo, utilizando análisis de *clustering* jerárquico.

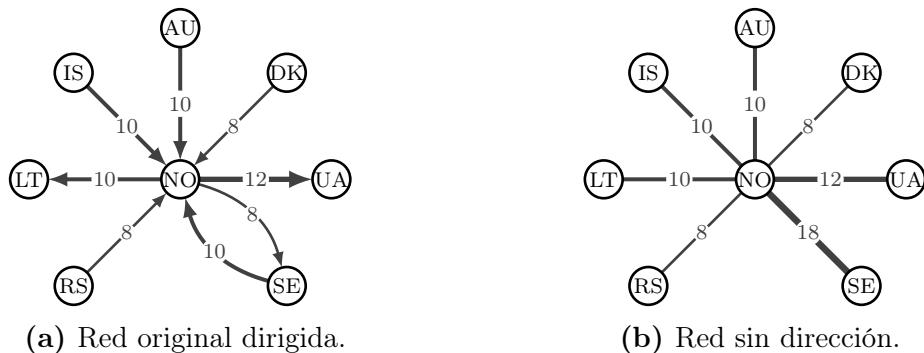
### 3.2.1. Detección de Comunidades en las Redes de Votación

Una vez que se han construido, analizado y comparado las redes de votación definidas en 3.1.2 con un modelo de red aleatoria (véase la sección 3.1.3), el paso siguiente es detectar comunidades o *módulos* en dichas redes utilizando métodos de detección de comunidades para redes complejas. En este caso, se utilizaron dos de los métodos más populares para detectar módulos en redes: uno basado en la optimización de la modularidad  $Q$ , conocido como el Método de Louvain (véase la sección 2.4.3) y uno basado en teoría de la información, conocido como el Método de Infomap (véase la sección 2.4.4).

### 3.2.1.1. Método de Louvain

Como se mencionó en la sección 2.4.3, el método de Louvain, basado en la optimización de la cantidad de modularidad  $Q$  (véase ecuación 2.18), es uno de los métodos más rápidos y más populares que existen para detectar comunidades en redes. Es por esto mismo que se utilizó como algoritmo de referencia para obtener comunidades a pesar de que este método no está definido para redes *dirigidas*<sup>9</sup> y que por lo mismo, para utilizarlo en las redes de votación definidas en 3.1.2, estas redes deben ser convertidas en redes *sin dirección*.

Para convertir las redes de votación definidas en 3.1.2 en redes sin dirección, simplemente se *combinaron* en un solo enlace sin dirección, los enlaces de entrada y salida para cada par de nodos en la red, tal que el peso de dicho enlace es igual a la suma de los pesos de los enlaces de entrada y salida para dicho par de nodos (véase la Figura 3.5).



**Figura 3.5: Construcción de las Redes de Votación (sin dirección).** Como ejemplo, en (a) se observa la red (dirigida y con pesos) de votos altos del público dados y recibidos por Noruega en la edición 2022 del concurso, sin contar los enlaces de los demás países. En (b) se convierte esta red en una red *sin dirección* combinando los enlaces de entrada y salida y sumando sus pesos. Este proceso se debe repetir para todos los países participantes hasta construir las 3 redes distintas de votos altos, medios y bajos para esta edición en particular.

Una vez construidas las redes de votación sin dirección, entonces es posible utilizar el Método de Louvain para detectar comunidades de países en estas redes, siguiendo el proceso detallado

---

<sup>9</sup>Aquí nos referimos al método original, propuesto por Blondel et al. [95], pues existe un método modificado [112] basado en la definición de  $Q$  [61] para redes dirigidas.

en la sección 2.4.3 para optimizar la cantidad de modularidad  $Q$  definida para redes *pesadas* de la siguiente manera [50, 95]:

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left[ A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \delta(C_i, C_j), \quad (3.4)$$

donde  $A_{ij}$  representa el peso del enlace entre un nodo  $i$  y un nodo  $j$ ,  $k_i = \sum_j A_{ij}$  es la suma de los pesos de los enlaces unidos a un nodo  $i$ ,  $C_i$  es la comunidad a la que pertenece el nodo  $i$ , la función *delta de Kroenecker*  $\delta(C_i, C_j)$  es 1 si  $C_i = C_j$  y 0 en cualquier otro caso y  $m = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij}$ .

De esta manera, se utilizó el Método de Louvain (detallado en la sección 2.4.3) para detectar comunidades de países en las 42 redes con pesos construidas en 3.1.2 pero **sin dirección**. Se aplicó este método computacionalmente en Python aplicando 10000 veces el algoritmo de Louvain para cada red a través de la paquetería *Community detection for NetworkX's* [98] y eligiendo la partición con el valor para  $Q$  máximo en cada caso<sup>10</sup>.

### 3.2.1.2. Método de Infomap

Una vez detectadas comunidades de países en las redes (sin dirección) construidas en 3.1.2 utilizando el Método de Louvain, el paso siguiente es utilizar otro método de detección de comunidades para encontrar comunidades de países dentro de las redes. Esto para poder comparar los resultados obtenidos con distintos métodos y sobre todo, para poder utilizar un método de detección de comunidades definido para redes dirigidas, como es el caso del Método de Infomap.

El Método de Infomap (véase la sección 2.4.4) es un método de detección de comunidades basado en minimizar la longitud  $L$  en cadena de bits de la descripción óptima de una caminata aleatoria en una red. El algoritmo de Infomap procede de manera muy similar al enfoque dado por el método de Louvain, pues el problema de encontrar comunidades en una red,

---

<sup>10</sup>Véase el proceso computacional en el Apéndice B 3

se reduce a un problema de optimización cuyo objetivo es encontrar una partición  $M$  que minimice la expresión para la longitud de la descripción  $L(M)$ . Esta expresión para  $L(M)$  (véase la ecuación 2.19) está dada por la *Map Equation*:

$$L(M) = q_{\sim} H(\mathcal{Q}) + \sum_{i=1}^m p_{\circlearrowleft}^i H(\mathcal{P}^i), \quad (3.5)$$

donde  $q_{\sim}$  es la probabilidad de que la caminata aleatoria cambie de módulo para cualquier paso,  $\mathcal{Q}$  la distribución de probabilidad normalizada de movimientos entre cada uno de los  $m$  módulos y  $H(\mathcal{Q})$  su entropía. Así mismo,  $p_{\circlearrowleft}^i$  es la fracción de movimientos *intra-comunidad* que ocurrieron en el módulo  $i$  mas la probabilidad de salir del módulo  $i$ , con  $\mathcal{P}_i$  la distribución de probabilidad normalizada de los movimientos dentro de cada módulo y con  $H(\mathcal{P}_i)$  su entropía. Los términos y el origen de los mismos se explican más a detalle en la sección 2.4.4 y en los artículos originales publicados por *Rosvall et al* [104, 105].

De esta manera, se utilizó el Método de Infomap (detallado en la sección 2.4.3) para detectar comunidades de países en las 42 redes dirigidas y con pesos construidas en 3.1.2. Se aplicó este método computacionalmente en Python aplicando 10000 veces el algoritmo de Infomap para cada red a través del *Infomap Python API* [106] y eligiendo la partición con el valor para  $L$  mínimo en cada caso<sup>11</sup>.

### 3.2.2. Análisis de Clusters en las Redes de Votación

Notemos que las redes de votación construidas en 3.1.2 para cada tipo (del jurado y del público) y valor de voto (alto, medio o bajo) pueden ser vistas como redes *temporales* cuyas estructuras *evolucionan* a través del tiempo, específicamente a través del periodo 2016-2023. De esta manera, los módulos encontrados previamente en dichas redes (utilizando los métodos de Louvain e Infomap 3.2.1), también pueden ser vistos como grupos de países dentro de las redes cuya *estructura* evoluciona a través del tiempo y que se encuentran fuertemente

---

<sup>11</sup>Véase el proceso computacional en el Apéndice B 4

relacionados uno con el otro.

Estos módulos y su *evolución temporal* resultan ser clave para encontrar *grupos de votación* dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión, pues la *frecuencia* con la que aparecen los mismos países dentro de un módulo en una red, puede ser vista como una medida de *fortaleza* de la relación de votos entre estos países (para cada tipo y valor de voto) y a su vez, esta medida puede ayudar a definir agrupaciones o *clusters* de países que se mantienen fuertemente interrelacionados a través del tiempo.

Es por lo anterior que se puede observar la equivalencia entre el problema de encontrar grupos de votación dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión y el problema de encontrar módulos dentro de las redes de votación del concurso que evolucionan a través del tiempo. Este problema ha sido abordado en trabajos anteriores básicamente de dos formas dependiendo de la naturaleza de cada estudio<sup>12</sup>:

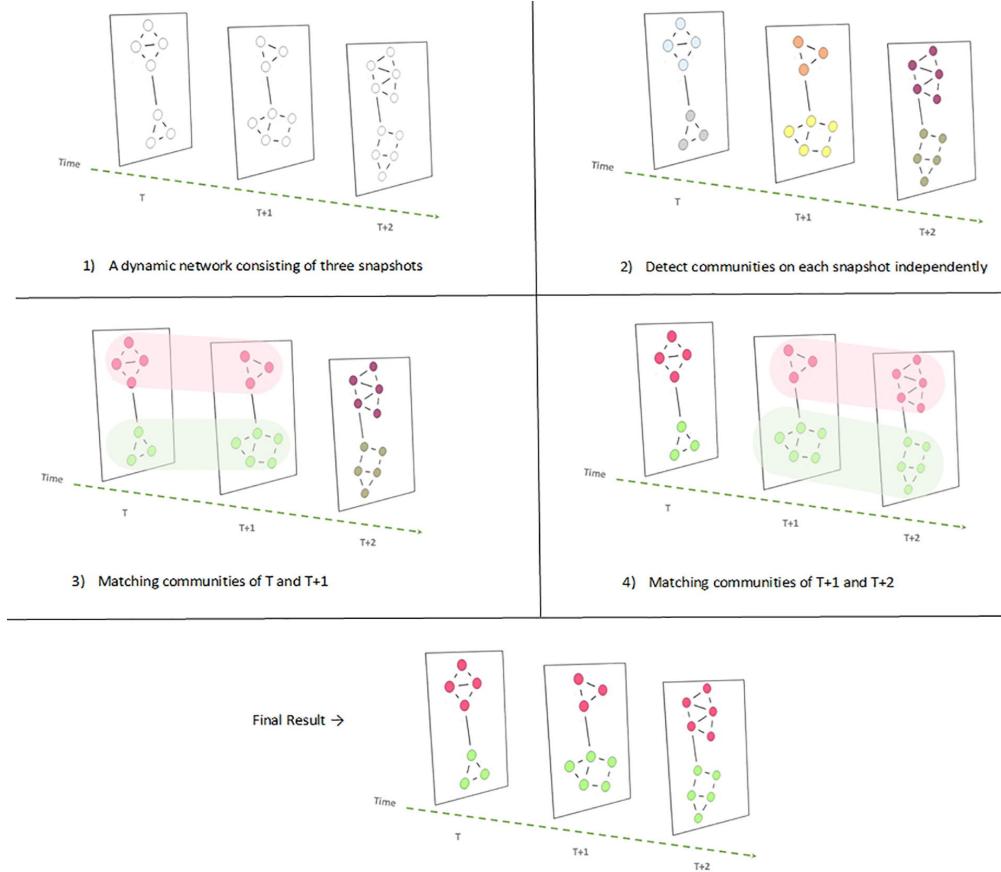
1. Se puede considerar a la red temporal  $G$  como un conjunto de redes *estáticas*  $\{G_t\}_{t=0}^{t_n}$  que evolucionan a cada paso de tiempo  $t$  y por ende el problema de encontrar módulos en la red  $G$  se puede reducir a encontrar módulos en cada una de las redes estáticas  $G_t$  (usando algoritmos como Louvain o Infomap) y después relacionar dichos módulos utilizando una medida de similaridad entre ellos (véase la Figura 3.6).
2. Se puede plantear el problema de encontrar módulos directamente en la red temporal. Los métodos utilizados para este abordaje están fuera del ámbito de este trabajo y pueden ser vistos a profundidad en [113].

Uno de las consideraciones más importantes que hay que hacer al abordar la detección de módulos como en el primer caso es la definición de la forma de relacionar los módulos a través del tiempo. Una de las grandes desventajas de definir una medida de *similaridad* para comparar pares de módulos para tiempos  $T$  y  $T + 1$  es la previa suposición de que el número

---

<sup>12</sup>Ver Altoaibi and Rhouma, 2022 [113] para una revisión reciente.

de módulos encontrados para cada red estática se mantiene *constante* en el tiempo, pues esto no es cierto en general para muchos algoritmos de detección de módulos.



**Figura 3.6: Detección de Módulos en Redes Temporales.** En esta figura presentada por Altoaibi and Rhouma, 2022 [113] se ejemplifica una de las metodologías para detectar módulos en redes temporales. Primero, se considera la red temporal como un conjunto de redes estáticas al tiempo  $T, T + 1, T + 2, \dots$ , etc. Despues, se detectan módulos en cada una de las redes estáticas utilizando algoritmos conocidos para estas redes (Louvain, Infomap, etc.) y por último se relacionan cada uno de los módulos a través del tiempo utilizando una medida de similaridad.

Es por lo anterior que en este trabajo se propone una metodología para encontrar *grupos de votación* dentro del Concurso de Votación de Eurovisión (para cada tipo y valor de voto  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente) planteando dicho concurso como una red temporal  $G_\beta^\alpha$  compuesta de redes estáticas que evolucionan a través de los años durante el periodo 2016-2023 y llevando a cabo los siguientes pasos:

1. Detectar módulos para cada red de votación estática  $G_\beta^\alpha(t)$  con  $t \in \{2016, \dots, 2023\}$  utilizando los Métodos de Louvain e Infomap.
2. Cuantificar el número de veces o *frecuencia* con la que cada par de países aparecen juntos dentro de un módulo para cada una de las redes de votación.
3. Utilizar esta frecuencia como una medida de *cercanía* entre países y utilizar un algoritmo de clustering jerárquico para caracterizar grupos de votación que se mantuvieron fuertemente relacionados a través del periodo 2016-2023.

### 3.2.2.1. La Matriz de Frecuencias

Es por lo anterior que para cada red *temporal* definida en 3.1.2, para cada tipo (del jurado y del público) y valor de voto (alto, medio o bajo), se propone construir una *matriz de frecuencias*  $\mathcal{F}$ . En dicha matriz, cada entrada  $f_{ij}$  está definida como la *frecuencia* con la que los países  $i$  y  $j$  aparecen juntos dentro de un módulo (encontrado con Infomap o Louvain) para las redes de cada tipo y valor de voto dentro del periodo de tiempo 2016-2023.

**Definición 3.4 (Matriz de Frecuencias).** Formalmente, sea  $n$  el número de países totales que participan en el Concurso de la Canción de Eurovisión durante el periodo 2016-2023. Para cada tipo de voto  $\alpha \in \{\text{Jurado, Público}\}$ , valor de voto  $\beta \in \{\text{Alto, Medio, Bajo}\}$ , y método de detección de comunidades  $m \in \{\text{Louvain, Infomap}\}$ , se define a la *matriz de frecuencias*  ${}_m\mathcal{F}_\beta^\alpha$  como la matriz de  $n \times n$  tal que:

$${}_m\mathcal{F}_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde  $f_{ij}$  es la *frecuencia* con la que los países  $i$  y  $j$  aparecen juntos dentro de un módulo encontrado con el método  $m$  para las redes de tipo de voto  $\alpha$  y valor de voto  $\beta$  dentro del periodo de tiempo 2016-2023. Notemos que en total para este trabajo se definen **12** matrices

distintas en total: **3** por valor de voto (alto, medio o bajo)  $\times$  **2** tipos de voto (jurado o público)  $\times$  **2** métodos de detección de comunidades (Louvain e Infomap).

Una vez construida esta matriz de *frecuencias*, se puede observar de sus valores componentes,  $f_{ij}$ , que existen grupos de países que comparten comunidades de manera frecuente y por ende, están fuertemente interrelacionados a través del tiempo. Encontrar y definir a estos grupos de países de manera manual es complicado y poco trivial, es por eso que en este trabajo se recurre a un algoritmo de *clustering* jerárquico, para encontrar a estos grupos de manera computacional a través de la información dada por la matriz definida en 3.4.

### 3.2.2.2. Clustering Jerárquico Aglomerativo

El análisis de clustering es una herramienta de *aprendizaje no supervisado*<sup>13</sup> cuya función es agrupar objetos basándose sólo en la información encontrada en los datos que describen los objetos y las relaciones entre ellos [114]. El objetivo de este análisis es agrupar objetos que son similares (o están relacionados) unos con los otros y que son diferentes de los objetos que pertenecen a otros grupos. A estos grupos de objetos se les conoce como *clusters* y a la colección entera de clusters se le conoce como *clustering*.

Si se permite a los clusters tener *subclusters*, se dice que tenemos un clustering *jerárquico*, que es un conjunto de clusters anidados que se organizan en forma de árbol (cada cluster en el árbol está formado por la unión de sus subclusters y la raíz del árbol es el cluster que contiene todos los objetos). El algoritmo más popular utilizado para generar un clustering jerárquico es conocida como clustering jerárquico *aglomerativo* y consiste en los siguientes pasos:

1. Comenzar con un conjunto de elementos  $\{a, b, c, d, \dots, z\}$  cada uno formando su propio cluster individual, es decir, el clustering inicial se define como:  $C_{t_0} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \dots, \{z\}\}$ .

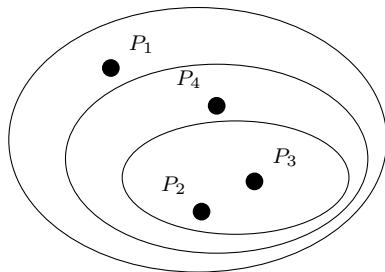
---

<sup>13</sup>El aprendizaje no supervisado es una rama del Machine Learning que aprende características sobre un conjunto de datos que no han sido clasificados o categorizados de ninguna manera. En un algoritmo de aprendizaje no supervisado, los datos de entrada  $x_i$  no están etiquetados, por lo que el algoritmo tiene que aprender a “separar los datos” sin ningún entrenamiento previo.

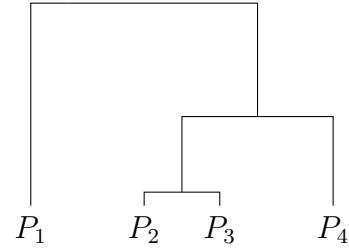
A su vez, comenzar con una matriz de distancia inicial  $D^{t_0}$  cuyas entradas  $d_{ij}^{t_0}$  estén definidas como la distancia entre los elementos  $i$  y  $j$  del clustering inicial  $C_{t_0}$ .

2. Al primer paso de tiempo se unen los dos clusters más *cercanos* (esto requiere definir una medida de distancia *entre clusters*)<sup>14</sup> y se **actualiza** la matriz de distancia a  $D^{t_1}$  de tal forma que esta matriz represente la distancia entre los clusters  $i$  y  $j$  del clustering  $C_{t_1}$ .
3. En los siguientes pasos se repite el paso 2 hasta haber formado un sólo cluster que contiene a todos los elementos iniciales, es decir, el clustering final está dado siempre por:  $C_{tf} = \{\{a, b, c, d, \dots, z\}\}$

El clustering jerárquico se representa gráficamente utilizando un diagrama de árbol conocido como *dendrograma*, cuya función es mostrar la relación entre cada uno de los clusters y el orden en que se unieron (véase un ejemplo en la Figura 3.7).



(a) Clustering jerárquico aglomerativo.



(b) Dendrograma.

**Figura 3.7: Algoritmo de Clustering Jerárquico.** El diagrama en (a) representa los pasos del algoritmo de clustering jerárquico aglomerativo. Los diferentes clusters que surgen con el algoritmo a cada paso de tiempo se pueden observar de mejor manera en el dendrograma en (b). En este caso,  $P_2$  y  $P_3$  son los elementos más cercanos entre sí y se agrupan para después continuar con  $P_4$  y  $P_1$  respectivamente.

Como se mencionó anteriormente, para llevar a cabo el algoritmo de clustering jerárquico es necesario definir una matriz de distancia entre elementos y una medida de distancia *entre*

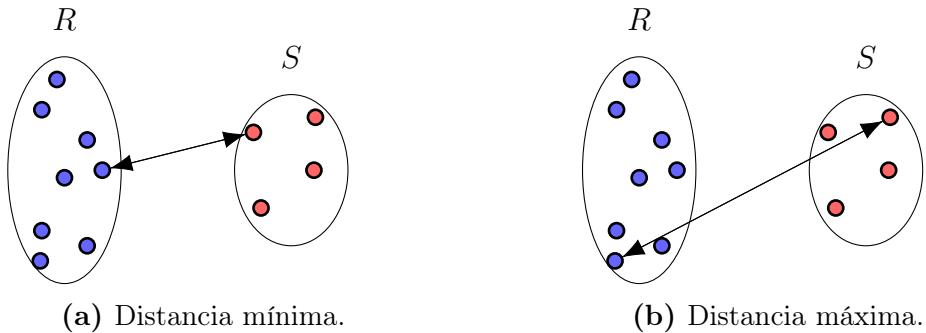
<sup>14</sup>Dada una matriz inicial de distancia  $D^{t_0}$  entre clusters y suponiendo que los clusters más cercanos son  $\{a\}$  y  $\{b\}$ , el clustering al primer paso de tiempo estaría dado por:  $C_{t_1} = \{\{a, b\}, \{c\}, \dots, \{z\}\}$

*clusters* para después, a cada paso de tiempo, actualizar la matriz de distancia y así unir los clusters más cercanos a cada paso de tiempo.

### 3.2.2.3. Distancia entre Clusters

Existen muchos métodos para medir distancia entre clusters de diferentes maneras dependiendo el caso de uso y el tipo de datos. Los siguientes dos métodos son los utilizados principalmente para problemas de clustering jerárquico [115]:

- **Distancia mínima:** En este caso, la distancia entre dos clusters está definida como la distancia *más pequeña* entre cualquier par de elementos, donde cada elemento pertenece a un cluster diferente (véase la Figura 3.8). Matemáticamente, la distancia entre dos clusters  $R$  y  $S$  está dada por  $d(R, S) = \min(\{d_{ij}, i \in R, j \in S\})$ , donde  $d_{ij}$  es la distancia entre un elemento  $i$  del cluster  $R$  y un elemento  $j$  del cluster  $S$ .
- **Distancia máxima:** En este caso, la distancia entre dos clusters está definida como la distancia *más grande* entre cualquier par de elementos, donde cada elemento pertenece a un cluster diferente (véase la Figura 3.8). Matemáticamente, la distancia entre dos clusters  $R$  y  $S$  está dada por  $d(R, S) = \max(\{d_{ij}, i \in R, j \in S\})$ , donde  $d_{ij}$  es la distancia entre un elemento  $i$  del cluster  $R$  y un elemento  $j$  del cluster  $S$ .



**Figura 3.8: Medidas de Distancia.** Existen dos principales formas de medir distancia entre clusters. En (a) se toma como distancia entre  $R$  y  $S$  el mínimo de las distancias entre cada par de elementos de cada cluster, y en (b), el máximo de las distancias entre cada par de elementos de cada cluster.

Una vez definida una medida de distancia entre clusters (y una matriz de distancia entre elementos), entonces se puede llevar a cabo el algoritmo de clustering jerárquico aglomerativo de la misma manera a la que se mencionó anteriormente.

### 3.2.2.4. La Matriz de Distancia entre Países

En este trabajo se utilizó un algoritmo de clustering jerárquico aglomerativo (véase el Algoritmo 5) para encontrar grupos de votación (o *clusters*) de países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión durante el periodo 2016-2023. Para llevar a cabo este algoritmo, se utilizó una matriz de distancia construida a partir de la matriz de frecuencias definida en 3.2.2.1.

**Definición 3.5 (Matriz de Distancia).** Matemáticamente, sea  $n$  el número de países totales que participan en el Concurso de la Canción de Eurovisión durante un número de años  $t$  (en nuestro caso,  $t = 7$ ). Para cada tipo de voto  $\alpha \in \{\text{Jurado}, \text{Público}\}$ , valor de voto  $\beta \in \{\text{Alto}, \text{Medio}, \text{Bajo}\}$ , y método de detección de comunidades  $m \in \{\text{Louvain}, \text{Infomap}\}$ , se define a la *matriz de distancia*  ${}_m\mathcal{D}_\beta^\alpha$  como la matriz de  $n \times n$  tal que:

$${}_m\mathcal{D}_\beta^\alpha = \mathbf{1} - \frac{1}{t} \cdot {}_m\mathcal{F}_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{t}f_{11} & \dots & 1 - \frac{1}{t}f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - \frac{1}{t}f_{n1} & \dots & 1 - \frac{1}{t}f_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

donde  $f_{ij}$  es la *frecuencia* con la que los países  $i$  y  $j$  aparecen juntos dentro de un módulo encontrado con el método  $m$  para las redes de tipo de voto  $\alpha$  y valor de voto  $\beta$  dentro de un periodo de tiempo de longitud  $t$ .

A diferencia de la matriz de frecuencias, las entradas de la matriz de distancia están normalizadas  $0 \leq d_{ij} \leq 1$ , de tal forma que cuantifican de manera independiente a  $t$  la *distancia* de un país con respecto a otro. Notemos de (3.7) que  $d_{ij} = 1$  para dos países que no compartieron módulo en ningún momento durante un periodo de longitud  $t$ , y  $d_{ij} = 0$  para el caso contrario <sup>15</sup>.

---

<sup>15</sup>Por definición,  $d_{ii} = 0$ , pues cada país siempre comparte módulo con sí mismo.

Una vez construidas las matrices de *distancia* (3.7), se utilizó un algoritmo de clustering jerárquico aglomerativo (véase el Algoritmo 5) junto con la medida de distancia *máxima* 3.2.2.3 para encontrar *clusters* de países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión durante el periodo 2016-2023. Como se mencionó anteriormente en 3.2.2.2, estos clusters se organizan de manera jerárquica y por ende, cambian conforme se itera en el algoritmo, por lo que para definir *grupos de votación* se seleccionaron los clusters de países que compartieron módulo **más** del 50 % de las veces durante el periodo 2016-2023 para cada valor de voto, tipo de voto y método de detección de comunidades.

### 3.3. Simulación de la Votación

Una vez encontrados *grupos de votación* dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión en 3.2.2, fue de interés utilizar esta información para tratar de predecir los resultados del concurso a través de las estrechas relaciones entre países. Específicamente, en esta sección, se detallan dos métodos de modelado para llevar a cabo una simulación de la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023<sup>16</sup> utilizando información de las redes de votación construidas en 3.1.2 y de los módulos encontrados en dichas redes en 3.2.

En este trabajo se propuso modelar la edición 2023 del Concurso de la Canción de Eurovisión para después calcular la *precisión* de la predicción de nuestro modelo en comparación con los resultados reales. Se utilizaron las siguientes hipótesis para construir dicho modelo:

1. Al formarse grupos de votación entre países participantes en el Concurso de la Canción de Eurovisión, sería de esperarse que estos se mantuvieran en el tiempo y por tanto, la probabilidad de que los países voten por otros dentro de su grupo de votación debería ser **mayor** a la probabilidad de votar por otros países.
2. Un buen modelo para simular la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión

---

<sup>16</sup>Cuando nos referimos al Concurso de la Canción de Eurovisión 2023, nos referimos únicamente a la final de dicho concurso, pues en esta etapa se mantienen aproximadamente constantes los países participantes.

2023 debería de utilizar **sólo** la información de años anteriores para modelar el concurso<sup>17</sup>, pues de otra forma sería imposible comparar las predicciones resultantes con los resultados reales. Esto puede pensarse en el contexto de Machine Learning como la separación de un conjunto de datos en un conjunto de entrenamiento y un conjunto de prueba.

Se propuso como primera aproximación para modelar la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 utilizar la *frecuencia* con la que los países participantes votaron entre sí durante el periodo 2016-2022 para construir redes *multiplex* con pesos 2.1.3, donde cada capa de la red representa un valor de voto diferente (Alto, Medio, Bajo), para después simular el proceso de votación muestreando los votos de los enlaces con pesos dentro de la red.

### 3.3.1. Las Redes Multiplex de Votación

Para modelar la votación en el Concurso de la Canción de Eurovisión 2023, se construyeron **2** redes multiplex  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  con dirección (ver sección 2.1.3), una para los votos del jurado y otra para los votos del público, donde  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_\beta : \beta \in \{\text{High, Medium, Low}\}\}$  es la familia de redes de votos (Altos, Medios o Bajos)  $G_\beta = (\mathcal{N}, \mathcal{L}_\beta)$  conocida como las capas de  $\mathcal{M}$ , donde los nodos  $\mathcal{N}$  de cada capa son los países participantes en la edición 2023 del Concurso de la Canción de Eurovisión y los pesos  $w_{ij}^\beta$  de cada enlace  $l_{ij}^\beta \in \mathcal{L}_\beta$  están definidos como la *frecuencia* con la que el país  $i$  votó por el país  $j$  un voto de valor  $\beta$  (Alto, Medio o Bajo) durante el periodo 2016-2022.

Matemáticamente, añadiendo un coeficiente de normalización, estos pesos están dados por:

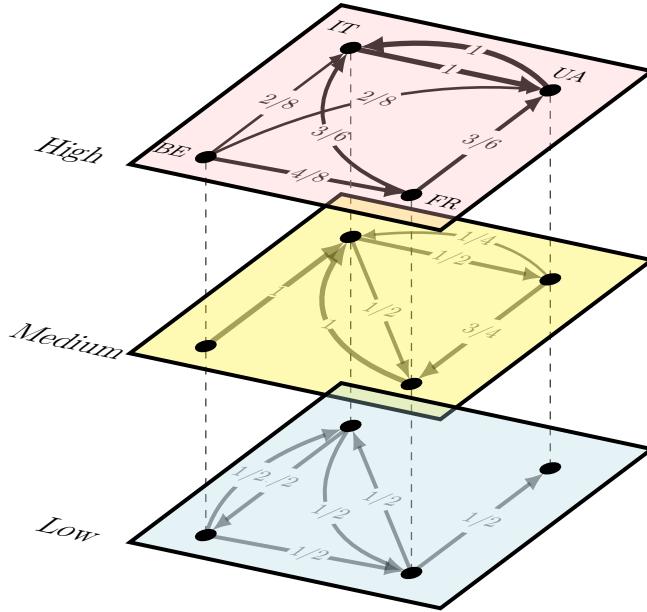
$$w_{ij}^\beta = \frac{f_{ij}^\beta}{\sum_k f_{ik}^\beta}, \quad (3.8)$$

donde  $f_{ij}^\beta$  representa la frecuencia con la que un país  $i$  votó por un país  $j$  un voto de valor  $\beta$  (Alto, Medio o Bajo) durante el periodo 2016-2022. Un ejemplo para una sub-red de votación

---

<sup>17</sup>A su vez, se deben incluir los países participantes (y votantes) sólo del año en cuestión.

del público para el Concurso de la Canción de Eurovisión está dado por la Figura 3.9.



**Figura 3.9: Red Multiplex de Votación con Pesos.** En este ejemplo se presenta una sub-red de votación del público para el Concurso de la Canción de Eurovisión. Podemos notar, por ejemplo, que Bélgica votó 2 veces votos altos por Italia, 2 por Ucrania y 4 por Francia, y es por esto que los pesos de los enlaces entre Bélgica y estos países son  $2/8$ ,  $2/8$  y  $4/8$  respectivamente.

Una vez definidas y construidas las redes multiplex  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  con pesos para los votos del jurado y del público durante el periodo 2016-2022, se simuló la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 utilizando un algoritmo que muestrea votos de estas redes de manera sesgada, donde la probabilidad de que un país  $i$  vote por un país  $j$  un voto con valor  $\alpha$  es equivalente al peso  $w_{ij}^\beta$  del enlace que los une.

### 3.3.2. Simulación del Eurovisión 2023: Primer Método

Sea  $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \dots, N\} = \mathcal{V} \cup \mathcal{P}$  el conjunto de  $N$  nodos (países) de la red multiplex de votación  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  (del jurado o del público) para el Concurso de la Canción de Eurovisión, donde  $\mathcal{V}$  es el conjunto de los países votantes y  $\mathcal{P}$  es el conjunto de los países participantes en la final. Se propuso un algoritmo que sigue el mismo proceso de votación detallado en 3.1.1,

llevado a cabo de la siguiente manera<sup>18</sup>:

1. Se define  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$  como el conjunto de posibles valores de votos que puede otorgar un país votante a un país participante y se selecciona de manera **aleatoria** un país votante  $v \in \mathcal{V}$ . A su vez, se definen los conjuntos  $\mathcal{R}_v^\beta = \{p \in \mathcal{P} \mid l_{vp} \in \mathcal{L}_\beta\}$ , como el conjunto de países participantes tales que tienen un enlace de  $v$  hacia ellos en la capa de votos  $\beta$  de la red multiplex  $\mathcal{M}$ .<sup>19</sup>
2. Se selecciona de manera **aleatoria** un valor de voto  $a \in \mathcal{A}$ .
  - Si  $1 \leq a \leq 4$ : se selecciona **con probabilidad**  $w_{vp}^{\text{Low}}$  un país participante  $p \in \mathcal{R}_v^{\text{Low}}$ , donde  $w_{vp}^{\text{Low}}$  es el peso del enlace  $l_{vp} \in \mathcal{L}_{\text{Low}}$  que va desde  $v$  hacia  $p$  en la capa de votos bajos de la red multiplex  $\mathcal{M}$ .
  - Si  $5 \leq a \leq 7$ : se selecciona **con probabilidad**  $w_{vp}^{\text{Medium}}$  un país participante  $p \in \mathcal{R}_v^{\text{Low}}$ , donde  $w_{vp}^{\text{Medium}}$  es el peso del enlace  $l_{vp} \in \mathcal{L}_{\text{Medium}}$  que va desde  $v$  hacia  $p$  en la capa de votos medios de la red multiplex  $\mathcal{M}$ .
  - Si  $8 \leq a \leq 12$ : se selecciona **con probabilidad**  $w_{vp}^{\text{High}}$  un país participante  $p \in \mathcal{R}_v^{\text{Low}}$ , donde  $w_{vp}^{\text{High}}$  es el peso del enlace  $l_{vp} \in \mathcal{L}_{\text{High}}$  que va desde  $v$  hacia  $p$  en la capa de votos altos de la red multiplex  $\mathcal{M}$ .

A continuación, se otorga un voto de valor  $a$  desde  $v$  hacia  $p$  y se elimina  $a$  de  $\mathcal{A}$ .

3. Se elimina  $p$  de todos los conjuntos  $\mathcal{R}_v^\beta$  y por ende, se ajustan las probabilidades de seleccionar un elemento dado de estos conjuntos llevando a cabo una re-normalización de las mismas de la siguiente manera<sup>20</sup> (véase la Figura 3.10):

$$w_{vj}^\beta = \frac{f_{vj}^\beta}{\sum_{k \neq p} f_{vk}^\beta}, \quad \forall j \in \mathcal{R}_v^\beta - \{p\} \quad (3.9)$$

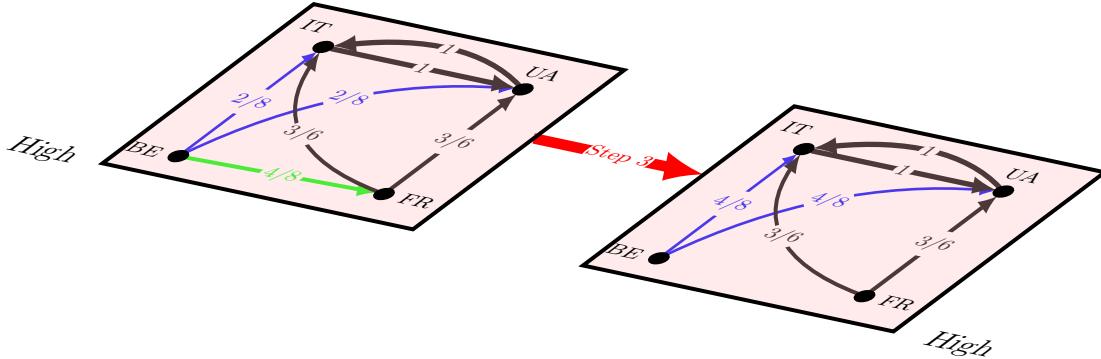
---

<sup>18</sup>El algoritmo simula la votación del jurado y del público de la misma forma, por lo que es indistinguible en cualquiera de los dos casos.

<sup>19</sup>Notemos que por definición estos conjuntos no incluye a  $v$ , pues un país no puede votar por sí mismo.

<sup>20</sup>Este proceso es equivalente a eliminar todos los enlaces que apunten desde  $v$  hacia  $p$  y actualizar los pesos de los enlaces restantes.

4. Se repiten los pasos **2** y **3** hasta que  $\mathcal{A} = \{\}$ , es decir, hasta que el país votante  $v$  haya otorgado 10 valores de votos.
5. Finalmente, se elimina  $v$  de  $\mathcal{V}$  y se repiten los pasos **1-4** hasta que  $\mathcal{V} = \{\}$ , es decir, hasta que todos los países votantes hayan otorgado 10 valores de votos.



**Figura 3.10: Algoritmo de Simulación del Concurso de la Canción de Eurovisión.** En esta figura se presenta un ejemplo del proceso con que se simuló el Concurso de la Canción de Eurovisión. Específicamente, suponiendo que Bélgica fue seleccionado como país votante y se seleccionó un voto  $a \in \mathcal{A}$  con valor alto, notemos que este país puede votar por Italia (con probabilidad  $2/8$ ), por Ucrania (con probabilidad  $2/8$ ), o por Francia (con probabilidad  $4/8$ ). Suponiendo que se seleccionó Francia como país receptor del voto con valor  $a$ , en el siguiente paso Bélgica no puede volver a votar por el mismo país, es por eso que se elimina el enlace entre estos dos países y se re-normalizan los pesos de los enlaces restantes, dando sólo dos posibilidades: votar por Italia o Ucrania (con probabilidad  $4/8$  en ambos casos).

Notemos que el algoritmo anterior puede ser utilizado para simular la votación del público o del jurado indistintamente y garantiza que cada país votante en el Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 otorgue una lista de 10 votos (con valores  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$ ) a un subconjunto de los países participantes  $\mathcal{P}$  en la misma edición del concurso. Se utilizó este algoritmo para simular la votación del público y del jurado del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023.

Dado que existe la posibilidad de que un país vote por otro sin que exista una historia de votación previa entre ambos países, se propuso también una generalización del algoritmo anterior con la posibilidad de que la votación sea llevada a cabo de manera **aleatoria**. Es

decir, se introdujo un coeficiente  $\alpha \in [0, 1)$  tal que indica la **probabilidad** con la que un país  $i$  vote por un país  $j$ , tal que este último sea seleccionado de manera aleatoria<sup>21</sup>.

### 3.3.3. Simulación del Eurovisión 2023: Primer Método + Ruido

Sean  $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \dots, N\} = \mathcal{V} \cup \mathcal{P}$  el conjunto de  $N$  nodos (países) de la red multiplex de votación  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  (del jurado o del público) para el Concurso de la Canción de Eurovisión, donde  $\mathcal{V}$  es el conjunto de los países votantes, y  $\mathcal{P}$  es el conjunto de los países participantes en la final y  $\alpha \in [0, 1)$  el coeficiente de probabilidad definido anteriormente. El algoritmo de votación **generalizado** se lleva a cabo de la siguiente manera:

1. Se define  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$  como el conjunto de posibles valores de votos que puede otorgar un país votante a un país participante y se selecciona de manera **aleatoria** un país votante  $v \in \mathcal{V}$ . Se definen los conjuntos  $\mathcal{R}_v^\beta = \{p \in \mathcal{P} \mid l_{vp} \in \mathcal{L}_\beta\}$ , como el conjunto de países participantes tales que tienen un enlace de  $v$  hacia ellos en la capa de votos  $\beta$  de la red multiplex  $\mathcal{M}$ .
2. Se selecciona de manera **aleatoria** un valor de voto  $a \in \mathcal{A}$  y se selecciona de manera aleatoria un número  $x \in [0, 1)$ :
  - Si  $x < \alpha$ : Se selecciona con probabilidad **uniforme** un país participante  $p \in \mathcal{P}$ .
  - Si  $x > \alpha$ : Existen 3 distintas posibilidades:
    - Si  $1 \leq a \leq 4$ : se selecciona **con probabilidad**  $w_{vp}^{\text{Low}}$  un país participante  $p \in \mathcal{R}_v^{\text{Low}}$ , donde  $w_{vp}^{\text{Low}}$  es el peso del enlace  $l_{vp} \in \mathcal{L}_{\text{Low}}$  que va desde  $v$  hacia  $p$  en la capa de votos bajos de la red multiplex  $\mathcal{M}$ .
    - Si  $5 \leq a \leq 7$ : se selecciona **con probabilidad**  $w_{vp}^{\text{Medium}}$  un país participante  $p \in \mathcal{R}_v^{\text{Low}}$ , donde  $w_{vp}^{\text{Medium}}$  es el peso del enlace  $l_{vp} \in \mathcal{L}_{\text{Medium}}$  que va desde  $v$  hacia  $p$  en la capa de votos medios de la red multiplex  $\mathcal{M}$ .

---

<sup>21</sup>Esto puede verse como un método para añadir “ruido” aleatorio a nuestro algoritmo.

- Si  $8 \leq a \leq 12$ : se selecciona **con probabilidad**  $w_{vp}^{\text{High}}$  un país participante  $p \in \mathcal{R}_v^{\text{Low}}$ , donde  $w_{vp}^{\text{High}}$  es el peso del enlace  $l_{vp} \in \mathcal{L}_{\text{High}}$  que va desde  $v$  hacia  $p$  en la capa de votos altos de la red multiplex  $\mathcal{M}$ .

A continuación, se otorga un voto de valor  $a$  desde  $v$  hacia  $p$  y se elimina  $a$  de  $\mathcal{A}$ .

3. Se elimina  $p$  de  $\mathcal{P}$  y de todos los conjuntos  $\mathcal{R}_v^\beta$  y por ende, se ajustan las probabilidades de seleccionar un elemento dado de estos conjuntos llevando a cabo una re-normalización de las mismas utilizando la ecuación (3.9) (véase también la Figura 3.10).
4. Se repiten los pasos **2** y **3** hasta que  $\mathcal{A} = \{\}$ , es decir, hasta que el país votante  $v$  haya otorgado 10 valores de votos.
5. Finalmente, se elimina  $v$  de  $\mathcal{V}$  y se repiten los pasos **1-4** hasta que  $\mathcal{V} = \{\}$ , es decir, hasta que todos los países votantes hayan otorgado 10 valores de votos.

Este algoritmo se implementó computacionalmente como se muestra en el Algoritmo 6. Como en el caso anterior, se utilizó este algoritmo con  $\alpha = 0.1$  para simular la votación del público y del jurado del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023.

### 3.3.4. Simulación del Eurovisión 2023: Método de Comunidades

Como se mencionó al inicio de esta sección, es de interés estudiar si las comunidades de países encontradas en la sección 3.2.1 *afectan* los resultados del Concurso de la Canción de Eurovisión y por ende, pueden ser utilizadas para simular los resultados del mismo. Es por esto que se propuso una segunda aproximación para modelar la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 construyendo redes multiplex con pesos de la misma forma que en la sección 3.3.1. En este caso, los pesos  $w_{ij}^\beta$  entre cada par de nodos  $(i, j)$  unidos por un enlace en cada capa  $\beta$  están dados por:

$$w_{ij}^\beta = \frac{f_{ij}^\beta}{\sum_k f_{ik}^\beta}, \quad (3.10)$$

donde  $f_{ij}^\beta$  representa la frecuencia con la que un país  $i$  *compartió* comunidad (definida con el método de Louvain o Infomap) con un país  $j$  en la red de votación (del Jurado o del Público) de votos con valor  $\beta$  (Alto, Medio o Bajo) durante el periodo 2016-2022 para el Concurso de la Canción de Eurovisión.

Notemos que estas redes multiplex contienen la información de los *grupos de votación* que surgen en el Concurso de la Canción de Eurovisión. Una vez definidas estas nuevas redes, se utilizaron los mismos algoritmos definidos en las secciones 3.3.2 y 3.3.3 para simular el Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 de la misma forma que en los casos anteriores.

En resumen, se simuló el Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 utilizando los algoritmos presentados en las secciones 3.3.2 - 3.3.4. De esta forma se obtuvieron resultados para los siguientes casos:

1. Primer Método (Algoritmo 6 con  $\alpha = 0$ ) para la votación del **Jurado** y del **Público**.
2. Primer Método + Ruido (Algoritmo 6 con  $\alpha = 0.1$ ) para la votación del **Jurado** y del **Público**.
3. Método de Comunidades de Louvain (Algoritmo 6 con  $\alpha = 0$  y con los módulos encontrados con el Algoritmo de Louvain) para la votación del **Jurado** y del **Público**.
4. Método de Comunidades de Infomap (Algoritmo 6 con  $\alpha = 0$  y con los módulos encontrados con el Algoritmo de Infomap) para la votación del **Jurado** y del **Público**.
5. Método de Comunidades de Louvain + Ruido (Algoritmo 6 con  $\alpha = 0.1$  y con los módulos encontrados con el Algoritmo de Louvain) para la votación del **Jurado** y del **Público**.
6. Método de Comunidades de Infomap + Ruido (Algoritmo 6 con  $\alpha = 0.1$  y con los módulos encontrados con el Algoritmo de Infomap) para la votación del **Jurado** y del **Público**.

Para obtener resultados relevantes, se simuló el Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 un número  $n = 10000$  de veces en cada uno de los casos y se *contaron* las veces que cada uno de los países participantes finalizó en 1<sup>er</sup> lugar, 2<sup>do</sup> lugar, etc. De esta forma, en cada caso se obtuvieron las *probabilidades*  $p_i^l$  de que cada país participante  $i \in \mathcal{P}$  finalizara en un lugar  $l \in \{1, 2, \dots, 26\}$  para el Concurso de la Canción de Eurovisión 2023.

### 3.3.5. Precisión de las Simulaciones

Una vez obtenidas las probabilidades o *predicciones*  $p_i^l$  de que cada país participante  $i \in \mathcal{P}$  finalizara en un lugar  $l \in \{1, 2, \dots, 26\}$  fue necesario definir una *métrica* con la cual evaluar nuestros resultados y comparar su *precisión* con respecto a un modelo de predicción aleatorio<sup>22</sup>. Para esto, se utilizó el **Índice de Habilidad de Brier**.

#### 3.3.5.1. El Índice de Brier

El índice de Brier (*Brier score* en inglés) es una medida propuesta en 1950 por Glenn W. Brier definida para cuantificar la precisión con la que una predicción probabilística pronostica el resultado de un evento [116]. Una predicción probabilística se refiere a un evento en específico (por ejemplo: la probabilidad de que llueva hoy es  $p = 0.25$ ) donde el resultado es de tipo binario (por ejemplo: llovió o no llovió).

**Definición 3.6 (Índice de Brier).** Matemáticamente, dado un conjunto de  $N$  eventos  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  con resultados<sup>23</sup>  $O = \{o_1, o_2, \dots, o_N\}$  y un conjunto de predicciones<sup>24</sup> para estos eventos  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ , el índice de Brier está definido como el *error cuadrático medio* entre las predicciones y sus correspondientes resultados:

$$BS = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (f_t - o_t)^2, \quad (3.11)$$

---

<sup>22</sup>En este caso, un modelo donde cada país tiene una probabilidad *uniforme* de terminar en cada uno de los lugares  $l \in \{1, 2, \dots, 26\}$ .

<sup>23</sup>Estos resultados son de carácter binario, es decir, si el evento  $e_i$  sucedió, entonces  $o_i = 1$  y si no sucedió,  $o_i = 0$ . Por tanto  $o_i \in \{0, 1\}$  para todos los casos.

<sup>24</sup>Estas predicciones son probabilidades, por lo que  $0 \leq f_i \leq 1$  y  $\sum_i f_i = 1$ .

donde  $N$  es el número de eventos,  $f_t$  es la predicción (una probabilidad entre 0 y 1) del evento  $t$ -ésimo y  $o_t$  es el resultado (0 o 1) del mismo evento.

Notemos de (A.2), que  $0 \leq BS \leq 1$ , donde  $BS = 1$  refleja una precisión perfecta (i.e., no hay diferencia entre las predicciones y los resultados) para predecir los resultados y  $BS = 0$  refleja una perfecta imprecisión (i.e., se asignaron probabilidades de 0 para eventos que ocurren y viceversa) para predecir los mismos.

En general, grandes diferencias entre las predicciones y los resultados reflejan grandes errores para predecir los resultados, por lo que un índice de Brier *bajo* indica *mayor* precisión de predicción.

### 3.3.5.2. El Índice de Habilidad de Brier

El índice de Brier es una buena medida para indicar la precisión de una predicción, pero no para indicar qué tan precisa es la predicción *en comparación* con otra. Muchas veces, aunque el índice de Brier sea alto, puede que una predicción usando otro modelo sea mejor. Es por esto que se define el Índice de Habilidad de Brier (*Brier Skill Score* en inglés) como una medida de precisión para una predicción *relativa* a la predicción dada por un modelo de referencia.

El modelo de referencia normalmente representa un modelo sobre el cual se quiere mejorar, como un pronóstico a largo plazo o una estadística similar.

**Definición 3.7 (Índice de Habilidad de Brier).** Matemáticamente, el índice de habilidad de Brier está definido como:

$$BSS = 1 - \frac{BS}{BS_{ref}}, \quad (3.12)$$

donde  $BS$  es el índice de Brier para un conjunto de predicciones y  $BS_{ref}$  es el índice de Brier para un conjunto de predicciones dadas por un modelo de referencia.

El índice de habilidad de Brier es más fácil de interpretar que el índice de Brier pues es

simplemente el porcentaje de mejora de un modelo a comparación con el modelo de referencia.

Notemos de (3.12) que  $-\infty \leq BSS \leq 1$ :

- $BSS < 0$  significa que las predicciones son menos precisas que el modelo de referencia.
- $BSS = 0$  significa que no existe mejora de las predicciones en contraste con el modelo de referencia.
- $BSS \simeq 1$  significa que hay una gran mejora de las respecto al modelo de referencia.

En nuestro caso, se definió el *Índice de Brier* para la predicción de cada uno de los lugares del Concurso de la Canción de Eurovisión de la siguiente forma:

$$BS^l = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (p_t^l - o_t^l)^2, \quad (3.13)$$

donde  $N$  representa el número de países participantes en la final del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023,  $p_t^l$  representa la **probabilidad**<sup>25</sup> de que un país  $t$  finalice en el lugar  $l$  en la final del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 y  $o_t^l$  representa el resultado final i.e. el lugar  $l$  en el que un país  $t$  finalizó en la final del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023<sup>26</sup>.

Finalmente, se obtuvo el *Índice de Habilidad de Brier* para la predicción de cada uno de los lugares del Concurso de la Canción de Eurovisión de la siguiente forma:

$$BSS^l = 1 - \frac{BS^l}{BS_{ref}}, \quad (3.14)$$

donde  $BS_{ref}$  es el Índice de Brier para un modelo de referencia. En nuestro caso el modelo de referencia es el caso *aleatorio*. Es decir, el caso en el que la *probabilidad* de que un país  $t$  finalice en un lugar  $l$  en la final del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 es igual a:

$$\frac{1}{N}, \quad \forall l \in \{1, \dots, N\} \quad (3.15)$$

---

<sup>25</sup>Esta probabilidad es calculada para cada uno de los métodos definidos en 3.3.4.

<sup>26</sup> $o_t^l = 1$  sólo para el lugar  $l$  donde el país  $t$  finalizó y  $o_t^l = 0$  en cualquier otro caso.

De esta manera se cuantificó la *precisión* con la que se predijo el resultado para cada lugar  $l \in \{1, \dots, 26\}$  para cada uno de los modelos de predicción definidos en 3.3.4 respecto a la precisión de un modelo aleatorio. En otras palabras, se cuantificó el porcentaje de *mejora* dado por nuestro modelo de predicción con respecto al caso de predicción *aleatoria*.

# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo, se presentan y discuten los resultados de aplicar nuestra metodología 3 a las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión para detectar módulos y analizar la evolución de dichos módulos a través del tiempo y a su vez, tratar de predecir los resultados del concurso utilizando información de las redes y de los mismos módulos.

### 4.1. Las Redes de Votación del Eurovisión

Como se expuso en la sección 3.1.2, para el análisis se construyeron **42** redes dirigidas de votación: **3** redes por valor de voto (alto, medio o bajo)  $\times$  **2** tipos de voto (jurado o público)  $\times$  **7** años de análisis (desde el 2016 al 2023).

Valor de Voto	$\langle N \rangle$	$\langle E \rangle$	$\langle k^{\text{in}} \rangle$	$\langle k^{\text{out}} \rangle$
Bajo	41.1	164.6	4	4
Medio	41.1	123.5	3	3
Alto	41.1	123.5	3	3

**Tabla 4.1: Propiedades de las Redes de Votación para el Concurso de la Canción de Eurovisión.** En esta tabla se reporta el número *promedio* de nodos  $\langle N \rangle$ , enlaces  $\langle E \rangle$ , *in-degree*  $\langle k^{\text{in}} \rangle$  y *out-degree*  $\langle k^{\text{out}} \rangle$  para las redes de votos Altos, Medios y Bajos durante el periodo 2016-2023. Es importante notar que los resultados son los mismos tanto para las redes del Jurado, como para las redes del Público.

Podemos observar de la tabla 4.1 que dichas redes están compuestas por un número **pro-**

**medio**  $\langle N \rangle \approx 41$  de nodos <sup>1</sup>, con un número de enlaces promedio **dependiente del grado** promedio de la red de la siguiente manera:

$$\langle E \rangle = \langle N \rangle \cdot \langle k^{\text{out}} \rangle. \quad (4.1)$$

Esto es por definición pues cada país participante vota por 4 países distintos para votos de valor Bajo y por 3 países distintos para votos de valor Medio/Alto.

A su vez, como se mencionó en la sección 3.1.3, se construyó un modelo de *Red Aleatoria* para cada una de las redes con el objetivo de comparar sus propiedades con lo que se obtendría si los enlaces de dichas redes fueran dados completamente *al azar*. Específicamente se compararon: el **Coeficiente de Clustering**, la **Reciprocidad** y la **Asortatividad de Grado** para cada una de las redes *reales* y su contraparte *aleatoria*.

#### 4.1.1. El Modelo de Configuración Dirigido

Para el modelo de Red Aleatoria se eligió el **Modelo de Configuración Dirigido** pues este modelo (véase la sección 2.3.2) es particularmente útil para analizar la estructura de redes reales que están caracterizadas por su *distribución de grado* <sup>2</sup>. Sin embargo, como se discutió en 3.1.3, este modelo tiene limitantes pues puede contener *auto-enlaces* o *multi-enlaces* disminuyendo su semejanza con una red de votación real, es por esto que se decidió eliminar estos enlaces al final del proceso de creación del modelo.

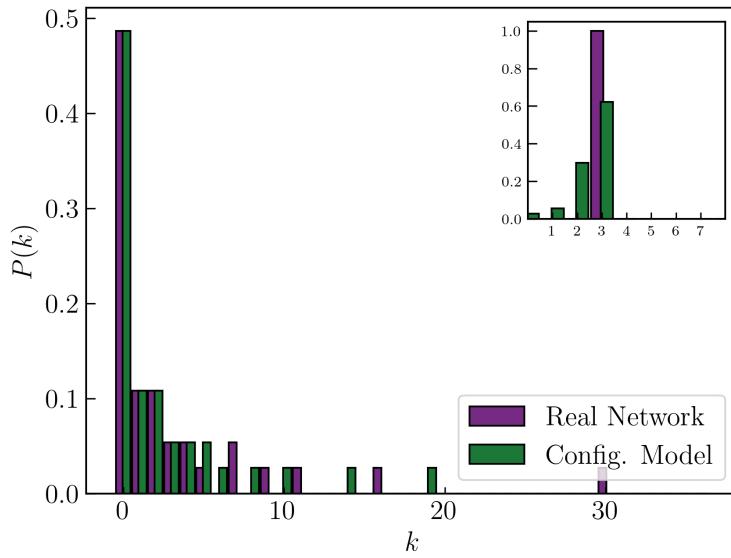
En la Figura 4.1 se presenta un ejemplo de la distribución de grado  $P(k)$  ( $k^{\text{in}}$  o  $k^{\text{out}}$ ) para una de las redes de votación construidas y su respectivo Modelo de Configuración<sup>3</sup>. Como podemos observar, al eliminar *auto-enlaces* y *multi-enlaces* al finalizar el proceso de construcción del

<sup>1</sup>Recordemos que cada año los países participantes en la final pueden cambiar.

<sup>2</sup>En nuestro caso es importante mantener la distribución de grado de la votación pues sabemos que cada país votante **debe** votar por 10 países participantes.

<sup>3</sup>Formalmente, un ensamble de  $n = 10000$  Modelos de Configuración. La distribución de grado obtenida es un promedio de los resultados para todo el ensamble.

Modelo de Configuración dicho modelo no presenta **exactamente** la misma distribución de grado que la red real. Sin embargo, estas distribuciones son muy similares (de hecho, son exactamente iguales para redes con  $n \rightarrow \infty$ ) y es por eso que se decidió tomar este modelo como un modelo *nulo* con el cual comparar las propiedades de las redes de votación reales.

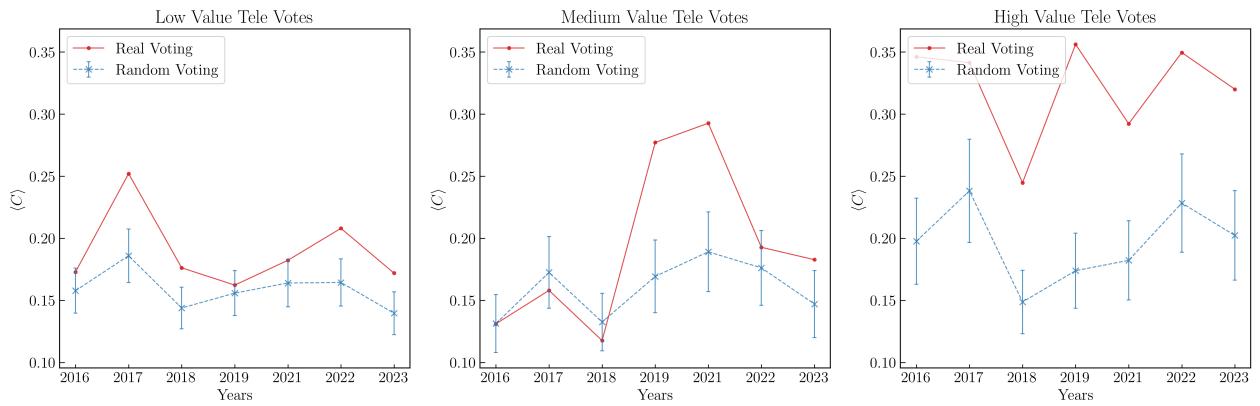


**Figura 4.1: Distribución de grado para la red de votos altos del público del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023.** En esta figura se muestra la distribución de *in-degree*  $P(k^{\text{in}})$  y *out-degree*  $P(k^{\text{out}})$  (esquina superior derecha) para la red de votos altos del público del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023. A su vez se muestra la misma distribución para el Modelo de Configuración. Podemos observar que la distribución  $P(k^{\text{in}})$  del Modelo de Configuración mantiene la estructura original de la red real salvo algunas diferencias para valores de  $k$  altos. Sin embargo, para el caso de la distribución  $P(k^{\text{out}})$  estas diferencias son más notorias pues no se mantiene la restricción que  $k = 3$  para todos los nodos en la red.

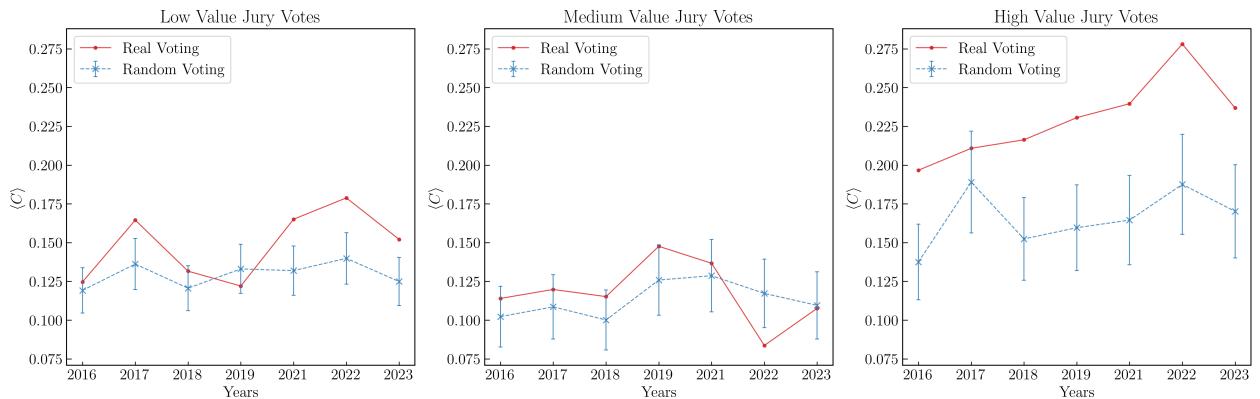
De la Figura 4.1 también es importante notar que en general para las redes de votación construidas, la distribución de *in-degree* es una distribución de *cola larga*, donde la mayoría de los países en la red obtienen un número  $k < 10$  de votos con algunos países recibiendo  $k > 30$  votos. Esto de acuerdo a la naturaleza de la votación, pues se espera que los países ganadores hayan recibido una gran cantidad de votos respecto a los demás, que pueden o no haber participado en la final (véase que existe una gran cantidad de nodos con  $k^{\text{in}} = 0$ ).

#### 4.1.1.1. Coeficiente de Clustering

Una vez construido el Modelo de Configuración para cada una de las redes definidas previamente se obtuvo el *coeficiente de clustering* promedio  $\langle C \rangle$  2.2.2 para dichas redes y para su respectivo *ensamble* del Modelo de Configuración. Los resultados se pueden observar en la Figura 4.2.



(a) Coeficiente de Clustering promedio  $\langle C \rangle$  para las redes de votación del público para votos Bajos (izquierda), Medios (centro) y Altos (derecha).



(b) Coeficiente de Clustering promedio  $\langle C \rangle$  para las redes de votación del jurado para votos Bajos (izquierda), Medios (centro) y Altos (derecha).

**Figura 4.2: Coeficiente de Clustering para las Redes de Votación y el Modelo de Configuración.** En esta figura se observa que para las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión el coeficiente de clustering promedio  $\langle C \rangle$  para las redes de votos **altos** es generalmente **mayor** que el coeficiente obtenido para su respectivo ensamble *aleatorio*, en contraste con las redes de votos medios y bajos que exhiben un valor de  $\langle C \rangle$  mucho más cercano a lo que se obtendría para una red de votación aleatoria.

Del resultado anterior podemos observar que las redes de votación del **público** para valores de votos **altos** presentan un valor de  $\langle C \rangle \approx 0.3$  más alto que lo que se esperaría si la votación se llevara a cabo de manera *aleatoria*. Este resultado sugiere que existe una mayor *probabilidad* de que dos países voten el uno por el otro dado que votaron por un tercer país en común. A su vez, esto evidencia que se forman grupos de votación o *cliques* de países dentro del concurso cuando el voto tiene mayor *importancia*<sup>4</sup>. En contraste con lo anterior, las redes de votación del **público** para valores de votos **medios** y **bajos** no presentan este patrón, por lo que podemos concluir que la votación para valores de votos *menores* se asemeja de mayor forma a una votación aleatoria.

Por otro lado, para las redes de votos altos del **jurado** se observa un comportamiento análogo a la votación del público, contrario a nuestra hipótesis que la votación del jurado se asemeja a una votación aleatoria independientemente del valor del voto. Este resultado sugiere que *también* existen grupos de votación para votos altos dentro de la votación del jurado aunque con menor *probabilidad* que en el caso del público ( $\langle C \rangle \approx 0.2$ ).

#### 4.1.1.2. Reciprocidad

De la misma forma se obtuvo la *reciprocidad*<sup>5</sup>  $r_{\leftrightarrow}$  (sección 3.1.3.2) para cada una de las redes definidas previamente y su respectivo ensamble del Modelo de Configuración. De manera análoga al coeficiente de clustering, podemos observar en la Figura 4.2 que la reciprocidad  $r$  presenta consistentemente valores mayores para redes de votos **altos** ( $r_{\leftrightarrow} \approx 0.15$ ) con respecto a sus contra-partes aleatorias ( $r_{\leftrightarrow} \approx 0$ ), con valores de  $r_{\leftrightarrow}$  más altos para las redes de votación del público.

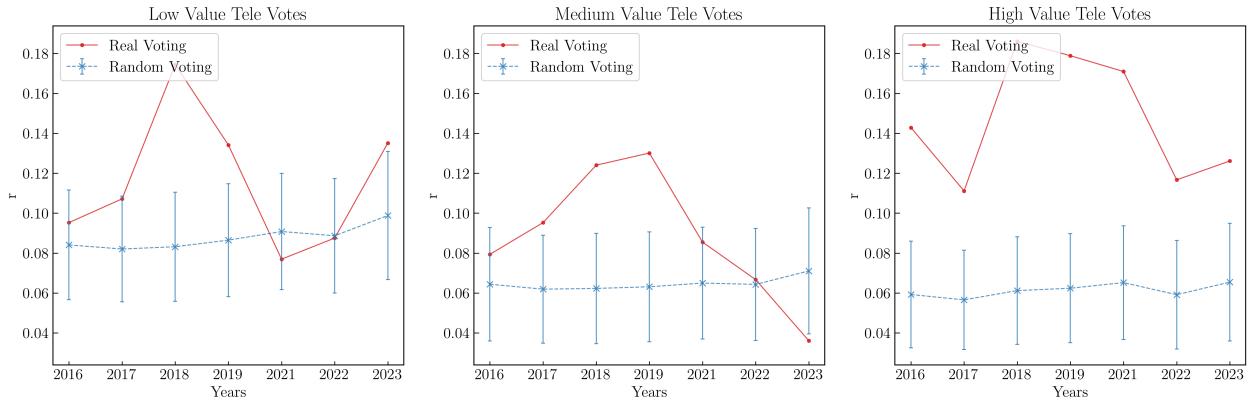
En contraste con lo anterior, las redes de votos **medios** y **bajos** no presentan un comportamiento distinto a lo que se esperaría de un modelo aleatorio. Estos resultados fortalecen

---

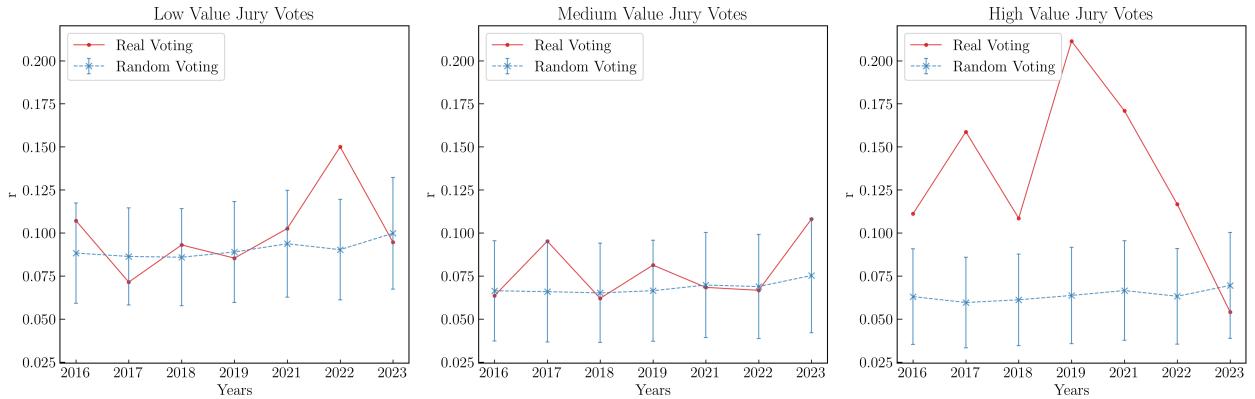
<sup>4</sup>Podemos asumir que un voto es más *importante* si su valor es más alto.

<sup>5</sup>En este caso, la reciprocidad, representada por el coeficiente  $r_{\leftrightarrow}$ , mide en qué medida los votos entre dos países son mutuos, es decir, si un país A vota por B, también es probable que B vote por A.

nuestra hipótesis mostrando que existen relaciones de *intercambio* entre países dentro del concurso dependiendo de la *importancia* del voto, pues existe aproximadamente un 15 % de probabilidad que un país vote por otro un voto de valor alto dado que dicho país también hizo lo mismo.



(a) Reciprocidad  $r_{\leftrightarrow}$  para las redes de votación del público para votos Bajos (izquierda), Medios (centro) y Altos (derecha).



(b) Reciprocidad  $r_{\leftrightarrow}$  para las redes de votación del jurado para votos Bajos (izquierda), Medios (centro) y Altos (derecha).

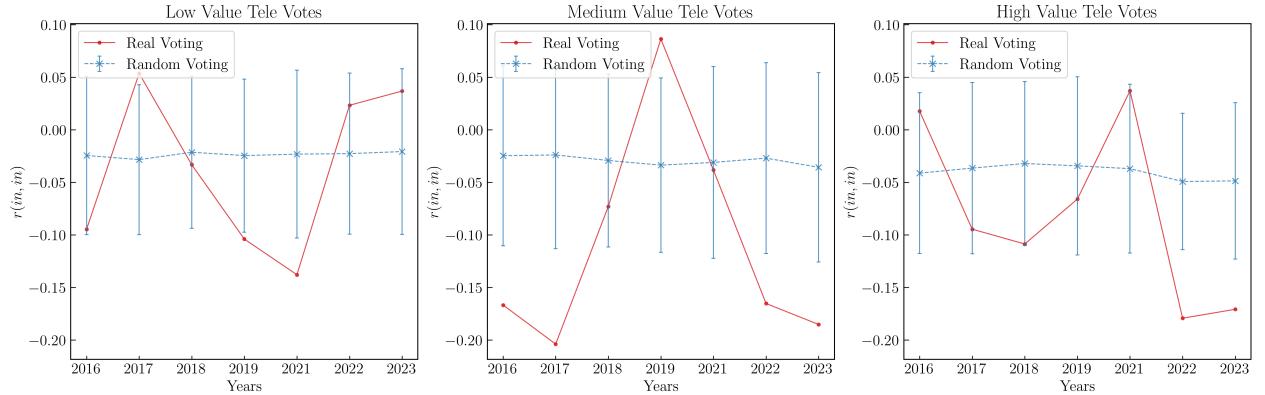
**Figura 4.3: Reciprocidad para las Redes de Votación y el Modelo de Configuración.** En esta figura se observa que para las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión la reciprocidad  $r_{\leftrightarrow}$  para las redes de votos **altos** es generalmente **mayor** que la reciprocidad obtenida para su respectivo ensamble *aleatorio*, en contraste con las redes de votos medios y bajos que exhiben un valor de  $r_{\leftrightarrow}$  muy cercano a 0.

En general, los resultados para el coeficiente de clustering  $\langle C \rangle$  y la reciprocidad  $r_{\leftrightarrow}$  sugieren que la existencia de *grupos* de países dentro de la votación está condicionada al *valor* del voto otorgado por país, donde las redes de votos *altos* pues las redes de valores de votos

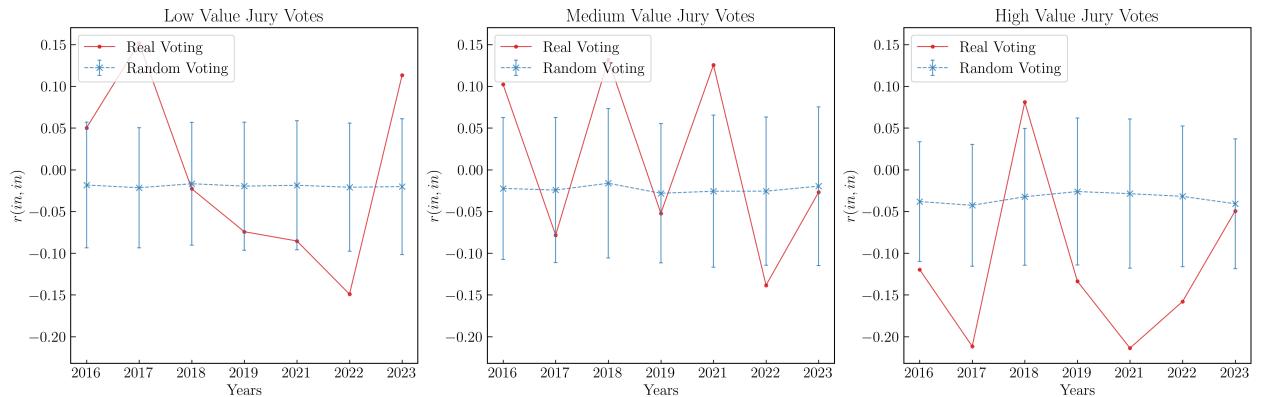
bajos/medios son indistinguibles de lo que se observaría en una votación aleatoria.

#### 4.1.1.3. Asortatividad de Grado (In-Degree)

Finalmente, también se obtuvo la *asortatividad de grado* (véase 3.1.3.3) para cada una de las redes definidas previamente y su respectivo *ensamble* del Modelo de Configuración.



(a) Asortatividad de *in-degree*  $r(\text{in}, \text{in})$  para las redes de votación del público para votos Bajos (izquierda), Medios (centro) y Altos (derecha).



(b) Asortatividad de *in-degree*  $r(\text{in}, \text{in})$  para las redes de votación del jurado para votos Bajos (izquierda), Medios (centro) y Altos (derecha).

**Figura 4.4: Asortatividad de Grado para las Redes de Votación y el Modelo de Configuración.** En esta figura se observa que para las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión la asortatividad de *in-degree* oscila alrededor de  $r(\text{in}, \text{in}) \approx 0$  y no existe una diferencia significativa respecto a los valores obtenidos para su contraparte *aleatoria*.

Como podemos observar en la Figura 4.4, no existe una diferencia significativa entre los valores de asortatividad de *in-degree* de las redes de votación y su respectivo modelo aleatorio.

A su vez, podemos observar que estos valores oscilan alrededor del  $r(\text{in}, \text{in}) \approx 0$  por lo que podemos concluir que no existe una organización particular entre países de acuerdo al número de votos que reciben.

## 4.2. Estructura Modular en las Redes de Votación

A partir del análisis expuesto en la sección anterior, podemos observar que las redes de votos **altos** para el Concurso de la Canción de Eurovisión presentan valores de *clustering* y *reciprocidad* consistentemente distintos a lo que se esperaría para una votación aleatoria. A pesar de que el tamaño de estas redes es pequeño y hay una gran probabilidad de conexión, esto sugiere la existencia de patrones de preferencia y **grupos de votación** cuando el valor del voto es *significativo* para el resultado final de la votación.

### 4.2.1. Detección de Comunidades en las Redes de Votación

La discusión anterior hace evidente la relevancia de aplicar técnicas de detección de **comunidades** en las redes de votación para identificar agrupaciones de nodos que están densamente conectados entre sí, pues esto podría corresponder a bloques de países que votan entre sí en el contexto del Concurso de la Canción de Eurovisión.

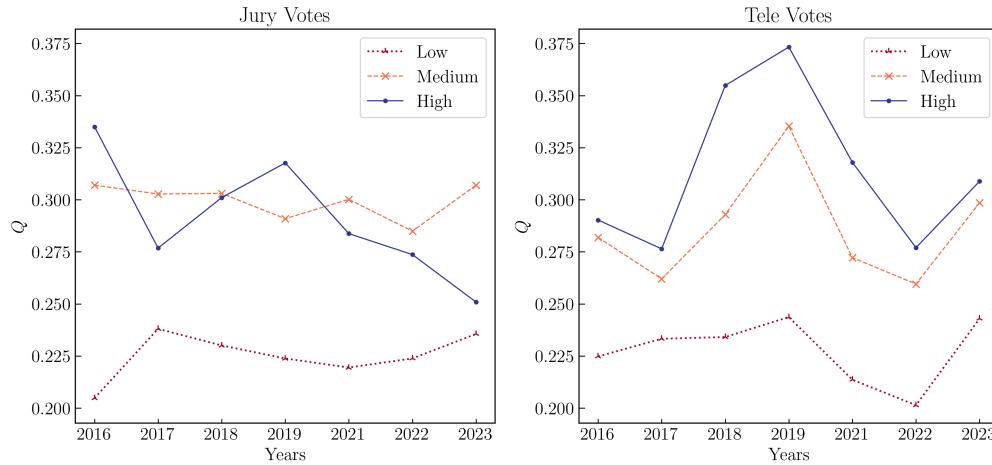
#### 4.2.1.1. Método de Louvain

El primer algoritmo que se utilizó para detectar comunidades dentro de las redes de votación fue el *Método de Louvain* (sección 3.2.1.1). Como se mencionó anteriormente, este algoritmo está basado en la optimización de la modularidad  $Q^6$ , donde este valor es mayor cuando la fracción de los enlaces que están dentro de las comunidades es mayor de lo que se esperaría en una red con la misma distribución de grados pero con conexiones aleatorias. En otras palabras, el algoritmo de Louvain busca *maximizar* la presencia de enlaces intra-comunidad y minimizar

---

<sup>6</sup>Véase la ecuación 3.4.

los enlaces inter-comunidad, lo que sugiere una estructura modular o de comunidades en la red (véase la Figura D.1).



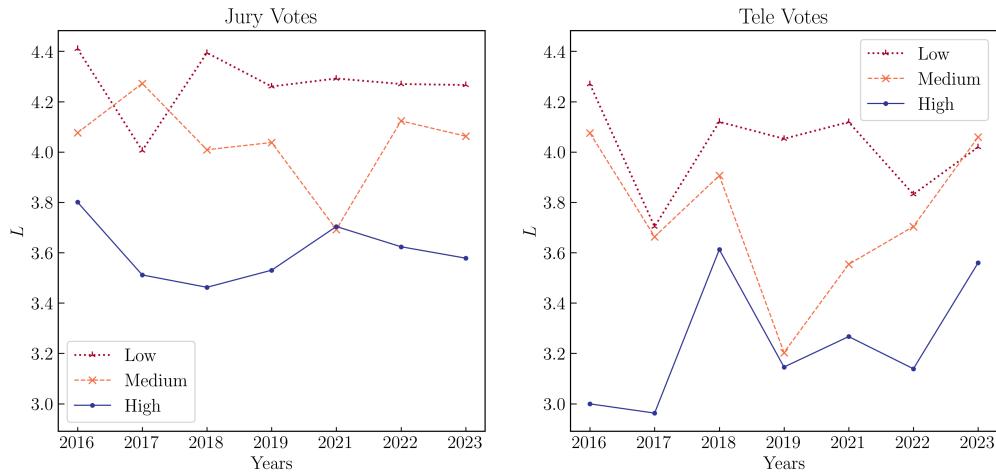
**Figura 4.5: Modularidad  $Q$  para la partición óptima de las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión.** En esta figura se observa la modularidad  $Q$  obtenida al detectar comunidades en las redes de votación del público (derecha) y el jurado (izquierda) del Concurso de la Canción de Eurovisión utilizando el Método de Louvain. Es importante observar que se obtienen valores de  $Q$  mayores para las redes de votos altos del público respecto a los demás tipos de redes.

En la Figura 4.5 podemos observar los valores de modularidad  $Q$  obtenidos para la partición en comunidades *óptima* encontrada con el algoritmo de Louvain para las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión. Como podemos observar, los valores de modularidad  $Q$  son **máximos** para las redes de votos altos del público mientras que estos valores son menores cuando el valor del voto disminuye. Esto es consistente con los resultados anteriores, pues las redes de votos altos del público presentan valores de clustering mayores con respecto a los demás tipos de redes y por ende una mayor *estructura modular*.

A su vez, podemos observar que para las redes de votación del jurado no existe una gran diferencia entre los valores de modularidad de las comunidades para las redes de votos *altos* y votos *medios*. Este resultado sugiere que la estructura de comunidades en las redes de votación del jurado es relativamente consistente independientemente del valor del voto y no hay existe una fuerte estructura modular para este tipo de voto.

#### 4.2.1.2. Método de Infomap

El segundo algoritmo que se utilizó para detectar comunidades dentro de las redes de votación fue el *Método de Infomap* (sección 3.2.1.2). Como se mencionó anteriormente, este algoritmo está basado en la optimización del *codelength L*<sup>7</sup>, que representa la longitud en bits necesaria para describir los flujos de información dentro de una red, donde valores pequeños de  $L$  representan una mejor compresión de la información y por ende una estructura modular más fuerte (véase la Figura D.2).



**Figura 4.6: *Codelength L* para la partición óptima de las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión.** En esta figura se observa el *Codelength L* obtenido al detectar comunidades en las redes de votación del público (derecha) y el jurado (izquierda) del Concurso de la Canción de Eurovisión utilizando el Método de Infomap. Es importante observar que se obtienen valores de  $L$  menores para las redes de votos altos del público y del jurado respecto a los demás tipos de redes.

En la Figura 4.6 podemos observar los valores de la longitud de código  $L$  obtenidos para la partición en comunidades *óptima* encontrada con el algoritmo de Infomap para las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión. Como podemos observar, los valores de  $L$  son **mínimos** para las redes de votos altos (tanto del público como del jurado) mientras que estos valores aumentan cuando el valor del voto disminuye. A su vez, podemos observar que los valores de  $L$  para las redes de votación del público son menores con respecto a las

---

<sup>7</sup>Véase la ecuación 3.5.

redes de votación del jurado indicando una estructura modular más fuerte.

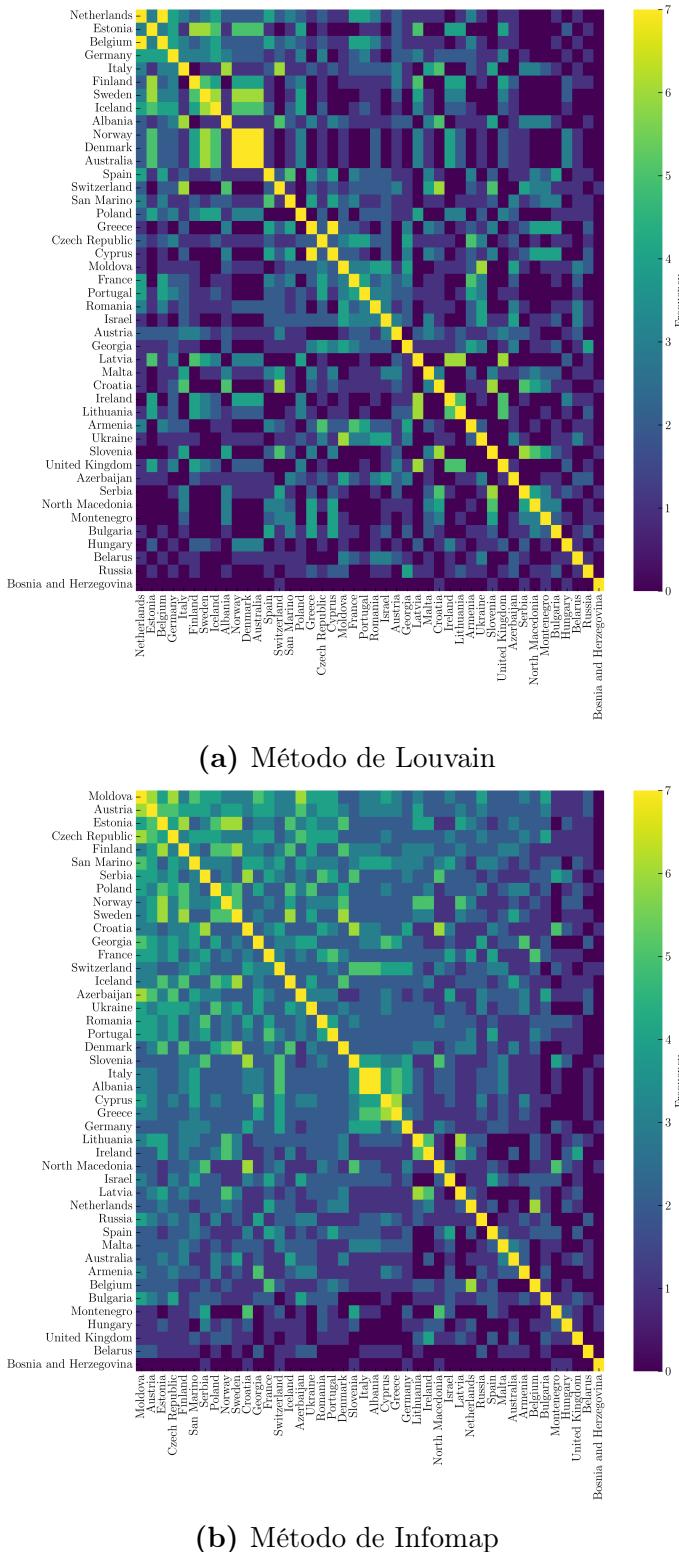
En contraste con los resultados obtenidos utilizando el Método de Louvain, podemos observar que en este caso los valores de  $L$  para las redes de votos altos del *jurado* presentan son consistentemente menores que los resultados obtenidos para las redes votación del jurado de votos *medios*. Sin embargo, esta diferencia no es muy notoria y a su vez, los valores de  $L$  siguen siendo mayores que lo obtenido para las redes del público por lo que no podemos concluir con certeza que existe una estructura modular fuerte para este tipo de voto.

#### 4.2.2. Análisis de Clusters en las Redes de Votación

Con base en el análisis expuesto anteriormente, podemos concluir que las redes de votos **altos** del **público** para el Concurso de la Canción de Eurovisión presentan una estructura modular generalmente más fuerte con respecto a los demás tipos de redes. Este resultado sugiere que existe la formación de *grupos de votación* dependiente del valor y del tipo de voto otorgado dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión durante el periodo estudiado 2016-2023. Particularmente, podemos concluir que durante este periodo de tiempo el público no otorga votos de valor alto *al azar* y las redes para este valor de voto presentan una estructura modular fuerte evidenciando la existencia de grupos de votación de países que se favorecen unos a otros consistentemente a través del tiempo.

##### 4.2.2.1. La Matriz de Frecuencias

A partir de las conclusiones anteriores se decidió utilizar las comunidades encontradas con los métodos de Louvain e Infomap para caracterizar los *grupos de votación* existentes dentro de las redes de **votos altos del público** como los países cuyas relaciones dentro del concurso *persisten* en el tiempo. Específicamente, se construyó una *matriz de frecuencias* (véase sección 3.2.2.1) para cuantificar el número de veces que un país  $i$  compartió comunidad con un país  $j$  durante el periodo 2016-2023 y utilizar este resultado para construir *clusters* de países o *grupos de votación* utilizando Clustering Jerárquico Aglomerativo.



**Figura 4.7: Matriz de Frecuencias para Redes de Votos Altos del Público del Concurso de la Canción de Eurovisión.** En esta figura se observan las matrices de frecuencias para las redes de votos altos del público del Concurso de la Canción de Eurovisión. En estas matrices se pueden observar grupos de países que aparecen constantemente juntos en las comunidades detectadas durante el periodo 2016-2023.

En la Figura 4.7<sup>8</sup> podemos observar el *mapa de calor* de las matrices de frecuencias para las redes de votos altos del público obtenidas con el Método de Louvain e Infomap respectivamente. En estas matrices se puede ya observar el surgimiento de *grupos* de países que constantemente forman parte de la misma comunidad durante el periodo de tiempo 2016-2023. Este es el caso para países como Australia, Dinamarca y Noruega (véase la Figura 4.7(a)) o Italia, Albania y Chipre ((véase la Figura 4.7(b))).

La matriz de frecuencias sirve para observar *cualitativamente* los grupos de países que permanecen constantes a través del tiempo, sin embargo, no es útil para analizar *cuantitativamente* los mismos y para observar de mejor forma las diferencias entre los métodos de Louvain e Infomap respectivamente. Es por esto que se decidió transformar esta matriz en una matriz de *distancias* (véase la sección 3.2.2.4) definida como:

$${}_m\mathcal{D}_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{1} - \frac{1}{t} \cdot {}_m\mathcal{F}_{\beta}^{\alpha}, \quad (4.2)$$

donde  ${}_m\mathcal{F}_{\beta}^{\alpha}$  es la matriz de frecuencias obtenida con el método de detección de comunidades  $m \in \{\text{Louvain, Infomap}\}$  para las redes de tipo de voto  $\alpha$  y valor de voto  $\beta$  para un periodo de tiempo de longitud  $t$ . Notemos que esta matriz es una matriz *normalizada* que cuantifica de manera independiente a  $t$  la *distancia* (o cercanía) de un país respecto a otro.

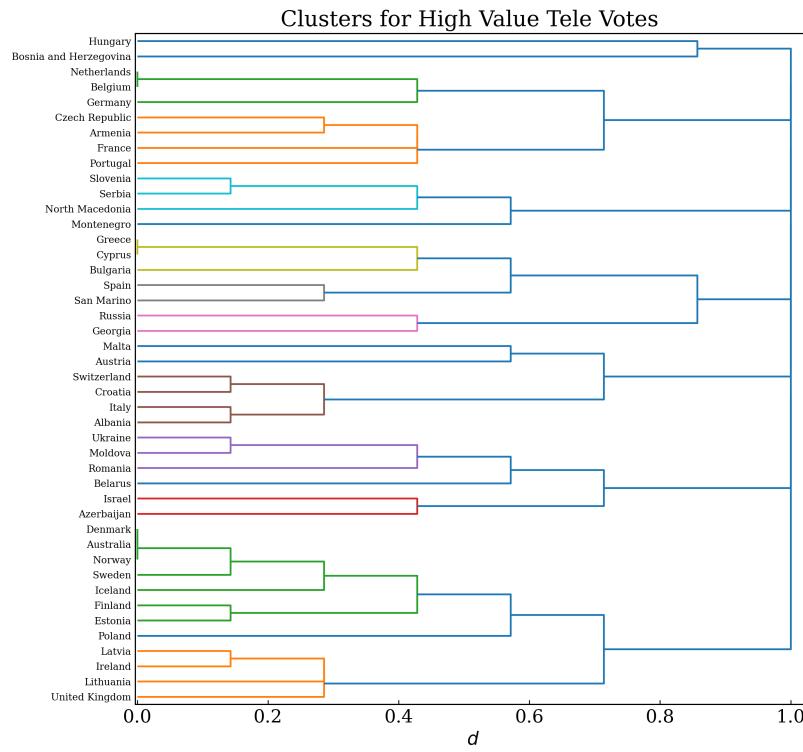
#### 4.2.2.2. Grupos de Votación en el Eurovisión

Utilizando la matriz definida anteriormente, se utilizó un algoritmo de *clustering jerárquico aglomerativo* (véase la sección 3.2.2.2) para caracterizar los clusters o *grupos de votación* dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión como los *grupos de países* que compartieron comunidad durante el periodo 2016-2023 **al menos** el 50 % de las veces<sup>9</sup>. En otras palabras, definimos a los *grupos de votación* dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión como los *grupos de países* tales que tienen una distancia entre ellos  $d \in [0, 0.5]$ .

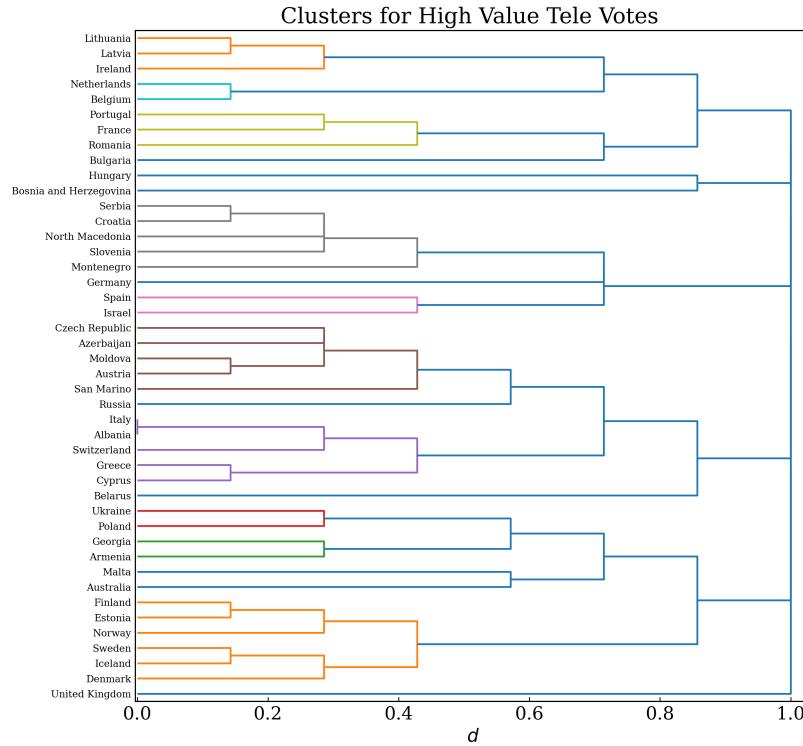
---

<sup>8</sup>Para las redes de votación del jurado, véase la Figura D.3

<sup>9</sup>Todo esto dentro del contexto de las redes de votos **altos** del público, pues anteriormente se mostró que estas redes mantienen una estructura modular más fuerte que los demás tipos de redes.



(a) Método de Louvain



(b) Método de Infomap

**Figura 4.8: Clusters de Países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión (Votos Altos del Público).** Se muestran los *dendrogramas* obtenidos al llevar a cabo clustering jerárquico aglomerativo para encontrar grupos de votación (para votos de valor alto) dentro de las redes de votación del público del Concurso de la Canción de Eurovisión.

La Figura 4.8 muestra el *dendrograma*<sup>10</sup> resultante obtenido aglomerando de forma iterativa los grupos de países con *menor* distancia  $d$ . Por ejemplo, para el Método de Louvain (a) existen tres grupos con la menor distancia en general: Bélgica y Holanda, Grecia y Chipre, Noruega, Dinamarca y Australia, y esto hace que se aglomeren primero. Una vez dos países se combinaron en un solo cluster, se define la distancia entre dos clusters como la distancia menor entre cualquier país dentro ambos clusters. Iterativamente más y más clusters se combinan de esta manera hasta terminar con un único cluster.

Notemos que ambos dendrogramas en la Figura 4.8 difieren en estructura y caracterizan *distintos* grupos de votación de países. Sin embargo, estas diferencias no son tan notorias para algunos clusters de países lo que sugiere que estos grupos son *más fuertes* con respecto a los demás. Para encontrar dichos clusters, se obtuvo la *Similaridad de Jaccard*  $J$  entre todos los pares clusters obtenidos con los métodos de Louvain e Infomap y se clasificaron como *iguales* los clusters con similaridad  $J(A, B) \geq 0.5$ .

**Definición 4.1.** La similaridad de Jaccard para dos conjuntos  $A$  y  $B$  está definida como:

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}, \quad (4.3)$$

donde  $J(A, B) = 1$  si ambos conjuntos son iguales y  $J(A, B) = 0$  si son disjuntos.

En la Tabla 4.2 podemos observar los clusters de votación del público (para votos de valor alto) que se mantienen durante el periodo 2016-2023 para ambos métodos de detección de comunidades. Es de interés observar la existencia de un cluster *quasi-Nórdico* formado por Dinamarca, Noruega, Finlandia, Islandia, Suecia y Estonia en sintonía con lo encontrado por D. Fenn et al. [37] y Yair et al. [44] al analizar la correlación de los patrones de votación dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión para años anteriores al de este trabajo.

---

<sup>10</sup>Para el dendrograma de los votos altos del jurado ver D.4. Vista la estructura modular débil de los votos del jurado, no existen grupos de votación notorios para este tipo de voto.

Cluster	Método de Louvain	Método de Infomap	$J$
Cluster 1	Dinamarca Noruega Finlandia Islandia Estonia Suecia Australia	Dinamarca Noruega Finlandia Islandia Estonia Suecia Reino Unido	0.75
Cluster 2	Lituania Latvia Irlanda Reino Unido	Lituania Latvia Irlanda	0.75
Cluster 3	Holanda Bélgica Alemania	Holanda Bélgica	0.67
Cluster 4	Macedonia del Norte Eslovenia Serbia	Macedonia del Norte Eslovenia Serbia Croacia Montenegro	0.60
Cluster 5	Albania Suiza Italia	Albania Suiza Italia Grecia Chipre	0.50

**Tabla 4.2: Clusters de Países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión.**  
En esta tabla se reportan los clusters de países que se forman dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión para votos de valor alto tales que se mantienen para los Métodos de Louvain e Infomap con similaridad  $J \geq 0.5$

Los clusters formados por Holanda y Bélgica o el cluster *quasi-Mediterráneo* formado por Italia, Albania y Suiza sugieren la hipótesis que los grupos de votación están relacionados con una *cercanía* geográfica y/o cultural. En la Figura 4.9 podemos observar la relación geográfica<sup>11</sup> entre los grupos de votación obtenidos bajo el Método de Louvain. Claramente en este mapa podemos observar evidencia de la relación entre los grupos de votación formados y la ubicación geográfica de los mismos como es el caso del bloque Nórdico (en azul) o el bloque Mediterráneo (en rojo). Sin embargo, existen varias excepciones a la regla como es el caso del bloque formado por Francia, República Checa, Portugal y Armenia (en amarillo) o el bloque formado por España y San Marino (en gris). Esto último sugiere la conclusión que el surgimiento de grupos de votación en el Concurso de la Canción de Eurovisión se debe también a otros factores (históricos, de migración, religiosos, etc.) como fue expuesto por Spierdijk et al [46].

---

<sup>11</sup>El mapa obtenido para el Método de Infomap se puede visualizar en la Figura D.5.



**Figura 4.9: Mapa de los Grupos de Votación en el Concurso de la Canción de Eurovisión (Método de Louvain).** Relación geográfica entre los grupos de votación encontrados para las redes de votación del público utilizando el Método de Louvain. Como se puede observar existe una fuerte correlación entre ciertos grupos de votación y su ubicación geográfica como es el caso de Alemania, Bélgica y Holanda (en verde) o Islandia, Noruega, Suecia, Dinamarca, Finlandia y Estonia (en azul). Sin embargo, existen casos donde esta relación no es evidente, como en el caso de Francia, Portugal, República Checa y Armenia (en amarillo).

En conclusión, para las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión se encontró evidencia de una estructura modular más fuerte en el caso de los votos con valor **alto** con respecto a los demás valores de voto. Aunado a esto, para los votos de valor alto del **público** se encontró evidencia de la formación de *grupos de votación* persistentes con el tiempo cuya existencia había sido estudiada por otros autores con distintas metodologías [37, 44, 46]. Es de interés también notar la fuerte relación *geográfica* que existe entre los grupos de votación encontrados aún con varias excepciones mencionadas anteriormente.

Los resultados anteriores sugieren que la formación de grupos de votación en el Concurso de la Canción de Eurovisión es *inducida* dependiendo del valor del voto y es mucho más fuerte

cuando la votación es hecha por el público, sugiriendo que el público de cada país vota por los países con quien tiene mayor *afinidad* independientemente de la calidad de la canción presentada. En el caso de los votos dados por el jurado no se puede concluir que existe la formación de grupos de votación dado que su estructura modular es más débil sugiriendo (como debería de ser) que la votación dada por el jurado depende de la *canción* y no del país participante.

### 4.3. Simulación de la Votación

Finalmente para concluir el trabajo fue de interés *simular* la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión para tratar de predecir los resultados del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 a través de las relaciones existentes entre los países participantes. Esto principalmente para estudiar si dichas relaciones *affectan* los resultados del Concurso de la Canción de Eurovisión de manera significativa y por ende, pueden ser utilizadas para simular los resultados del mismo.

Para llevar a cabo la simulación se utilizaron dos métodos: el Primer Método (véase la sección 3.3.2), que considera simplemente la *frecuencia* de votos entre países durante el periodo 2016-2022 y simula la votación entre países (para cada tipo y valor de voto) asociando una probabilidad de votación de un país  $i$  a un país  $j$  proporcional al número de veces que dichos países votaron el uno por el otro durante el periodo 2016-2023, y el Método de Comunidades, que considera la existencia de *grupos de votación* dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión y utiliza información de la *matriz de frecuencias* obtenida en la sección 3.2.2.1 (véase la sección 3.3.4) para asociar probabilidades de votación más altas a países que pertenecen a un mismo grupo de votación.

Los métodos anteriores se utilizaron para simular los resultados de la votación del público y del jurado de manera individual con la intención de contrastar ambas metodologías y observar si existen diferencias en los resultados para cada tipo y valor de voto.

Lugar	Voto del P\xfablico	Voto del Jurado	Voto Final
1	Finlandia	Suecia	Suecia
2	Suecia	Israel	Finlandia
3	Noruega	Italia	Israel
4	Ucrania	Finlandia	Italia
5	Israel	Estonia	Noruega

**Tabla 4.3: Resultados del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 (Top 5).** En esta tabla se reportan los resultados del top-5 para el Concurso de la Canción de Eurovisión 2023.

Específicamente, para este trabajo, se decidió contrastar los resultados de ambos métodos de simulación con los resultados reales del *top-5* del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 pues estas son las posiciones que podrían considerarse con más *importancia* dentro del concurso y que podrían influir de forma más notoria en el resultado final. Al contrario, las posiciones debajo del *top-5* pueden ser consideradas con menos *importancia* en el contexto de la predicción. En la Tabla 4.3 se presentan dichos resultados.

### 4.3.1. Votación del Jurado

Los resultados de las simulaciones para la votación del jurado del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 son presentados en las Tablas C.1-C.2 para el Primer Método y en las Tablas C.5-C.6 para el Método de Comunidades. A su vez, en la Tabla 4.4 se presenta el *Índice de Habilidad de Brier* para cada uno de los métodos utilizados con la intención de cuantificar la *precisión* con la que se predijo cada posición del *top-5* del concurso respecto a lo que se obtendría con un modelo de votación *aleatorio*.

En la Tabla 4.4 podemos observar para el Primer Método un Índice de Habilidad de Brier para el primer puesto de  $B_{SS} \approx 0.927$  indicando una mejoría sustancial en la predicción bajo este método con respecto a un modelo aleatorio. Esto significa que bajo un modelo de predicción que toma en cuenta la *frecuencia* con la cual se otorgaron ciertos valores de votos entre países se logró predecir con una gran *precisión* la victoria de Suecia en el Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 para la votación del jurado. Sin embargo, este resultado puede ser mayormente atribuido al hecho que Suecia ocupó lugares altos dentro de la votación del

Lugar	Primer Método	Primer Método + Ruido	Infomap	Infomap + Ruido	Louvain	Louvain + Ruido
1	0.927	0.905	0.056	0.065	0.031	0.022
2	-0.264	-0.243	0.075	0.052	0.043	0.037
3	0.258	0.241	0.016	0.022	0.0	0.005
4	-0.192	-0.182	0.014	0.013	0.012	0.011
5	-0.168	-0.158	0.016	0.017	-0.024	-0.025

**Tabla 4.4: Índice de Habilidad de Brier para los Votos del Jurado.** En esta tabla se reporta el índice de Brier para las predicciones de las primeras 5 posiciones dadas por la votación del jurado del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 para: el Primer Método con probabilidades de ruido aleatorio  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 0.1$  respectivamente y el Método de Comunidades (Louvain e Infomap) con probabilidades de ruido aleatorio  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 0.1$  respectivamente.

jurado dentro del periodo 2016-2022, por lo cual recibió una gran cantidad de votos de valor *alto* dentro de este periodo que podrían haber sesgado la *predicción* a su favor.

Para las demás posiciones y el Primer Método podemos observar que la predicción respecto al modelo aleatorio no fue tan acertada, sugiriendo así que a pesar de haber tenido una gran precisión para el primer lugar, este método no logró predecir de manera precisa los resultados del Concurso de la Canción de Eurovisión. A su vez, para el Método de Comunidades, podemos observar que el Índice de Habilidad de Brier  $B_{SS} \approx 0$  en todos los casos, indicando que los *grupos de votación* de países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión (para la votación del jurado) no son de mucha utilidad para predecir los resultados de dicho concurso respecto a un modelo de votación aleatoria.

### 4.3.2. Votación del Público

De la misma forma, los resultados de las simulaciones para la votación del público del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 son presentados en las Tablas C.3-C.4 para el Primer Método y en las Tablas C.7-C.8 para el Método de Comunidades. A su vez, en la Tabla 4.5 se presenta el *Índice de Habilidad de Brier* para cada uno de los métodos utilizados con la intención de cuantificar la *precisión* con la que se predijo cada posición del *top-5* del concurso respecto a lo que se obtendría con un modelo de votación *aleatorio*.

En la Tabla 4.5 podemos observar para el Primer Método un Índice de Habilidad de Brier para el primer y segundo puesto de  $B_{SS} \approx -0.60$  indicando una gran pérdida de precisión en la predicción respecto a un modelo aleatorio, mientras que para los demás puestos  $B_{SS} \approx 0$  indicando que no hay mejoría en la predicción respecto al mismo modelo. Esto sugiere que el Primer Método tiene dificultades significativas para predecir los resultados del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023, especialmente en lo que respecta a los primeros puestos.

Lugar	Primer Método	Primer Método + Ruido	Infomap	Infomap + Ruido	Louvain	Louvain + Ruido
1	-0.6	-0.569	0.073	0.06	0.013	0.016
2	-0.504	-0.449	0.034	0.04	0.035	0.046
3	0.046	0.069	0.045	0.047	0.008	0.005
4	-0.185	-0.161	-0.013	-0.006	-0.044	-0.03
5	-0.032	-0.028	-0.033	-0.023	-0.006	-0.006

**Tabla 4.5: Índice de Habilidad de Brier para los Votos del Público.** En esta tabla se reporta el índice de Brier para las predicciones de las primeras 5 posiciones dadas por la votación del público del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 para: el Primer Método con probabilidades de ruido aleatorio  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 0.1$  respectivamente y el Método de Comunidades (Louvain e Infomap) con probabilidades de ruido aleatorio  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 0.1$  respectivamente.

A su vez, para el Método de Comunidades, podemos observar que el Índice de Habilidad de Brier  $B_{SS} \approx 0$  en todos los casos, indicando, al igual que en la simulación de la votación del jurado, que los *grupos de votación* de países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión (para la votación del jurado) no son de mucha utilidad para predecir los resultados del concurso respecto a un modelo de votación aleatoria.

En conclusión, los métodos de simulación propuestos no fueron óptimos para predecir de forma *precisa* los resultados del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 tanto para la votación del jurado como para la votación del público. Estos resultados eran de esperarse dado que para la construcción de dichos modelos sólo se tomaron en cuenta datos históricos de votación y de cercanía estructural inherentes a la red de votación, sin tomar en cuenta otros factores de importancia como la *calidad* de las canciones para la votación del jurado o

la *afinidad* o *cercanía cultural* para el caso de la votación del público<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup>Es de esperarse que el jurado (al ser experto), vota por la calidad de una canción en sí misma, al contrario que el público, donde importan más otros aspectos, como tal vez, un sentimiento de nación, afinidad a una comunidad geográfica, o aspectos de cercanía cultural.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se propuso una metodología computacional y matemáticamente formal para estudiar sistemas que intercambian bienes e información a través del tiempo, utilizando Ciencia de Redes y de Datos para identificar módulos o comunidades dentro del sistema que se mantienen en el tiempo e influyen de manera significativa el comportamiento general de este Sistema Complejo.

El objetivo principal de este trabajo era identificar módulos en las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión a través del tiempo, utilizar esta información para encontrar grupos de votación dentro del concurso y analizar su influencia para poder predecir los resultados finales del mismo. Con base en las discusiones anteriores podemos decir lo siguiente de los resultados obtenidos:

Existe evidencia de una estructura modular significativa para las redes de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión, cuando los votos tienen un valor alto (mayor o igual a 8 puntos) y en mayor forma cuando la votación está dada por el público con respecto a lo obtenido para la votación dada por el jurado, sugiriendo la existencia de mayor *sesgo* dentro de la votación para el público respecto al jurado probablemente influido por aspectos de afinidad geográfica o de cercanía cultural.

A su vez, se encontró evidencia de la formación de *grupos de votación* dependientes del valor y tipo de voto, que son persistentes en el tiempo; como es el caso del bloque *quasi-Nórdico* formado por Dinamarca, Noruega, Finlandia, Islandia, Estonia y Suecia o el bloque *quasi-Mediterráneo* formado por Albania, Suiza e Italia, para las redes de votos altos del público. La existencia de bloques muy similares a los encontrados en este trabajo ha sido reportada en la literatura, por otros autores [37, 44] sin tomar en cuenta la separación de la red de votos dependiendo del valor y tipo de voto. Este resultado sugiere que la formación de grupos de votación en el Concurso de la Canción de Eurovisión es inducida por la votación del público y a su vez, cuando esta votación otorga votos con valor alto.

Finalmente, se propusieron dos modelos estructurales para simular la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 utilizando información de los grupos de votación encontrados anteriormente, cuyas predicciones no mejoran de manera consistente los resultados esperados bajo un modelo de votación aleatorio. Este resultado sugiere que la influencia de los grupos de votación dentro del concurso no es suficiente para poder predecir los resultados del mismo bajo estos modelos.

Es probable que un enfoque con un modelo, dinámico que contemple no solamente la estructura general y modular de la red, pueda funcionar mejor para poder predecir los resultados del concurso. Se deja para futuros trabajos la exploración de un modelo de esta naturaleza, así como otros enfoque de predicción utilizando Machine Learning o *Graph Neural Networks* para predecir enlaces en las redes de votación [117].

# Apéndice A

## Apéndice de Teoría

### A.1. El Vector de Entrenamiento

Antes de construir el algoritmo con el que se simuló la votación del Concurso de la Canción de Eurovisión 2023 (véase 6) fue necesario definir el *vector de entrenamiento*. Un vector que contiene la información de cada capa de las redes multiplex con pesos definidas en 3.3.2 y 3.3.4.

Sea  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  la red multiplex de votación (del jurado o del público) con pesos, donde  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_\beta : \beta \in \{\text{High, Medium, Low}\}\}$  es la familia de redes de votos (Altos, Medios o Bajos)  $G_\beta = (\mathcal{N}, \mathcal{L}_\beta)$  conocida como las capas de  $\mathcal{M}$ , y donde los nodos  $\mathcal{N}$  de cada capa son los países participantes en la edición 2023 del Concurso de la Canción de Eurovisión. Para cada país votante  $v \in \mathcal{N}$ , definimos:

$$R_v^\beta = \{r_1, \dots, r_k\} \tag{A.1}$$

como el conjunto de  $k$  países que tienen un enlace (direccional o no direccional) con peso  $w_{vr_i}^\beta$  ( $i \in \{1, \dots, k\}$ ) con  $v$  en la capa  $G_\beta$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ .

**Definición A.1 (Vector de entrenamiento).** Dado este conjunto de países, podemos también definir al *vector de entrenamiento*  $\vec{T}_v^\beta$  como:

$$\vec{T}_v^\beta = \left[ \underbrace{r_1, r_1, \dots}_{w_1}, \underbrace{r_2, r_2, \dots, r_2}_{w_2}, \dots, \underbrace{r_k, \dots, r_k}_{w_k} \right], \quad (\text{A.2})$$

donde cada país  $r_i \in R_v^\beta$  se repite en  $\vec{T}_v^\beta$  dependiendo del peso del enlace entre  $v$  y  $r_i$  dentro de la capa  $G_\beta$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ , es decir, un número  $w_{vr_i}^\beta$  de veces.

Este vector resulta clave para facilitar la simulación computacional del Concurso de la Canción de Eurovisión, pues notemos del seleccionar un elemento de este vector aleatoriamente es equivalente a seleccionar un país  $r_i$  con probabilidad equivalente al peso de su enlace con  $v$ .

**Ejemplo A.1 (Vector de entrenamiento).** Como ejemplo, se puede construir el vector de entrenamiento para Bélgica (BE) en la capa de votos altos para la red representada en la Figura 3.9. Suponiendo que esta red representa los votos otorgados por el público:

$$\vec{T}_{\text{BE}}^{\text{High}} = [\text{NL}, \text{NL}, \text{NL}, \text{NL}, \text{NL}, \text{NL}, \text{FR}, \text{FR}, \text{FR}, \text{FR}, \text{PT}, \text{PT}]. \quad (\text{A.3})$$

Es importante notar que de la misma forma se pueden construir los vectores de entrenamiento para valores de voto medio y bajo utilizando la información de cada una de las capas de la red de la Figura 3.9 y de esta forma utilizarlos para simular el Concurso de la Canción de Eurovisión como se muestra en el Algoritmo 6.

# Apéndice B

## Apéndice de Algoritmos

### B.1. Modelo de Configuración Dirigido

---

**Algoritmo 1: Modelo de Configuración Dirigido.** En este pseudo-código se genera una red simple,  $G_{\text{config}}$ , aplicando el Modelo de Configuración Dirigido 3.1.3 a una red  $G_{\text{real}}$  utilizando una función pre-definida en *NetworkX* [54] y eliminando los auto-enlaces y multi-enlaces de la red resultante.

---

**Data:**  $G_{\text{real}}$

```
 $G_{\text{config}} \leftarrow \text{directed\_config\_model}(G_{\text{real}}) ;$  /* Se aplica el MCD */
if  $G_{\text{config}}$  has self-loops then
|  $G_{\text{config}} \leftarrow \text{remove\_self\_loops}(G_{\text{config}}) ;$  /* Se quitan los auto-enlaces */
end
if  $G_{\text{config}}$  has multi-edges then
|  $G_{\text{config}} \leftarrow \text{remove\_multi\_edges}(G_{\text{config}}) ;$  /* Se quitan los multi-enlaces */
end
```

**Result:**  $G_{\text{config}}$

---

---

**Algoritmo 2: Medición de las propiedades para el Modelo de Configuración Dirigido.** En este pseudo-código se muestra el proceso computacional para medir y obtener los valores esperados de  $C$ ,  $r$  y  $r(\text{in,in})$  después de 10000 corridas utilizando funciones pre-definidas en *NetworkX* [54] en un conjunto de redes obtenidas a través del Modelo de Configuración Dirigido dado por 1.

---

```

Data:  $G_{\text{real}}$ ,  $i$ 
 $i \leftarrow 0$  ;
while  $i < 10000$  do
     $G_{\text{config}} \leftarrow \text{simple\_directed\_config\_model}(G_{\text{real}})$  ;      /* Se aplica el MCD */
                                         /* dado por 1 */
    measure avg_clustering( $G_{\text{config}}$ ), reciprocity( $G_{\text{config}}$ ) ;      /* Se miden  $C$ ,  $r$  */
                                         /* y  $r(\text{in,in})$  */
    measure in_deg_assortativity( $G_{\text{config}}$ );
     $i \leftarrow i + 1$ 
end
 $c_{\text{avg}}, r \leftarrow \text{mean}(\text{avg\_clustering}), \text{mean}(\text{reciprocity})$  ;      /* Se obtienen sus */
                                         /* promedios */
 $r_{\text{deg}} \leftarrow \text{mean}(\text{in\_deg\_assortativity})$ ;
Result:  $c_{\text{avg}}, r, r_{\text{deg}}$ 

```

---

## B.2. Detección de Comunidades

---

**Algoritmo 3: Algoritmo de Louvain.** En este pseudo-código se muestra el proceso computacional para aplicar el Método de Louvain 2.4.3 utilizando la paquetería *Community detection for NetworkX's* [98] en una red real  $G_{\text{real}}$  y eligiendo la “mejor” partición para dicha red con un valor de  $Q$  máximo después de 10000 corridas.

---

```

Data:  $G_{\text{real}}$ ,  $i$ 
 $i \leftarrow 0$  ;
while  $i < 10000$  do
     $\text{partition} \leftarrow \text{louvain}(G_{\text{real}})$  ;      /* Se obtiene una partición aplicando */
                                         /* el algoritmo de Louvain */
    measure modularity(partition) ;      /* Se mide  $Q$  para la partición */
                                         /* obtenida */
     $i \leftarrow i + 1$ 
end
 $Q_{\text{max}} \leftarrow \text{max}(\text{modularity})$  ;      /* Se obtiene el valor máximo de  $Q$  */
 $\text{best\_partition} \leftarrow \text{partition}(Q_{\text{max}})$  ;      /* Se elige la partición con  $Q_{\text{max}}$  */
Result:  $Q_{\text{max}}, \text{best\_partition}$ 

```

---

---

**Algoritmo 4: Algoritmo de Infomap.** En este pseudo-código se muestra el proceso computacional para aplicar el Método de Infomap 2.4.3 utilizando la *Infomap Python API* [106] en una red real  $G_{real}$  y eligiendo la “mejor” partición para dicha red con un valor de  $L$  mínimo después de 10000 corridas.

---

```

Data:  $G_{real}$ ,  $i$ 
 $i \leftarrow 0$ ;
while  $i < 10000$  do
    partition  $\leftarrow$  infomap( $G_{real}$ ) ;      /* Se obtiene una partición aplicando */
                                                /* el algoritmo de Infomap */
    measure codelength(partition) ;          /* Se mide  $L$  para la partición */
                                                /* obtenida */
     $i \leftarrow i + 1$ 
end
 $L_{min} \leftarrow \min(\text{codelength})$  ;        /* Se obtiene el valor mínimo de  $L$  */
best_partition  $\leftarrow$  partition( $L_{min}$ ) ;        /* Se elige la partición con  $L_{min}$  */
Result:  $L_{min}$ , best_partition

```

---

### B.3. Clustering Jerárquico

---

**Algoritmo 5: Algoritmo de Clustering Jerárquico Aglomerativo.** En este pseudo-código se muestra el proceso computacional para aplicar el Método de Clustering Jerárquico Aglomerativo ?? a un grupo de países  $\{x_1, \dots, x_n\}$  utilizando *Scikit Learn* [118] utilizando una matriz de distancia entre ellos  $D_{ij}$  y definiendo como medida de distancia entre clusters el máximo de las distancias entre cada uno de sus elementos.

---

```

Data:  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $D_{ij}$ 
 $i \leftarrow 1$ ;
while  $i \leq n$  do
     $c_i = \{x_i\}$  ;          /* Iniciamos con cada país en su propio cluster */
     $i \leftarrow i + 1$ 
end
 $C \leftarrow \{c_1, \dots, c_n\}$  ;        /* Se define el clustering completo */
 $D(c_i, c_j) \leftarrow \max(\{D_{ij} \forall i \in c_i, j \in c_j\})$  ;    /* y la distancia entre clusters */
dendrogram  $\leftarrow [C]$ ;
while size( $C$ )>1 do
    find ( $c_{min1}, c_{min2}$ ) such that  $D(c_{min1}, c_{min2}) = \min(\{D(c_i, c_j) \forall c_i, c_j \in C\})$ ;
    remove  $c_{min1}$  and  $c_{min2}$  from  $C$ ;
    add  $\{c_{min1}, c_{min2}\}$  to  $C$  ;          /* Se unen los clusters más cercanos */
    dendrogram.append( $C$ ) ;                /* Se guarda el clustering a cada paso */
end
Result: dendrogram

```

---

## B.4. Simulación de la Votación

---

**Algoritmo 6: Algoritmo de Simulación de la Votación del Eurovisión.** En este pseudo-código se muestra el proceso computacional utilizando el vector de entrenamiento (véase el Apéndice A.1) para simular el proceso de votación del Concurso de la Canción de Eurovisión según lo mencionado en 3.3.

---

**Data:**  $\alpha$ , *vote\_type*

```

result ← {country : 0 for country in countries_final_2023} ;
/* Se define una lista con todos los países votantes en 2023 */
voting_countries =random.shuffle(voting_countries_2023);
for voting_country in voting_countries do
    /* Se define el vector de entrenamiento para cada valor de
       voto */ low_votes = training_vector(vote_type, low) ;
    mid_votes = training_vector(vote_type, medium) ;
    high_votes = training_vector(vote_type, high) ;
    /* Se definen los puntos a otorgar */
    points = random.shuffle([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12]) ;
    /* Los países no pueden votar por sí mismos */
    receiving_countries = [i for i in countries_final_2023 if i
                           ≠ voting_country]
    for point in points do
        x = random.number(0,1)
        /* Si x<alpha el punto se otorga al azar, si no, se otorga
           dependiendo de su valor */
        if x < α then
            | selected_country = random.choice(receiving_countries)
        else
            if 1≤ point ≤ 4 then
                | selected_country = random.choice(low_votes)
            end
            else if 5≤ point ≤ 7 then
                | selected_country = random.choice(mid_votes)
            end
            else if 8≤ point ≤ 12 then
                | selected_country = random.choice(high_votes)
            end
        end
        /* Se suma el voto al país receptor y se descarta para
           siguientes votos */
        result[selected_country] += point;
        remove selected_country from low_votes, mid_votes, high_votes;
        remove selected_country from receiving_countries
    end
end
Result: result

```

---

# Apéndice C

## Apéndice de Tablas

### C.1. Simulación: Primer Método

Lugar	Suecia	Australia	Portugal	Italia	Francia	Suiza	Reino Unido	Ucrania	Israel	Austria
1	0.77	0.09	0.085	0.043	0.004	0.003	0.003	0.001	0.0	0.0
2	0.148	0.298	0.264	0.195	0.035	0.027	0.019	0.01	0.003	0.001
3	0.053	0.254	0.229	0.238	0.081	0.058	0.042	0.033	0.009	0.004
4	0.019	0.173	0.169	0.215	0.142	0.101	0.077	0.059	0.026	0.011
5	0.007	0.095	0.112	0.137	0.186	0.147	0.11	0.105	0.05	0.028
6	0.002	0.045	0.062	0.082	0.18	0.166	0.137	0.134	0.084	0.046
7	0.001	0.023	0.036	0.044	0.137	0.152	0.145	0.153	0.111	0.072
8	0.0	0.013	0.022	0.025	0.1	0.111	0.127	0.144	0.138	0.097
9	0.0	0.005	0.01	0.012	0.059	0.082	0.103	0.11	0.14	0.117
10	0.0	0.002	0.007	0.005	0.035	0.056	0.072	0.084	0.123	0.124

**Tabla C.1: Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Primer Método con  $\alpha = 0$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Suecia	Australia	Portugal	Italia	Francia	Suiza	Reino Unido	Ucrania	Israel	Austria
1	0.736	0.101	0.091	0.055	0.007	0.004	0.003	0.001	0.0	0.0
2	0.163	0.286	0.231	0.197	0.046	0.032	0.022	0.015	0.004	0.002
3	0.061	0.242	0.214	0.222	0.088	0.066	0.049	0.033	0.014	0.006
4	0.025	0.159	0.173	0.198	0.141	0.1	0.074	0.066	0.03	0.015
5	0.009	0.099	0.118	0.128	0.168	0.132	0.113	0.105	0.054	0.03
6	0.003	0.052	0.069	0.086	0.162	0.152	0.122	0.126	0.081	0.054
7	0.002	0.029	0.045	0.049	0.132	0.133	0.127	0.135	0.108	0.072
8	0.001	0.014	0.022	0.031	0.093	0.108	0.117	0.129	0.124	0.092
9	0.0	0.007	0.017	0.016	0.059	0.088	0.097	0.103	0.125	0.102
10	0.0	0.004	0.008	0.008	0.04	0.061	0.08	0.081	0.106	0.106

**Tabla C.2: Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Primer Método con  $\alpha = 0.1$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Ucrania	Italia	Moldavia	Portugal	Noruega	Suecia	Francia	Israel	Suiza	Chipre
1	0.651	0.339	0.006	0.003	0.001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.313	0.594	0.05	0.02	0.014	0.004	0.002	0.002	0.0	0.0
3	0.028	0.056	0.403	0.146	0.154	0.105	0.049	0.025	0.007	0.008
4	0.006	0.009	0.212	0.148	0.183	0.191	0.097	0.048	0.022	0.018
5	0.001	0.002	0.129	0.128	0.162	0.187	0.131	0.064	0.036	0.03
6	0.0	0.0	0.078	0.106	0.129	0.157	0.14	0.079	0.056	0.046
7	0.0	0.0	0.042	0.083	0.104	0.117	0.129	0.082	0.07	0.06
8	0.0	0.0	0.03	0.072	0.068	0.081	0.108	0.084	0.083	0.069
9	0.0	0.0	0.018	0.06	0.052	0.054	0.085	0.082	0.082	0.078
10	0.0	0.0	0.012	0.048	0.038	0.038	0.074	0.077	0.082	0.078

**Tabla C.3: Resultados de la Simulación para los Votos del Público usando el Primer Método con  $\alpha = 0$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Ucrania	Italia	Moldavia	Portugal	Noruega	Francia	Suecia	Israel	Chipre	Bélgica
1	0.606	0.375	0.011	0.004	0.002	0.001	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.335	0.543	0.063	0.021	0.018	0.005	0.01	0.003	0.0	0.0
3	0.043	0.064	0.358	0.131	0.148	0.061	0.111	0.03	0.009	0.005
4	0.009	0.013	0.198	0.138	0.172	0.105	0.173	0.05	0.027	0.014
5	0.004	0.002	0.126	0.117	0.151	0.122	0.176	0.06	0.037	0.02
6	0.002	0.001	0.08	0.1	0.115	0.125	0.149	0.072	0.049	0.027
7	0.001	0.001	0.052	0.082	0.101	0.116	0.108	0.074	0.058	0.042
8	0.0	0.0	0.034	0.068	0.077	0.101	0.085	0.079	0.071	0.042
9	0.0	0.0	0.028	0.058	0.055	0.08	0.06	0.075	0.075	0.052
10	0.0	0.0	0.015	0.052	0.042	0.066	0.04	0.072	0.075	0.06

**Tabla C.4: Resultados de la Simulación para los Votos del Público usando el Primer Método con  $\alpha = 0.1$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

## C.2. Simulación: Método de Comunidades (Louvain)

Lugar	Moldavia	Francia	Reino Unido	Israel	Suecia	Polonia	República Checa	Finlandia	Suiza	Eslovenia
1	0.081	0.078	0.074	0.068	0.06	0.058	0.053	0.049	0.048	0.048
2	0.067	0.07	0.067	0.064	0.058	0.054	0.053	0.045	0.047	0.045
3	0.059	0.064	0.057	0.056	0.055	0.052	0.054	0.047	0.045	0.048
4	0.054	0.054	0.057	0.054	0.053	0.052	0.053	0.047	0.046	0.049
5	0.054	0.052	0.054	0.055	0.049	0.045	0.047	0.046	0.046	0.047
6	0.049	0.054	0.047	0.05	0.051	0.046	0.042	0.045	0.042	0.046
7	0.046	0.046	0.044	0.049	0.048	0.048	0.047	0.046	0.04	0.046
8	0.042	0.047	0.043	0.048	0.048	0.043	0.042	0.047	0.043	0.044
9	0.04	0.05	0.043	0.047	0.044	0.044	0.045	0.043	0.046	0.045
10	0.041	0.041	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.045	0.04	0.041

**Tabla C.5: Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Método de Comunidades (Louvain) con  $\alpha = 0$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Moldavia	Reino Unido	Francia	Israel	República Checa	Suecia	Polonia	Eslovenia	Finlandia	Croacia
1	0.078	0.072	0.072	0.064	0.056	0.055	0.053	0.05	0.049	0.048
2	0.062	0.067	0.069	0.06	0.048	0.057	0.053	0.047	0.046	0.047
3	0.054	0.059	0.057	0.06	0.047	0.056	0.05	0.047	0.049	0.05
4	0.056	0.053	0.051	0.055	0.05	0.05	0.048	0.046	0.046	0.046
5	0.056	0.048	0.05	0.051	0.046	0.047	0.046	0.047	0.045	0.044
6	0.047	0.049	0.048	0.049	0.042	0.048	0.051	0.046	0.045	0.046
7	0.043	0.044	0.053	0.048	0.046	0.042	0.044	0.044	0.044	0.044
8	0.046	0.044	0.046	0.044	0.043	0.046	0.042	0.044	0.045	0.045
9	0.042	0.042	0.039	0.043	0.044	0.04	0.047	0.044	0.043	0.044
10	0.043	0.041	0.044	0.047	0.045	0.044	0.04	0.046	0.039	0.039

**Tabla C.6: Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Método de Comunidades (Louvain) con  $\alpha = 0.1$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Bélgica	Alemania	Estonia	Suecia	Finlandia	Italia	Australia	Austria	Suiza	Noruega
1	0.105	0.094	0.067	0.066	0.053	0.052	0.047	0.046	0.045	0.042
2	0.084	0.076	0.064	0.06	0.057	0.049	0.046	0.043	0.045	0.047
3	0.069	0.064	0.061	0.056	0.054	0.054	0.048	0.046	0.047	0.046
4	0.065	0.058	0.052	0.058	0.048	0.046	0.046	0.047	0.05	0.044
5	0.056	0.057	0.055	0.054	0.049	0.048	0.047	0.044	0.048	0.044
6	0.054	0.054	0.053	0.052	0.045	0.044	0.047	0.04	0.044	0.044
7	0.051	0.048	0.047	0.049	0.048	0.047	0.044	0.045	0.045	0.044
8	0.046	0.047	0.047	0.048	0.044	0.043	0.042	0.044	0.043	0.044
9	0.04	0.044	0.042	0.044	0.041	0.042	0.042	0.038	0.047	0.04
10	0.042	0.04	0.045	0.044	0.041	0.04	0.044	0.042	0.042	0.044

**Tabla C.7: Resultados de la Simulación para los Votos del Pùblico usando el Método de Comunidades (Louvain) con  $\alpha = 0$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Bélgica	Alemania	Estonia	Suecia	Finlandia	Italia	Noruega	Australia	Austria	Suiza
1	0.096	0.094	0.069	0.061	0.053	0.05	0.046	0.046	0.045	0.044
2	0.074	0.074	0.061	0.065	0.052	0.046	0.047	0.05	0.042	0.045
3	0.069	0.06	0.058	0.054	0.048	0.047	0.044	0.05	0.043	0.05
4	0.057	0.055	0.057	0.054	0.05	0.046	0.043	0.045	0.04	0.046
5	0.053	0.054	0.053	0.055	0.046	0.046	0.045	0.049	0.039	0.047
6	0.051	0.049	0.05	0.051	0.045	0.048	0.04	0.048	0.04	0.043
7	0.05	0.05	0.049	0.045	0.045	0.043	0.045	0.047	0.041	0.042
8	0.046	0.045	0.044	0.042	0.045	0.044	0.043	0.043	0.041	0.044
9	0.046	0.047	0.045	0.045	0.045	0.038	0.042	0.041	0.042	0.044
10	0.041	0.04	0.04	0.045	0.046	0.044	0.041	0.038	0.041	0.043

**Tabla C.8: Resultados de la Simulación para los Votos del Público usando el Método de Comunidades (Louvain) con  $\alpha = 0.1$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

### C.3. Simulación: Método de Comunidades (Infomap)

Lugar	Israel	Austria	Suiza	Suecia	Australia	Reino Unido	Estonia	Italia	Finlandia	República Checa
1	0.094	0.079	0.079	0.076	0.07	0.066	0.058	0.058	0.054	0.05
2	0.082	0.066	0.066	0.07	0.066	0.061	0.061	0.054	0.053	0.051
3	0.07	0.058	0.061	0.065	0.064	0.061	0.061	0.052	0.054	0.051
4	0.064	0.06	0.058	0.058	0.063	0.06	0.059	0.053	0.05	0.054
5	0.061	0.053	0.054	0.06	0.058	0.052	0.05	0.055	0.052	0.051
6	0.055	0.05	0.056	0.053	0.052	0.048	0.054	0.053	0.052	0.048
7	0.051	0.052	0.054	0.053	0.054	0.047	0.05	0.048	0.046	0.052
8	0.051	0.05	0.047	0.049	0.048	0.047	0.052	0.049	0.047	0.044
9	0.043	0.046	0.048	0.047	0.045	0.045	0.051	0.049	0.051	0.046
10	0.045	0.046	0.044	0.047	0.045	0.043	0.047	0.047	0.044	0.046

**Tabla C.9: Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Método de Comunidades (Infomap) con  $\alpha = 0$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Israel	Suecia	Suiza	Austria	Australia	Reino Unido	Estonia	Italia	Finlandia	República Checa
1	0.084	0.079	0.076	0.073	0.068	0.062	0.06	0.056	0.054	0.052
2	0.07	0.065	0.062	0.065	0.063	0.061	0.058	0.053	0.054	0.052
3	0.069	0.062	0.059	0.06	0.064	0.058	0.058	0.054	0.05	0.048
4	0.062	0.057	0.062	0.054	0.059	0.054	0.058	0.056	0.049	0.054
5	0.058	0.055	0.056	0.052	0.055	0.056	0.05	0.048	0.049	0.053
6	0.052	0.053	0.052	0.054	0.054	0.047	0.049	0.051	0.048	0.05
7	0.054	0.047	0.05	0.049	0.048	0.049	0.049	0.051	0.051	0.046
8	0.047	0.05	0.048	0.044	0.046	0.045	0.049	0.05	0.049	0.048
9	0.042	0.05	0.047	0.044	0.048	0.044	0.047	0.046	0.041	0.044
10	0.048	0.044	0.044	0.042	0.045	0.045	0.047	0.043	0.044	0.046

**Tabla C.10: Resultados de la Simulación para los Votos del Jurado usando el Método de Comunidades (Infomap) con  $\alpha = 0.1$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Moldavia	Estonia	Austria	Noruega	Finlandia	República Checa	Suecia	Polonia	Francia	Italia
1	0.1	0.1	0.093	0.087	0.087	0.066	0.063	0.061	0.049	0.035
2	0.086	0.083	0.082	0.071	0.08	0.061	0.064	0.064	0.053	0.039
3	0.074	0.072	0.072	0.067	0.068	0.058	0.063	0.058	0.053	0.047
4	0.072	0.067	0.064	0.067	0.065	0.053	0.059	0.054	0.051	0.048
5	0.064	0.066	0.059	0.061	0.058	0.053	0.056	0.054	0.053	0.049
6	0.057	0.055	0.059	0.053	0.056	0.052	0.058	0.052	0.045	0.053
7	0.053	0.052	0.049	0.053	0.055	0.051	0.052	0.05	0.048	0.051
8	0.047	0.049	0.047	0.049	0.05	0.048	0.052	0.046	0.048	0.047
9	0.044	0.047	0.049	0.05	0.045	0.049	0.044	0.045	0.048	0.047
10	0.041	0.044	0.046	0.044	0.044	0.046	0.048	0.046	0.046	0.046

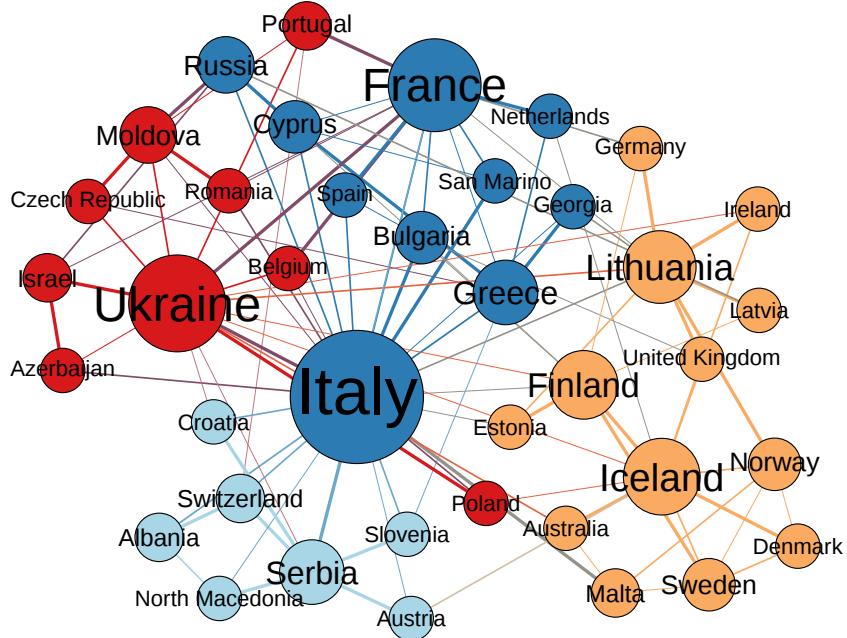
**Tabla C.11: Resultados de la Simulación para los Votos del Público usando el Método de Comunidades (Infomap) con  $\alpha = 0$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

Lugar	Estonia	Moldavia	Austria	Noruega	Finlandia	República Checa	Suecia	Polonia	Francia	Italia
1	0.098	0.094	0.086	0.08	0.079	0.066	0.066	0.06	0.048	0.042
2	0.08	0.079	0.078	0.069	0.074	0.06	0.065	0.06	0.051	0.04
3	0.07	0.07	0.063	0.066	0.066	0.054	0.061	0.059	0.052	0.045
4	0.064	0.072	0.062	0.058	0.063	0.054	0.057	0.058	0.047	0.043
5	0.059	0.058	0.062	0.06	0.056	0.056	0.054	0.049	0.048	0.046
6	0.059	0.06	0.055	0.054	0.054	0.052	0.053	0.054	0.05	0.045
7	0.052	0.055	0.051	0.052	0.053	0.049	0.048	0.046	0.046	0.045
8	0.045	0.048	0.05	0.05	0.052	0.047	0.051	0.049	0.048	0.047
9	0.044	0.044	0.044	0.048	0.044	0.046	0.048	0.046	0.044	0.046
10	0.046	0.042	0.042	0.044	0.046	0.045	0.046	0.049	0.045	0.041

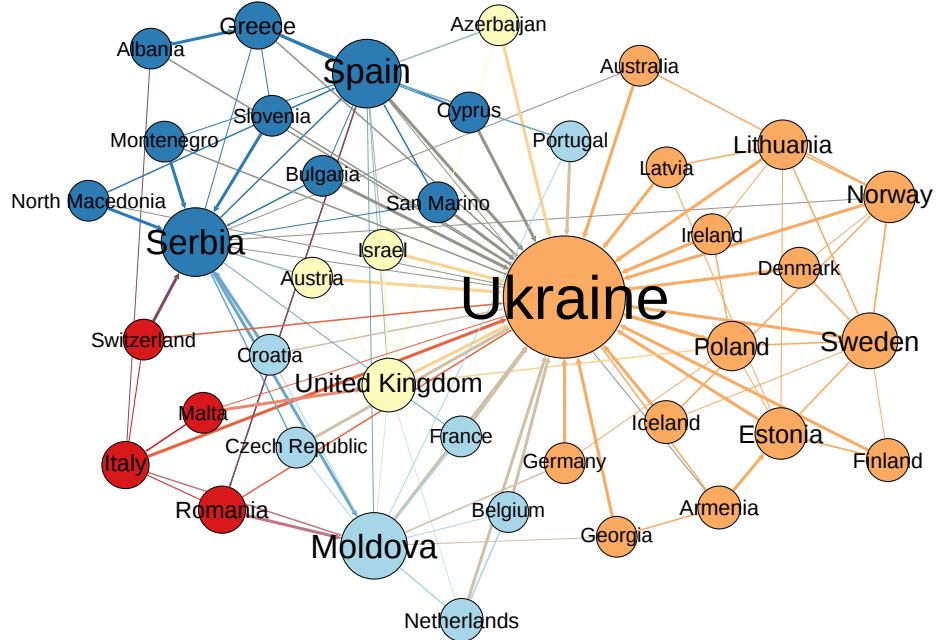
**Tabla C.12: Resultados de la Simulación para los Votos del Público usando el Método de Comunidades (Infomap) con  $\alpha = 0.1$ .** Se calcularon las probabilidades de cada país participante en la final del 2023 de quedar en cada uno de los lugares corriendo la simulación 10000 veces y contando todas las veces que cada país terminaba en cada uno de los lugares. La tabla muestra las probabilidades encontradas para los primeros 10 lugares.

# Apéndice D

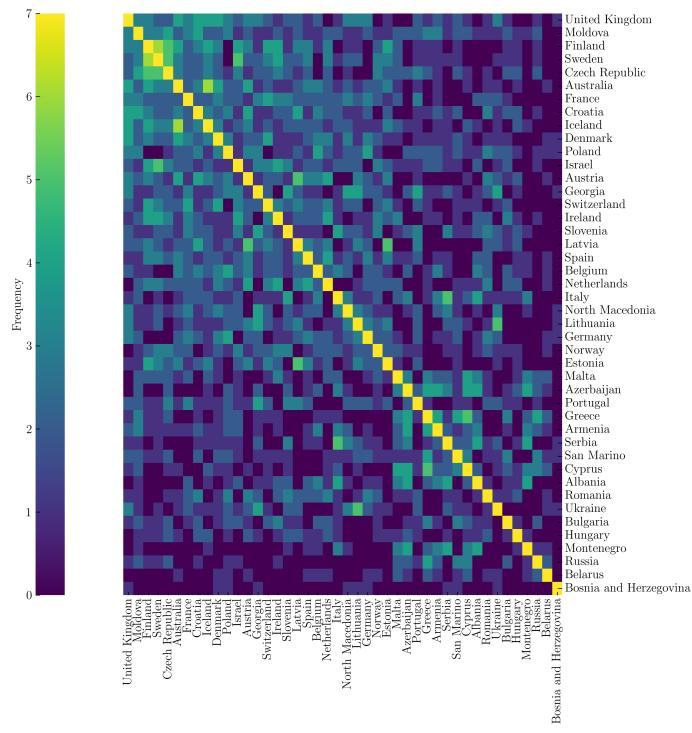
## Apéndice de Figuras



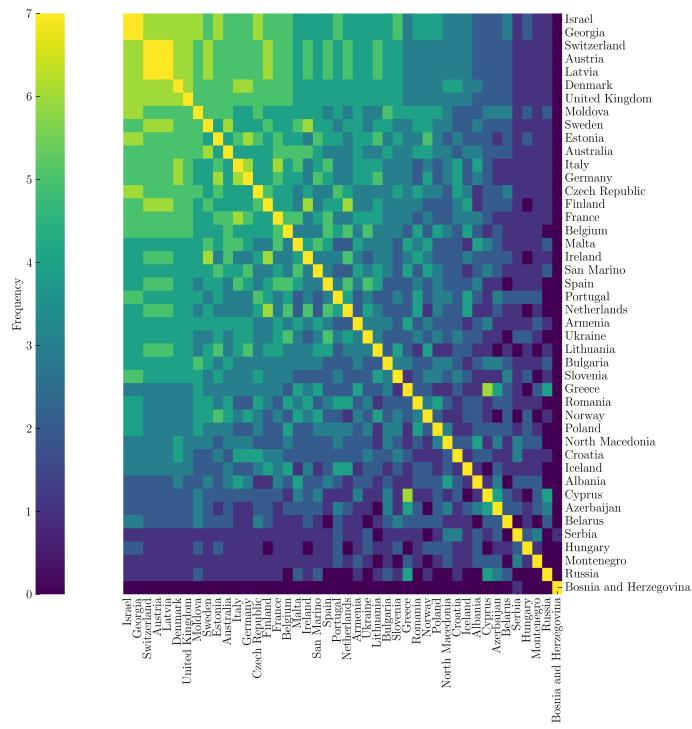
**Figura D.1:** Comunidades obtenidas para la Red de Votos altos del Público para el Concurso de la Canción de Eurovisión 2021 (Método de Louvain). En esta figura podemos observar la partición en comunidades que *maximiza* la modularidad  $Q$  bajo el algoritmo de Louvain para la red de votos altos del público para el Concurso de la Canción de Eurovisión 2021.



**Figura D.2: Comunidades obtenidas para la Red de Votos altos del Pùblico para el Concurso de la Canción de Eurovisión 2022 (Método de Infomap).** En esta figura podemos observar la partición en comunidades que *minimiza* el codelength  $L$  bajo el algoritmo de Infomap para la red de votos altos del público para el Concurso de la Canción de Eurovisión 2022.

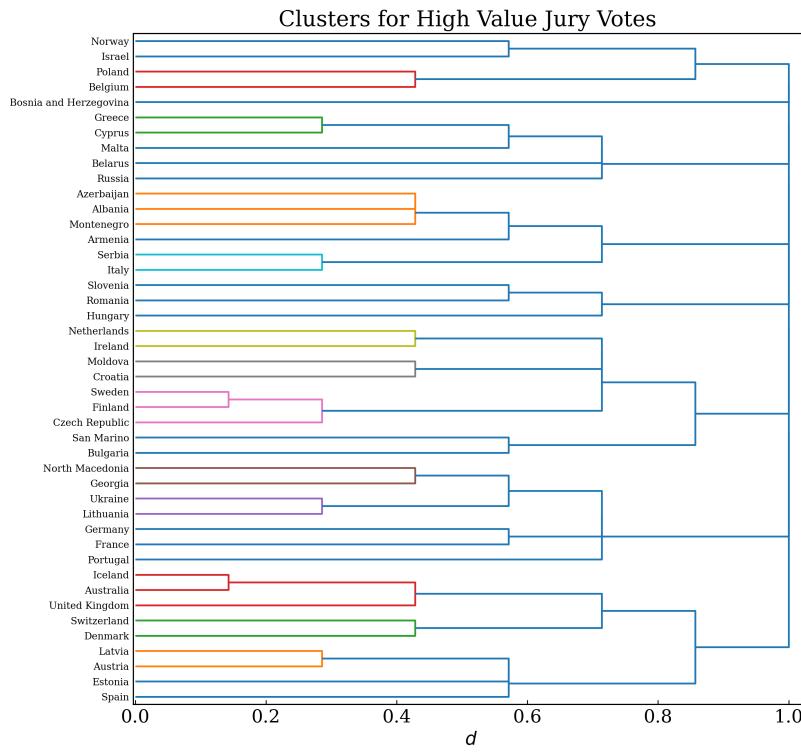


(a) Método de Louvain

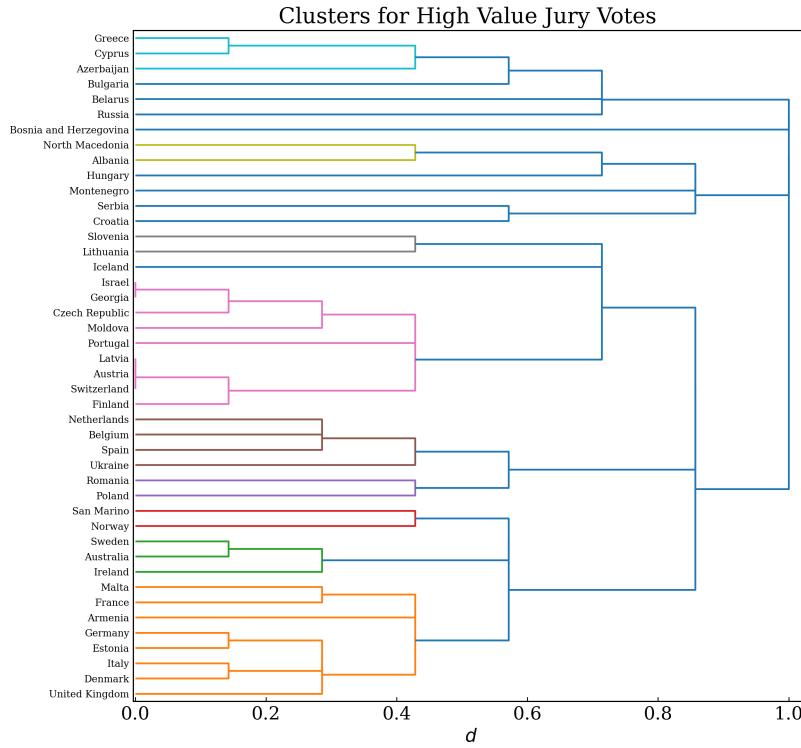


(b) Método de Infomap

**Figura D.3: Matriz de Frecuencias para Redes de Votos Altos del Jurado del Concurso de la Canción de Eurovisión.** En esta figura se observan las matrices de frecuencias para las redes de votos altos del jurado del Concurso de la Canción de Eurovisión. En estas matrices se pueden observar grupos de países que aparecen constantemente juntos en las comunidades detectadas durante el periodo 2016-2023.



(a) Método de Louvain



(b) Método de Infomap

**Figura D.4: Clusters de Países dentro del Concurso de la Canción de Eurovisión (Votos Altos del Jurado).** Se muestran los *dendrogramas* obtenidos al llevar a cabo clustering jerárquico aglomerativo para encontrar grupos de votación (para votos de valor alto) dentro de las redes de votación del público del Concurso de la Canción de Eurovisión.



**Figura D.5: Mapa de los Grupos de Votación en el Concurso de la Canción de Eurovisión (Método de Infomap).** Relación geográfica entre los grupos de votación encontrados para las redes de votación del público utilizando el Método de Louvain. Como se puede observar existe una fuerte correlación entre ciertos grupos de votación y su ubicación geográfica como es el caso de Bélgica y Holanda (en verde) o Islandia, Noruega, Suecia, Dinamarca, Finlandia y Estonia (en azul). Sin embargo, existen casos donde esta relación no es evidente, como en el caso de Francia, Portugal y Rumanía (en amarillo).

# Bibliografía

- [1] Jarosław Kwapień and Stanisław Drożdż. Physical approach to complex systems. *Physics Reports*, 515(3-4):115–226, 2012. 1, 2
- [2] Réka Albert and Albert-László Barabási. Dynamics of complex systems: Scaling laws for the period of boolean networks. *Physical Review Letters*, 84(24):5660, 2000. 1
- [3] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, 74(1):47, 2002. 3
- [4] Sergey N Dorogovtsev and Jose FF Mendes. Evolution of networks. *Advances in physics*, 51(4):1079–1187, 2002. 3
- [5] Mark EJ Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM review*, 45(2):167–256, 2003. 3
- [6] Mark Ed Newman, Albert-László Ed Barabási, and Duncan J Watts. *The structure and dynamics of networks*. Princeton university press, 2006. 3
- [7] Mark Newman. *Networks*. Oxford university press, 2018. 3, 10, 11, 15, 16, 20, 22, 25, 30
- [8] Duncan S Callaway, Mark EJ Newman, Steven H Strogatz, and Duncan J Watts. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Physical review letters*, 85(25):5468, 2000. 3

- [9] Mark EJ Newman, Steven H Strogatz, and Duncan J Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Physical review E*, 64(2):026118, 2001. 3, 25, 47
- [10] Mark EJ Newman. Clustering and preferential attachment in growing networks. *Physical review E*, 64(2):025102, 2001. 3, 18
- [11] Michael T Gastner and Mark EJ Newman. The spatial structure of networks. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 49(2):247–252, 2006. 3
- [12] Travis Martin, Xiao Zhang, and Mark EJ Newman. Localization and centrality in networks. *Physical review E*, 90(5):052808, 2014. 3
- [13] Albert-László Barabási, Réka Albert, and Hawoong Jeong. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, 281(1-4):69–77, 2000. 3
- [14] Réka Albert and Albert-László Barabási. Topology of evolving networks: local events and universality. *Physical review letters*, 85(24):5234, 2000. 3
- [15] Albert-László Barabási. The physics of the web. *Physics World*, 14(7):33, 2001. 3
- [16] I Farkas, I Derényi, Hawoong Jeong, Z Neda, ZN Oltvai, E Ravasz, A Schubert, A-L Barabási, and T Vicsek. Networks in life: Scaling properties and eigenvalue spectra. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 314(1-4):25–34, 2002. 3
- [17] Mark EJ Newman and Duncan J Watts. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Physics Letters A*, 263(4-6):341–346, 1999. 3
- [18] N Schwartz, R Cohen, D Ben-Avraham, A-L Barabási, and S Havlin. Percolation in directed scale-free networks. *Physical Review E*, 66(1):015104, 2002. 3
- [19] Juyong Park and Mark EJ Newman. Statistical mechanics of networks. *Physical Review E*, 70(6):066117, 2004. 3

- [20] Brian Karrer, Mark EJ Newman, and Lenka Zdeborová. Percolation on sparse networks. *Physical review letters*, 113(20):208702, 2014. 3
- [21] Giulio Cimini, Tiziano Squartini, Fabio Saracco, Diego Garlaschelli, Andrea Gabrielli, and Guido Caldarelli. The statistical physics of real-world networks. *Nature Reviews Physics*, 1(1):58–71, 2019. 3
- [22] Albert-László Barabási, Erzsébet Ravasz, and Zoltán Oltvai. Hierarchical organization of modularity in complex networks. In *Statistical mechanics of complex networks*, pages 46–65. Springer, 2003. 3
- [23] Erzsébet Ravasz and Albert-László Barabási. Hierarchical organization in complex networks. *Physical review E*, 67(2):026112, 2003. 3
- [24] Shai Pilosof, Sergio A Alcalá-Corona, Tong Wang, Ted Kim, Sergei Maslov, Rachel Whittaker, and Mercedes Pascual. The network structure and eco-evolutionary dynamics of crispr-induced immune diversification. *Nature Ecology & Evolution*, 4(12):1650–1660, 2020. 3
- [25] Steven H Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410(6825):268–276, 2001. 3
- [26] Stefano Boccaletti, Vito Latora, Yamir Moreno, Martin Chavez, and D-U Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, 424(4):175–308, 2006. 3
- [27] Katy Börner, Soma Sanyal, Alessandro Vespignani, et al. Network science. *Annu. Rev. Inf. Sci. Technol.*, 41(1):537–607, 2007. 3
- [28] Ted G Lewis. Network science. *New Jersey: Wiley and Sons*, 10:9780470400791, 2009. 3
- [29] Albert-László Barabási. Network science. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1987):20120375, 2013. 3, 10, 11, 15, 16

- [30] Marton POSFAI and Albert-Laszlo BARABASI. *Network science*. Cambridge University Press, 2016. 3
- [31] Alessandro Vespignani. Twenty years of network science, 2018. 3
- [32] Marko Gosak, Rene Markovič, Jurij Dolenšek, Marjan Slak Rupnik, Marko Marhl, Andraž Stožer, and Matjaž Perc. Network science of biological systems at different scales: A review. *Physics of life reviews*, 24:118–135, 2018. 3
- [33] Filippo Menczer, Santo Fortunato, and Clayton A Davis. *A first course in network science*. Cambridge University Press, 2020. 3, 10, 11, 15, 16
- [34] C. Camargo C. Gershenson D. Goldsmith S. Jeschonnek L. Kay S. Nichele J.R. Nicolás T. Schmickl M. Stella J. Brandoff A.J. Martínez Salinas H. Sayama M. De Domenico, D. Brockmann. Complexity explained. 2019. 3
- [35] Mathieu Bastian, Sébastien Heymann, and Mathieu Jacomy. Gephi: An open source software for exploring and manipulating networks, 2009. 4, 5, 35, 39
- [36] The Stanford GraphBase: A Platform for Combinatorial Computing D.E. Knuth. *Les Misérables: coappearance weighted network of characters in the novel Les Misérables*. Addison-Wesley, Reading MA, 1993. 4
- [37] Daniel Fenn, Omer Suleiman, Janet Efstathiou, and Neil F. Johnson. How does europe make its mind up? connections, cliques, and compatibility between countries in the eurovision song contest. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 360(2):576–598, 2006. 4, 7, 50, 89, 91, 98
- [38] Harold D Clarke, Matthew Goodwin, Matthew J Goodwin, and Paul Whiteley. *Brexit*. Cambridge University Press, 2017. 5
- [39] Eurovision song contest database. <https://eschome.net/index.html>. Accessed: 2022-05-04. 5, 44

- [40] Ivan Raykoff and Robert Deam Tobin. *A song for Europe: Popular music and politics in the Eurovision Song Contest*. Ashgate Publishing, Ltd., 2007. 6
- [41] Derek Gatherer. Comparison of eurovision song contest simulation with actual results reveals shifting patterns of collusive voting alliances. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 9, 03 2006. 7
- [42] Kenneth W Clements, Yihui Lan, and Shi Pei Seah. The big mac index two decades on: an evaluation of burgernomics. *International Journal of Finance & Economics*, 17(1):31–60, 2012. 7
- [43] Gad Yair. ‘unite unite europe’ the political and cultural structures of europe as reflected in the eurovision song contest. *Social Networks*, 17(2):147–161, 1995. 7, 50
- [44] Gad Yair and Daniel Maman. The persistent structure of hegemony in the eurovision song contest. *Acta Sociologica*, 39(3):309–325, 1996. 7, 50, 89, 91, 98
- [45] Alexander V. Mantzaris, Samuel R. Rein, and Alexander D. Hopkins. Examining collusion and voting biases between countries during the eurovision song contest since 1957. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 21(1):1, 2018. 7
- [46] L. Spierdijk and M.H. Vellekoop. *Geography, culture, and religion: Explaining the bias in Eurovision song contest voting*. Number 1794 in Applied Mathematics Memoranda. University of Twente, Department of Applied Mathematics, February 2006. 7, 90, 91
- [47] Marco A. Haan, S. Gerhard Dijkstra, and Peter T. Dijkstra. Expert judgment versus public opinion — evidence from the eurovision song contest. *Journal of Cultural Economics*, 29(1):59–78, 2005. 7, 44
- [48] Victor Ginsburgh and Abdul G. Noury. The eurovision song contest. is voting political or cultural? *European Journal of Political Economy*, 24(1):41–52, 2008. 7
- [49] Soon-Hyung Yook, Hawoong Jeong, A-L Barabási, and Yuhai Tu. Weighted evolving networks. *Physical Review Letters*, 86(25):5835, 2001. 12

- [50] Mark EJ Newman. Analysis of weighted networks. *Physical Review E*, 70(5):056131, 2004. 12, 54
- [51] Manlio De Domenico, Albert Solé-Ribalta, Emanuele Cozzo, Mikko Kivelä, Yamir Moreno, Mason A Porter, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Mathematical formulation of multilayer networks. *Physical Review X*, 3(4):041022, 2013. 14
- [52] Mikko Kivelä, Alex Arenas, Marc Barthelemy, James P Gleeson, Yamir Moreno, and Mason A Porter. Multilayer networks. *Journal of Complex Networks*, 2(3):203–271, 2014. 14
- [53] Stefano Boccaletti, Ginestra Bianconi, Regino Criado, Charo I Del Genio, Jesús Gómez-Gardeñes, Miguel Romance, Irene Sendiña-Nadal, Zhen Wang, and Massimiliano Zanin. The structure and dynamics of multilayer networks. *Physics Reports*, 544(1):1–122, 2014. 14
- [54] Aric A. Hagberg, Daniel A. Schult, and Pieter J. Swart. Exploring network structure, dynamics, and function using networkx. In Gaël Varoquaux, Travis Vaught, and Jarrod Millman, editors, *Proceedings of the 7th Python in Science Conference*, pages 11 – 15, Pasadena, CA USA, 2008. 17, 29, 31, C, D
- [55] Ryan A. Rossi and Nesreen K. Ahmed. The network data repository with interactive graph analytics and visualization. In *AAAI*, 2015. Accessed: 2022-05-12. 17, 29
- [56] Giorgio Fagiolo. Clustering in complex directed networks. *Physical Review E*, 76(2), Aug 2007. 18, 19, 49
- [57] Mark EJ Newman. Scientific collaboration networks. i. network construction and fundamental results. *Physical review E*, 64(1):016131, 2001. 20
- [58] Diego Garlaschelli and Maria I. Loffredo. Patterns of link reciprocity in directed networks. *Physical Review Letters*, 93:268701, Dec 2004. 20, 50

- [59] Mark E. J. Newman. *Random graphs as models of networks*, chapter 2, pages 35–68. John Wiley Sons, Ltd, 2002. 22
- [60] Roger Guimera, Marta Sales-Pardo, and Luís A Nunes Amaral. Module identification in bipartite and directed networks. *Physical Review E*, 76(3):036102, 2007. 27
- [61] Elizabeth A Leicht and Mark EJ Newman. Community structure in directed networks. *Physical Review Letters*, 100(11):118703, 2008. 27, 53
- [62] Brian Karrer, Elizaveta Levina, and Mark EJ Newman. Robustness of community structure in networks. *Physical Review E*, 77(4):046119, 2008. 27
- [63] Jiajun Zhang, Zhanjiang Yuan, and Tianshou Zhou. Synchronization and clustering of synthetic genetic networks: a role for cis-regulatory modules. *Physical Review E*, 79(4):041903, 2009. 27
- [64] Sonia Cafieri, Pierre Hansen, and Leo Liberti. Edge ratio and community structure in networks. *Physical Review E*, 81(2):026105, 2010. 27
- [65] Santo Fortunato. Community detection in graphs. *Physics reports*, 486(3-5):75–174, 2010. 27
- [66] Alcides Viamontes Esquivel and Martin Rosvall. Compression of flow can reveal overlapping-module organization in networks. *Physical Review X*, 1(2):021025, 2011. 27
- [67] M. E.J. Newman. Communities, modules and large-scale structure in networks. *Nature Physics*, 8(1):25–31, 2012. 27
- [68] Tiago P Peixoto. Parsimonious module inference in large networks. *Physical review letters*, 110(14):148701, 2013. 27
- [69] Vincenzo Nicosia, Miguel Valencia, Mario Chavez, Albert Díaz-Guilera, and Vito Latora. Remote synchronization reveals network symmetries and functional modules. *Physical Review Letters*, 110(17):174102, 2013. 27

- [70] Mel MacMahon and Diego Garlaschelli. Community detection for correlation matrices. *Phys. Rev. X*, 5:021006, Apr 2015. 27
- [71] Mark EJ Newman and Tiago P Peixoto. Generalized communities in networks. *Physical review letters*, 115(8):088701, 2015. 27
- [72] Filippo Radicchi. Decoding communities in networks. *Physical Review E*, 97(2):022316, 2018. 27
- [73] Michelle Girvan and Mark EJ Newman. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the national academy of sciences*, 99(12):7821–7826, 2002. 28
- [74] Erzsébet Ravasz, Anna Lisa Somera, Dale A Mongru, Zoltán N Oltvai, and A-L Barabási. Hierarchical organization of modularity in metabolic networks. *science*, 297(5586):1551–1555, 2002. 28
- [75] Erzsébet Ravasz. Detecting hierarchical modularity in biological networks. *Computational Systems Biology*, pages 145–160, 2009. 28
- [76] Stefano Bonaccorsi, Stefania Ottaviano, Francesco De Pellegrini, Annalisa Socievole, and Piet Van Mieghem. Epidemic outbreaks in two-scale community networks. *Physical Review E*, 90(1):012810, 2014. 28
- [77] Mian-Xin Liu, Wei Wang, Ying Liu, Ming Tang, Shi-Min Cai, and Hai-Feng Zhang. Social contagions on time-varying community networks. *Physical Review E*, 95(5):052306, 2017. 28
- [78] Sergio Antonio Alcalá-Corona, Santiago Sandoval-Motta, Jesus Espinal-Enriquez, and Enrique Hernández-Lemus. Modularity in biological networks. *Frontiers in Genetics*, 12, 2021. 28
- [79] AY Yamamoto-Elizalde, E Hernández-Lemus, and G de Anda-Jáuregui. Diffusion processes in multilayer transportation networks: the flight of the coronavirus. *Revista Mexicana Física*, 66(4):516, 2020. 28

- [80] Mark EJ Newman and Michelle Girvan. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical review E*, 69(2):026113, 2004. 28, 30
- [81] Mark EJ Newman. Fast algorithm for detecting community structure in networks. *Physical review E*, 69(6):066133, 2004. 28, 30
- [82] Aaron Clauset, Mark EJ Newman, and Christopher Moore. Finding community structure in very large networks. *Physical review E*, 70(6):066111, 2004. 28, 30
- [83] Mark EJ Newman. Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices. *Physical review E*, 74(3):036104, 2006. 28
- [84] Brian Karrer and Mark EJ Newman. Stochastic blockmodels and community structure in networks. *Physical review E*, 83(1):016107, 2011. 28
- [85] Aurelien Decelle, Florent Krzakala, Christopher Moore, and Lenka Zdeborová. Inference and phase transitions in the detection of modules in sparse networks. *Physical Review Letters*, 107(6):065701, 2011. 28
- [86] Brian Ball, Brian Karrer, and M. E. Newman. Efficient and principled method for detecting communities in networks. *Physical Review E*, 84(3):036103, 2011. 28
- [87] M. E.J. Newman. Spectral methods for community detection and graph partitioning. *Physical Review E*, 88(4):042822, 2013. 28
- [88] Ronghua Shang, Jing Bai, Licheng Jiao, and Chao Jin. Community detection based on modularity and an improved genetic algorithm. *Physica A*, 392(5):1215–1231, 2013. 28
- [89] Mark EJ Newman. Equivalence between modularity optimization and maximum likelihood methods for community detection. *Physical Review E*, 94(5):052315, 2016. 28
- [90] Tzu-Chi Yen and Daniel B Larremore. Community detection in bipartite networks with stochastic block models. *Physical Review E*, 102(3):032309, 2020. 28

- [91] Mark EJ Newman. Assortative mixing in networks. *Physical Review Letters*, 89(20):208701, 2002. 28, 30
- [92] Mark EJ Newman. Mixing patterns in networks. *Physical review E*, 67(2):026126, 2003. 28
- [93] Wayne W. Zachary. An information flow model for conflict and fission in small groups. *Journal of Anthropological Research*, 33(4):452–473, 1977. 29, 32, 34, 39
- [94] Wilhelm Kirch, editor. *Pearson's Correlation Coefficient*, pages 1090–1091. Springer Netherlands, Dordrecht, 2008. 30, 51
- [95] Vincent D Blondel, Jean-Loup Guillaume, Renaud Lambiotte, and Etienne Lefebvre. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of statistical mechanics: theory and experiment*, 2008(10):P10008, 2008. 32, 33, 53, 54
- [96] Andrea Lancichinetti and Santo Fortunato. Community detection algorithms: A comparative analysis. *Physical Review E*, 80(5), nov 2009. 32
- [97] U. Brandes, D. Delling, M. Gaertler, R. Goerke, M. Hoefer, Z. Nikoloski, and D. Wagner. Maximizing modularity is hard, 2006. 35
- [98] Thomas Aynaud. python-louvain x.y: Louvain algorithm for community detection. <https://github.com/taynaud/python-louvain>, 2020. 35, 54, D
- [99] Martin Rosvall and Carl T Bergstrom. An information-theoretic framework for resolving community structure in complex networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(18):7327–7331, 2007. 35
- [100] Martin Rosvall and Carl T Bergstrom. Maps of random walks on complex networks reveal community structure. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(4):1118–1123, 2008. 36
- [101] D.A. Huffman. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9):1098–1101, 1952. 36

- [102] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(4):623–656, 1948. 37
- [103] C. Shannon and W. Weaver. The mathematical theory of communication. *The Mathematical Theory of Communication*, 1, 1949. 37
- [104] Martin Rosvall, Daniel Axelsson, and Carl T Bergstrom. The map equation. *The European Physical Journal Special Topics*, 178(1):13–23, 2009. 37, 55
- [105] Youngdo Kim and Hawoong Jeong. Map equation for link communities. *Physical Review E*, 84(2):026110, 2011. 37, 55
- [106] A. Eriksson D. Edler and M. Rosvall. The mapequation software package. <http://www.mapequation.org.>, 2014. 39, 55, E
- [107] Ningyuan Chen and Mariana Olvera-Cravioto. Directed random graphs with given degree distributions. *Stochastic Systems*, 3(1):147 – 186, 2013. 47, 48
- [108] R. Milo, N. Kashtan, S. Itzkovitz, M. E. J. Newman, and U. Alon. On the uniform generation of random graphs with prescribed degree sequences, 2003. 47
- [109] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45(2):167–256, 2003. 49
- [110] Mark EJ Newman and Juyong Park. Why social networks are different from other types of networks. *Physical review E*, 68(3):036122, 2003. 49
- [111] Jacob G. Foster, David V. Foster, Peter Grassberger, and Maya Paczuski. Edge direction and the structure of networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(24):10815–10820, 2010. 51
- [112] Nicolas Dugué and Anthony Perez. *Directed Louvain: maximizing modularity in directed networks*. PhD thesis, Université d’Orléans, 2015. 53

- [113] Norah Alotaibi and Delel Rhouma. A review on community structures detection in time evolving social networks. *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences*, 34(8, Part B):5646–5662, 2022. 56, 57
- [114] Frank Nielsen. *Introduction to HPC with MPI for Data Science*. 09 2016. 59
- [115] D. Defays. An efficient algorithm for a complete link method. *The Computer Journal*, 20(4):364–366, 01 1977. 61
- [116] Riccardo Benedetti. Scoring rules for forecast verification. *Monthly Weather Review*, 138(1):203 – 211, 2010. 71
- [117] Muhan Zhang and Yixin Chen. Link prediction based on graph neural networks. In S. Bengio, H. Wallach, H. Larochelle, K. Grauman, N. Cesa-Bianchi, and R. Garnett, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 31. Curran Associates, Inc., 2018. 98
- [118] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot, and E. Duchesnay. Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12:2825–2830, 2011. E