

Politica Economica II

Máximo Sangiácomo

Índice

1	Introducción a R	5
1.1	Primeros pasos	5
1.2	Busacar ayuda	6
1.3	Tipos de datos	6
1.4	Limpieza de memoria	6
1.5	Asignación de valores	7
1.6	Operadores aritméticos	7
1.7	Operadores relacionales	8
1.8	Operadores lógicos	9
2	Base de datos	11
2.1	Directorio de trabajo	11
2.2	Cargar datos	12
2.2.1	Ingresar datos con <code>tidyverse</code>	12
2.3	Exportar datos	13
2.4	Pipe	13
2.5	Variables	14
2.6	Merge	14
2.7	Variables: <code>group_by</code> , <code>mutate</code>	15
2.8	Guardar datos	15
2.9	Valores missing	16
2.10	Análisis de datos	17
2.10.1	Tablas	19
2.11	<code>group_by</code> , <code>summarise</code>	19
2.12	Gráficos	20

2.13 GGPlot	21
2.14 Guardar un gráfico	23
3 Conceptos generales	24
3.1 Estimacion	24
3.2 Prediccion	24
3.3 Metodos parametricos	25
3.4 Metodos no parametricos	26
3.5 Evaluacion de la precision del modelo	26
3.5.1 Calidad del ajuste	26
3.5.2 Trade-off Sesgo-Varianza	28
3.5.3 Clasificacion	30
3.5.4 Matriz de confusion	31
3.6 Resumen	32
4 Regresion lineal	33
4.1 Relacion entre estimacion optima y prediccion optima	34
4.2 Aplicacion practica	36
5 Logit	42
5.1 Modelo <i>logit</i>	42
5.1.1 Interpretacion de coeficientes en el modelo <i>logit</i>	43
5.2 Aplicacion practica	44
6 Arboles de decision	53
6.1 <i>Classification and Regression Tree</i> (CART)	53
6.2 Bagging	55
6.3 Random Forest	56
7 Trabajo Practico	57
7.1 Reglas del Trabajo practico	57
7.2 Enunciado del Trabajo Practico	57
7.3 Aplicacion practica	58

Descripción del curso

El objetivo del curso es abordar distintas metodologías de análisis de datos desde el punto de vista teórico y práctico utilizando el programa R. Si bien, dada la extensión de las clases, la cobertura de cada tema no busca ser exhaustiva intenta capturar las principales intuiciones de cada método.¹

En los Capítulos 1 y 2 se hace una breve introducción al manejo de bases de datos en R. El Capítulo 3 se ocupa de los conceptos teóricos² a ser utilizados en la práctica. Luego, los Capítulos 4 a 6 revisan distintas metodologías donde primero se presentan cuestiones conceptuales y después se realizan aplicaciones prácticas. Finalmente, el Capítulo 7 presenta una guía de ejercicios para la elaboración del **Trabajo Práctico**.

¹Alguno de los temas no será cubierto completamente durante las clases pero la idea es dejar el material disponible para que pueda ser revisado de manera individual.

²Se muestran las principales formulaciones matemáticas aunque la derivación formal de los resultados excede los objetivos de este curso.

Capítulo 1

Introducción a R

- La programación de rutinas en *software* específico para la manipulación y análisis de bases de datos permite asegurar procesos homogéneos, documentados, fácilmente auditables, modificables y que pueden ser compartidos entre diferentes usuarios. Además, resulta sumamente útil para realizar tareas repetitivas generando ganancias de eficiencia.
- Es muy importante realizar anotaciones, tanto para compartir código con otro usuario como para uno mismo en el futuro (por ejemplo, cuáles son los insumos/*output*, los ¿por qué?). La combinación de teclas **Ctrl/Cmd + Shift + R** permite crear secciones en *scripts* que luego sirven para navegar y ser ordenados.

Importante. *A la gloria no se llega por un camino de rosas.* **Trabajar, trabajar y trabajar.** [Osvaldo Zubeldia](#).

1.1 Primeros pasos

R es un lenguaje orientado a **objetos** (vectores, listas, matrices). Si bien al principio puede parecer demasiado complejo, no es así. De hecho, una característica destacada de R es su flexibilidad.

Mientras que un software clásico muestra inmediatamente los resultados de un comando, R los almacena en un objeto, por lo que se puede realizar un análisis sin el resultado desplegado.

R (el motor) puede complementarse con **RStudio** (tablero de instrumentos) que es una IDE (*integrated development environment*) para operar de manera mas amigable (editor con sintaxis y distintos espacios de trabajo). Cada uno se encuentra disponible en:¹

1. R

¹Buscar las versiones adecuadas para el sistema operativo utilizado.

2. RStudio

Una vez instalados los programas se deben descargar “paquetes” que agregan funcionalidades al paquete que viene incorporado (base).

```
#Descarga de programa
install.packages('tidyverse')

#Carga de programa antes de utilizarlo en un script
library(tidyverse)
```

Eventualmente se puede utilizar una función específica de un paquete previamente instalado sin cargar el paquete completo. Por ejemplo, si se quiere utilizar la función `read_excel()` del paquete `readxl`.

```
readxl::read_excel()
```

1.2 Busacar ayuda

```
# Por comando
?rm # Para poder ver la ayuda el paquete debe estar instalado
help(lm)
```

- Buscar el tab Help en la ventana de abajo a la derecha de RStudio
- [Google](#)

1.3 Tipos de datos

- character/string
- numeric (integer, double)
- factor (variables categóricas, importante para clasificación)
- logical
- date

1.4 Limpieza de memoria

```
rm(list = ls()) # Elimina todos los objetos en memoria
gc() # Garbage Collection
```

1.5 Asignación de valores

```
# nombre_objeto <- valor
x <- 1
x = 5
x
```

```
## [1] 5
```

```
y = x
y = 4
```

1.6 Operadores aritméticos

```
y + x
```

```
## [1] 9
```

```
y - x
```

```
## [1] -1
```

```
y * x
```

```
## [1] 20
```

```
4 / 8
```

```
## [1] 0.5
```

```
8 %% 4
```

```
## [1] 0
```

```
2**5
```

```
## [1] 32
```

```
2^5
```

```
## [1] 32
```

```
sqrt(9)
```

```
## [1] 3
```

```
log(1)
```

```
## [1] 0
```

1.7 Operadores relacionales

```
# < <= > >= == !=  
x == 1
```

```
## [1] FALSE
```

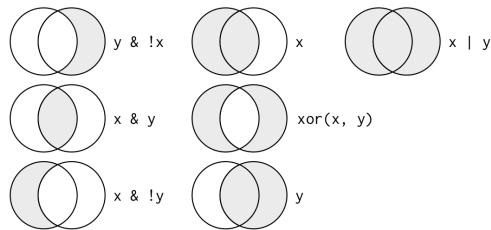
```
x == y
```

```
## [1] FALSE
```

```
y < x
```

```
## [1] TRUE
```

1.8 Operadores lógicos



Nota: Se puede usar `||` (o) y `&&` (y) para combinar múltiples expresiones lógicas. Estos operadores se llaman “cortocircuito”: tan pronto como `||` ve el primer VERDADERO devuelve VERDADERO sin calcular nada más. Tan pronto como `&&` ve el primer FALSO, devuelve FALSO.

```
# ! & / && ||
TRUE
```

```
## [1] TRUE
```

```
!FALSE
```

```
## [1] TRUE
```

```
!F
```

```
## [1] TRUE
```

```
F & T
```

```
## [1] FALSE
```

```
F | T
```

```
## [1] TRUE
```

```
x == 1 & y==4
```

```
## [1] FALSE
```

```
x == 1 | y==4
```

```
## [1] TRUE
```

```
!(x > y); x <= y
```

```
## [1] FALSE
```

```
## [1] FALSE
```

Capítulo 2

Base de datos

En esta clase nos vamos a centrar en el uso de `tidyverse`.

En R existen dos tipos de bases de datos `data.frame()` y `tibble()` que son las bases de datos de `tidyverse` el mejor paquete para manipulación y transformación de datos (ver [Wickham and Grolemund \(2017\)](#)). Un `data.frame` (objeto `df`) se convierte fácilmente a `tibble` (y viceversa).

```
# Un data.frame (objeto df) se convierte fácilmente a tibble
tib = as_tibble(df)
```

Las tibbles tienen algunas funciones especiales como poder usar nombres de variables con espacio (se deben utilizar *back ticks*).

```
library(tidyverse)
tb <- tibble(
  `Plazo Fijo` = "espacio",
  `2000` = "numero"
)
tb

## # A tibble: 1 x 2
##   `Plazo Fijo` `2000`
##   <chr>        <chr>
## 1 espacio      numero
```

2.1 Directorio de trabajo

```
# Para ver en que directorio estamos trabajando
getwd()
# Definir directorio. Notar barras invertidas en la ruta
setwd('C:/Documentos/CianciaDatos')
```

2.2 Cargar datos

Tip. La función `fread()` del paquete `data.table` es la más eficiente para grandes volúmenes de datos porque permite paralelizar con *multithread*.

```
# CSV
bd = read.csv("b_datos.csv", header=TRUE, stringsAsFactors=TRUE, sep=",")
bd = data.table::fread('b_datos.txt', header=TRUE, stringsAsFactors=F, sep='\t', nThre
bd = read.delim('./datos/b_datos.txt', header=TRUE, stringsAsFactors=F, sep='\t')

# Excel
# También puede suministrarse la ruta de acceso completa
bd = readxl::read_excel('./data/datos_wb.xlsx', sheet='1')
datos = readxl::read_excel('./data/datos_ts.xlsx', sheet='datos')
str(bd)

## tibble [60 x 11] (S3:tbl_df/tbl/data.frame)
## $ year      : num [1:60] 2011 2011 2011 2011 2011 ...
## $ cname     : chr [1:60] "Argentina" "Brazil" "Chile" "France" ...
## $ ccode     : chr [1:60] "ARG" "BRA" "CHL" "FRA" ...
## $ gdp_pc2010: num [1:60] 10883 11628 13456 41369 36228 ...
## $ gdp_pc2017: num [1:60] 24648 15323 22338 42864 42892 ...
## $ gdp_2010   : num [1:60] 4.49e+11 2.30e+12 2.32e+11 2.70e+12 2.15e+12 ...
## $ credit_ps : num [1:60] 14 58.1 101.3 96.8 94.1 ...
## $ inv       : num [1:60] 17.2 20.6 23.1 22.4 19.7 ...
## $ exports   : num [1:60] 18.4 11.6 37.8 28.4 26.9 ...
## $ imports   : num [1:60] 16.8 12.4 34.4 30.4 28.3 ...
## $ popu      : num [1:60] 4.13e+07 1.98e+08 1.72e+07 6.53e+07 5.94e+07 ...
```

2.2.1 Ingresar datos con tidyverse

Cuadro 2.1: Vista de la base de datos (World Bank)

year	cname	ccode	gdp_pc2010	gdp_pc2017
2,011	Argentina	ARG	10,883	24,648
2,011	Brazil	BRA	11,628	15,323
2,011	Chile	CHL	13,456	22,338
2,011	France	FRA	41,369	42,864
2,011	Italy	ITA	36,228	42,892
2,011	United Kingdom	GBR	39,729	42,294

Comando	Separador
<code>read_csv()</code>	coma
<code>read_csv2()</code>	punto y coma
<code>read_tsv()</code>	tab
<code>read_delim()</code>	otros

2.3 Exportar datos

```
# CSV
write.csv(bd, "b_datos.csv")
write_csv()
write_excel_csv()

# TXT
write_delim()
write_tsv()

# Excel
library("xlsx")
out <- list('bd' = BD1, 't1' = TAB1, 't2' = TAB2)
write.xlsx(out, file = 'resutados.xlsx')
```

2.4 Pipe

Se llama **pipe** al símbolo `%>%` (*shortcut* con: Ctrl/Cmd + Shift + M) que cumple la función de una función compuesta. Es decir, una secuencia de operaciones del tipo: $h(g(f(x)))$.

Dicho de otra forma: $x \%>\% f \%>\% g \%>\% h$.

La sintaxis general de una función es `FN(OBJETO, ...)` y lo que hace la pipa es enviar el objeto a la posición correspondiente sin necesidad de expresarlo explícitamente. Por lo

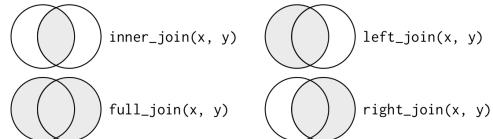
tanto, la sintaxis anterior puede expresarse equivalentemente con una pipa de la siguiente manera: `OBJETO %>% FN(, ...)`.

2.5 Variables

```
library(tidyverse)
bd1 = bd %>%
  mutate(gdp_pc2010bis = gdp_2010 / popu, # crear variable
         logGDP_pc2010 = log(gdp_pc2010),
         open = exports + imports,
         inv_demean = inv - mean(inv)) %>%
  rename(poblacion = popu) %>% # rename (newname = oldname)
  mutate(gdp_2010 = NULL)       # drop (también con select(-gdp_2010))
```

year	cname	gdp_pc2010	gdp_pc2010bis	open	inv_demean
2,011	Argentina	10,883	10,883	35.2	-2
2,011	Brazil	11,628	11,628	23.9	2
2,011	Chile	13,456	13,456	72.2	4
2,011	France	41,369	41,369	58.8	4
2,011	Italy	36,228	36,228	55.1	1
2,011	United Kingdom	39,729	39,729	62.4	-3

2.6 Merge



```
meta = readxl::read_excel('./data/datos_wb.xlsx', sheet='2')
bd = left_join(bd, meta, by=c('ccode')) # clave de union character no suele ser la me
```

year	cname	region
2011	Argentina	Latin America & Caribbean
2011	Brazil	Latin America & Caribbean
2011	Chile	Latin America & Caribbean
2011	France	Europe & Central Asia
2011	Italy	Europe & Central Asia
2011	United Kingdom	Europe & Central Asia

2.7 Variables: group_by, mutate

```

# Si quiero usar una función propia
demean = function(x) {x - mean(x, na.rm = TRUE)}
bd = bd %>%
  mutate(open = exports + imports) %>%
  dplyr::select(ccode, year, region, gdp_pc2017, credit_ps, inv, open) %>%
  arrange(ccode, year) %>%
  group_by(ccode) %>%
  mutate(obs = seq(1:length(ccode)),      # igual con row_number()
         gdp_gr = 100 * (gdp_pc2017 / dplyr::lag(gdp_pc2017, 1) - 1),
         credit_ps_mean = mean(credit_ps, na.rm = TRUE),
         dev = ifelse(region=='Latin America & Caribbean', 0, 1),
         gdp_dem = demean(gdp_pc2017)) %>%
  ungroup()
head(bd[c('ccode', 'dev', 'year', 'gdp_pc2017', 'gdp_gr', 'gdp_dem')],10)

```

```

## # A tibble: 10 x 6
##   ccode   dev   year gdp_pc2017 gdp_gr   gdp_dem
##   <chr> <dbl> <dbl>      <dbl>   <dbl>      <dbl>
## 1 ARG      0   2011      24648.   NA      1451.
## 2 ARG      0   2012      24119.  -2.15     922.
## 3 ARG      0   2013      24424.   1.27     1227.
## 4 ARG      0   2014      23550.  -3.58     353.
## 5 ARG      0   2015      23934.   1.63     737.
## 6 ARG      0   2016      23190.  -3.11    -7.58
## 7 ARG      0   2017      23597.   1.76     400.
## 8 ARG      0   2018      22759.  -3.55    -438.
## 9 ARG      0   2019      22064.  -3.06    -1133.
## 10 ARG     0   2020      19687. -10.8     -3511.

```

2.8 Guardar datos

```

bd = bd %>% select(ccode, year, region, gdp_gr, credit_ps, inv, open)
save(bd, file="datos_wb.rda")

```

ccode	year	region	gdp_pc2017	credit_ps	inv	open	obs	gdp_gr	exch
ARG	2018	Latin America & Caribbean	22759.4	NA	14.7	31.2	8	-3.6	0.0
ARG	2019	Latin America & Caribbean	22063.9	NA	13.5	32.6	9	-3.1	0.0
ARG	2020	Latin America & Caribbean	19686.5	NA	13.4	30.5	10	-10.8	0.0
BRA	2018	Latin America & Caribbean	14668.3	60.2	15.1	28.9	8	1.0	0.0
BRA	2019	Latin America & Caribbean	14763.9	62.6	15.3	28.5	9	0.7	0.0
BRA	2020	Latin America & Caribbean	14064.0	70.2	16.4	32.4	10	-4.7	0.0
GBR	2018	Europe & Central Asia	46037.9	134.6	17.8	63.0	8	0.6	0.0
GBR	2019	Europe & Central Asia	46406.5	133.5	18.0	63.4	9	0.8	0.0
GBR	2020	Europe & Central Asia	41627.1	146.4	17.6	55.1	10	-10.3	0.0
ITA	2018	Europe & Central Asia	42052.6	76.7	17.8	60.3	8	1.1	0.0
ITA	2019	Europe & Central Asia	42662.5	74.3	18.0	60.1	9	1.5	0.0
ITA	2020	Europe & Central Asia	38992.1	83.6	17.8	55.3	10	-8.6	0.0

2.9 Valores missing

Se debe tener presente que se elimina la fila completa, por lo tanto, antes de descartarlos hay considerar si los valores *missing* son aleatorios o contienen algo de información.

```
# Volvemos a la base de WB. Recordamos la estructura
str(bd)
```

```
## # tibble [60 x 12] (S3: tbl_df/tbl/data.frame)
## # $ ccode      : chr [1:60] "ARG" "ARG" "ARG" "ARG" ...
## # $ year       : num [1:60] 2011 2012 2013 2014 2015 ...
## # $ region     : chr [1:60] "Latin America & Caribbean" "Latin America & Caribbean" ...
## # $ gdp_pc2017 : num [1:60] 24648 24119 24424 23550 23934 ...
## # $ credit_ps  : num [1:60] 14 15.2 15.7 13.8 14.4 ...
## # $ inv        : num [1:60] 17.2 15.9 16.3 16 15.6 ...
## # $ open       : num [1:60] 35.2 30.5 29.3 28.4 22.5 ...
## # $ obs        : int [1:60] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
## # $ gdp_gr    : num [1:60] NA -2.15 1.27 -3.58 1.63 ...
## # $ credit_ps_mean: num [1:60] 14.7 14.7 14.7 14.7 14.7 ...
## # $ dev        : num [1:60] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
## # $ gdp_dem   : num [1:60] 1451 922 1227 353 737 ...
```

```
summary(bd[,1:4])
```

```
##      ccode          year      region      gdp_pc2017
##  Length:60      Min.   :2011  Length:60      Min.   :14064
##  Class :character  1st Qu.:2013  Class :character  1st Qu.:23273
##  Mode  :character  Median :2016  Mode  :character  Median :32011
```

```

##                                     Mean   :2016                                     Mean   :31864
##                                     3rd Qu.:2018                                     3rd Qu.:42828
##                                     Max.   :2020                                     Max.   :46406

# cuenta valores missing de CreditoSPriv
sum(is.na(bd$gdp_gr))

## [1] 6

sum(is.na(bd$credit_ps))

## [1] 4

sum(ifelse(is.na(bd$gdp_gr&bd$credit_ps),1,0))

## [1] 10

bd1 = na.omit(bd)
nrow(bd1)

## [1] 50

rm('bd1')

```

2.10 Análisis de datos

```
str(bd)

## # tibble [60 x 12] (S3:tbl_df/tbl/data.frame)
## $ ccode      : chr [1:60] "ARG" "ARG" "ARG" "ARG" ...
## $ year       : num [1:60] 2011 2012 2013 2014 2015 ...
## $ region     : chr [1:60] "Latin America & Caribbean" "Latin America & Caribbean" ...
## $ gdp_pc2017 : num [1:60] 24648 24119 24424 23550 23934 ...
## $ credit_ps  : num [1:60] 14 15.2 15.7 13.8 14.4 ...
## $ inv         : num [1:60] 17.2 15.9 16.3 16 15.6 ...
## $ open        : num [1:60] 35.2 30.5 29.3 28.4 22.5 ...
## $ obs         : int [1:60] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
## $ gdp_gr     : num [1:60] NA -2.15 1.27 -3.58 1.63 ...
## $ credit_ps_mean: num [1:60] 14.7 14.7 14.7 14.7 14.7 ...
## $ dev         : num [1:60] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
## $ gdp_dem    : num [1:60] 1451 922 1227 353 737 ...
```


2.10.1 Tablas

Los valores NA afectan a todas las estadísticas. Opción na.rm = F / T.

```
bd %>% summarise(
  credit_ps_media = mean(credit_ps),
  inv_max = max(inv),
  open_min = min(open)
)

## # A tibble: 1 x 3
##   credit_ps_media inv_max open_min
##             <dbl>    <dbl>     <dbl>
## 1             NA     24.9     22.5
```

2.11 group_by, summarise

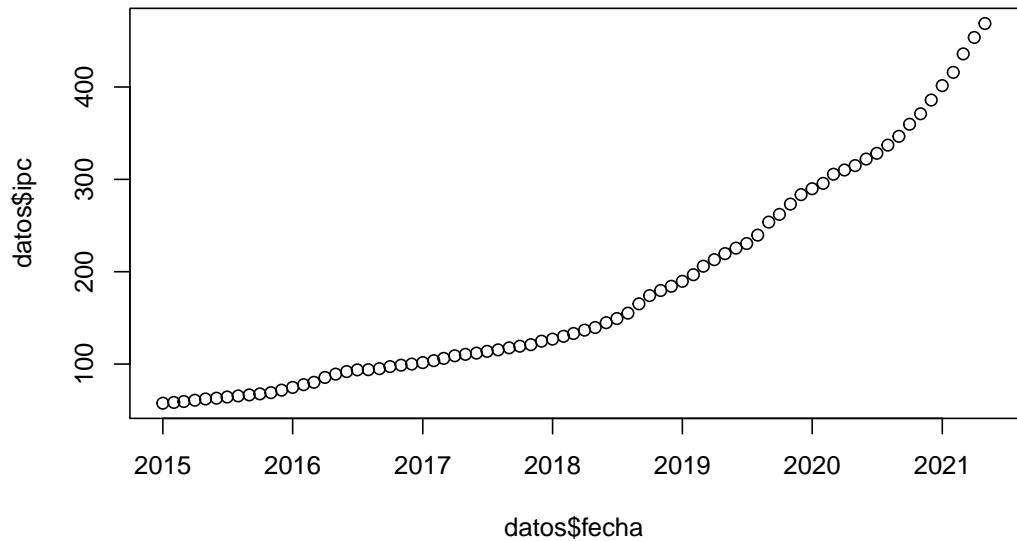
```
tab = bd %>%
  dplyr::select_if(is.numeric) %>%
  pivot_longer(everything(), names_to = 'Variable', values_to = 'Value') %>%
  group_by(Variable) %>%
  summarise(
    Obs = n(),
    Media = mean(Value, na.rm = T),
    Mediana = median(Value, na.rm = T),
    SD = sd(Value, na.rm = T),
    Min = min(Value, na.rm = T),
    Max = max(Value, na.rm = T)) %>%
  ungroup()
tab

## # A tibble: 10 x 7
##   Variable      Obs     Media    Mediana       SD     Min     Max
##   <chr>     <int>     <dbl>     <dbl>     <dbl>     <dbl>     <dbl>
## 1 credit_ps      60  8.97e+ 1    94.6     38.9    13.7    171.
## 2 credit_ps_mean  60  8.63e+ 1    93.4     40.5    14.7    143.
## 3 dev            60  5 e- 1      0.5      0.504     0       1
## 4 gdp_dem        60 -7.88e-13   78.4    1180.   -3511.   2211.
## 5 gdp_gr          60 -6.78e- 1    0.710     3.34    -10.8     4.31
## 6 gdp_pc2017     60  3.19e+ 4 32011.    11682.   14064.   46406.
## 7 inv            60  1.88e+ 1    17.8      3.19    13.4    24.9
## 8 obs            60  5.5 e+ 0     5.5      2.90      1       10
```

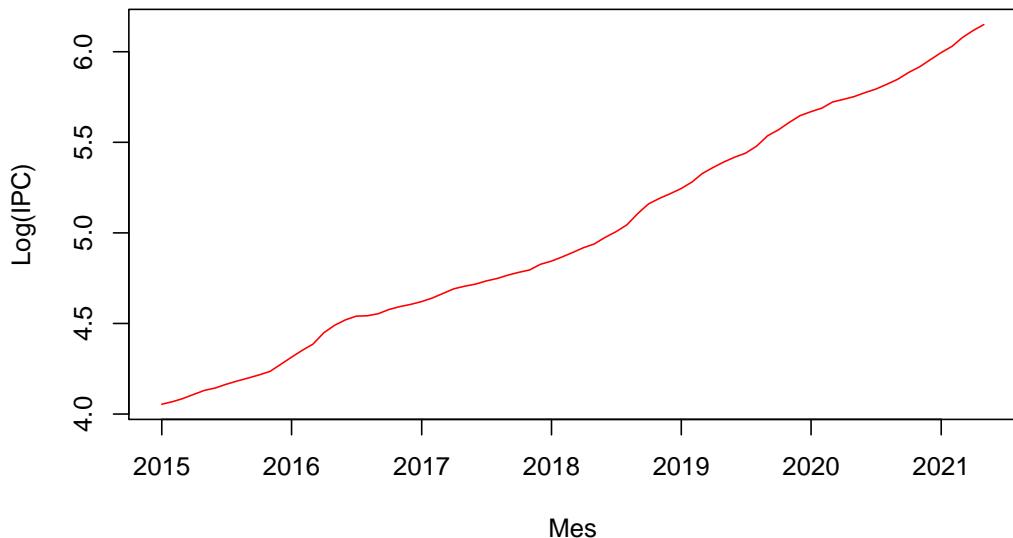
```
## 9 open          60  4.91e+ 1    56.2      15.7      22.5      72.2
## 10 year         60  2.02e+ 3  2016.       2.90     2011      2020
```

2.12 Gráficos

```
plot(datos$fecha, datos$ipc)
```



```
plot(datos$fecha, log(datos$ipc), type= 'l', col = 'red', xlab ='Mes', ylab ='Log(IPC)')
```

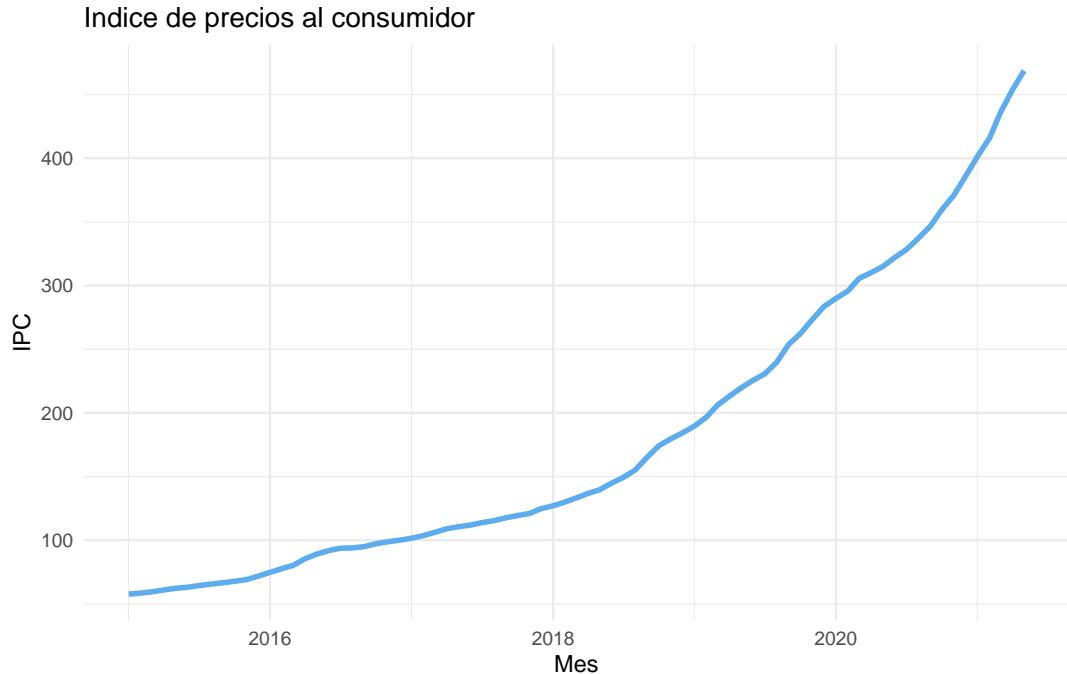


2.13 GGPlot

Grammar of Graphics. Ver más detalles en ([Wickham et al., 2016](#)).

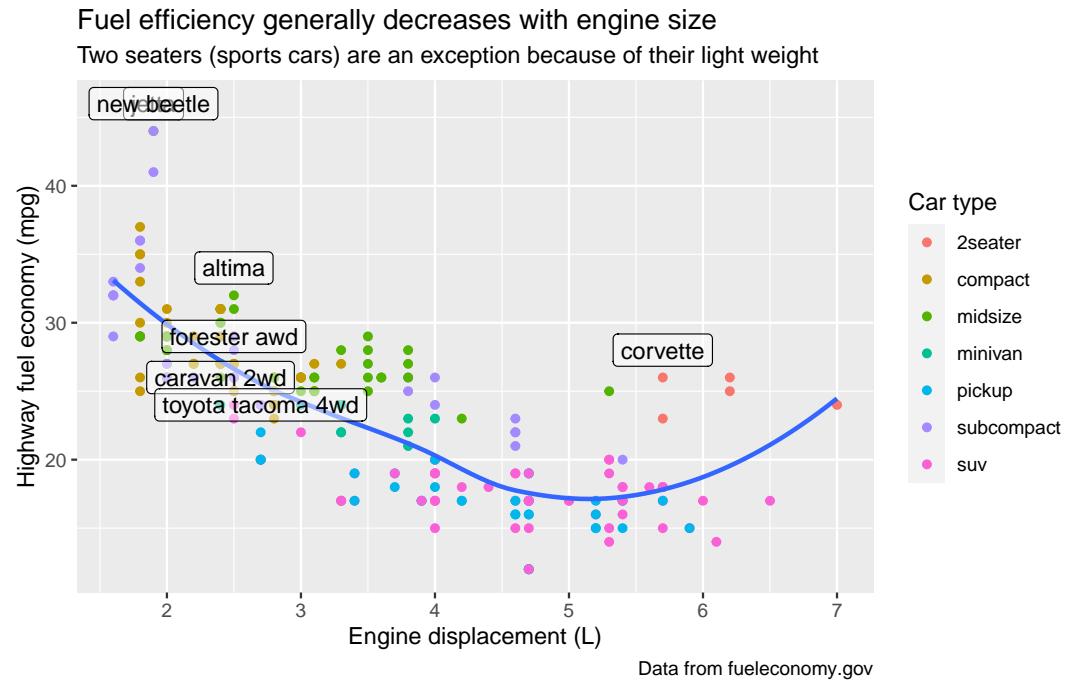
```
#SINTAXIS
# ggplot(data = <DATA>) +
#   <GEOM_FUNCTION>(mapping = aes(<MAPPINGS>))
# se agregan layers (point, line, etc.)
# aes() "aesthetic" define la estética del gráfico
library(ggplot2)
datos1 = datos %>%
  select(fecha, ipc)

ggplot(datos1, aes(x=fecha, y=ipc)) +
  geom_line(color = 'steelblue2', size = 1.2) +
  theme_minimal() +
  labs(title = 'Indice de precios al consumidor', x = 'Mes', y = 'IPC') +
  theme(legend.position = 'none') +
  NULL
```



```
# Selecciona el mejor de cada clase de acuerdo al consumo en highway
best_in_class <- mpg %>%
  group_by(class) %>%
  filter(row_number(desc(hwy)) == 1)

g = ggplot(mpg, aes(displ, hwy)) +
  geom_point(aes(colour = class)) +
  geom_smooth(se = FALSE) +
  geom_label(aes(label = model), data = best_in_class, nudge_y = 2, alpha = 0.5) +
  labs(title = "Fuel efficiency generally decreases with engine size",
       subtitle = "Two seaters (sports cars) are an exception because of their light weight",
       x = "Engine displacement (L)",
       y = "Highway fuel economy (mpg)",
       colour = "Car type",
       caption = "Data from fueleconomy.gov") +
  NULL
g
```



2.14 Guardar un gráfico

```
work = 'C:/Documentos/PoliticaII/work'
filesave = paste0(work,'ts.png')
ggsave(filesave, g, width=10, height=8)
```

Capítulo 3

Conceptos generales

3.1 Estimacion

Supongamos que se quiere estudiar la relación entre el gasto en publicidad a través de diversos canales como televisión, radio, diarios (*inputs*) y las ventas en distintos mercados (*output*).

$$Y = f(X) + \epsilon \quad (3.1)$$

donde f es una función desconocida de (X_1, X_2, X_3) y ϵ es un término de error aleatorio independiente de X con media igual a 0.

En esencia, el aprendizaje estadístico se refiere a un conjunto de enfoques para estimar f .

3.2 Prediccion

Supongamos que se dispone de datos de variables independientes por no de la dependiente, en ese caso, dado que el error en promedio es 0 podríamos predecir Y utilizando:

$$\hat{Y} = \hat{f}(X) \quad (3.2)$$

donde \hat{f} representa nuestra estimación de f y \hat{Y} representa la predicción de Y . En este contexto, \hat{f} a menudo se trata como una **caja negra**, en el sentido que no importa la forma exacta de \hat{f} , siempre que produzca predicciones precisas de Y .

La precisión con la que \hat{Y} se acerca a Y depende de dos cantidades, el error *reducible* y el *irreducible*. En general, \hat{f} no será una estimación perfecta de f , y esta inexactitud introducirá un error que es reducible porque potencialmente podemos mejorar la precisión de \hat{f} usando la técnica de aprendizaje estadístico más apropiada para estimar f . Sin embargo, si fuera posible estimar f exactamente de manera que la respuesta estimada

$\hat{Y} = f(X)$, nuestra predicción todavía tendría algún error dado que Y también es función de ϵ , que por definición, no se puede predecir usando X . Por lo tanto, la variabilidad asociada con ϵ también afecta la precisión de nuestras predicciones. Esto se conoce como el error irreducible, porque no importa qué tan bien estimemos f , no puede reducir el error introducido por ϵ .

El término de error ϵ puede contener variables no observables que son útiles para predecir Y y, por lo tanto, f no puede usarlos para su predicción. A partir de las ecuaciones (3.1) y (3.2) puede expresarse:

$$E(Y - \hat{Y})^2 = E[f(X) + \epsilon - \hat{f}(X)]^2 \quad (3.3)$$

$$= \underbrace{[f(X) - \hat{f}(X)]^2}_{\text{Reducible}} + \underbrace{Var(\epsilon)}_{\text{Irreducible}} \quad (3.4)$$

donde de $E(Y - \hat{Y})^2$ representa el promedio, o valor esperado, de la diferencia entre el valor predicho y el valor real de Y elevado al cuadrado (diferencia por exceso y defecto ponderan igual), y $Var(\epsilon)$ representa la varianza asociada al término de error ϵ .

El **foco** está en las técnicas para estimar f con el objetivo de minimizar el error reducible. Es importante tener en cuenta que el error irreducible siempre proporcionará un límite superior en la precisión de nuestra predicción de Y que en la práctica casi siempre es desconocido.

3.3 Metodos parametricos

Se realiza en dos etapas:

- Asumir una forma funcional (**modelo**, por ejemplo lineal)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p \quad (3.5)$$

- Estimar los parámetros (**método**, por ejemplo Mínimos Cuadrados Ordinarios - MCO-)

Si bien el problema se reduce a estimar $p + 1$ parámetros, la desventaja es que la forma funcional elegida puede diferir de la verdadera f .

3.4 Metodos no parametricos

No realizan supuestos sobre la forma funcional de f sino que tratan de buscar una estimación que se acerque lo más posible a los datos sin ser ni demasiado tosco ni demasiado ondulado.

Este enfoque puede tener una gran ventaja sobre los métodos paramétricos: al evitar el supuesto de una forma funcional particular para f , tiene el potencial para adaptarse con precisión a una gama más amplia de posibles formas para f . Cualquier enfoque paramétrico tiene la posibilidad de que la forma funcional utilizada para estimar f sea muy diferente de la verdadera f , en cuyo caso el resultado modelo no se ajustará bien a los datos. El costo es que se necesitan más datos para estimar.

3.5 Evaluacion de la precision del modelo

Ningún método domina al resto sobre todas las bases de datos posibles. En un *set* de datos en particular, un método específico puede funcionar mejor, pero algún otro método lo puede superar con otra base de datos. Por lo tanto, en cada caso se debe decidir qué método produce los mejores resultados.

3.5.1 Calidad del ajuste

Para evaluar el desempeño de un método de aprendizaje estadístico en una base de datos dada, se necesita alguna forma de medir qué tan bien sus predicciones coinciden con los datos observados. Es decir, se necesita cuantificar el grado en el cual el valor pronosticado para una observación dada está cerca de el verdadero valor de respuesta para esa observación. En el escenario de regresión, la medida más utilizada es el error medio cuadrático (*EMC*):

$$EMC = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2 \quad (3.6)$$

donde $\hat{f}(x_i)$ es la predicción que hace \hat{f} sobre la observación i . El *EMC* será pequeño si las respuestas predichas están muy cerca de las respuestas verdaderas y será grande si para algunas observaciones difieren demasiado.

El *EMC* en (3.6) se calcula usando los **datos de entrenamiento** (*training*) que se usaron para estimar el modelo, por lo que debería denominarse con mayor precisión *EMC* de entrenamiento. Pero en general, no nos interesa realmente qué tan bien funciona el método sobre los datos de entrenamiento. Más bien, estamos interesados en la precisión de las predicciones que obtenemos cuando aplicamos nuestro método en los **datos de test** que no fueron visto antes (datos no utilizados para entrenar el modelo). Es decir, se busca elegir el método que produzca el menor *EMC* en la muestra de *test*.

$$Prom(y_0 - \hat{f}(x_0))^2 \quad (3.7)$$

el error de predicción cuadrático promedio para estas observaciones de *test* (y_0, x_0).

¿Qué sucede si se elige en base al *EMC* de *training* (3.6)? No hay garantía de que el método con el *EMC* de entrenamiento más bajo también tenga el *EMC* de *test* más bajo.

El panel de la izquierda de la Figura 3.1 muestra la verdadera f dada por la curva negra. Las curvas naranja, azul y verde ilustran tres posibles estimaciones de f obtenidas utilizando métodos con distintos niveles de flexibilidad. La línea naranja es el ajuste de regresión lineal, que es relativamente inflexible. Las curvas azul y verde se produjeron usando *splines* con diferentes niveles de suavidad. Es claro que a medida que aumenta el nivel de flexibilidad, las curvas se ajustan mejor a los datos observados. La curva verde es la más flexible y coincide muy bien con los datos; sin embargo, se observa que se ajusta mal a la verdadera f (en negro) porque es demasiado ondulada. Cambiando el nivel de flexibilidad del *spline* se pueden producir ajustes diferentes para estos datos.

En el panel de la derecha de la Figura 3.1 la curva **gris** muestra el *EMC* de **entrenamiento** promedio en función de la flexibilidad, o más formalmente los grados de libertad (resume la flexibilidad de una curva), para una serie de *splines*. Los cuadrados naranja, azul y verde indican los *EMC* asociados con las curvas correspondientes en el panel izquierdo. El *EMC* de entrenamiento disminuye monótonamente a medida que aumenta la flexibilidad. Dado que la verdadera f es no lineal, el ajuste lineal naranja no es lo suficientemente flexible para estimar bien f . La curva verde tiene el *EMC* de entrenamiento más bajo de los tres métodos, ya que corresponde a la más flexible de las tres curvas.

En este ejemplo, se conoce la verdadera función f , por lo que también se puede calcular el *EMC* de *test* (en general f es desconocida, por lo que esto no es posible). El *EMC* de **test** se muestra usando la curva **roja** en el panel derecho de la Figura 3.1. Como con el *EMC* de entrenamiento, el *EMC* de *test* disminuye inicialmente a medida que el nivel de flexibilidad aumenta. Sin embargo, en algún momento el *EMC* de *test* se nivele y luego empieza a aumentar. En consecuencia, las curvas naranja y verde tienen un *EMC* de *test* alto. La curva azul minimiza el *EMC* de *test*, dado que visualmente parece estimar mejor f en el panel izquierdo. La línea discontinua horizontal indica $Var(\epsilon)$, el error irreducible en la ecuación de $E(Y - \hat{Y})^2$, que corresponde al menor alcanzable por el *EMC* de *test* entre todos los métodos posibles. Por lo tanto, el suavizado de *spline* representado por la curva azul está cerca del óptimo.

Importante. En el panel de la derecha de la Figura 3.1, a medida que la flexibilidad del método de aprendizaje aumenta, se observa una disminución monótona en el *EMC* de entrenamiento y una forma de U en el *EMC* de *test*. Esta es una propiedad fundamental de aprendizaje estadístico que se mantiene independientemente de la base de datos particular en cuestión e independientemente del método estadístico que se utilice.

Cuando un método dado produce un *EMC* de entrenamiento pequeño pero un *EMC* de *test* grande, se dice que está haciendo *overfitting*/sobreajustando los datos. Esto sucede porque nuestro aprendizaje estadístico está trabajando demasiado para encontrar patrones

en los datos de entrenamiento, y puede estar detectando algunos patrones que son causados por casualidad en lugar de por las verdaderas propiedades de la función desconocida f . **Overfitting** se refiere específicamente al caso en el que un modelo menos flexible podría haber producido un menor error de predicción en *test*.

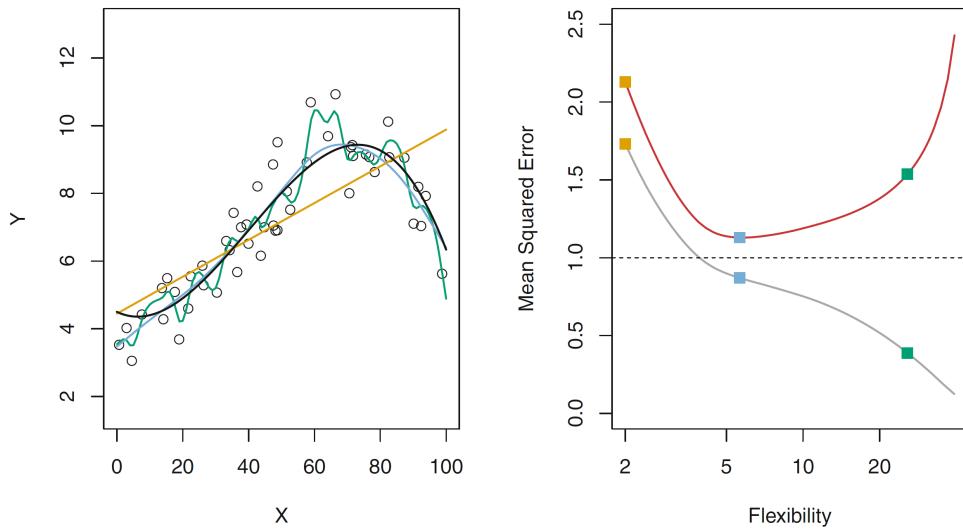


Figura 3.1: Datos en curva y ECM

La Figura 3.2 proporciona otro ejemplo en el que la verdadera f es aproximadamente lineal por lo que este tipo de modelos obtienen el menor *EMC* en *test* (curva roja en el panel derecho de la Figura 3.2).

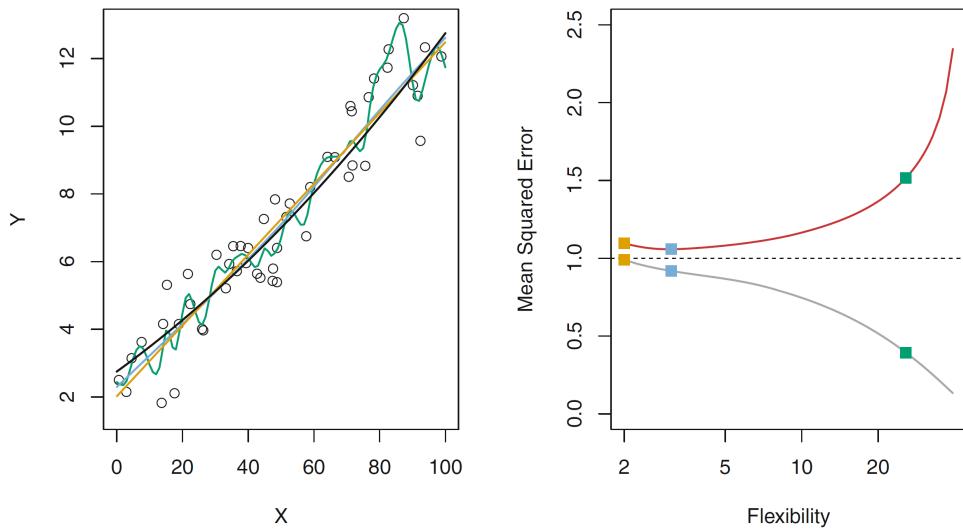


Figura 3.2: Datos lineales y EMC

3.5.2 Trade-off Sesgo-Varianza

La Figura 3.3 muestra el *trade-off* **Sesgo - Varianza** intuitivamente.

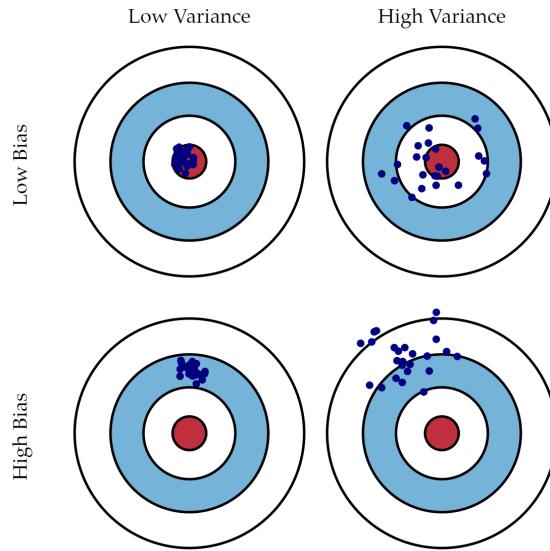


Figura 3.3: Estimacion y EMC

Fuente: [Scott Fortmann-Roe](#)

La forma de U observada en las curvas *EMC* de *test* es el resultado de dos propiedades que compiten en los métodos de aprendizaje estadístico. El *EMC* de *test* esperado, para un valor dado x_0 , puede descomponerse en la suma de tres cantidades fundamentales: la varianza de $\hat{f}(x_0)$, el sesgo al cuadrado de $\hat{f}(x_0)$ y la varianza del error ϵ .

$$E(y_0 - \hat{f}(x_0))^2 = Var(\hat{f}(x_0)) + [Sesgo(\hat{f}(x_0))]^2 + Var(\epsilon) \quad (3.8)$$

donde $E(y_0 - \hat{f}(x_0))^2$ el valor esperado de *EMC* de *test* en x_0 . Para minimizar el error de *test* esperado, se necesita seleccionar un método de aprendizaje estadístico que logre simultáneamente **baja varianza y bajo sesgo**.

La **varianza** se refiere al valor en que f cambiaría si se estimara utilizando una base de datos de entrenamiento diferente. **Sesgo** se refiere al error que se introduce al aproximar un problema de la vida real, que puede ser extremadamente complicado, por un modelo mucho más simple. Como regla general, a medida que se utilizan métodos más flexibles, la varianza aumenta y el sesgo disminuye. La tasa relativa de cambio de estas dos cantidades determina si el *EMC* de *test* aumenta o disminuye.

Los dos paneles de la Figura 3.4 ilustran la Ecuación (3.8) para los ejemplos en Figuras 3.1 y 3.2. En cada caso, la curva sólida azul representa el cuadrado del sesgo, para diferentes niveles de flexibilidad, mientras que la curva naranja corresponde a la varianza. La línea discontinua horizontal representa $Var(\epsilon)$, el error irreducible. Finalmente, la curva roja, corresponde al *EMC* de *test*, es la suma de estas tres cantidades.

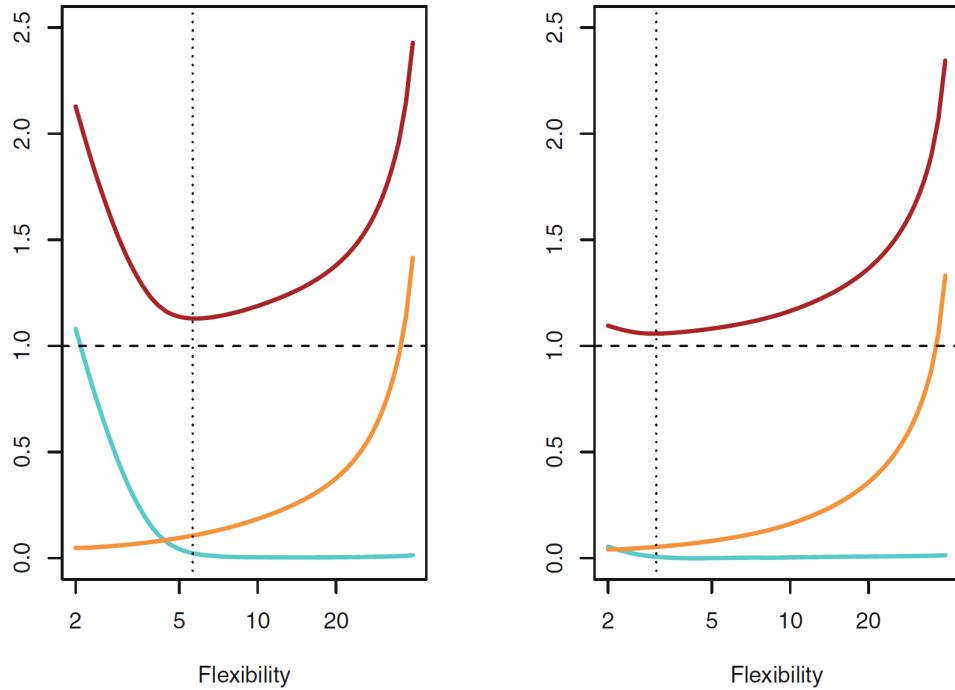


Figura 3.4: Estimacion y EMC

3.5.3 Clasificación

Muchos de los conceptos del contexto de regresión, como el *trade-off* sesgo-varianza, se transfieren al entorno de clasificación donde ahora y_i es cualitativa. El enfoque más común para cuantificar la precisión de la estimación \hat{f} es la **tasa de error** de entrenamiento, es decir, la proporción de errores que se cometen si aplicamos nuestra estimación \hat{f} a las observaciones de entrenamiento.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(y_i \neq \hat{y}_i) \quad (3.9)$$

Aquí \hat{y}_i es la etiqueta de clase predicha para la i -ésima observación usando \hat{f} . Por lo tanto, $I(y_i \neq \hat{y}_i)$ es una variable indicadora que es igual a 0 si $y_i = \hat{y}_i$ ó 1 si $y_i \neq \hat{y}_i$, es decir, si la i -ésima observación fue clasificada correctamente o no por el método de clasificación.

La tasa de error de *test* asociada con un conjunto de observaciones de *test* de la forma (x_0, y_0) está dada por:

$$Prom(I(y_0 \neq \hat{y}_0)) \quad (3.10)$$

donde \hat{y}_0 es la etiqueta de clase predicha que resulta de aplicar el clasificador a la observación de *test* con predictor x_0 . Un buen clasificador es aquel para el cual el error de *test* (3.10) es el más pequeño.

3.5.3.1 Clasificador de Bayes

Es posible mostrar que bajo penalidad simétrica¹ la tasa de error de *test* postulada en (3.10) se minimiza, en promedio, por un clasificador muy simple que asigna cada observación a la clase más probable, dados sus valores predictores. En otras palabras, se debería asignar una observación de *test* con vector predictor x_0 a la clase j para la cual (3.11) es mayor.

$$Pr(Y = j \mid X = x_0) \quad (3.11)$$

Es decir, en un problema donde sólo hay dos categorías el clasificador de Bayes predice la clase 1 si $Pr(Y = 1 \mid X = x_0) > 0.5$ y la clase 0 en caso contrario.

3.5.4 Matriz de confusión

		Observado	
		0	1
Predicción (decisión)	0	VN	FN
	1	FP	VP

VN : Verdadero Negativo; FN : Falso Negativo; FP : Falso Positivo; VP : Verdadero Positivo

Métricas para comparar modelos de clasificación. La **precisión** (*accuracy*) es la cantidad de predicciones correctas, la **sensibilidad** (*sensitivity*) es la proporción de verdaderos positivos y la **especificidad** (*specificity*) es la cantidad de VN identificados sobre el total de negativos.

$$\text{Precisión} = \frac{VP + VN}{VP + VN + FP + FN}$$

$$\text{Sensibilidad} = \frac{VP}{VP + FN}$$

$$\text{Especificidad} = \frac{VN}{VN + FP}$$

Otra alternativa es la **Curva ROC** cuyo nombre viene de *receiver operating characteristics* (comunicación) pero no vamos a ver en este curso.

¹ ¿Útil para probabilidad de *default*?

3.6 Resumen

Como señala (Boehmke and Greenwell, 2020) abordar correctamente el análisis de *machine learning* significa utilizar estratégicamente los datos en procesos de aprendizaje y validación, preprocessar correctamente las variables explicativas y la variable de respuesta, ajustar los hiperparámetros y evaluar la *performance* del modelo.

La Figura 3.5 muestra gráficamente este proceso.

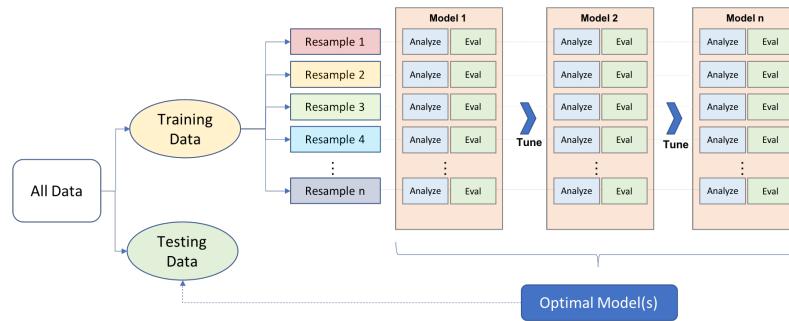


Figura 3.5: Proceso general de ML

Capítulo 4

Regresión lineal

En *machine learning* el objetivo principal no es estimar y hacer inferencia como en la econometría clásica sino hacer predicciones/clasificar. El modelo de regresión lineal es una herramienta útil para predecir cuando la variable de respuesta es cuantitativa.

Modelo lineal simple

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u \quad (4.1)$$

donde u es un término de error aleatorio que captura todo lo que no puede representarse con este modelo simple (factores no observables, errores de medición, etc.).

Modelo lineal múltiple

En notación matricial:¹

$$Y = X\beta + u \quad (4.2)$$

donde la primera columna de X es la constante.

Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (*MCO*)

$$\hat{\beta} = \min \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (4.3)$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (4.4)$$

Teorema de Gauss/Markov (TGM): Bajo los supuestos clásicos el estimador de *MCO* es el mejor dentro de los lineales e insesgados (MELI).

Definición: el R^2 mide la proporción de la variabilidad de Y explicada por el modelo. $R^2 \in [0, 1]$.

¹Para más detalles véase ([Wooldridge, 2012](#)) Apéndice E (página 807).

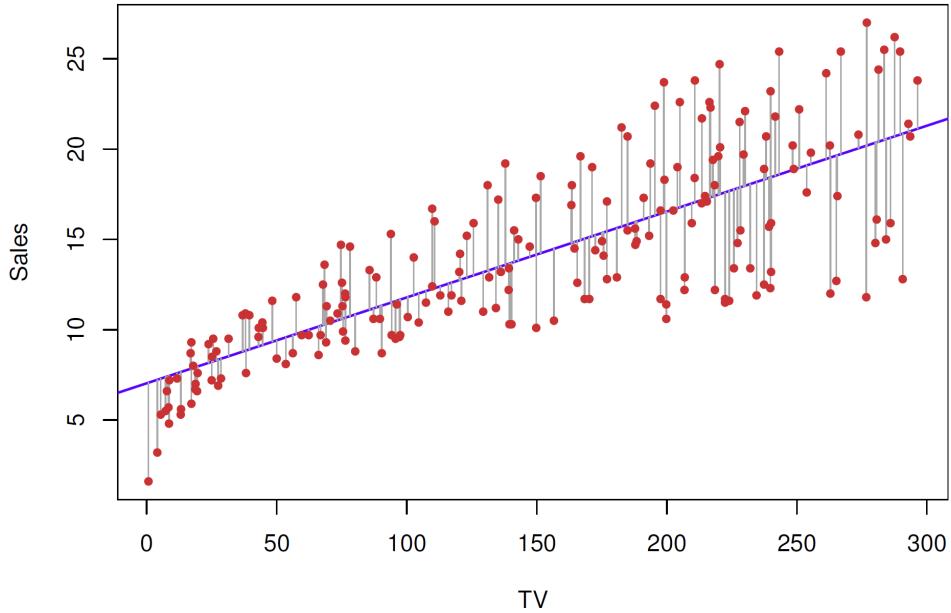


Figura 4.1: Modelo lineal y MCO

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \quad (4.5)$$

Dado que la suma de cuadrados totales es igual a la suma de cuadrados explicada y la suma de cuadrados residual ($SCT = SCE + SCR$) y que SCT es una magnitud fija, por lo tanto, **MCO maximiza el R^2** .

4.1 Relacion entre estimacion optima y prediccion optima

Dado:

$$Y_i = X_i' \beta + u_i \quad (4.6)$$

con $i = 1, \dots, n$

La predicción de Y se define como:

$$\hat{Y}_i \equiv X_i' \hat{\beta} \quad (4.7)$$

Donde \hat{Y}_i es el **predictor** (variable aleatoria) y $\hat{\beta}$ es el **estimador** (parámetro). Por el TGM:

- $E(\hat{Y}_i) = X'_i \beta$ (predictor insesgado)
- $V(\hat{Y}_i) = X'_i V(\hat{\beta}) X_i = \sigma^2 X'_i (X' X)^{-1} X_i$

donde $V(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X' X)^{-1}$

Entonces, si el *estimador* $\hat{\beta}$ es insegado y de varianza mínima, \hat{Y}_i es un *predictor* insegado y de varianza mínima, ambos en la clase de estimadores/predictores lineales e insesgados.

El resultado anterior surge del hecho que predecir requiere estimar (en este caso β). Retomamos el *EMC* en el caso de los **estimadores**:

$$EMC(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta} - \beta)^2 \quad (4.8)$$

El *EMC* mide en promedio cuan lejos esta $\hat{\beta}$ (estimador) de β el parámetro que se quiere estimar.

Recordar que por definición:

- $V(\hat{\beta}) \equiv E(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^2$ (dispersión)
- $Sesgo(\hat{\beta}) \equiv E(\hat{\beta}) - \beta$ (centro)

A partir de (4.8) y las definiciones anteriores reescribimos el *EMC* en términos de la descomposición sesgo-varianza:

$$EMC(\hat{\beta}) = Sesgo^2(\hat{\beta}) + V(\hat{\beta}) \quad (4.9)$$

Es decir, cuán mal estima $\hat{\beta}$ depende de cuán descentrado está en relación a la verdad (sesgo) más cuán disperso es en relación a su propio centro (varianza).

Para ver la relación entre el error de estimación y el error de predicción se define el **error de pronóstico** como:

$$Err(\hat{Y}) \equiv E(Y - \hat{Y})^2 \quad (4.10)$$

Como vimos antes, dado el modelo genérico² $Y = f(X) + u$ donde $E(u) = 0$ y $V(u) = \sigma^2$:

- $f(X)$ es la parte sistemática
- u la parte no sistemática

²No necesariamente lineal.

Nota. Resultado importante en **teoría de la predicción**: si se quiere predecir una variable aleatoria Y con una constante m el mejor predictor es su esperanza, es decir, $m = E(Y)$.³

Entonces, si $E(Y) = f(X)$, u es no observable y $f(X)$ es conocida, $f(X)$ es el mejor predictor porque, como se dijo arriba, el mejor predictor de una variable aleatoria es su esperanza.

En la práctica $f(X)$ es desconocida y, por lo tanto, se debe estimar $\hat{f}(X)$.

$$Err(\hat{Y}) = E(Y - \hat{f})^2 \quad (4.11)$$

$$Err(Y - \hat{f}) = EMC(\hat{f}) + \sigma^2 \quad (4.12)$$

En términos de la ecuación (3.3) es la suma de un error reducible (EMC) y otro irreducible (σ^2).

Nuevamente, puede verse la relación entre predicción y estimación. *Predecir* correctamente ($Err(Y - \hat{f})$) requiere *estimar* ($EMC(\hat{f})$) correctamente (porque σ^2 no se puede controlar). Es decir, tener bajo sesgo y baja varianza. Utilizando la descomposición:

$$Err(Y - \hat{f}) = \underbrace{Sesgo^2(\hat{f}) + V(\hat{f})}_{EMC} + \sigma^2 \quad (4.13)$$

Machine learning hace uso de que estrategias sesgadas pueden implicar una reducción drástica en la varianza, por lo tanto, puede ser que el mínimo EMC ocurra para predictores sesgados.

4.2 Aplicación práctica

Tip. Para hacer tablas con los resultados de las regresiones se puede utilizar el paquete **stargazer**. Algunas referencias en este [documento](#) y en este [blog](#).

La biblioteca **ISLR2** contiene la base de datos de **Boston**, que registra **medv** (mediana del valor de las casas en miles de USD) para 506 distritos censales en Boston. Buscaremos predecir **medv** usando 12 predictores como **rm** (número promedio de habitaciones por casa), **age** (edad promedio de las casas) y **lstat** (porcentaje de hogares con bajo *status* socioeconómico).

```
library(MASS)
library(ISLR2)
head(Boston)
```

³En el Capítulo 6 veremos que este resultado es importante para la metodología de árboles de decisión.

```
##      crim zn indus chas   nox     rm   age     dis rad tax ptratio lstat medv
## 1 0.00632 18 2.31     0 0.538 6.575 65.2 4.0900    1 296 15.3 4.98 24.0
## 2 0.02731  0 7.07     0 0.469 6.421 78.9 4.9671    2 242 17.8 9.14 21.6
## 3 0.02729  0 7.07     0 0.469 7.185 61.1 4.9671    2 242 17.8 4.03 34.7
## 4 0.03237  0 2.18     0 0.458 6.998 45.8 6.0622    3 222 18.7 2.94 33.4
## 5 0.06905  0 2.18     0 0.458 7.147 54.2 6.0622    3 222 18.7 5.33 36.2
## 6 0.02985  0 2.18     0 0.458 6.430 58.7 6.0622    3 222 18.7 5.21 28.7
```

Comenzaremos usando la función `lm()` para ajustar un modelo de regresión lineal simple, con `medv` como respuesta y `lstat` como predictor.⁴

```
lm.fit = lm(medv ~ lstat, data = Boston)
summary(lm.fit)

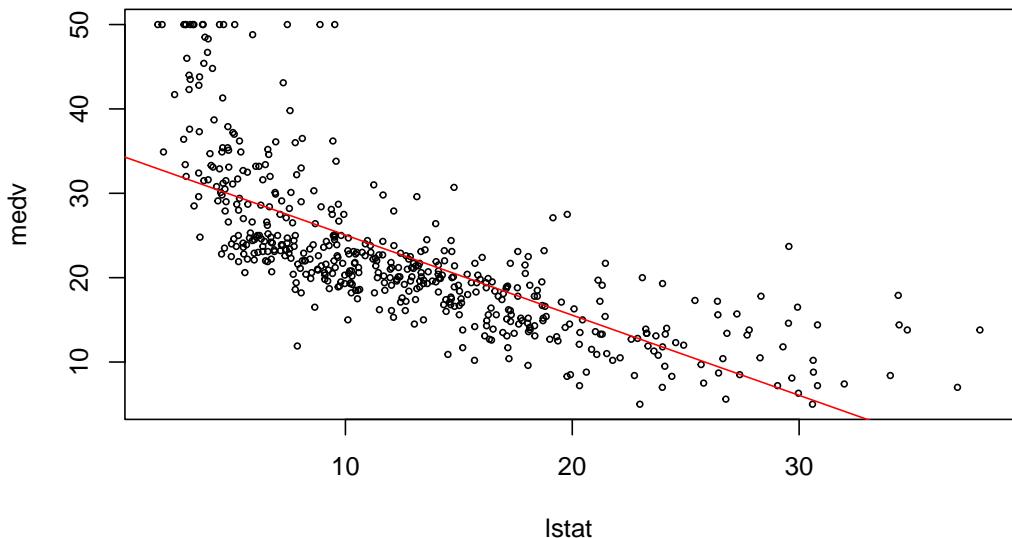
##
## Call:
## lm(formula = medv ~ lstat, data = Boston)
##
## Residuals:
##      Min      1Q  Median      3Q      Max
## -15.168 -3.990 -1.318  2.034  24.500
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) 34.55384   0.56263   61.41  <2e-16 ***
## lstat       -0.95005   0.03873  -24.53  <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 6.216 on 504 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5441, Adjusted R-squared:  0.5432 
## F-statistic: 601.6 on 1 and 504 DF,  p-value: < 2.2e-16

names(lm.fit)

## [1] "coefficients"   "residuals"      "effects"        "rank"        
## [5] "fitted.values"  "assign"         "qr"            "df.residual"  
## [9] "xlevels"         "call"          "terms"          "model"        
```

```
attach(Boston)
plot(lstat, medv, cex=.5)
abline(lm.fit, col = 'red')
```

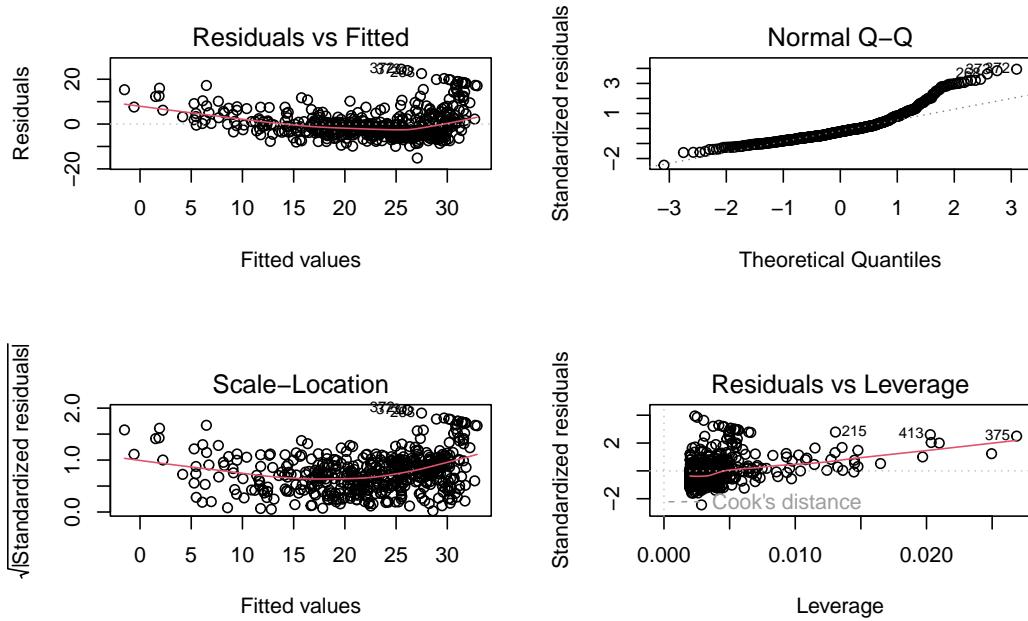
⁴Para más detalles véase `?stats::lm`.



A continuación se examinan algunos gráficos de diagnóstico con la función `plot()`. En general, este comando producirá un gráfico a la vez (presionando *Enter* se generará el siguiente gráfico). Sin embargo, se pueden ver los cuatro gráficos juntos con las funciones `par()` y `mfrow()`, que le dicen a R que divide la pantalla de visualización en paneles separados. Por ejemplo, `par(mfrow = c(2, 2))` divide la región del gráfico en una cuadrícula de paneles de 2×2 .

- **Residuals vs. fitted values:** residuos vs. valores ajustados se utiliza para detectar patrones de variables omitidas, heterocedasticidad, etc.
- **Scale Location:** residuos estandarizados vs. valores ajustados. Similar al anterior y se utiliza para detectar patrones en los residuos.
- **Normal Q-Q:** cuantiles teóricos de la distribución normal estándar vs. cuantiles reales de residuos estandarizados. Se utiliza para evaluar la normalidad de los errores.
- **Residuals vs. Leverage:** el *leverage* es una medida de cuán influyente es una observación en el valor de los coeficientes. Este gráfico se utiliza para detectar las (posibles) observaciones influyentes y los valores atípicos al mismo tiempo.

```
par(mfrow = c(2, 2))
plot(lm.fit)
```



Para obtener la predicción y el EMC:

```
medv_hat = predict(lm.fit, data = Boston)
emc = mean((medv - medv_hat)^2)
emc
```

```
## [1] 38.48297
```

Regresión lineal múltiple:

```
lm.fit = lm(medv ~ lstat + age, data = Boston)
summary(lm.fit)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = medv ~ lstat + age, data = Boston)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -15.981  -3.978  -1.283   1.968  23.158
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 33.22276    0.73085 45.458 < 2e-16 ***
## lstat        -3.77520    1.42943 -2.634  0.0109 *
## age          -0.37253    0.20421 -1.826  0.0743 .
##
```

```

## lstat      -1.03207   0.04819 -21.416 < 2e-16 ***
## age        0.03454   0.01223   2.826  0.00491 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 6.173 on 503 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5513, Adjusted R-squared:  0.5495
## F-statistic: 309 on 2 and 503 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Utilizando todas las variables de la base de datos:

```

lm.fit = lm(medv ~ ., data = Boston)
summary(lm.fit)

##
## Call:
## lm(formula = medv ~ ., data = Boston)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -15.1304 -2.7673 -0.5814  1.9414 26.2526
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) 41.617270  4.936039  8.431 3.79e-16 ***
## crim        -0.121389  0.033000 -3.678 0.000261 ***
## zn          0.046963  0.013879  3.384 0.000772 ***
## indus       0.013468  0.062145  0.217 0.828520
## chas        2.839993  0.870007  3.264 0.001173 ** 
## nox        -18.758022  3.851355 -4.870 1.50e-06 ***
## rm          3.658119  0.420246  8.705 < 2e-16 ***
## age         0.003611  0.013329  0.271 0.786595
## dis        -1.490754  0.201623 -7.394 6.17e-13 ***
## rad         0.289405  0.066908  4.325 1.84e-05 ***
## tax        -0.012682  0.003801 -3.337 0.000912 ***
## ptratio     -0.937533  0.132206 -7.091 4.63e-12 ***
## lstat      -0.552019  0.050659 -10.897 < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.798 on 493 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7343, Adjusted R-squared:  0.7278
## F-statistic: 113.5 on 12 and 493 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Utilizando todas las variables de la base de datos menos age:

```
lm.fit1 = lm(medv ~ . - age, data = Boston)
summary(lm.fit1)

##
## Call:
## lm(formula = medv ~ . - age, data = Boston)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -15.1851  -2.7330  -0.6116   1.8555  26.3838
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) 41.525128  4.919684  8.441 3.52e-16 ***
## crim        -0.121426  0.032969 -3.683 0.000256 ***
## zn          0.046512  0.013766  3.379 0.000785 ***
## indus       0.013451  0.062086  0.217 0.828577    
## chas        2.852773  0.867912  3.287 0.001085 **  
## nox        -18.485070 3.713714 -4.978 8.91e-07 ***
## rm          3.681070  0.411230  8.951 < 2e-16 ***
## dis        -1.506777  0.192570 -7.825 3.12e-14 ***
## rad         0.287940  0.066627  4.322 1.87e-05 ***
## tax        -0.012653  0.003796 -3.333 0.000923 ***
## ptratio     -0.934649  0.131653 -7.099 4.39e-12 ***
## lstat       -0.547409  0.047669 -11.483 < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.794 on 494 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7343, Adjusted R-squared:  0.7284
## F-statistic: 124.1 on 11 and 494 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Capítulo 5

Logit

En la base de datos `Default`,¹ la variable *default* pertenece a una de dos categorías, **Yes** o **No**. En vez de modelar esta respuesta Y directamente, la regresión logística modela la probabilidad de que Y pertenezca a un categoría. Por lo tanto, si se busca estimar la probabilidad de *default*, se puede transformar la variable original en una variable binaria 1 (Yes); 0 (No).

En general, la estrategia consiste en:

Y variable binaria 0/1.

X vector de K predictores.

Se debe construir un modelo para:

$$p = Pr(Y = 1 | X)$$

Como vimos en la subsección 3.5.3.1 el **clasificador de Bayes**:

- $\hat{Y} = 1$ si $p > 0,5$
- $\hat{Y} = 0$ si $p \leq 0,5$

Recordar que en el caso particular de la probabilidad de *default* puede resultar relativamente más costoso para un banco clasificar a un deudor malo en la categoría **No default** que a un deudor bueno como **Si default** (pérdida asimétrica). Por lo tanto, podría elegirse un umbral más bajo (ej. $p > 0,3$) para la categoría **Si default**.

5.1 Modelo *logit*

$$p = \frac{e^z}{1 + e^z} \tag{5.1}$$

¹Esta base pertenece a la librería `ISLR2`.

donde $z \equiv X\beta$ con β un vector de K coeficientes.

El panel izquierdo de la Figura 5.1 muestra la probabilidad estimada usando regresión lineal donde algunos valores de probabilidad son negativos (también podría haber valores mayores a 1 para valores elevados de la variable `balance`, ambos extremos inconsistentes con la noción de probabilidad). Los puntos naranja indican los valores 0/1 codificados por defecto (No o Si). El panel derecho exhibe la probabilidad de incumplimiento estimada mediante regresión logística donde todos los valores $\in (0, 1)$.

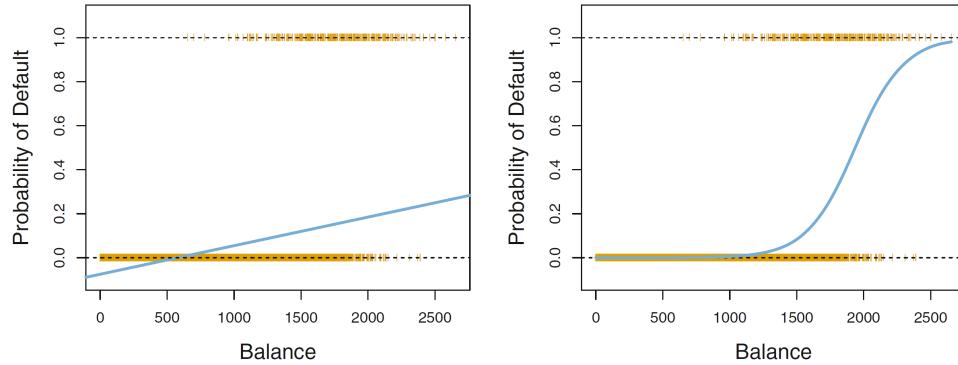


Figura 5.1: Regresión lineal vs. logística

5.1.1 Interpretación de coeficientes en el modelo *logit*

Dada la forma funcional del modelo *logit*, primero se introduce el concepto de *odds ratio* ($\frac{p}{1-p}$) para luego derivar la interpretación de un coeficiente. El se define *odds ratio* como la probabilidad de que un evento suceda en relación a que el mismo evento no suceda. Por ejemplo, en promedio 1 de cada 5 personas con un *odds* de $1/4$ no pagará su deuda, ya que la probabilidad de *default* $p(X) = 0,2$ implica un *odds* de $\frac{0,2}{1-0,2} = 0,25 = 1/4$.

En el modelo *logit*:

$$(1 - p) = \frac{1}{1 + e^z} \quad (5.2)$$

Entonces el *odds ratio*:

$$\frac{p}{1 - p} = e^z \quad (5.3)$$

Si se toma el logaritmo del *odds ratio* queda:

$$\ln\left(\frac{p}{1 - p}\right) = z = X\beta \quad (5.4)$$

El lado izquierdo se llama *log odds* o *logit*. El modelo de regresión logística (5.1) tiene un *logit* que es lineal en X . Por lo tanto, el k -*ésimo* coeficiente es:

$$\beta_k = \frac{\partial \ln(\frac{p}{1-p})}{\partial X_k} \quad (5.5)$$

Aumentar X_k en una unidad cambia el *log odds* en β_k . Dado que la relación entre $p(X)$ y X en (5.1) no es lineal, β_k no corresponde al cambio en $p(X)$ asociado con el aumento de una unidad en X . La cantidad que $p(X)$ cambia debido a un cambio de una unidad en X depende del valor actual de X . Pero independientemente del valor de X , si β_k es positivo, entonces el aumento de X se asocia con el aumento de $p(X)$, y si β_k es negativo, el aumento de X se asocia con la disminución de $p(X)$.²

En este caso, $\hat{\beta}$ se estima por máxima verosimilitud (no es una forma cerrada como *MCO*).

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \prod_{i=1}^n L(\theta; y_i) \quad (5.6)$$

Luego se reemplazan los coeficientes estimados en (5.7) para obtener las probabilidades estimadas.

$$\hat{p}_i = \frac{e^{X_i \hat{\beta}}}{1 + e^{X_i \hat{\beta}}} \quad (5.7)$$

5.2 Aplicación práctica

Comenzaremos examinando algunas estadísticas y gráficos de los datos `Smarket`, que forman parte de la biblioteca `ISLR2`. Esta base de datos consiste en rendimientos porcentuales para el índice bursátil *S&P500* para más de 1.250 días, desde principios de 2001 hasta finales de 2005. Para cada fecha, registra los rendimientos porcentuales de los cinco días hábiles anteriores, de `Lag1` a `Lag5`. También registra el `volume` (el número de acciones negociadas el día anterior, en miles de millones), `Today` (el rendimiento porcentual en la fecha en cuestión) y `direction` (si el mercado estaba `Up` o `Down` en este día). El objetivo es predecir la “dirección” (una respuesta cualitativa) usando las otras características.

```
library(ISLR2)
names(Smarket)

## [1] "Year"      "Lag1"      "Lag2"      "Lag3"      "Lag4"      "Lag5"
## [7] "Volume"    "Today"    "Direction"
```

²Para la interpretación de coeficientes en la práctica usualmente se analizan los efectos marginales. Ver ([Wooldridge, 2012](#)) capítulo 17.

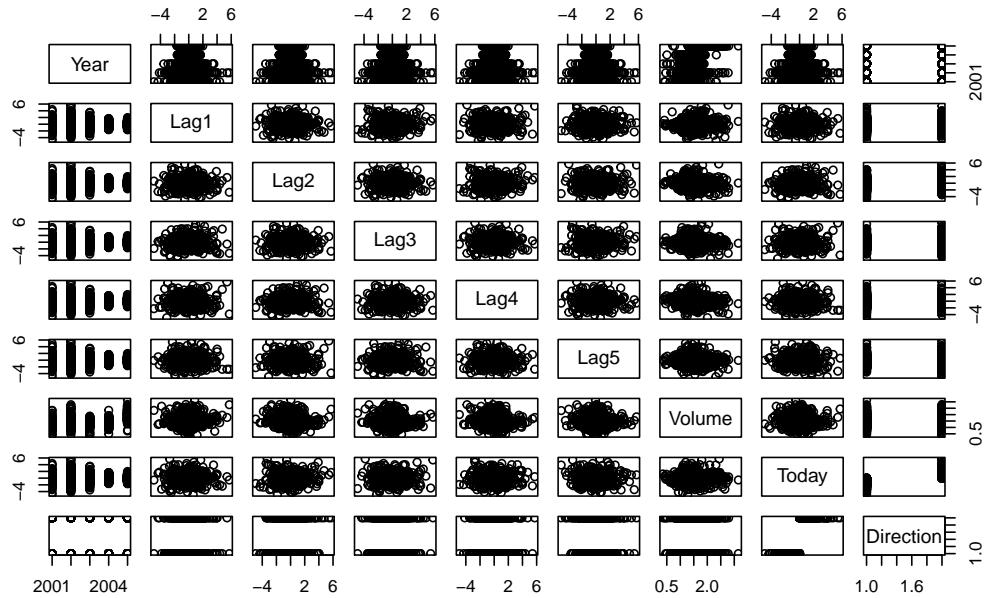
```
dim(Smarket)
```

```
## [1] 1250 9
```

```
summary(Smarket)
```

```
##      Year          Lag1          Lag2          Lag3
##  Min.  :2001  Min.  :-4.922000  Min.  :-4.922000  Min.  :-4.922000
##  1st Qu.:2002 1st Qu.:-0.639500 1st Qu.:-0.639500 1st Qu.:-0.640000
##  Median :2003 Median : 0.039000 Median : 0.039000 Median : 0.038500
##  Mean   :2003  Mean  : 0.003834  Mean  : 0.003919  Mean  : 0.001716
##  3rd Qu.:2004 3rd Qu.: 0.596750 3rd Qu.: 0.596750 3rd Qu.: 0.596750
##  Max.   :2005  Max.  : 5.733000  Max.  : 5.733000  Max.  : 5.733000
##      Lag4          Lag5          Volume        Today
##  Min.  :-4.922000  Min.  :-4.92200  Min.  :0.3561  Min.  :-4.922000
##  1st Qu.:-0.640000 1st Qu.:-0.64000 1st Qu.:1.2574 1st Qu.:-0.639500
##  Median : 0.038500 Median : 0.03850  Median :1.4229  Median : 0.038500
##  Mean   : 0.001636  Mean  : 0.00561  Mean  :1.4783  Mean  : 0.003138
##  3rd Qu.: 0.596750 3rd Qu.: 0.59700 3rd Qu.:1.6417 3rd Qu.: 0.596750
##  Max.   : 5.733000  Max.  : 5.73300  Max.  :3.1525  Max.  : 5.733000
##      Direction
##  Down:602
##  Up :648
##  ##
##  ##
##  ##
##  ##
```

```
pairs(Smarket)
```



La función `cor()` produce una matriz que contiene todas las correlaciones por pares entre los predictores.

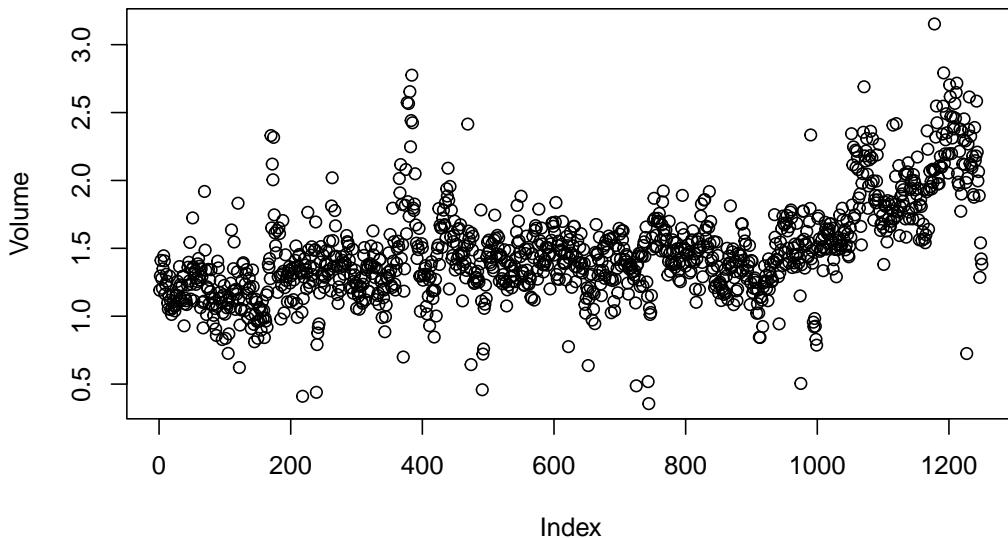
```
cor(Smarket[, -9])
```

```
##          Year      Lag1      Lag2      Lag3      Lag4
## Year 1.0000000 0.029699649 0.030596422 0.033194581 0.035688718
## Lag1 0.02969965 1.000000000 -0.026294328 -0.010803402 -0.002985911
## Lag2 0.03059642 -0.026294328 1.000000000 -0.025896670 -0.010853533
## Lag3 0.03319458 -0.010803402 -0.025896670 1.000000000 -0.024051036
## Lag4 0.03568872 -0.002985911 -0.010853533 -0.024051036 1.000000000
## Lag5 0.02978799 -0.005674606 -0.003557949 -0.018808338 -0.027083641
## Volume 0.53900647 0.040909908 -0.043383215 -0.041823686 -0.048414246
## Today 0.03009523 -0.026155045 -0.010250033 -0.002447647 -0.006899527
##          Lag5      Volume      Today
## Year 0.029787995 0.53900647 0.030095229
## Lag1 -0.005674606 0.04090991 -0.026155045
## Lag2 -0.003557949 -0.04338321 -0.010250033
## Lag3 -0.018808338 -0.04182369 -0.002447647
## Lag4 -0.027083641 -0.04841425 -0.006899527
## Lag5 1.000000000 -0.02200231 -0.034860083
## Volume -0.022002315 1.000000000 0.014591823
## Today -0.034860083 0.01459182 1.000000000
```

Como era de esperar, las correlaciones entre las variables rezagadas y los rendimientos de hoy son cercanas a cero. En otras palabras, parece haber poca correlación entre los

rendimientos de hoy y los rendimientos de días anteriores. La única correlación sustancial es entre `Year` y `volume`. Al graficar los datos, que están ordenados cronológicamente, vemos que el `volume` aumenta con el tiempo. En otras palabras, el número promedio de acciones negociadas diariamente aumentó de 2001 a 2005.

```
attach(Smarket)
plot(Volume)
```



A continuación, ajustaremos un modelo de regresión logística para predecir la `direction` utilizando `Lag1` hasta `Lag5` y `volume`. La función `glm()` se puede utilizar para muchos tipos de modelos lineales generalizados, incluida la regresión logística. La sintaxis de la función `glm()` es similar a la de `lm()`, excepto que debemos utilizar el argumento `family = binomial` para decirle a R que ejecute una regresión logística.

```
glm.fits <- glm(Direction ~ Lag1 + Lag2 + Lag3 + Lag4 + Lag5 + Volume,
  data = Smarket, family = binomial)
summary(glm.fits)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = Direction ~ Lag1 + Lag2 + Lag3 + Lag4 + Lag5 +
##     Volume, family = binomial, data = Smarket)
##
## Deviance Residuals:
```

```

##      Min      1Q  Median      3Q      Max
## -1.446 -1.203   1.065   1.145   1.326
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -0.126000  0.240736 -0.523   0.601
## Lag1        -0.073074  0.050167 -1.457   0.145
## Lag2        -0.042301  0.050086 -0.845   0.398
## Lag3         0.011085  0.049939  0.222   0.824
## Lag4         0.009359  0.049974  0.187   0.851
## Lag5         0.010313  0.049511  0.208   0.835
## Volume      0.135441  0.158360  0.855   0.392
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
## Null deviance: 1731.2 on 1249 degrees of freedom
## Residual deviance: 1727.6 on 1243 degrees of freedom
## AIC: 1741.6
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 3

```

El valor p más pequeño está asociado con `Lag1`. El coeficiente negativo sugiere que si el mercado tuvo un rendimiento positivo ayer, es menos probable que suba hoy. Sin embargo, con un valor de 0,145, el valor de p sigue siendo relativamente grande, por lo que no hay pruebas claras de una asociación real entre `Lag1` y `direction`.

La función `predict()` se puede utilizar para predecir la probabilidad de que el mercado suba, dados los valores de los predictores. La opción `type = "response"` le dice a R que genere probabilidades de la forma $P(Y = 1|X)$. Si no se proporciona ninguna base de datos a la función `predict()`, se calculan las probabilidades para los datos de entrenamiento que se usaron para ajustar el modelo de regresión logística. Se imprimen las primeras diez probabilidades estimadas. Sabemos que estos valores corresponden a la probabilidad de que el mercado suba, en lugar de que baje, porque la función `contrasts()` indica que R ha creado una variable ficticia con un 1 para Up.

```

glm.probs <- predict(glm.fits, type = "response")
glm.probs[1:10]

```

```

##      1      2      3      4      5      6      7      8
## 0.5070841 0.4814679 0.4811388 0.5152224 0.5107812 0.5069565 0.4926509 0.5092292
##      9      10
## 0.5176135 0.4888378

```

```
contrasts(Direction)
```

```
##      Up
## Down  0
## Up    1
```

Para hacer una predicción sobre si el mercado subirá o bajará en un día en particular, debemos convertir estas probabilidades pronosticadas en etiquetas de clase, Up o Down. Los siguientes dos comandos crean un vector de predicciones de clase basado en si la probabilidad prevista de un aumento del mercado es mayor o menor que 0,5.

```
glm.pred <- rep('Down', 1250)
glm.pred[glm.probs > .5] = 'Up'
```

El primer comando crea un vector de 1.250 elementos Down. La segunda línea transforma en Up todos los elementos para los que la probabilidad predicha de un aumento del mercado supera los 0,5. Dadas estas predicciones, la función `table()` se puede usar para producir una matriz de confusión (subsección 3.5.4) para determinar cuántas observaciones se clasificaron correcta o incorrectamente. Al ingresar dos vectores cualitativos, R creará una tabla de 2×2 con recuentos del número de veces que ocurrió cada combinación. Por ejemplo, pronosticó Up y el mercado aumentó, predijo Up y el mercado disminuyó, etc.

Los elementos de la diagonal de la matriz de confusión indican predicciones correctas (*accuracy*), mientras que los fuera de la diagonal representan predicciones incorrectas. Por lo tanto, el modelo predijo correctamente que el mercado subiría en 507 días y que bajaría en 145 días, para un total de $507 + 145 = 652$ predicciones correctas. La función `mean()` se puede utilizar para calcular la fracción de días en los que la predicción fue correcta. En este caso, la regresión logística predijo correctamente el movimiento del mercado 52,2% del tiempo.

```
table(glm.pred, Direction)
```

```
##          Direction
## glm.pred Down  Up
##        Down 145 141
##        Up    457 507
```

```
(507 + 145) / 1250
```

```
## [1] 0.5216
```

```
mean(glm.pred == Direction)
```

```
## [1] 0.5216
```

Tip. La función `confusionMatrix()` de la librería `caret` calcula la matriz de confusión con estadísticas completas.

```
library('caret')
confusionMatrix(factor(glm.pred), factor(Direction), positive = 'Up')
```

```
## Confusion Matrix and Statistics
##
##           Reference
## Prediction Down  Up
##       Down    145 141
##       Up      457 507
##
##           Accuracy : 0.5216
##                 95% CI : (0.4935, 0.5496)
##     No Information Rate : 0.5184
##     P-Value [Acc > NIR] : 0.4216
##
##           Kappa : 0.0237
##
##   Mcnemar's Test P-Value : <2e-16
##
##           Sensitivity : 0.7824
##           Specificity : 0.2409
##     Pos Pred Value : 0.5259
##     Neg Pred Value : 0.5070
##           Prevalence : 0.5184
##     Detection Rate : 0.4056
## Detection Prevalence : 0.7712
##     Balanced Accuracy : 0.5116
##
##     'Positive' Class : Up
##
```

A primera vista, parece que el modelo de regresión logística funciona un poco mejor que un modelo aleatorio. Sin embargo, este resultado es engañoso porque entrenamos y testeamos el modelo en el mismo conjunto de observaciones de 1.250. En otras palabras, $100\% - 52.2\% = 47.8\%$, es la tasa de error de **entrenamiento**. Como hemos visto

anteriormente, la tasa de error de entrenamiento suele ser demasiado optimista: tiende a subestimar la tasa de error de *test*.

Para evaluar mejor la precisión del modelo de regresión logística, podemos ajustar el modelo usando parte de los datos y luego examinar qué tan bien predice los datos **retenidos**. Esto producirá una tasa de error más realista, en el sentido de que en la práctica estamos interesados en el rendimiento de nuestro modelo, no en los datos que usamos para ajustar el modelo, sino en los días futuros para los que se desconocen los movimientos del mercado.

Para implementar esta estrategia, primero crearemos un vector correspondiente a las observaciones de 2001 a 2004. Luego usaremos este vector para crear una base de datos retenidos de observaciones de 2005.

```
train <- (Year < 2005)
Smarket.2005 <- Smarket[!train, ]
dim(Smarket.2005)

## [1] 252 9

Direction.2005 <- Direction[!train]
```

El objeto **train** es un vector de 1.250 elementos, correspondientes a las observaciones de la base de datos. Los elementos del vector que corresponden a observaciones que ocurrieron antes de 2005 se establecen en **VERDADERO**, mientras que los que corresponden a observaciones en 2005 se establecen en **FALSO**. El objeto **train** es un vector *booleano*, ya que sus elementos son **VERDADERO** y **FALSO**. Los vectores *booleanos* se pueden utilizar para obtener un subconjunto de filas o columnas de una matriz. Por ejemplo, el comando **Smarket[train,]** elegirá una submatriz de la base de datos del mercado de valores, correspondiente solo a las fechas anteriores a 2005, ya que son aquellos para los que los elementos de **train** son **VERDADERO**. El símbolo **!** (negación) se puede utilizar para invertir todos los elementos de un vector *booleano*. Es decir, **!train** es un vector similar a **train**, excepto que los elementos que son **VERDADERO** en **train** se cambian a **FALSO** en **!train**, y los elementos que son **FALSO** en **train** se cambian a **VERDADERO** en **!train**. Por lo tanto, **Smarket[!train,]** produce una submatriz de los datos del mercado de valores que contiene solo las observaciones para las cuales **train** es **FALSO**, es decir, las observaciones con fechas en 2005 (252 observaciones).

Ahora ajustamos un modelo de regresión logística usando solo el subconjunto de las observaciones que corresponden a fechas anteriores a 2005, usando el argumento **subset**. Luego obtenemos las probabilidades pronosticadas de que el mercado de valores suba para cada uno de los días de la base de *test*, es decir, para los días de 2005.

```
glm.fits <- glm(Direction ~ Lag1 + Lag2 + Lag3 + Lag4 + Lag5 + Volume,
  data = Smarket, family = binomial, subset = train)

glm.probs <- predict(glm.fits, Smarket.2005, type = "response")
```

Tener en cuenta que hemos entrenado y testeado el modelo en dos bases de datos completamente separadas: el entrenamiento se realizó solo con las fechas anteriores a 2005 y el *test* se realizó solo con las fechas de 2005. Finalmente, calculamos las predicciones para 2005 y las comparamos con los movimientos reales del mercado durante ese período de tiempo.

```
glm.pred <- rep("Down", 252)
glm.pred[glm.probs > .5] <- "Up"
table(glm.pred, Direction.2005)
```

```
##          Direction.2005
## glm.pred Down Up
##      Down 77 97
##      Up   34 44
```

```
mean(glm.pred == Direction.2005)
```

```
## [1] 0.4801587
```

```
mean(glm.pred != Direction.2005)
```

```
## [1] 0.5198413
```

La notación `!=` significa que *no es igual a* (o distinto), por lo que el último comando calcula la tasa de error en los datos de *test*. Los resultados son bastante decepcionantes: la tasa de error de *test* es de 52%. Por supuesto, este resultado no es tan sorprendente, dado que, en general, no se esperaría poder utilizar los rendimientos de días anteriores para predecir el rendimiento futuro del mercado.

Capítulo 6

Arboles de decision

Los métodos basados en árboles para regresión y clasificación estratifican o segmentan el espacio predictor en varias regiones. Para hacer una predicción de una observación dada normalmente utiliza el valor de respuesta promedio de las observaciones de la base de entrenamiento en la región a la que pertenece. En el caso de clasificación se asigna a la categoría mayoritaria dentro del nodo terminal.

6.1 *Classification and Regression Tree (CART)*

En el caso de árboles de regresión, si Y es la respuesta y X_1 y X_2 los *inputs* se parte el espacio (X_1, X_2) en dos regiones, en base a una sola variable (partición horizontal o vertical). Dentro de cada región proponemos como predicción la media muestral de Y .

Se busca elegir la variable y el punto de partición de manera óptima (mejor ajuste global). Es computacionalmente inviable considerar cada posible partición del espacio de atributos en J regiones. Por lo tanto, toma un enfoque *top-down greedy* que se conoce como división binaria recursiva. El enfoque es *top-down* porque comienza en la parte superior del árbol (en cuyo punto todas las observaciones pertenecen a una sola región) y luego divide sucesivamente el espacio predictor; cada división se indica a través de dos nuevas ramas más abajo en el árbol. Es *greedy* porque en cada paso del proceso de construcción del árbol, la mejor división se hace en ese paso en particular, en lugar de mirar hacia adelante y elegir una división que conducirá a un mejor árbol en algún paso futuro.

El panel izquierdo de la Figura 6.1 muestra un árbol de regresión para predecir el logaritmo del salario (en miles de dólares) de un jugador de béisbol, basado en la cantidad de años que ha jugado en las ligas mayores y la cantidad de *hits* que hizo en el año anterior. En un nodo interno dado, la etiqueta (de la forma $X_j < t_k$) indica la rama izquierda que sale de esa división, y la rama de la derecha corresponde a $X_j \geq t_k$. Por ejemplo, la división en la parte superior del árbol da como resultado dos ramas grandes. La rama izquierda corresponde a *Years* $< 4,5$, y la rama derecha corresponde a *Years* $\geq 4,5$.¹

¹Al estar arriba, *Years* es la variable más importante para explicar el salario.

El árbol tiene dos nodos internos y tres nodos terminales u hojas. El número en cada hoja es la media de la variable de respuesta de las observaciones que caen allí. Por ejemplo, la predicción para el nodo terminal de la izquierda es $e^{5,107} \times 1.000 = \165.174 . El panel derecho la Figura 6.1 muestra las regiones en función de Years y Hits.

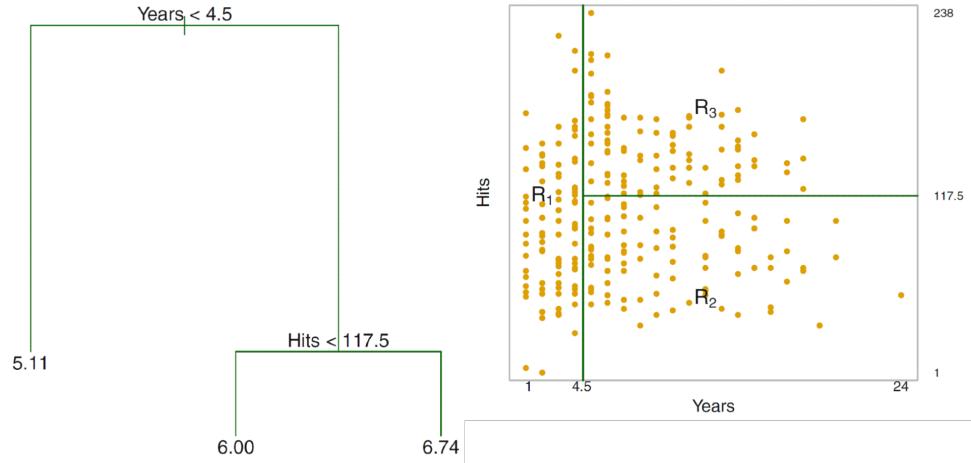


Figura 6.1: Arbol de regresión

Notar:

- Cada región tiene su propio modelo.
- Ciertas variables importan en determinadas regiones y no en otras (*Hits*).

Dado Y y X un vector de p variables con n observaciones el algoritmo busca determinar cuál variable usar para la partición y que punto de esa variable usar para la partición. Si j es la variable de partición y el punto de partición es s , se definen los siguientes semiplanos:

$$R_1(j, s) = X \mid X_j < s$$

$$R_2(j, s) = X \mid X_j \geq s$$

Se trata de buscar la variable de partición X_j y el punto de partición s que resuelvan (minimizar el EMC en cada región):

$$\sum_{i:x_i \in R_1(j, s)} (y_i - \hat{y}_{R_1})^2 + \sum_{i:x_i \in R_2(j, s)} (y_i - \hat{y}_{R_2})^2 \quad (6.1)$$

Donde \hat{y}_{R_1} y \hat{y}_{R_2} es el promedio de la respuesta en las regiones 1 y 2, respectivamente. Para cada variable y punto de partición, la minimización interna se corresponde con la **media** dentro de cada región.²

²Recordar que si se quiere predecir una variable aleatoria Y con una constante m el mejor predictor es su esperanza, es decir, $m = E(Y)$.

¿Cuándo parar de realizar divisiones?

Un árbol demasiado extenso sobreajusta (*overfit*) los datos. Pero dado que el proceso es secuencial y cada corte no mira lo que puede suceder después, si se detiene el proceso demasiado pronto se puede perder un “gran” corte más abajo. *Pruning*: ajustar un árbol grande y luego podarlo (*prune*) usando un criterio de *cost-complexity*.

Classification tree

Un árbol de clasificación es muy similar a un árbol de regresión, excepto que se utiliza para predecir una respuesta cualitativa en lugar de una cuantitativa. Recordar que para un árbol de regresión, la respuesta predicha para una observación está dada por la respuesta media de las observaciones de entrenamiento que pertenecen al mismo nodo terminal. En contraste, para un árbol de clasificación, predice que cada observación pertenece a la clase que ocurre más comúnmente en las observaciones de entrenamiento en la región a la que pertenece. Se basa en el error de clasificación o índice de Gini (pureza), análogo a *EMC* en un árbol de regresión.

6.2 Bagging

Ventajas y desventajas de *CART*:

- Forma inteligente de representar no linealidades.
- Arriba quedan las variables más relevantes entonces es fácil de comunicar. Reproduce proceso decisorio humano.
- Si la estructura es lineal, *CART* no anda bien.
- Poco robusto, variaciones en los datos modifican el resultado.

Un método de *ensemble* es un enfoque que combina muchos modelos simples en uno único y potencialmente muy poderoso. Los modelos simples se conocen como modelos de aprendizaje débil, ya que por sí mismos pueden generar predicciones mediocres.

Una posible solución es el *bootstrap aggregation* que consiste en tomar como predicción el promedio de las predicciones *bootstrap*.³

$$\hat{f}_{bag} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{f}^{*b}(x) \quad (6.2)$$

Esta idea se basa en que la varianza del promedio es menor que la de una predicción sola. Bajo independencia si $V(x) = \sigma^2$ entonces $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Pero existe el **problema** que si hay un predictor fuerte (siempre va a ser seleccionado primero), los distintos árboles son muy similares entre sí por lo que habrá alta correlación.

³Es decir, muestreo con reemplazo.

6.3 Random Forest

Busca bajar la correlación entre los árboles del *bootstrap*. Al igual que en *bagging*, construye una serie de árboles de decisión en muestras de entrenamiento *bootstrap*. Pero al construir estos árboles de decisión, cada vez que se considera una división en un árbol, se elige como candidatos de división una muestra aleatoria de m predictores del conjunto completo de p predictores ($m < p$).

Capítulo 7

Trabajo Practico

7.1 Reglas del Trabajo practico

1. **Integrantes:** máximo 3 por grupo.
2. **Extensión:** máximo 8 carillas (hoja A4, 12pts, etc.). La página 9 **no se corrige**.
3. **Copia o plagio:** trabajo desaprobado, grupo fuera del régimen de promoción.
4. **Redacción:** Formal.
5. **Presentación:** tablas/cuadros bien descriptas y ordenadas.
6. **Bases de datos:** a definir diferenciando por grupos.
7. Sugerencias bibliográficas:
 - Fortalezas y debilidades de la evaluación de créditos con técnicas de *machine learning* ([Bazarbash, 2019](#)).
 - *Performance* predictiva ([Frost et al., 2019](#)).
 - *Performance* predictiva ([Petropoulos et al., 2018](#)).

7.2 Enunciado del Trabajo Practico

En base a lo desarrollado en las clases teóricas se busca que elaboren un modelo de *scoring* que permita discriminar entre buenos y malos deudores.

1. Realizar una revisión de la literatura teórica y empírica para elaborar una sección que describa:
 - ¿Por qué es importante el problema a analizar?

- Ventajas y desventajas de enfoques tradicionales vs. *machine learning*.
 - Los principales resultados encontrados.
2. Presentar, describir y analizar los datos utilizados.
 3. Presentar e interpretar los principales resultados de un modelo *logit* en comparación con técnicas de árboles.
 4. Elaborar conclusiones de política.

7.3 Aplicacion practica

La irrupción de las firmas *BigTech* en la provisión de crédito está modificando la estructura del sistema financiero. Si bien la actividad principal de estas compañías es la provisión de servicios digitales como el *e-commerce* y servicios de pago paulatinamente han ido incorporando otros productos como la provisión de crédito, seguros, inversiones y ahorro.

El modelo de negocios de las *BigTech* difiere del modelo de las entidades financieras tradicionales principalmente por dos factores distintivos: efectos de red (generados por las plataformas de *e-commerce*, aplicaciones de mensajería y redes sociales); el uso de la tecnología (inteligencia artificial utilizando *big data*).

La utilización de nuevas técnicas de análisis y fuentes de datos alternativos brindan a las empresas tecnológicas una ventaja informativa para la evaluación de deudores respecto de las entidades financieras, que utilizan métodos econométricos convencionales (ej. estimaciones *logit*) menos flexibles para capturar la información contenida en grandes volúmenes de datos.

En esta sección se utiliza una base de datos bancaria para predecir la probabilidad de *default* con distintas metodologías, un modelo *logit*, un árbol simple y un *random forest*, para comparar las capacidades predictivas.

Primero se limpia la memoria y se cargan las librerías que vamos a utilizar.

```
# Limpia memoria
rm(list=ls())
gc()
```

```
##           used  (Mb) gc trigger  (Mb) max used  (Mb)
## Ncells  2688562 143.6    3987477 213.0  3987477  213
## Vcells  4606915  35.2    10146329  77.5  8387620    64
```

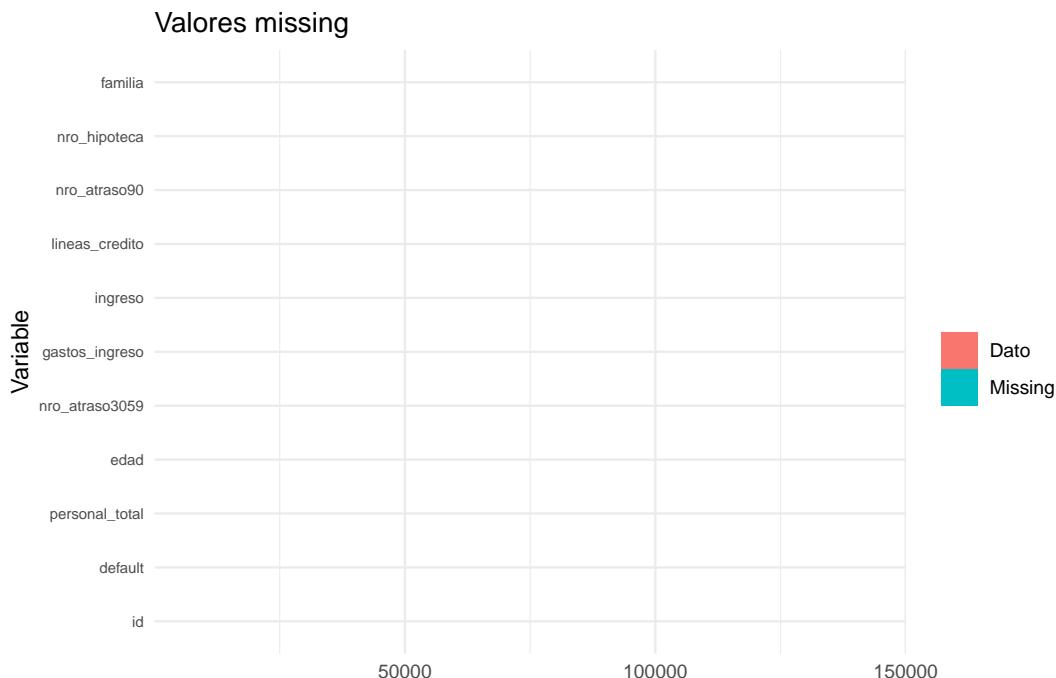
```
# Librerias
library(tidyverse)
library(rsample)
```

```
library(yardstick)
library(rpart)
library(rpart.plot)
library(ranger)
library(caret)
```

Se cargan los datos desde un archivo separado por comas y se analizan los valores *missing*. En la Figura de abajo las variables están en el eje y y las observaciones en el eje x.

```
# Cargar datos
score_data_raw <- read_csv('./data/CreditScore1.csv')

score_data_raw %>%
  is.na() %>%
  reshape2::melt() %>%
  ggplot(aes(Var2, Var1, fill=value)) +
  geom_raster() + coord_flip() +
  scale_y_continuous(NULL, expand = c(0, 0)) +
  scale_fill_discrete(name = "",
    labels = c("Dato",
    "Missing")) +
  labs( x= 'Variable', title= 'Valores missing') +
  theme_minimal() +
  theme(axis.text.y = element_text(size = 7)) +
  NULL
```



La variable `ingreso` es la que mayormente presenta observaciones con valores *missing*, dado que no existe una forma obvia de imputación y que tenemos 150.000 observaciones en total (y no se pierden tantas...), se eliminan las filas correspondientes.

```
score_data_tbl <- score_data_raw %>%  
  dplyr::select(-id) %>% drop_na()
```

Se realiza una inspección inicial de la base de datos.

```
head(score_data_tbl)
```

```
## # A tibble: 6 x 10
##   default personal_total edad nro_atraso3059 gastos_ingreso ingreso
##   <dbl>           <dbl> <dbl>           <dbl>           <dbl>       <dbl>
## 1     1           0.766   45              2       0.803     9120
## 2     0           0.957   40              0       0.122     2600
## 3     0           0.658   38              1       0.0851    3042
## 4     0           0.234   30              0       0.0360    3300
## 5     0           0.907   49              1       0.0249    63588
## 6     0           0.213   74              0       0.376     3500
## # ... with 4 more variables: lineas_credito <dbl>, nro_atraso90 <dbl>,
## #   nro_hipoteca <dbl>, familia <dbl>
```

```
glimpse(score_data_tbl)
```

```
## Rows: 120,269
## Columns: 10
## $ default      <dbl> 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-
## $ personal_total <dbl> 0.76612663, 0.95715100, 0.65818012, 0.23380977, 0.90723-
## $ edad          <dbl> 45, 40, 38, 30, 49, 74, 39, 57, 30, 51, 46, 40, 76, 64, ~
## $ nro_atraso3059 <dbl> 2, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0-
## $ gastos_ingreso <dbl> 0.80298215, 0.12187620, 0.08511338, 0.03604968, 0.02492-
## $ ingreso        <dbl> 9120, 2600, 3042, 3300, 63588, 3500, 3500, 23684, 2500, ~
## $ lineas_credito <dbl> 13, 4, 2, 5, 7, 3, 8, 9, 5, 7, 13, 9, 6, 7, 7, 7, 2, 10-
## $ nro_atraso90   <dbl> 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0-
## $ nro_hipoteca  <dbl> 6, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 4, 0, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 1-
## $ familia         <dbl> 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 2, 2, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 0-
```

```
summary(score data tbl)
```

```
##      default      personal_total      edad      nro_atraso3059
##  Min.   :0.00000  Min.   :0.00   Min.   :0.00   Min.   :0.00000
```

```

## 1st Qu.:0.00000 1st Qu.: 0.04 1st Qu.: 40.00 1st Qu.: 0.0000
## Median :0.00000 Median : 0.18 Median : 51.00 Median : 0.0000
## Mean :0.06949 Mean : 5.90 Mean : 51.29 Mean : 0.3818
## 3rd Qu.:0.00000 3rd Qu.: 0.58 3rd Qu.: 61.00 3rd Qu.: 0.0000
## Max. :1.00000 Max. :50708.00 Max. :103.00 Max. :98.0000
## gastos_ingreso ingreso lineas_credito nro_atraso90
## Min. : 0.00 Min. : 0 Min. : 0.000 Min. : 0.0000
## 1st Qu.: 0.14 1st Qu.: 3400 1st Qu.: 5.000 1st Qu.: 0.0000
## Median : 0.30 Median : 5400 Median : 8.000 Median : 0.0000
## Mean : 26.60 Mean : 6670 Mean : 8.758 Mean : 0.2119
## 3rd Qu.: 0.48 3rd Qu.: 8249 3rd Qu.:11.000 3rd Qu.: 0.0000
## Max. :61106.50 Max. :3008750 Max. :58.000 Max. :98.0000
## nro_hipoteca familia
## Min. : 0.000 Min. : 0.0000
## 1st Qu.: 0.000 1st Qu.: 0.0000
## Median : 1.000 Median : 0.0000
## Mean : 1.055 Mean : 0.8518
## 3rd Qu.: 2.000 3rd Qu.: 2.0000
## Max. :54.000 Max. :20.0000

```

```
sort(unique(score_data_tbl$familia))
```

```
## [1] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 13 20
```

```
table(score_data_tbl$default)
```

```
##
## 0 1
## 111912 8357
```

```
# Porcentaje de positivos
8357 / (8357 + 111912)
```

```
## [1] 0.0694859
```

Luego, se calculan algunas estadísticas descriptivas.

```
stat = score_data_tbl %>%
  dplyr::select_if(is.numeric) %>%
  pivot_longer(everything(), names_to = 'Variable', values_to = 'Value') %>%
  group_by(Variable) %>%
  summarise(
```

```

Obs = n(),
Media = mean(Value, na.rm = T),
Mediana = median(Value, na.rm = T),
SD = sd(Value, na.rm = T),
Min = min(Value, na.rm = T),
Max = max(Value, na.rm = T)) %>%
ungroup()
stat

## # A tibble: 10 x 7
##   Variable      Obs   Media   Mediana      SD   Min   Max
##   <chr>       <int>   <dbl>   <dbl>   <dbl>   <dbl>   <dbl>
## 1 default     120269  0.0695     0     0.254     0      1
## 2 edad        120269  51.3      51     14.4      0     103
## 3 familia     120269  0.852      0     1.15      0      20
## 4 gastos_ingreso 120269  26.6      0.296   424.      0   61106.
## 5 ingreso     120269 6670.      5400    14385.     0 3008750
## 6 lineas_credito 120269  8.76      8      5.17      0      58
## 7 nro_atraso3059 120269  0.382      0      3.50      0      98
## 8 nro_atraso90  120269  0.212      0      3.47      0      98
## 9 nro_hipoteca 120269  1.05      1      1.15      0      54
## 10 personal_total 120269  5.90      0.177   257.      0   50708

```

Se procede a realizar el *feature engineering* o creación de variables...notar que la capacidad de clasificación depende de los atributos disponibles y los valores de los hiperparámetros.¹

```

# Transformacion
score_data_tbl = score_data_tbl %>%
  mutate(
    default = factor(default),
    ingreso = log(1+ingreso),
    familia_bin = case_when(familia == 0 ~ 1,
                             familia == 1 ~ 2,
                             familia >= 2&familia < 5 ~ 3,
                             familia >= 5 ~ 4))
score_data_tbl = score_data_tbl %>% dplyr::select(-familia)

```

Se divide la muestra en 80% para entrenamiento y 20% para *test*.

```

# Train / Test split
set.seed(1234)
train_test_split <- initial_split(score_data_tbl, prop = 0.8)
train_test_split

```

¹Es importante señalar que la estadística descriptiva sugiere realizar más modificaciones.

```
## <Analysis/Assess/Total>
## <96215/24054/120269>

train_tbl <- training(train_test_split)
test_tbl  <- testing(train_test_split)
```

Se definen dos objetos para utilizar más abajo.

```
# Formula
formula  <- formula(default ~ .)

# Y observado a 0/1 para confusionMatrix
obs =  factor(test_tbl$default)
```

Se estima el modelo lineal (*default* vs. resto de variables).

```
lm.mod = lm(as.numeric(default)~., data = train_tbl)
summary(lm.mod)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = as.numeric(default) ~ ., data = train_tbl)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.90421 -0.08651 -0.06467 -0.03990  1.18753
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) 1.157e+00 6.296e-03 183.764 < 2e-16 ***
## personal_total -3.760e-06 3.623e-06 -1.038 0.299402    
## edad          -1.585e-03 5.894e-05 -26.887 < 2e-16 ***
## nro_atraso3059 2.144e-02 1.059e-03 20.242 < 2e-16 ***
## gastos_ingreso -5.645e-06 1.962e-06 -2.877 0.004010 **  
## ingreso        -2.315e-03 6.831e-04 -3.389 0.000701 ***  
## lineas_credito -6.870e-04 1.776e-04 -3.868 0.000110 ***  
## nro_atraso90   -1.354e-02 1.071e-03 -12.651 < 2e-16 ***
## nro_hipoteca   1.685e-03 7.908e-04  2.131 0.033066 *  
## familia_bin    7.086e-03 9.798e-04  7.232 4.78e-13 ***  
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.2504 on 96205 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.02673,    Adjusted R-squared:  0.02664
## F-statistic: 293.6 on 9 and 96205 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
t(broom::glance(lm.mod))
```

```
## [1]
## r.squared      2.673354e-02
## adj.r.squared 2.664249e-02
## sigma         2.504424e-01
## statistic     2.936161e+02
## p.value        0.000000e+00
## df             9.000000e+00
## logLik        -3.305975e+03
## AIC            6.633949e+03
## BIC            6.738167e+03
## deviance       6.034112e+03
## df.residual    9.620500e+04
## nobs           9.621500e+04
```

Se estima el modelo logit.²

```
glm.mod <- glm(formula, data = train_tbl, family = binomial)
summary(glm.mod)
```

```
## 
## Call:
## glm(formula = formula, family = binomial, data = train_tbl)
## 
## Deviance Residuals:
##      Min      1Q  Median      3Q      Max 
## -2.3117 -0.4195 -0.3503 -0.2850  3.6748 
## 
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)    
## (Intercept) -1.142e+00 1.007e-01 -11.341 < 2e-16 ***
## personal_total -8.713e-05 9.148e-05  -0.953 0.340843    
## edad        -2.770e-02 1.027e-03 -26.979 < 2e-16 ***
## nro_atraso3059 2.548e-01 1.393e-02  18.288 < 2e-16 ***
## gastos_ingreso -2.669e-04 7.694e-05  -3.469 0.000523 ***
## ingreso       -4.414e-02 1.181e-02  -3.738 0.000186 *** 
## lineas_credito -9.410e-03 3.021e-03  -3.114 0.001843 ** 
## nro_atraso90   -2.120e-01 1.415e-02 -14.982 < 2e-16 ***
## nro_hipoteca    4.254e-02 1.204e-02   3.533 0.000410 *** 
## familia_bin     1.265e-01 1.478e-02   8.555 < 2e-16 ***
## ---
```

²Qué sucede si para definir la clase se modifica el umbral $p > 0.5$?

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
## Null deviance: 48424  on 96214  degrees of freedom
## Residual deviance: 46551  on 96205  degrees of freedom
## AIC: 46571
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

```
# Efectos marginales ver:
# library(mfx)
# logitmfx(formula, data)

glm.probs <- predict(glm.mod, test_tbl, type = 'response')
glm.class <- factor(ifelse(glm.probs > 0.5, 1, 0))

cm_logit = confusionMatrix(glm.class, obs, positive = '1')
```

Se estima un árbol simple.

```
set.seed(4321)
rpart.mod = rpart(formula,
                   data = train_tbl,
                   control = rpart.control(minsplit = 20,
                                           minbucket = 6,
                                           cp = 0,
                                           xval = 0,
                                           maxdepth = 16))
names(rpart.mod)

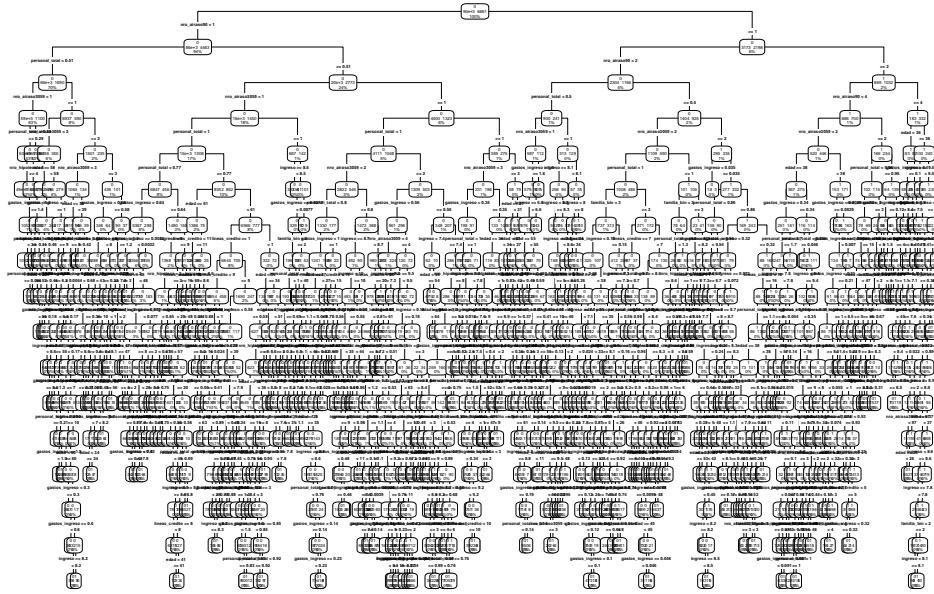
##  [1] "frame"                 "where"                  "call"
##  [4] "terms"                  "cptable"                "method"
##  [7] "parms"                  "control"                "functions"
## [10] "numresp"                "splits"                 "variable.importance"
## [13] "y"                      "ordered"
```



```
rpart.prob = predict(rpart.mod, test_tbl)
rpart.class = factor(ifelse(rpart.prob[, '1']>0.5, 1, 0))

cm_rpart = confusionMatrix(rpart.class, obs, positive = '1')

prp(rpart.mod, extra=101, digits=2, branch=1, type=4, varlen=0, faclen=0)
```



```
rpartVarImp = as_tibble_row(rpart.mod$variable.importance) %>%
  mutate(id = 1) %>%
  pivot_longer(cols = -id, names_to = 'Variable', values_to = 'Value') %>%
  mutate(id = NULL) %>% arrange(desc(Value))
rpartVarImp
```

```
## # A tibble: 9 x 2
##   Variable      Value
##   <chr>        <dbl>
## 1 nro_atraso90 1451.
## 2 personal_total 748.
## 3 nro_atraso3059 436.
## 4 gastos_ingreso 428.
## 5 ingreso        395.
## 6 edad           265.
## 7 lineas_credito 226.
## 8 nro_hipoteca  112.
## 9 familia_bin    69.5
```

Se estima un *random forest*.

```
set.seed(1234)
ranger.mod = ranger(formula,
                     data = train_tbl,
```

```

probability = TRUE,
num.trees = 300,
min.node.size = 15,
mtry = 3,
splitrule ='gini',
importance ='impurity')

names(rpart.mod)

## [1] "frame"           "where"           "call"
## [4] "terms"           "cptable"         "method"
## [7] "parms"           "control"         "functions"
## [10] "numresp"         "splits"          "variable.importance"
## [13] "y"                "ordered"

ranger.prob = predict(ranger.mod, test_tbl)
ranger.class = factor(ifelse(ranger.prob$predictions[, '1']>0.5, 1, 0))

cm_ranger = confusionMatrix(ranger.class, obs, positive = '1')

rangerVarImp = as_tibble_row(ranger.mod$variable.importance) %>%
  mutate(id = 1) %>%
  pivot_longer(cols = -id, names_to = 'Variable', values_to = 'Value') %>%
  mutate(id = NULL) %>%
  arrange(desc(Value))

rangerVarImp

## # A tibble: 9 x 2
##   Variable      Value
##   <chr>        <dbl>
## 1 personal_total 1741.
## 2 gastos_ingreso 1330.
## 3 ingreso        1186.
## 4 nro_atraso90  1149.
## 5 edad           839.
## 6 nro_atraso3059 611.
## 7 lineas_credito 607.
## 8 nro_hipoteca   237.
## 9 familia_bin     204.

```

Se presentan los resultados (no se analizan...) en tabla resumen.

```
tab_acc = tibble(logit  = cm_logit$overall[['Accuracy']],
                 rpart  = cm_rpart$overall[['Accuracy']],
                 ranger = cm_ranger$overall[['Accuracy']])

tab_acc = tab_acc %>% pivot_longer(everything(), names_to='Modelo', values_to='Accuracy')

tab_acc %>% arrange(desc(Accuracy))

## # A tibble: 3 x 2
##   Modelo Accuracy
##   <chr>     <dbl>
## 1 ranger     0.933
## 2 logit      0.930
## 3 rpart      0.926
```

Bibliografía

- Bazarbash, M. (2019). Fintech in financial inclusion machine learning applications in assessing credit risk. *IMF Working Paper*, (109).
- Boehmke, B. and Greenwell, B. (2020). *Hands-On Machine Learning with R*.
- Frost, J., Gambacorta, L., Huang, Y., Shin, H. S., and Zbinden, P. (2019). Bigtech and the changing structure of financial intermediation. *BIS Working Papers*, (779).
- Petropoulos, A., Siakoulis, V., Stavroulakis, E., and Klamargias, A. (2018). A robust machine learning approach for credit risk analysis of large loan-level datasets using deep learning and extreme gradient boosting. *Irving Fisher Committee*.
- Wickham, H. and Grolemund, G. (2017). *R for Data Science*.
- Wickham, H., Navarro, D., and Pedersen, T. L. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*.
- Wooldridge, J. (2012). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*, volume 5th edition. South-Western College Publishing.