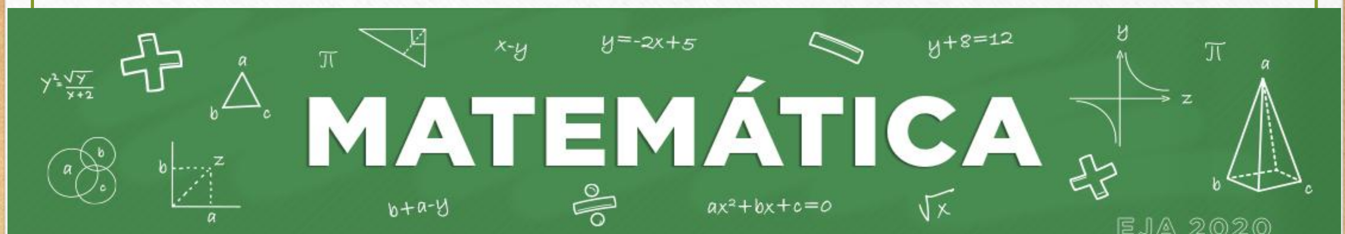
INSTITUTO FEDERAL
Baiano
Campus Guanambi

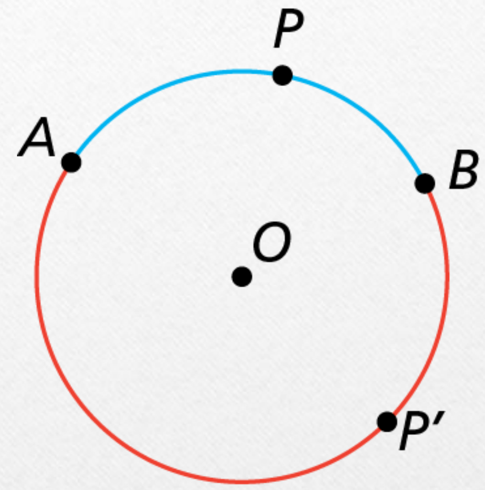
Ensino Médio Integrado ao Técnico



Ciclo Trigonométrico

Profª: Queila Batista Muniz de Azevedo

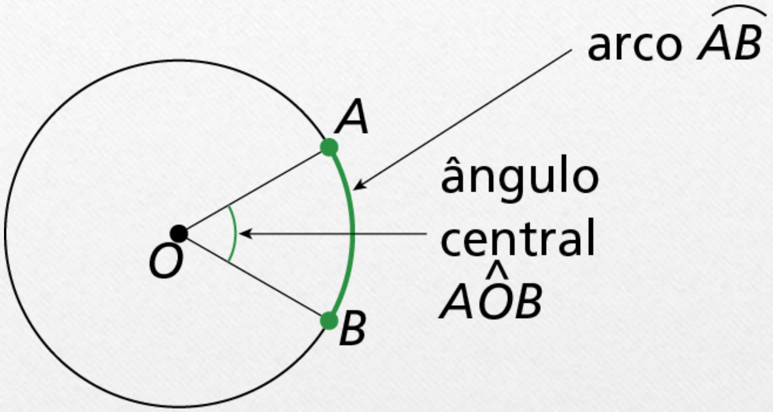
Arcos de circunferência



arco $\overset{\frown}{AB}$

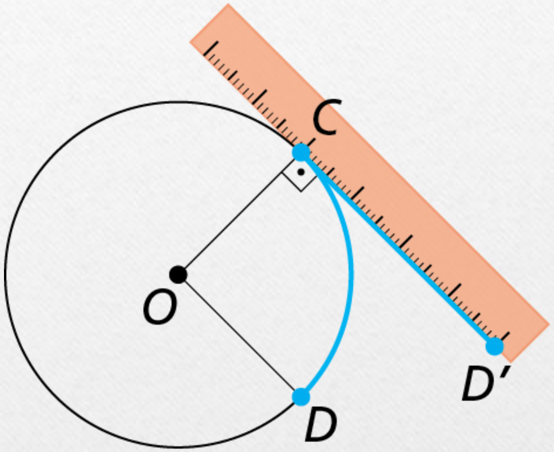
- *A* e *B* dividem a circunferência em duas partes: **arco de circunferência** (ou apenas **arco**).
- *A* e *B* são denominados **extremidades** dos arcos.

Medida de arcos de circunferência: medida angular



- A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é igual à **medida angular** do arco $\overset{\frown}{AB}$.
- Unidades de medida o **grau** ou o **radiano**.

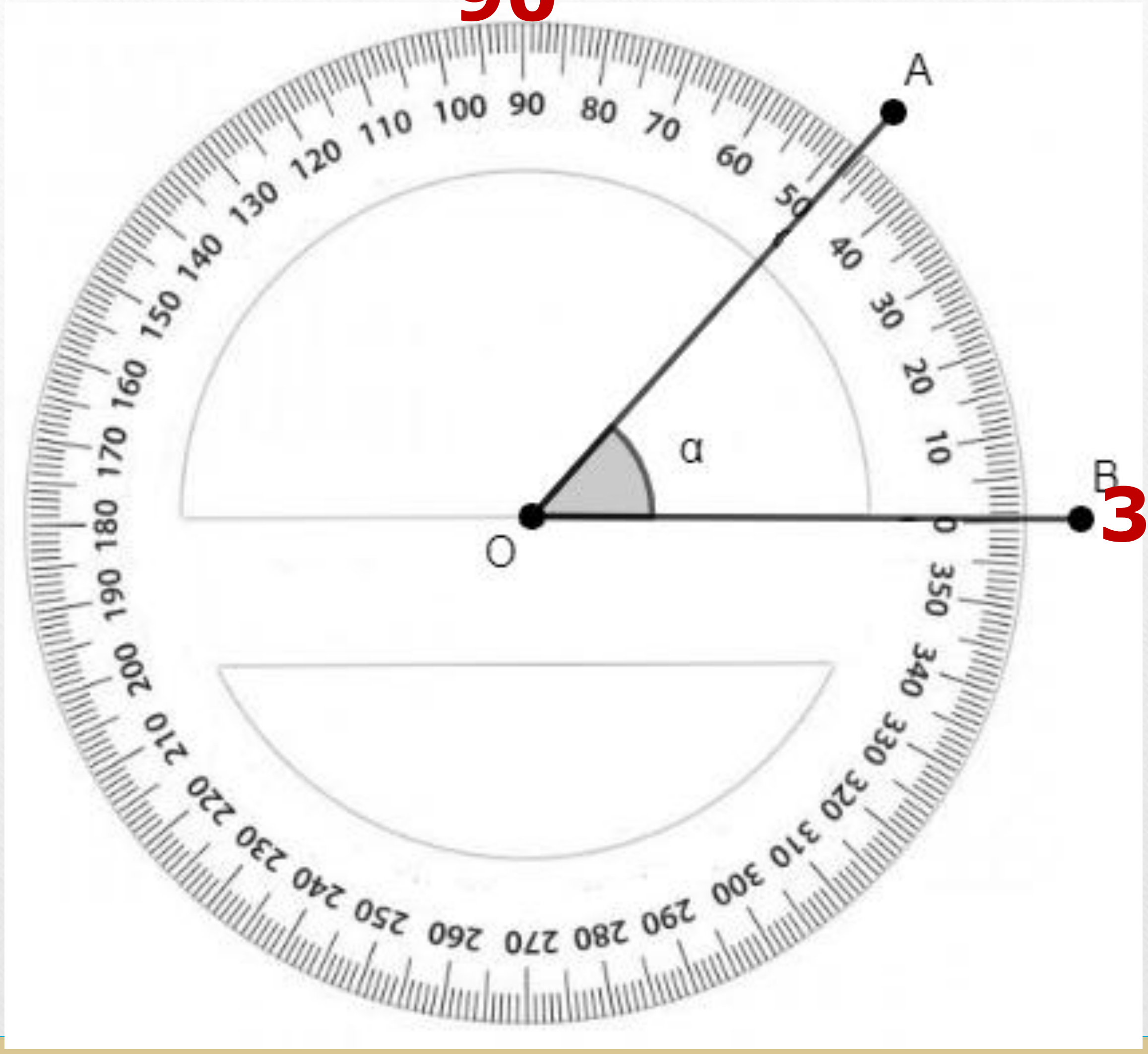
Medida de arcos de circunferência: medida Linear



A **medida linear** de um arco é a medida de seu comprimento. (*o metro, o centímetro, o milímetro etc*.)

Unidade de medida de arcos e ângulos: o grau

90º



180º

360º

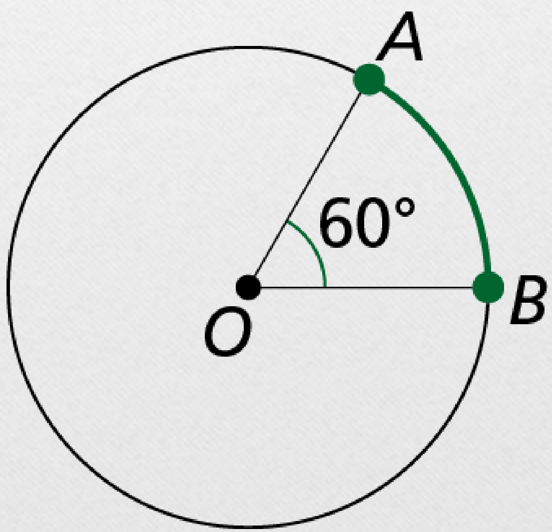
270º

O grau

- $med(\widehat{AB}) = 60º$ e $med(A\hat{O}B) = 60º$

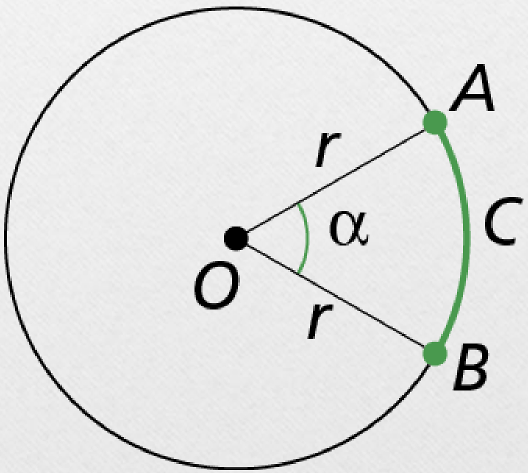
O grau tem submúltiplos:

- $1'$ (1 minuto) $= \frac{1}{60}$ do grau
- $1''$ (1 segundo) $= \frac{1}{60}$ do minuto



Unidade de medida de arcos e ângulos: o radiano

Um arco de um radiano (1 rad) **é aquele que tem comprimento igual ao raio da circunferência que o contém**, ou seja, o comprimento do arco dividido pelo raio da circunferência é igual a 1. De modo geral:



$$\alpha = \frac{C}{r}$$

O radiano

Exemplo

Uma circunferência mede 360º; essa medida também pode ser dada em radiano.

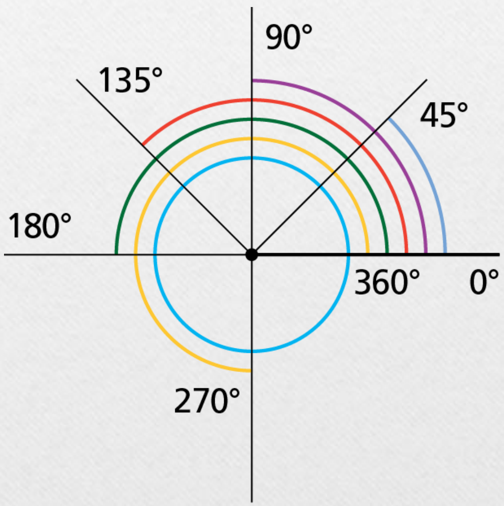
Sabemos que o comprimento de uma circunferência de centro *O* e raio *r* é dado por $2\pi r$ e que um arco de medida 1 rad tem comprimento *r*, assim:

$$\alpha = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} \Rightarrow \alpha = 2\pi$$

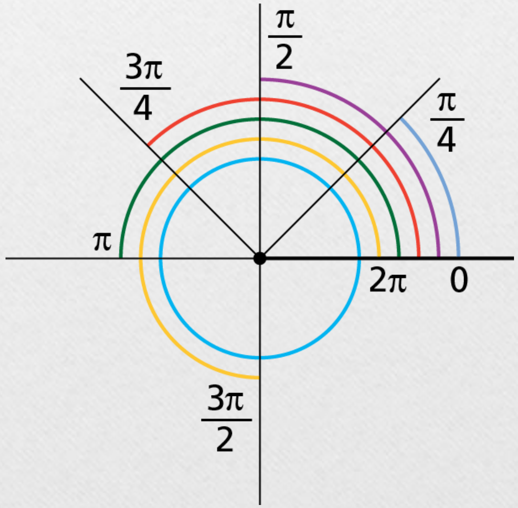
Logo, a medida de uma circunferência, em radiano, é 2π rad.

Relação entre grau e radiano

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



medidas em grau



medidas em radiano

Relação entre grau e radiano

Exemplo

a) Vamos verificar quanto mede, em grau, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad.

Sabendo que π rad = 180º, fazemos a substituição:

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{180}{6} \Rightarrow x = 30$$

Assim, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad mede 30º.

Relação entre grau e radiano

Exemplo

b) Para determinar quanto mede, em radiano, um arco de 200º, fazemos:

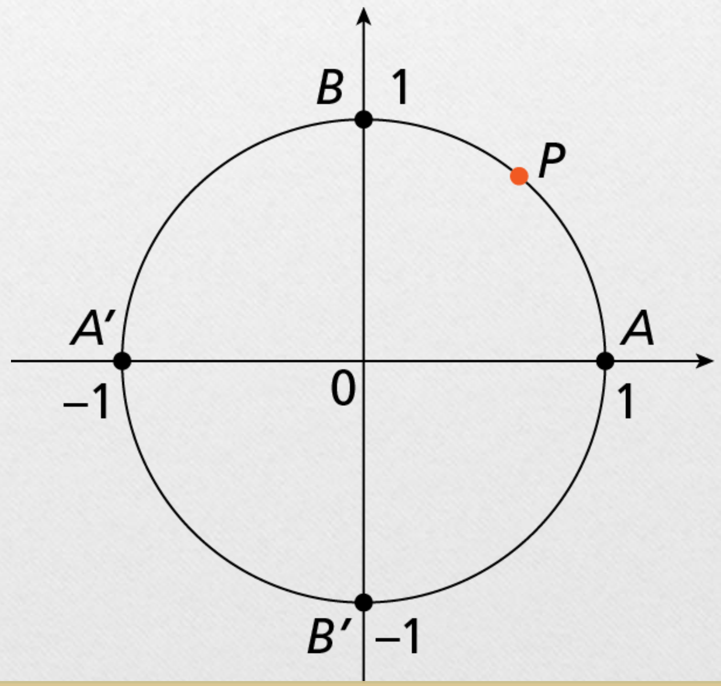
radiano	**grau**
π	180
x	200

$$180 \cdot x = 200 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{200 \cdot \pi}{180} \Rightarrow x = \frac{10\pi}{9}$$

Portanto, um arco de 200º mede $\frac{10\pi}{9}$ rad.

Circunferência orientada no plano cartesiano

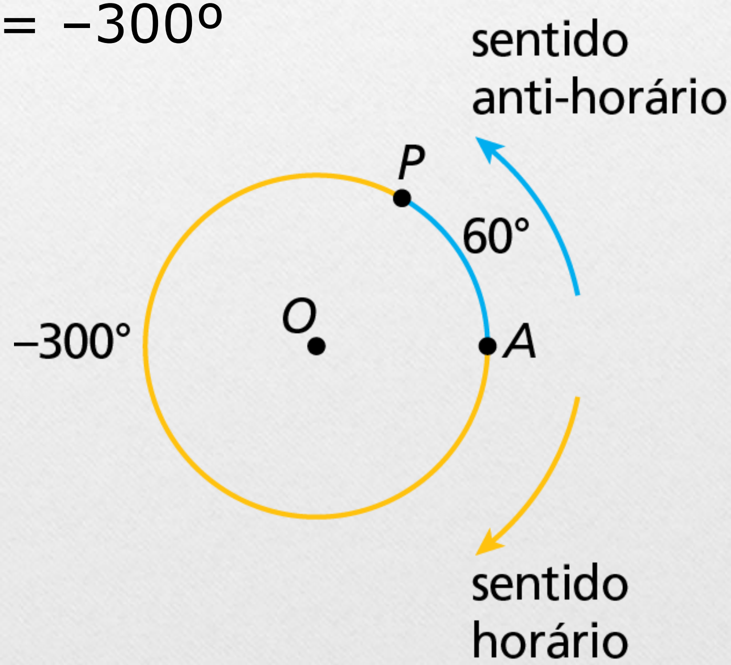
A **circunferência trigonométrica**, ou **ciclo trigonométrico**, tem centro na origem *O*(0, 0) de um plano cartesiano e raio de 1 unidade. O ponto *A*(1, 0) é a **origem** de todos os arcos.



Sentido horário e sentido anti-horário

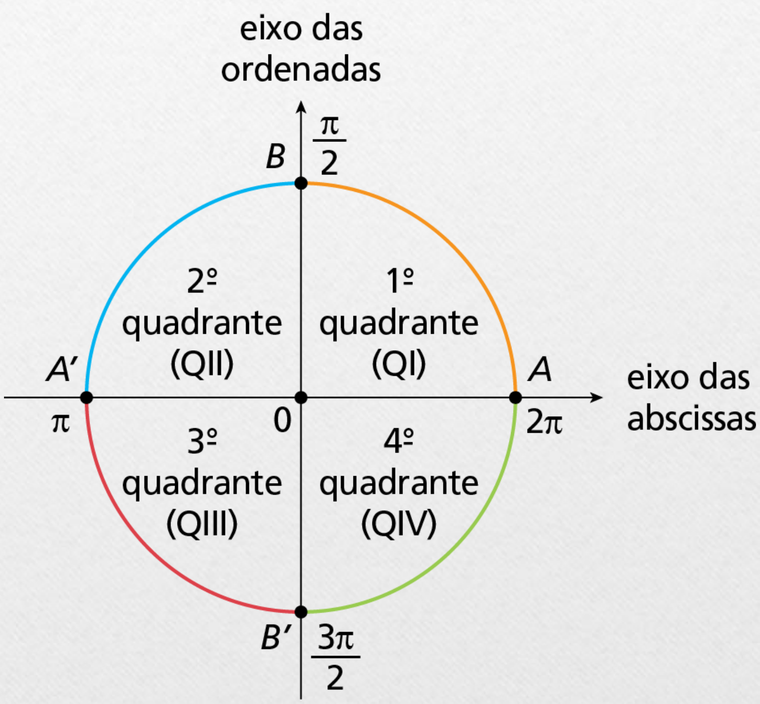
Podemos percorrer uma circunferência em dois sentidos:

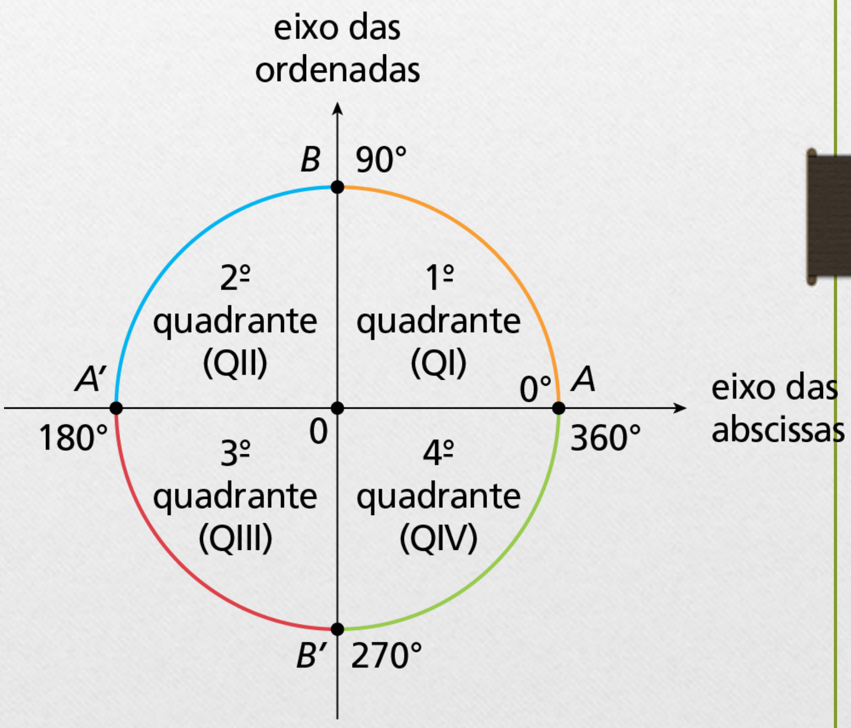
- Sentido anti-horário: med ($\overset{\frown}{AP}$) = 60º
- Sentido horário: med ($\overset{\frown}{AP}$) = –300º



Quadrantes do ciclo trigonométrico

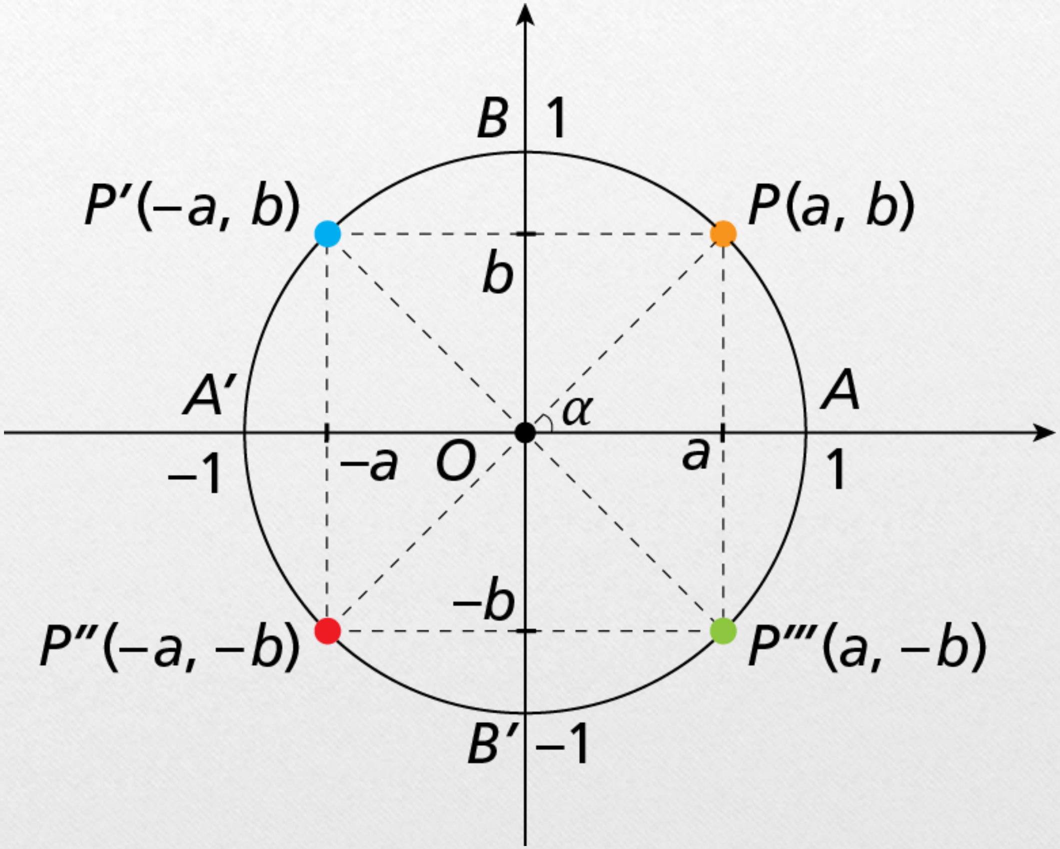
O **eixo das abscissas** (eixo $\overleftrightarrow{A'A}$) e o **eixo das ordenadas** (eixo $\overleftrightarrow{B'B}$) do plano dividem o ciclo em quatro quadrantes





Simetria no ciclo trigonométrico

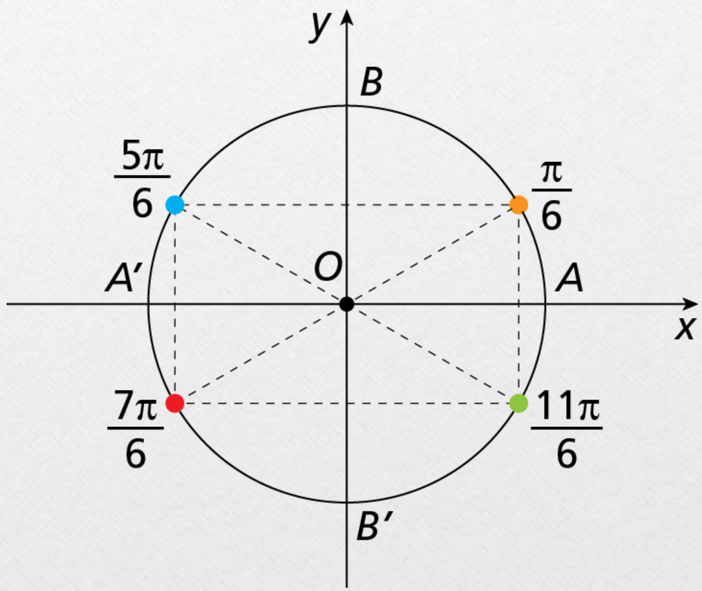
med $(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad



Exercício resolvido

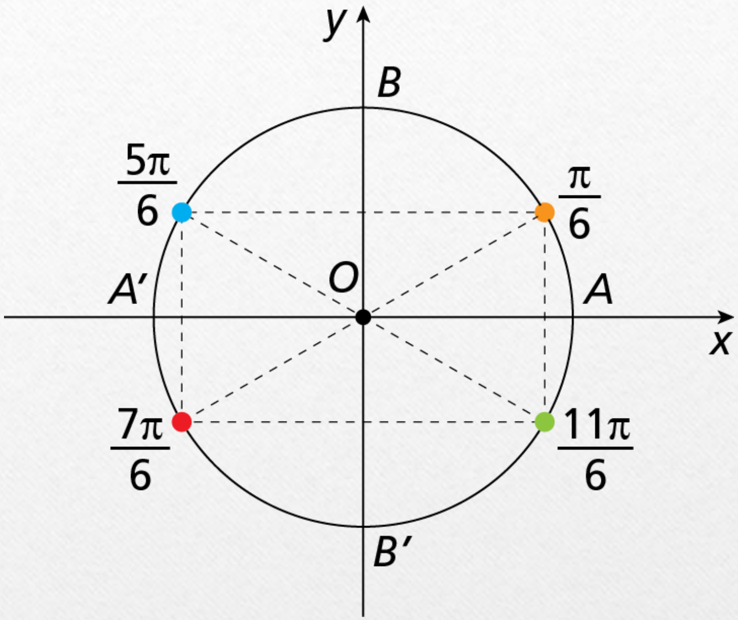
R5. Determinar a medida dos arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ rad em relação aos eixos das ordenadas e das abscissas e em relação à origem.

Resolução:



Em um ciclo trigonométrico, quando um valor, sem unidade de medida, está associado a um ponto, subentende-se que esse valor representa a medida de um arco em radiano.

Exercício resolvido



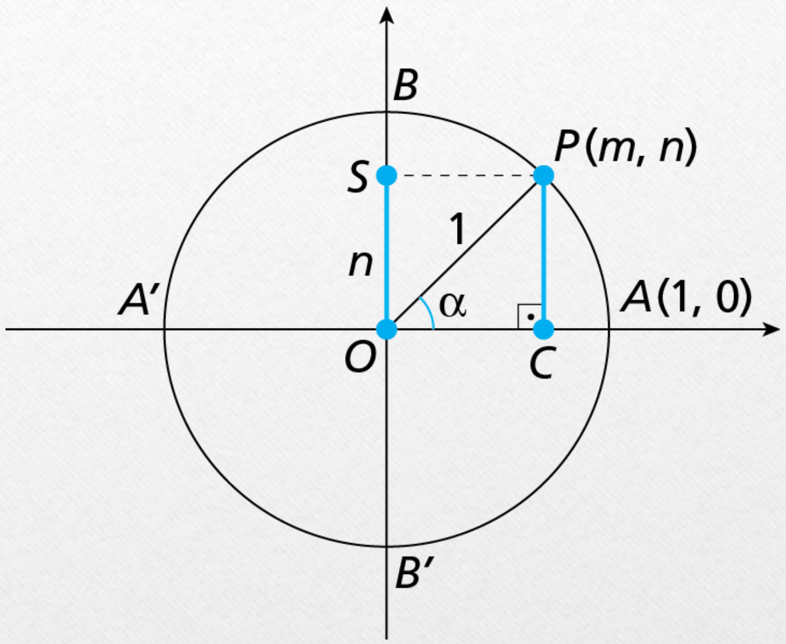
Resolução

Os arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ rad medem:

- em relação ao eixo das ordenadas (eixo y): $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\text{rad} = \frac{5\pi}{6}\text{rad}$
- em relação ao eixo das abscissas (eixo x): $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\text{rad} = \frac{11\pi}{6}\text{rad}$
- em relação à origem (O): $\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\text{rad} = \frac{7\pi}{6}\text{rad}$

Seno de um arco

med($C\hat{O}P$) = med ($A\hat{O}P$) = med ($\overset{\frown}{AP}$) = α



Aplicando a definição de seno de um ângulo agudo:

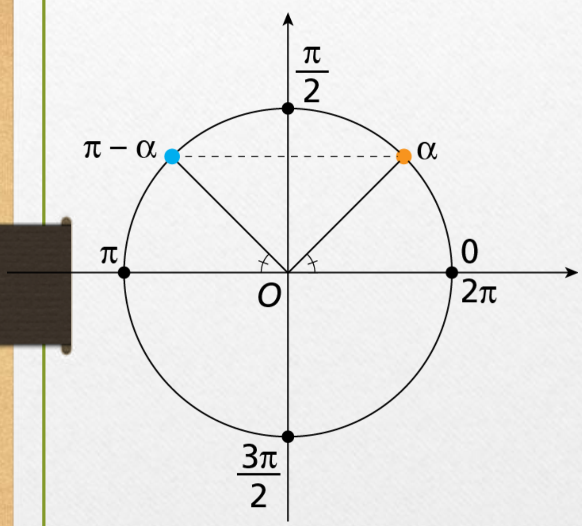
$$\text{sen } \alpha = \frac{CP}{OP} = \frac{n}{1} = n$$

Para todo arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, com $P(m, n)$, med($\overset{\frown}{AP}$) = α rad, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, temos sen $\alpha = n$.

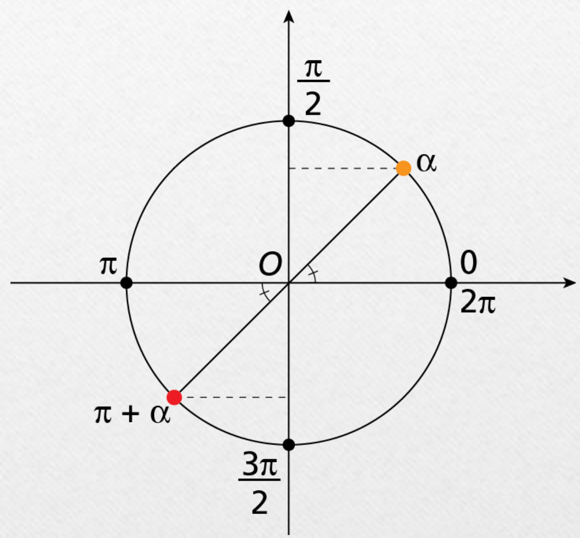
Redução ao 1º quadrante

Para α, em radiano, no 1º quadrante:

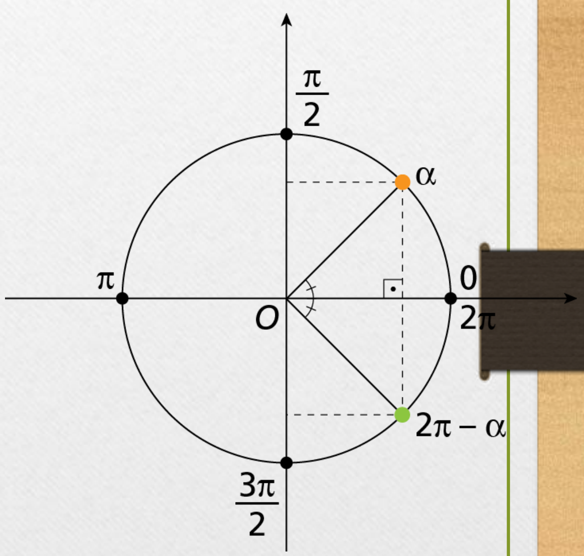
- $\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$



- $\text{sen}\,(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$



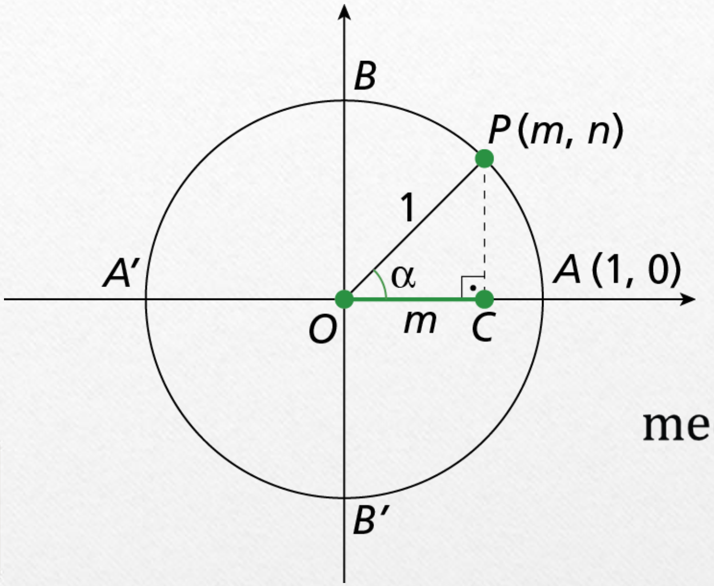
- $\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$



Variação do seno

$-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1$

Cosseno de um arco



$$\text{med}\left(C\hat{O}P\right) = \text{med}\left(A\hat{O}P\right) = \text{med}\left(\overset{\frown}{AP}\right) = \alpha$$

Aplicando a definição de cosseno de um ângulo agudo:

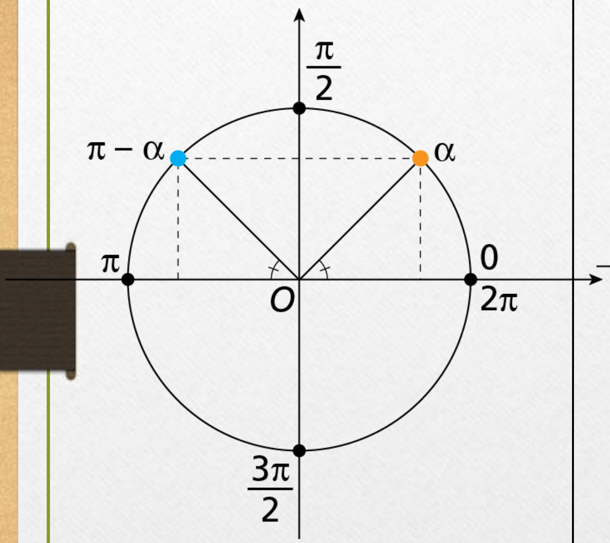
$$\cos\alpha = \frac{OC}{OP} = \frac{m}{1} = m$$

Para todo arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, com $P(m, n)$, $\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, temos $\cos\alpha = m$.

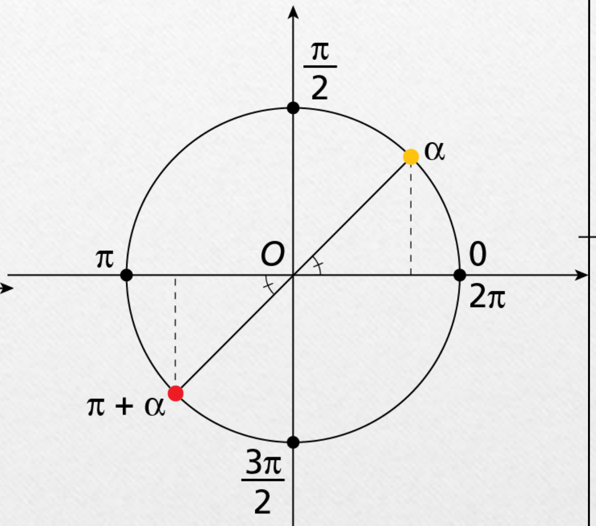
Redução ao 1º quadrante

Para a, em radiano, no 1º quadrante:

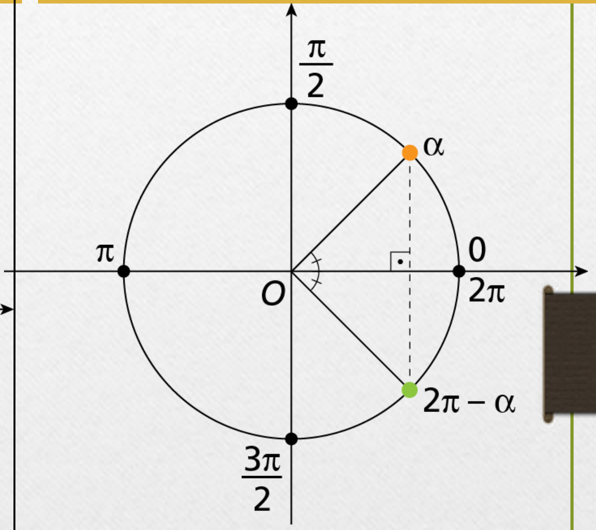
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$



- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$



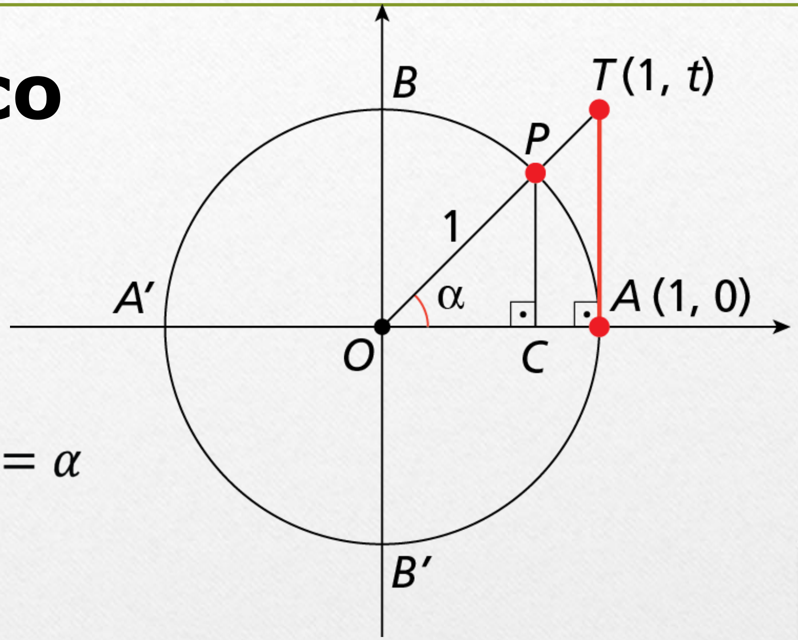
- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$



Variação do cosseno

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Tangente de um arco



$$\text{med}(C\hat{O}P) = \text{med}(A\hat{O}T) = \text{med}(\widehat{AP}) = \alpha$$

Aplicando a definição de tangente de um ângulo agudo:

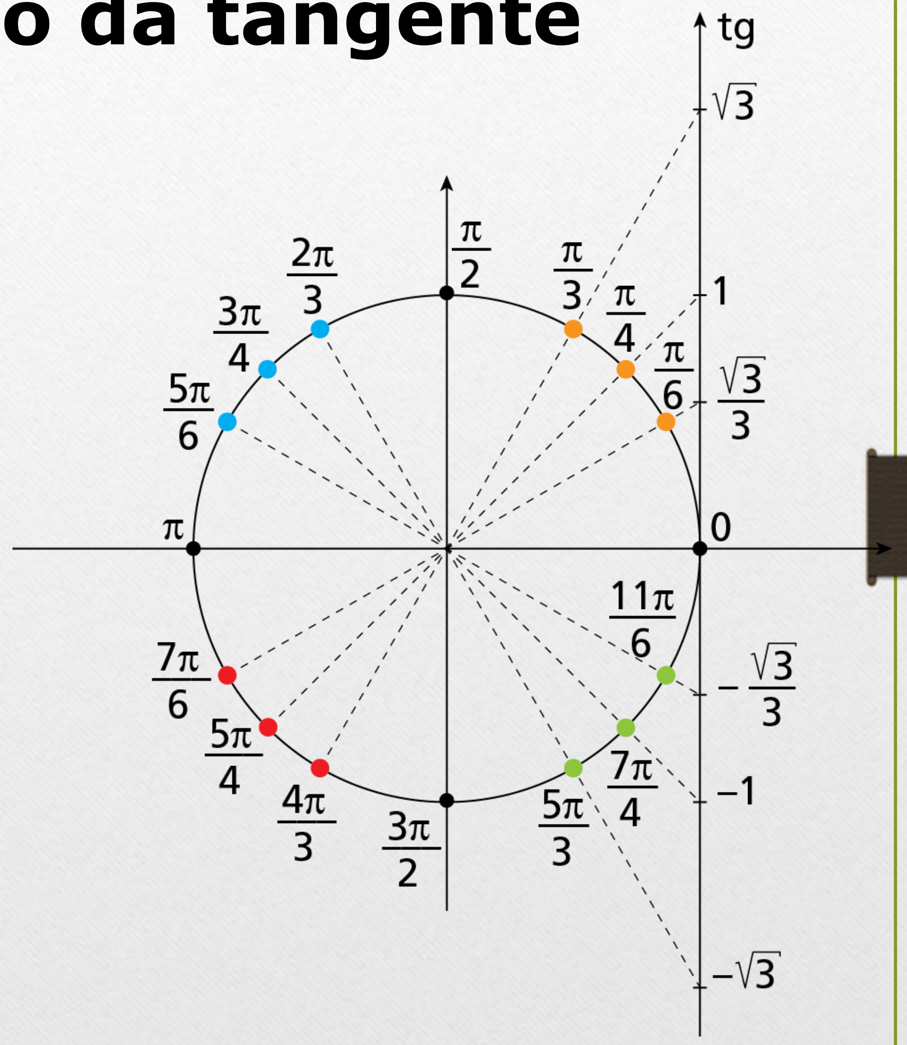
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{t}{1} = t$$

Para todo arco $\widehat{AP}$ do ciclo trigonométrico, com $P(m, n)$, $\text{med}(\widehat{AP}) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{2} \neq \alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, temos: $\text{tg}\,\alpha = t$, ordenada de T, em que T é a intersecção das retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{AT}$.

Simetria no estudo da tangente

Exemplo

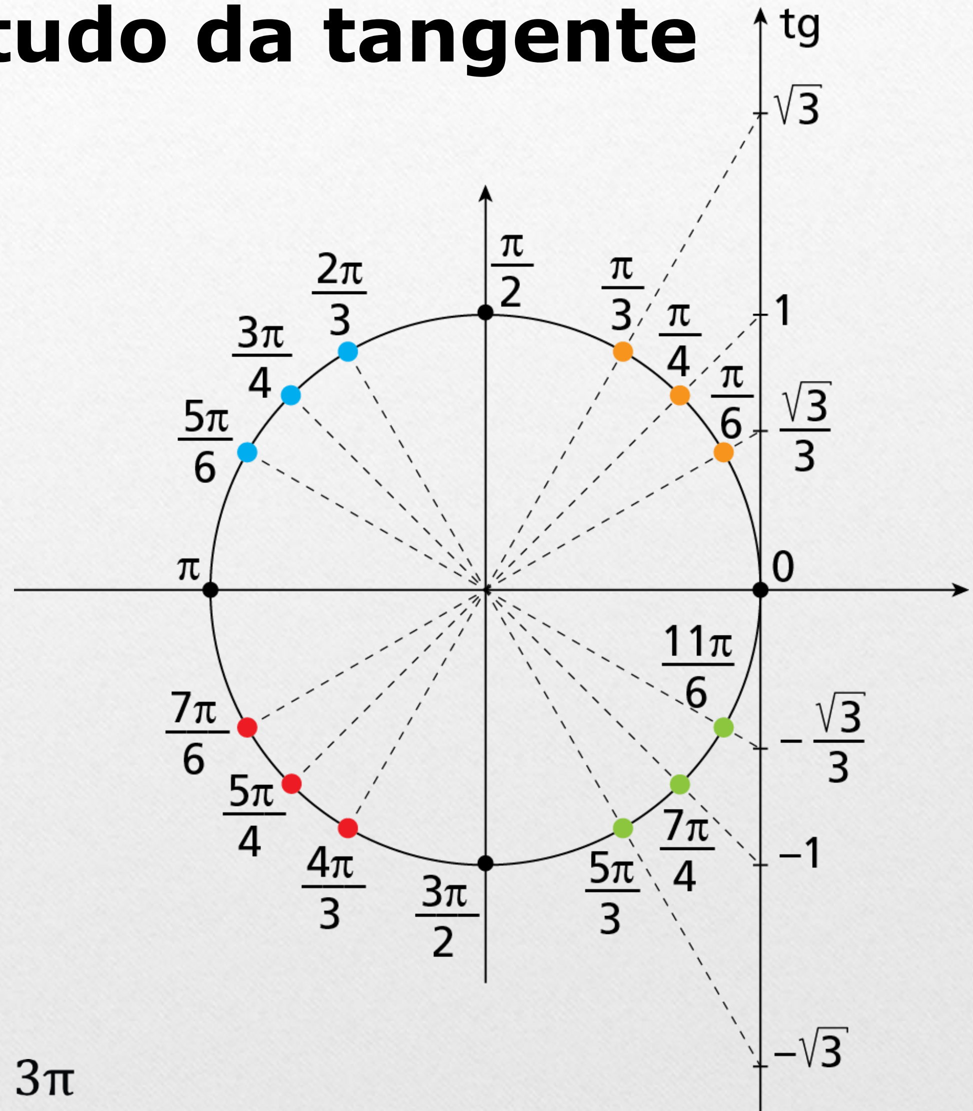
Na figura, vamos observar a tangente de alguns arcos do 1º quadrante e a tangente de seus simétricos em relação aos eixos ou à origem *O*.



Simetria no estudo da tangente

Exemplo

- $\text{tg}\frac{\pi}{6} = \text{tg}\,\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg}\frac{\pi}{4} = \text{tg}\,\frac{5\pi}{4} = 1$
- $\text{tg}\frac{\pi}{3} = \text{tg}\,\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$
- $\text{tg}\frac{2\pi}{3} = \text{tg}\,\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$
- $\text{tg}\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\,\frac{7\pi}{4} = -1$
- $\text{tg}\frac{5\pi}{6} = \text{tg}\,\frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



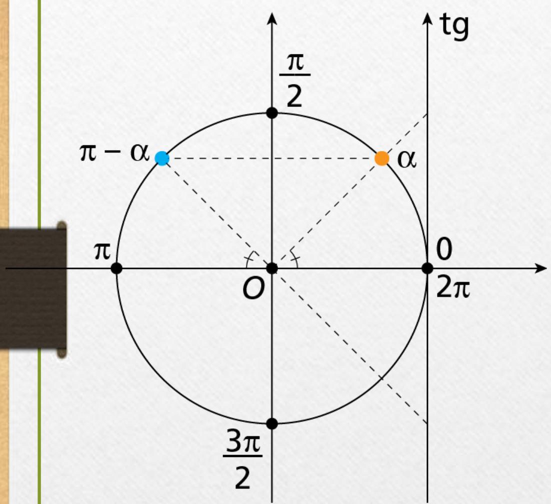
Vale destacar:

- $\text{tg } 0 = \text{tg}\pi = 0$
- Não existe $\text{tg}\,\frac{\pi}{2}$ nem $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2}$.

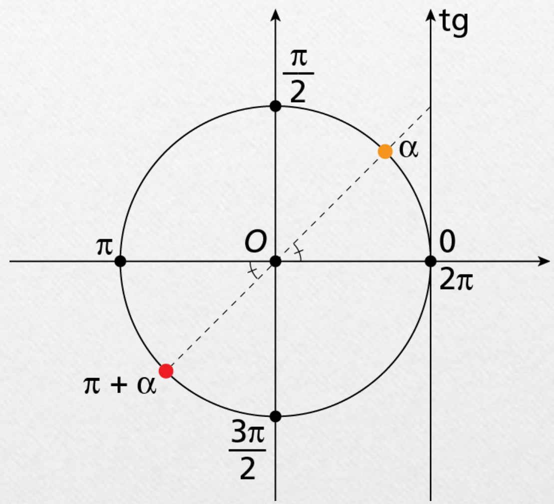
Redução ao 1º quadrante

Para α, em radiano, no 1º quadrante:

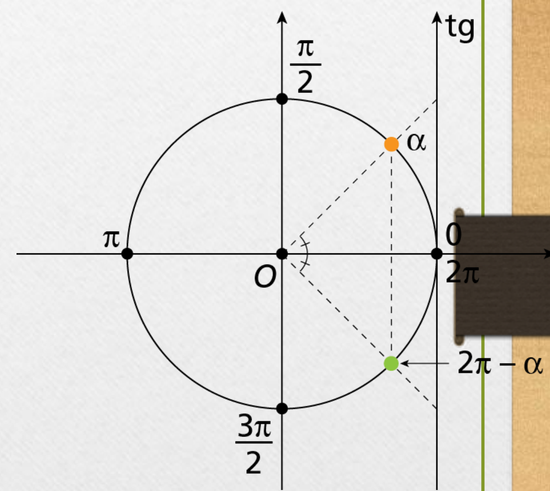
- $\text{tg}\,(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$



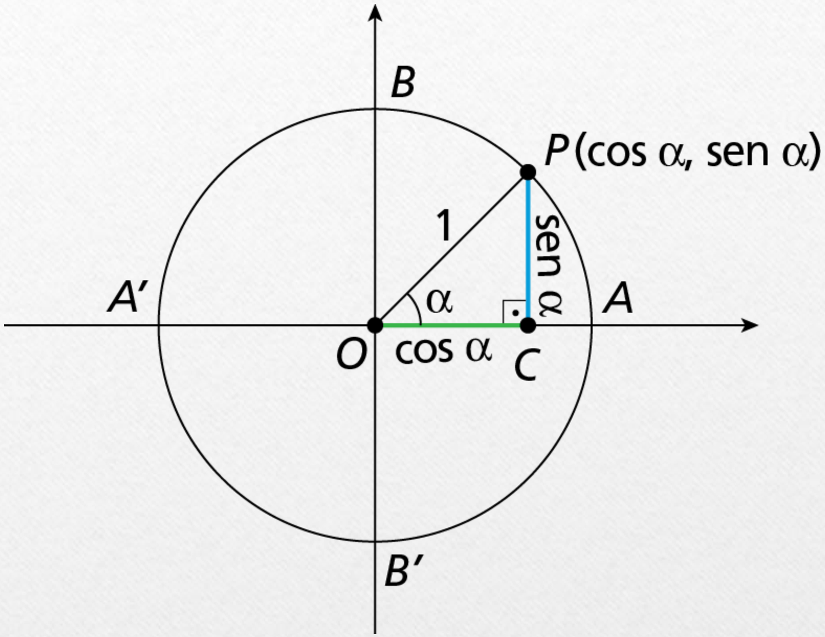
- $\text{tg}\,(\pi + \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$



- $\text{tg}\,(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$



Relação fundamental da Trigonometria



$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Essa relação é válida para qualquer arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, mesmo quando P pertence a um dos eixos.

Equação trigonométrica

Toda equação em que aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é chamada **equação trigonométrica**.

Exemplos

- sen $x = 0{,}5$
- cos $2x = -\frac{3}{4}$
- $\text{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1) \cdot \text{tg}\, x - \sqrt{3} = 0$

Observação

$3x \cdot \cos \pi = 2$ e $\text{sen}\, \frac{\pi}{4} + x = \frac{1}{2}$ não são equações trigonométricas, pois a incógnita x não é a medida de um arco.

Encontre os valores de A na expressão:

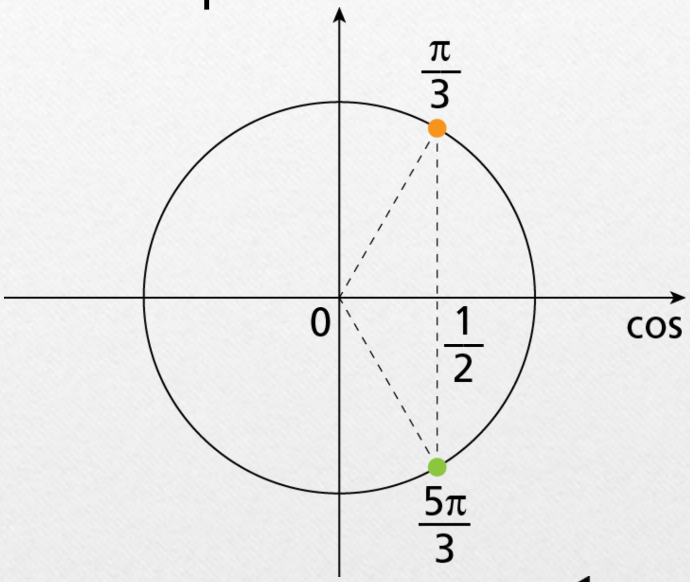
a) $$A = \frac{-\cos\frac{2\pi}{3} - sen\frac{4\pi}{3}}{sen\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} rad \equiv 120^{\circ} \Rightarrow \begin{cases} sen\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \dfrac{4\pi}{3} rad \equiv 240^{\circ} \Rightarrow \begin{cases} sen\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}} = 1$$

Solução = 1

Resolução de equações trigonométricas

Vamos determinar os valores de x que satisfazem a equação $\cos x = \frac{1}{2}$, com $x \in [0, 2\pi]$.



Resolução:

Observe a figura a seguir:

Veja que existem dois arcos com cosseno igual a $\frac{1}{2}$, o arco de $\frac{\pi}{3}$ e seu simétrico em relação ao eixo x, o arco de $\frac{5\pi}{3}$.

Portanto, como estabelecemos que $x \in [0, 2\pi]$, os valores de x são $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

Inequação trigonométrica

Toda inequação na qual aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é chamada **inequação trigonométrica**.

Exemplos

- $\text{sen}\ x > \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \frac{x}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg}\ x \geq 1$
- $\cos (x + \pi) \cdot \text{tg}(x + \pi) < -\frac{1}{2}$

Resolução de inequações trigonométricas

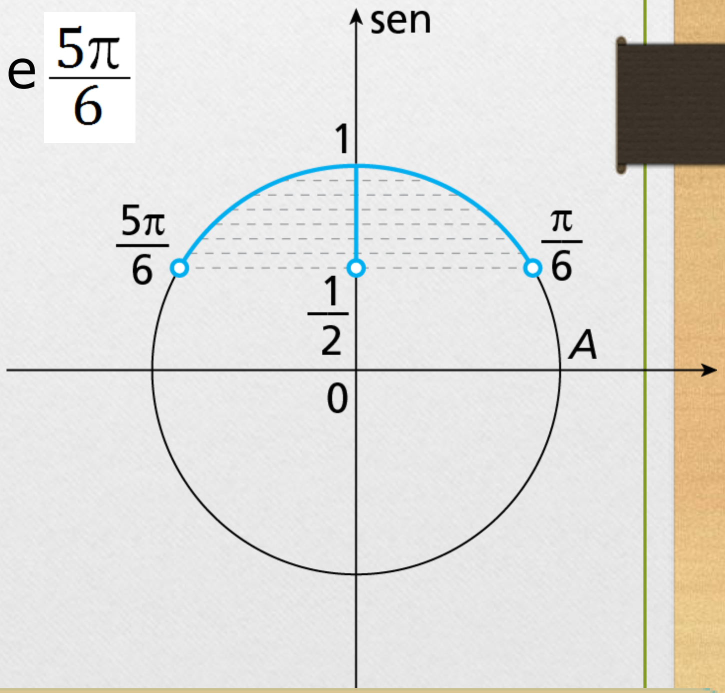
Considere a inequação trigonométrica sen $x > \frac{1}{2}$,

com $0 \leq x \leq 2\pi$.

Vamos determinar para quais números reais essa sentença é verdadeira.

No intervalo considerado, os arcos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ têm seno igual a $\frac{1}{2}$.

No destaque do ciclo trigonométrico ao lado, observe as extremidades dos arcos cujas medidas são a solução da inequação dada.

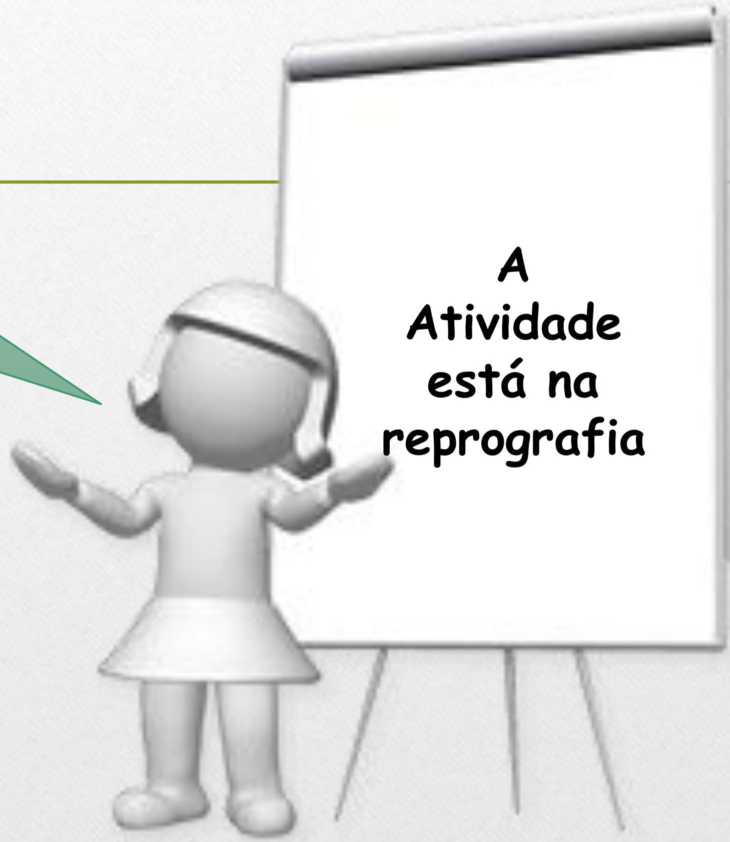


Resolução de inequações trigonométricas

O conjunto dessas medidas é o intervalo aberto: $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$

Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

Agora vamos para a atividade?



ANOTAÇÕES EM AULA

Coordenação editorial: Juliane Matsubara Barroso

Edição de texto: Ana Paula Souza Nani, Adriano Rosa Lopes, Enrico Briese Casentini, Everton José Luciano, Juliana Ikeda, Marilu Maranho Tassetto, Willian Raphael Silva

Assistência editorial: Pedro Almeida do Amaral Cortez

Preparação de texto: Renato da Rocha Carlos

Coordenação de produção: Maria José Tanbellini

Iconografia: Daniela Chahin Barauna, Erika Freitas, Fernanda Siwiec, Monica de Souza e Yan Comunicação

Ilustração dos gráficos: Adilson Secco

EDITORA MODERNA

Diretoria de Tecnologia Educacional

Editora executiva: Kelly Mayumi Ishida

Coordenadora editorial: Ivonete Lucirio

Editores: Andre Jun, Felipe Jordani e Natália Coltri Fernandes

Assistentes editoriais: Ciça Japiassu Reis e Renata Michelin

Editor de arte: Fabio Ventura

Editor assistente de arte: Eduardo Bertolini

Assistentes de arte: Ana Maria Totaro, Camila Castro e Valdeí Prazeres

Revisores: Antonio Carlos Marques, Diego Rezende e Ramiro Morais Torres

EDITORA MODERNA
Rua Padre Adelino, 758 – Belenzinho
São Paulo – SP – Brasil – CEP: 03303-904
Vendas e atendimento: Tel. (0__11) 2602-5510
Fax (0__11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2012