Capítulo 8

Matrizes e determinantes

RODRIGO EMANUEL PHILIPPS/FOCO RADICAL

Atleta participando de uma corrida de montanha, Imbituba, Santa Catarina, 2016.

Corredores participando da maratona internacional de Hainan, China, 2016.

Objetivos do capítulo

- Identificar e classificar uma matriz.
- Operar com matrizes.
- Calcular o determinante de uma matriz quadrada.

1 Matriz

O sedentarismo está em queda, e as corridas de rua estão na moda. A cada dia, mais e mais grupos formados por amigos, familiares e colegas de trabalho deixam de lado a preguiça e engrossam as fileiras dos que, por meio do esporte, buscam uma melhor qualidade de vida.

Convém lembrar que todo esporte deve ser praticado com moderação e com orientação de especialistas. Por isso, Daniel se prepara seguindo as tabelas elaboradas pelo seu treinador.

A tabela A mostra, em cada linha, os intervalos de tempo T1, T2 e T3, em minuto, que o atleta deve correr segundo as velocidades V1, V2 e V3, indicadas na tabela B. Cada série deve ser repetida três vezes, após descanso de quinze minutos, em cada dia da semana.

Tabela A:	Intervalo de tempo (minuto)		
	T1	T2	T3
1ª semana	6	3	6
2ª semana	3	6	3
3ª semana	3	6	9

Fonte: treinador.

Tabela B:	Velocidade (quilômetro por hora)	
	Manhã	Tarde
V1	8	12
V2	12	10
V3	10	12

Fonte: treinador.

CHINA FOTOPRESS/GETTY IMAGES

A organização dos dados numéricos em tabelas facilita a leitura e a interpretação desses dados, bem como alguns cálculos. Observe como é fácil identificar, na segunda semana, quantos minutos Daniel deve correr no primeiro intervalo de treinamento. Para isso, basta verificar, na tabela A, o valor que aparece no "cruzamento" da segunda linha com a primeira coluna: "3 minutos".

Aplicando o mesmo raciocínio, podemos interpretar o significado de todos os números que constam nas tabelas. Por exemplo, o número 12 que aparece na terceira linha da segunda coluna da tabela B representa a velocidade, em quilômetro por hora, que Daniel deve desenvolver durante o terceiro intervalo de cada semana no período da tarde.

Em Matemática, tabelas que apresentam dados numéricos dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais) são denominadas **matrizes**.

Uma matriz pode ser escrita entre colchetes ou entre parênteses.

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Define-se **matriz** $m \times n$ (lemos: "m por n") uma tabela com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplos

a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2 (lemos: "três por dois"), pois tem 3 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & x^2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & \sqrt{5} & x \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×3 (lemos: "três por três"), pois tem 3 linhas e 3 colunas.

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×1 (lemos: "dois por um"). Essa matriz, por ter uma só coluna, recebe o nome especial de **matriz coluna**.

d) $\begin{pmatrix} -8 & \frac{3}{4} & 0 & 5{,}1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×4 (lemos: "um por quatro"). Essa matriz, por ter uma só linha, é chamada de **matriz linha**.

Também podemos indicar o tipo de uma matriz ao lado dela, em sua extremidade inferior direita.

Exemplos

a) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 9 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$

(matriz de 2 linhas e 4 colunas)

b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 0 & \sqrt{5} & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$

(matriz de 3 linhas e 5 colunas)

1.1 Representação genérica de uma matriz

Os números que compõem uma matriz são chamados de **elementos** ou **termos**.

Em uma matriz, cada elemento ocupa uma posição definida por certa linha e por certa coluna, nessa ordem.

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{1ª linha} \\ \text{2ª linha} \\ \text{3ª linha} \\ \text{4ª linha} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 21 \\ \sqrt{3} & 16 & -8 \\ 6 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe, na matriz acima, que o elemento 16, por exemplo, ocupa a 3ª linha e a 2ª coluna. Indicamos esse elemento por a_{32}.

Portanto, $a_{32} = 16$ (lemos: "*a* três dois é igual a dezesseis").

Genericamente, cada elemento de uma matriz pode ser representado pelo símbolo a_{ij}, em que *i* indica a linha e *j* indica a coluna ocupadas por ele.

◆ Observação

Na matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 21 \\ \sqrt{3} & 16 & -8 \\ 6 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

temos, ainda:

$a_{11} = 2$ $a_{13} = 3$
$a_{22} = -1$ $a_{23} = 21$
$a_{31} = \sqrt{3}$ $a_{32} = 16$
$a_{33} = -8$ $a_{41} = 6$
$a_{42} = 4$

Exemplos

a) O elemento 5 está na 1ª linha e na 2ª coluna; então, $a_{12} = 5$.

b) O elemento 0 está na 2ª linha e na 1ª coluna; então, $a_{21} = 0$.

c) O elemento $\sqrt{2}$ está na 4ª linha e na 3ª coluna; então, $a_{43} = \sqrt{2}$.

Uma matriz *A* é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, com $i, j \in \mathbb{N}$. Assim, a matriz *A*, do tipo $m \times n$, pode ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Exercício resolvido

R1. Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, na qual $a_{ij} = i + 2j$.

▸ ***Resolução***

Uma matriz do tipo 2×3 é representada genericamente por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Aplicando a "lei de formação" dos elementos dessa matriz, temos:

- $a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$
- $a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
- $a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$
- $a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$
- $a_{22} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$
- $a_{23} = 2 + 2 \cdot 3 = 8$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

1.2 Igualdade de matrizes

Tomando-se matrizes de mesmo tipo, os elementos de mesmo índice, isto é, aqueles que ocupam a mesma posição, são denominados **elementos correspondentes**.

Considere as matrizes A e B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Como as matrizes A e B são do mesmo tipo (3×3), seus elementos correspondentes são:

a_{11} e b_{11} $\quad$ a_{12} e b_{12} $\quad$ a_{13} e b_{13}

a_{21} e b_{21} $\quad$ a_{22} e b_{22} $\quad$ a_{23} e b_{23}

a_{31} e b_{31} $\quad$ a_{32} e b_{32} $\quad$ a_{33} e b_{33}

Duas matrizes, A e B, são **matrizes iguais** quando são de mesmo tipo e todos os elementos correspondentes são iguais.

Exercício resolvido

R2. Determinar os valores de x, y e z que tornam as matrizes A e B iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & y + z & 1 \\ 3 & 5 & y - z \\ |x| & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

▸ ***Resolução***

Para que as matrizes A e B sejam iguais, é necessário que os elementos correspondentes sejam iguais; assim, devemos ter:

- $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$
- $\begin{cases} y + z = 7 \\ y - z = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, obtemos:

$$\begin{cases} y + \cancel{z} = 7 \text{ (I)} \\ y - \cancel{z} = 9 \text{ (II)} \end{cases}$$
$$2y = 16 \Rightarrow y = 8$$

Substituindo y por 8 em (I), obtemos:

$8 + z = 7 \Rightarrow z = -1$

Portanto, $x = \pm 4$, $y = 8$ e $z = -1$.

Reflita

Não; nesse caso, para quaisquer valores de x, y e z, as matrizes A e B não seriam iguais, pois $a_{11} \neq b_{11}$.

Considere as matrizes A e B do exercício **R2**. Caso mudássemos b_{11} para um número diferente de 2, as respostas para os valores de x, y e z seriam as mesmas?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

1. Determine o tipo das matrizes abaixo.

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 1×3

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ 3×1

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2×1

d) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ 2×2

2. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ na qual $a_{ij} = 3i + 2j$.

3. Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$ em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1, \text{ para } i = j \\ 3j, \text{ para } i \neq j \end{cases}$$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. Identifique os elementos de A em que $i = j$ ou $i + j = 4$.

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = |-6| = 6$
$a_{22} = 7$
$a_{33} = 9$
$a_{13} = 3$
$a_{31} = -7$

5. Elabore uma lei de formação que represente os elementos da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$.

Resposta possível:
$A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$

6. Considere as matrizes $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $(1\ 3\ 4\ 7\ 0)$.

Elas são iguais? Por quê? Não, pois elas não são do mesmo tipo. A primeira é do tipo 5×1 e a segunda é do tipo 1×5.

7. Determine a, b, c e d para que as matrizes

$\begin{pmatrix} a + 2b & 3c - 2d \\ -a + 3b & -2c + d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

$a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

1.3 Algumas matrizes especiais

De acordo com algumas características apresentadas por certas matrizes, elas recebem nomes especiais. A seguir, veremos algumas dessas matrizes.

Matriz quadrada

Chama-se **matriz quadrada** aquela matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2 ou, simplesmente, matriz de ordem 2.

As matrizes quadradas apresentam elementos que formam o que chamamos de **diagonais**.

Considere uma matriz quadrada de ordem n.

Os elementos a_{ij} com $i = j$, isto é, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, formam a **diagonal principal** dessa matriz. Os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$, isto é, $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \ldots, a_{n1}$, formam a **diagonal secundária** dessa matriz.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonal secundária　　diagonal principal

Observação

Uma matriz quadrada que tenha todos os elementos não pertencentes à diagonal principal iguais a zero é chamada de **matriz diagonal**.

Matriz nula

Uma matriz com todos os elementos iguais a zero é denominada **matriz nula**.

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 3×2, também indicada por $0_{3 \times 2}$.

Matriz identidade

Chama-se **matriz identidade** (I_n) a matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são iguais a zero.

Exemplos

a) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observação

Em qualquer matriz identidade de ordem n, vale a relação:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

8. Determine a matriz quadrada A de ordem 2 na qual $a_{ij} = \frac{i}{j}$. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. Se $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com $a_{ij} = 2i + j^2$, determine a diagonal principal e a diagonal secundária de A.
diagonal principal: 3, 8 e 15; diagonal secundária: 11, 8 e 7

10. Sendo $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem. 375

11. Determine k, real, para que:

$$\begin{pmatrix} k^2 & k - 1 \\ -k + 1 & k \end{pmatrix} = I_2$$ 1

12. Denomina-se **traço** de uma matriz a soma dos elementos de sua diagonal principal. Determine o traço da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com:

$$a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$ 14

2 Adição e subtração de matrizes

O dono de uma rede de floriculturas mantém registrado cada tipo de ornamento vendido em três de suas lojas, para controlar a compra de suprimentos sem precisar manter um estoque elevado.

As tabelas abaixo mostram as vendas em duas semanas.

ISTOCKPHOTO/GETTY IMAGES

Semana 1	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	120	290	230
Cesta	49	40	37
Buquê	130	89	77

Semana 2	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	90	270	98
Cesta	76	44	53
Buquê	123	76	90

Com os dados das tabelas acima, podemos encontrar, por exemplo, o total de vendas de cada tipo de ornamento nas duas semanas. Para isso, somamos os dados correspondentes a cada tipo de ornamento em cada loja. Por exemplo, o total de arranjos vendidos nas duas semanas na loja 1 foi: 120 + 90 = 210. Veja a tabela indicando a soma em cada loja:

Soma das semanas 1 e 2	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	210	560	328
Cesta	125	84	90
Buquê	253	165	167

Também podemos encontrar a diferença nas vendas de cada tipo de ornamento em cada loja nas duas semanas. Para isso, subtraímos os dados correspondentes a cada tipo de ornamento em cada estabelecimento. Por exemplo, a diferença entre o número de cestas vendidas nas duas semanas na loja 2 foi: $40 - 44 = -4$ (o sinal negativo indica que foram vendidas 4 cestas a mais na segunda semana em relação à primeira). Veja a tabela indicando a diferença em cada loja:

Diferença entre as semanas 1 e 2 (nessa ordem)	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	30	20	132
Cesta	−27	−4	−16
Buquê	7	13	−13

A ideia trabalhada nessa situação será usada no estudo da adição e da subtração de matrizes.

2.1 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ na qual $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Exemplo

Sejam as matrizes A e B, tal que: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Para obter a matriz $C = A + B$, basta adicionar os elementos correspondentes de A e B:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Observação

Note que as matrizes A, B e C são do mesmo tipo.

Reflita

Que matriz você obtém se adicionar a uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a matriz $0_{m \times n}$?

1º Reflita
A própria matriz A, pois $0_{m \times n}$ é a matriz nula, isto é, todos os seus elementos correspondem ao número real zero; portanto, ao somarmos cada elemento (a_{ij}) da matriz A com zero, obtemos o próprio elemento (a_{ij}).

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** da matriz A do tipo $m \times n$ (e indica-se por $-A$) a matriz que somada com A resulta na matriz nula de mesmo tipo, isto é, $A + (-A) = 0$, sendo 0 a matriz nula $0_{m \times n}$.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, pois: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Reflita

Que matriz você obtém ao calcular a matriz oposta da matriz oposta de uma matriz A?

A própria matriz A, pois, ao calcular o oposto do oposto de cada elemento a_{ij}, isto é, $-(-a_{ij})$, obtemos o próprio a_{ij}. Espera-se que os alunos percebam que o oposto do oposto de um número é o próprio número; então, a matriz oposta da matriz oposta é a matriz dada.

Propriedades da adição

Dadas as matrizes A, B, C e $0_{m \times n}$ (matriz nula), todas de mesmo tipo, valem as seguintes propriedades:

- $A + B = B + A$ (*comutativa*)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*associativa*)
- $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$ (*existência do elemento neutro*)
- $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$ (*existência do elemento oposto*)
- $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$ (*cancelamento*)

Reflita

Invente três matrizes de mesmo tipo e verifique a validade das propriedades da adição.

Resposta pessoal.
Espera-se que os alunos percebam que, independentemente dos valores atribuídos, as propriedades da adição de matrizes são válidas.
Verificar a conveniência de aproveitar essa atividade para fazer analogia entre as propriedades da adição no conjunto $\mathbb{R}$ e as propriedades da adição no conjunto das matrizes.

2.2 Subtração de matrizes

A diferença entre duas matrizes A e B, de mesmo tipo, é a soma da matriz A com a oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido

R3. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, obter $X_{2 \times 2}$ de modo que $A + X = B$.

▸ ***Resolução***

Representando a matriz X por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+a & 1+b \\ 0+c & 3+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

- $2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$
- $0 + c = 5 \Rightarrow c = 5$
- $1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$
- $3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Outro modo:

Também poderíamos determinar a matriz X usando as propriedades da adição de matrizes:

$A + X = B \Rightarrow$

$(-A) + A + X = (-A) + B \Rightarrow$

$\Rightarrow 0_{2 \times 2} + X = B - A \Rightarrow$

$\Rightarrow X = B - A$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

13. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

13. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } I_3,$$

efetue, quando possível, as operações:

a) $A + B$ **b)** $A + (B + C)$ **c)** $(A + B) + I_3$ Não é possível.

14. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $B - A$ **b)** $A - (B + I_2)$ **c)** $B - (A + 0_{2 \times 2})$

15. Determine a matriz X em cada item.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. Considerando as matrizes

$A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com $a_{ij} = i^2 + j^2$ para todo a_{ij}, e

$B = (b_{ij})_{2 \times 3}$, com $b_{ij} = 3i$ para todo b_{ij}, determine:

a) o elemento c_{22} da matriz $C = A + B$. 14

b) o termo de C igual a 3. ∄

14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3 Multiplicação de um número real por uma matriz

Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real, $k \cdot A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ obtida pela multiplicação de k por todos os elementos de A.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ e $k = 3$, então:

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-7) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

• Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ de tal modo que $B = A + A + A$, para cada par i, j, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, temos:

$(b_{ij}) = (a_{ij}) + (a_{ij}) + (a_{ij}) \Rightarrow (b_{ij}) = 3 \cdot (a_{ij})$

Logo, $B = 3 \cdot A$.

Como $B = A + A + A$ e $B = 3 \cdot A$, podemos concluir que: $A + A + A = 3 \cdot A$

• Para a matriz do exemplo:

$$A + A + A = \begin{pmatrix} 2+2+2 & 0+0+0 \\ 3+3+3 & -7-7-7 \\ 5+5+5 & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A + A + A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-7) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo: $A + A + A = 3A$

◆ Reflita

- Verifique, para a matriz A do exemplo, se é válida a igualdade $A + A + A = 3 \cdot A$.
- Para uma matriz A qualquer, vale a igualdade $A + A + A = 3 \cdot A$?

Exercício resolvido

R4. Determinar as matrizes X e Y tal que $\begin{cases} X + Y = A + 3B \\ X - Y = A + B \end{cases}$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

▶ ***Resolução***

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} X + \cancel{Y} = A + 3B \\ X - \cancel{Y} = A + B \end{cases}$$
$$\overline{2X \quad = 2A + 4B} \Rightarrow X = A + 2B$$

Como $X + Y = A + 3B$, temos:

$A + 2B + Y = A + 3B \Rightarrow Y = B$

Assim:

$$X = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

17. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, determine: Ver resolução no Guia do professor.

a) $3A$

b) $\frac{1}{3}(A + B)$

c) $2 \cdot A - \frac{1}{3} \cdot B$

d) $2A - (B + C)$

e) $2(A - C) + 3(B - A)$

f) $B + C - 2 \cdot I_2$

18. Invente duas matrizes A e B de mesmo tipo e verifique se a igualdade matricial é verdadeira ou falsa.

a) $4 \cdot A + 4 \cdot B = 4 \cdot (A + B)$ verdadeira

b) $3 \cdot A + 2 \cdot A = (3 + 2) \cdot A$ verdadeira

c) $-2 \cdot (5 \cdot B) = (-2 \cdot 5) \cdot B$ verdadeira

d) $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + B$ falsa

e) $-1 \cdot (-B) = B$ verdadeira

19. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes X e Y tais que: $\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases}$

19. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

4 Multiplicação de matrizes

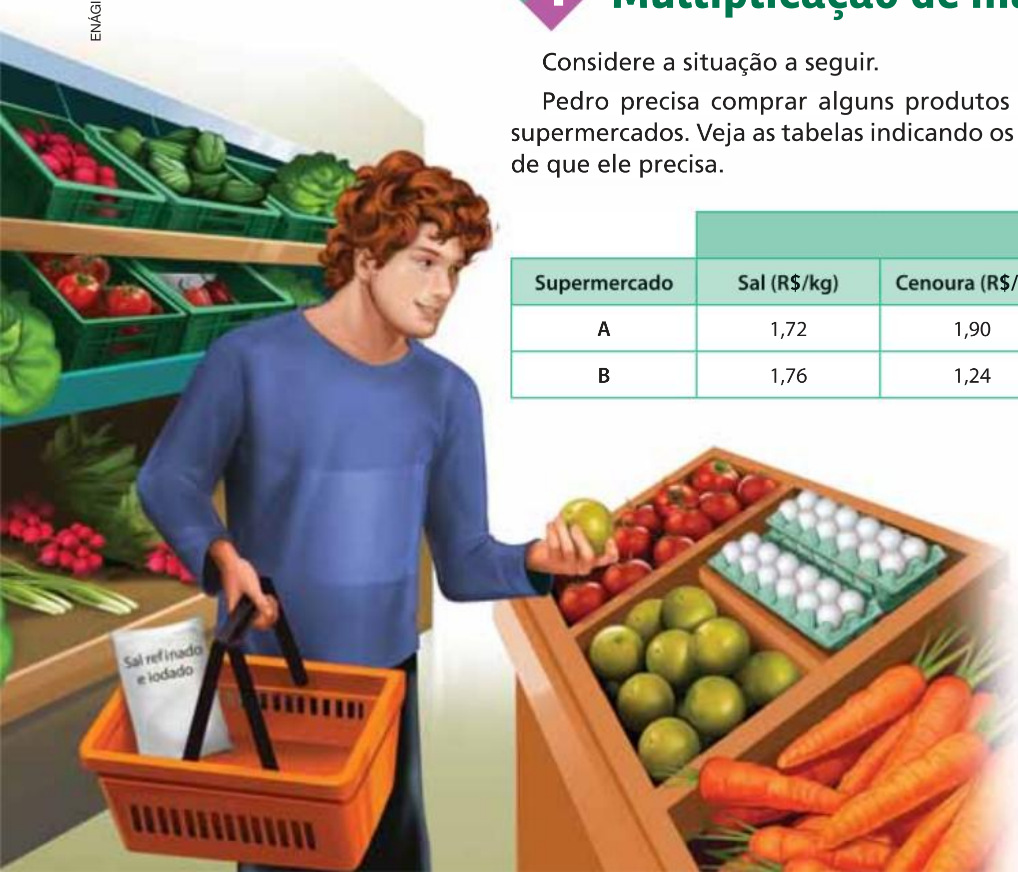
Considere a situação a seguir.

Pedro precisa comprar alguns produtos e resolve pesquisar preços em dois supermercados. Veja as tabelas indicando os preços pesquisados e as quantidades de que ele precisa.

	Produto			
Supermercado	**Sal (R$/kg)**	**Cenoura (R$/kg)**	**Laranja (R$/kg)**	**Ovos (R$/dúzia)**
A	1,72	1,90	1,55	3,00
B	1,76	1,24	1,72	3,94

Produto	Quantidade
Sal	1 kg
Cenoura	0,5 kg
Laranja	3 kg
Ovos	2 dúzias

ENÁGIO COELHO



Para saber em qual dos supermercados ele gastaria menos, podemos calcular:

- Supermercado A $\rightarrow (1{,}72) \cdot 1 + (1{,}90) \cdot 0{,}5 + (1{,}55) \cdot 3 + (3{,}00) \cdot 2 = 13{,}32$
- Supermercado B $\rightarrow (1{,}76) \cdot 1 + (1{,}24) \cdot 0{,}5 + (1{,}72) \cdot 3 + (3{,}94) \cdot 2 = 15{,}42$

Também é possível efetuar esse cálculo por meio de matrizes. Veja:

$$P = \begin{pmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

A multiplicação das matrizes P (preço) e Q (quantidade) resulta na matriz C (custo da compra em cada supermercado):

$$C = P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1{,}72 & 1{,}90 & 1{,}55 & 3{,}00 \\ 1{,}76 & 1{,}24 & 1{,}72 & 3{,}94 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13{,}32 \\ 15{,}42 \end{pmatrix}$$

O elemento c_{11} da **matriz produto** $P \cdot Q$ foi calculado multiplicando o 1º elemento da linha 1 de P pelo 1º elemento da coluna 1 de Q, o 2º elemento da linha 1 de P pelo 2º elemento da coluna 1 de Q e assim sucessivamente; em seguida, os produtos obtidos foram somados:

- $p_{11} \cdot q_{11} + p_{12} \cdot q_{21} + p_{13} \cdot q_{31} + p_{14} \cdot q_{41} = c_{11}$
  $(1{,}72) \cdot 1 + (1{,}90) \cdot 0{,}5 + (1{,}55) \cdot 3 + (3{,}00) \cdot 2 = 13{,}32$

O elemento c_{21} da matriz produto $P \cdot Q$ é obtido de modo análogo.

- $p_{21} \cdot q_{11} + p_{22} \cdot q_{21} + p_{23} \cdot q_{31} + p_{24} \cdot q_{41} = c_{21}$
  $(1{,}76) \cdot 1 + (1{,}24) \cdot 0{,}5 + (1{,}72) \cdot 3 + (3{,}94) \cdot 2 = 15{,}42$

De modo geral:

> Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos obtidos ao multiplicar o 1º elemento da linha ***i*** de A pelo 1º elemento da coluna ***j*** de B, o 2º elemento da linha ***i*** de A pelo 2º elemento da coluna ***j*** de B, e assim sucessivamente.

Note que o produto das matrizes A e B, indicado por $A \cdot B$, só é definido se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, e esse produto terá o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

iguais

Exemplo

$$[-2 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = [(-2) \cdot (-2) + 6 \cdot 6] = [40]$$

Reflita

A quantidade de colunas da matriz P poderia ser diferente da quantidade de linhas da matriz Q? Por quê?

Não. Se a quantidade de colunas da matriz P fosse diferente da quantidade de linhas da matriz Q, sobrariam elementos que não teriam correspondentes; portanto, não seria possível calcular o produto entre as matrizes.

Exercícios resolvidos

R5. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ determinar } A \cdot B.$$

▶ ***Resolução***

Como a matriz A é do tipo 2×3 e a matriz B é do tipo 3×2, existe o produto $A \cdot B$ (pois o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B).

Então $A \cdot B = C$, sendo $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$.

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

iguais

Os elementos da matriz C são obtidos do seguinte modo:

- c_{11}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 1ª coluna de B;

- c_{12}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 2ª coluna de B;
- c_{21}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 1ª coluna de B;
- c_{22}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 2ª coluna de B.

Assim, temos:

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 27 & 17 \end{pmatrix}$.

R6. Resolver a equação matricial:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

▶ ***Resolução***

São condições para a ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter 2 colunas, pois a matriz multiplicada tem 2 linhas;
- a matriz X ter 2 linhas, pois o produto das matrizes tem 2 linhas.

$$X_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

iguais

Temos, então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot (-2) & a \cdot 3 + b \cdot (-1) \\ c \cdot 1 + d \cdot (-2) & c \cdot 3 + d \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, obtemos os sistemas:

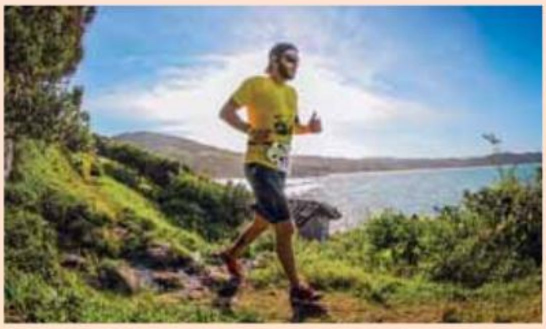
- $\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} c - 2d = 1 \\ 3c - d = 5 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$$a = \frac{4}{5},\ b = \frac{2}{5},\ c = \frac{9}{5} \text{ e } d = \frac{2}{5}$$

Logo, $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

R7. Retomando a situação da abertura deste capítulo, vamos calcular as distâncias percorridas por Daniel nas corridas de cada série do período da manhã e da tarde.



RODRIGO EMANUEL PHILIPPS/FOCO RADICAL

▶ ***Resolução***

Vimos que as tabelas podem ser escritas na forma de matriz. Inicialmente, os dados da matriz A devem ser convertidos da unidade minuto para a unidade hora, pois a matriz B representa a velocidade na unidade km/h. Assim, como 3 min equivalem a 0,05 h, 6 min equivalem a 0,10 h e 9 min equivalem a 0,15 h, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}15 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Para obter as distâncias percorridas em cada série de cada período do dia nesse treinamento, devemos multiplicar as matrizes A e B. Em cada série das manhãs da 1ª semana, por exemplo, ele correu por 0,10 hora a 8 km/h mais 0,05 hora a 12 km/h mais 0,10 hora a 10 km/h, ou seja, ele percorreu:

$(0{,}10 \cdot 8 + 0{,}05 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 10)$ km $= 2{,}4$ km

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando cada elemento da matriz produto, obtemos:

$c_{11} = 0{,}10 \cdot 8 + 0{,}05 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 10 = 2{,}4$
$c_{12} = 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}05 \cdot 10 + 0{,}10 \cdot 12 = 2{,}9$
$c_{21} = 0{,}05 \cdot 8 + 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}05 \cdot 10 = 2{,}1$
$c_{22} = 0{,}05 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 10 + 0{,}05 \cdot 12 = 2{,}2$
$c_{31} = 0{,}05 \cdot 8 + 0{,}10 \cdot 12 + 0{,}15 \cdot 10 = 3{,}1$
$c_{32} = 0{,}05 \cdot 12 + 0{,}10 \cdot 10 + 0{,}15 \cdot 12 = 3{,}4$

Assim:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2{,}4 & 2{,}9 \\ 2{,}1 & 2{,}2 \\ 3{,}1 & 3{,}4 \end{bmatrix}$$

Portanto, em cada dia da 1ª semana, ele deve percorrer 2,4 km em cada uma das séries da manhã e 2,9 km em cada série da tarde; na 2ª semana, 2,1 km em cada série da manhã e 2,2 km em cada série da tarde; e na 3ª semana, 3,1 km em cada série da manhã e 3,4 km em cada série da tarde.

Propriedades da multiplicação

Dadas as matrizes *A*, *B* e *C*, tais que as operações entre elas, indicadas abaixo, sejam possíveis, valem as seguintes propriedades:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (*associativa*)
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (*distributiva à direita*)
- $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ (*distributiva à esquerda*)

Reflita

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

- Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Vale a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes?
- Verifique que $A \cdot B = A \cdot C$, bem como $B \neq C$. Responda se vale a lei do cancelamento.

- $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

  $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

  $A \cdot B \neq B \cdot A$; logo, não vale a propriedade comutativa.
- $A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

  $A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$; logo, não vale a lei do cancelamento.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

20. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

determine, caso exista:

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot A$
c) $A \cdot C$
d) $(A \cdot B) \cdot C$
e) $A \cdot (B \cdot C)$

a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) Não é possível calcular. c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

21. Calcule o valor de x e de y de modo que:

$$\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$ $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

22. Resolva a equação $A \cdot X + B = C$ em que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

23. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $X \cdot A = A$. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

O que pode ser dito a respeito da matriz X? X é a matriz identidade de ordem 2.

24. Invente quatro matrizes quadradas: $A_{1 \times 1}$, $B_{2 \times 2}$, $C_{3 \times 3}$ e $D_{4 \times 4}$

a) Realize as multiplicações abaixo:

- $A \cdot I_1$ e $I_1 \cdot A$ A e A
- $B \cdot I_2$ e $I_2 \cdot B$ B e B
- $C \cdot I_3$ e $I_3 \cdot C$ C e C
- $D \cdot I_4$ e $I_4 \cdot D$ D e D

b) Compare os produtos obtidos com as respectivas matrizes inventadas. Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

25. (Ibmec) Uma agência de propaganda utiliza nas campanhas publicitárias que elabora para seus clientes três tipos de material para divulgação em papel:

- impresso tipo PB, em preto e branco no papel simples;
- impresso tipo CK, colorido no papel simples;
- impresso tipo CKX, colorido no papel mais grosso.

Para fazer esse tipo de trabalho, a agência contrata normalmente três gráficas, que cobram preços unitários diferentes para cada tipo de impressão conforme a tabela abaixo.

Tabela 1

Tipo	PB	CK	CKX
Gráfica A	R$ 2,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica B	R$ 3,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica C	R$ 1,00	R$ 2,00	R$ 6,00

a) Determine a gráfica que, para fazer 300 impressões do tipo PB, 150 do tipo CK e 200 do tipo CKX, apresentaria o menor custo. gráfica C

b) No último ano, a agência fez 25% dos seus impressos com a gráfica A, 45% com a gráfica B e o restante com a gráfica C. Supondo que, em cada campanha deste último ano, a agência sempre fez os três tipos de impressão com a mesma gráfica e que os preços unitários foram os valores dados na Tabela 1, determine o custo unitário médio que a agência teve em cada tipo de impressão. PB: R$ 2,15; CK: R$ 2,70; CKX: R$ 4,60

5 Determinante de uma matriz

A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**, que é obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.

Para representar o determinante de uma matriz A (indicado por **det *A***), substituímos os parênteses ou colchetes da matriz por barras simples.

Exemplos

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ e $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

b) $A = [4]$ e $\det A = |4|$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ e $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Determinante de matriz de ordem 2

Dada uma matriz quadrada A de ordem 2, o determinante de A é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - [(-3) \cdot (-1)] = 8 - 3 = 5$$

Determinante de matriz de ordem 3

Dada uma matriz quadrada A de ordem 3, o determinante de A pode ser calculado pela **regra de Sarrus**.

Observação

Pierre Frédéric **Sarrus** (1798-1861) foi professor na universidade francesa de Strasbourg.
A regra de Sarrus foi escrita, provavelmente, em 1833.
Os determinantes constituem uma ferramenta útil no estudo dos sistemas lineares.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Pela regra de Sarrus, o determinante é calculado conforme o procedimento a seguir.

1. Ao lado da matriz, copiam-se suas duas primeiras colunas.

2. Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção da diagonal principal, multiplicam-se os elementos das outras duas filas à sua direita.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \\ \multicolumn{1}{c}{} & & 10 & -8 & 0 \end{array}$$

3. Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção da diagonal secundária, os elementos das outras duas filas à sua direita.

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ & -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \\ -6 & 12 & 0 & & & \end{array}$$

4. Subtraem-se as somas dos produtos obtidos nos passos **2** e **3**, nessa ordem.
Então: $\det A = (10 - 8 + 0) - (-6 + 12 + 0) = -4$

Observação

É possível calcular o determinante de matrizes de ordem maior que 3; porém, isso não será objeto de nosso estudo.

Exercício resolvido

R8. Determinar x para que seja verdadeira a igualdade:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

▸ ***Resolução***

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -x & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ x & -1 & -2 & x & -1 \end{array}$$

$$-2x^2 \quad -2 \quad 6 \qquad\qquad -8 \quad -x \quad 3x$$

Assim, temos:

$(-8 - x + 3x) - (-2x^2 - 2 + 6) = 0$

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$x = 2$ ou $x = -3$

Portanto, $x = 2$ ou $x = -3$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno

26. Dadas as matrizes $A = (2)$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det A 2 **b)** det B 5 **c)** det C -1

27. Aplicando a regra de Sarrus, calcule o valor dos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 0 **b)** $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$ 0

28. Determine o valor da expressão:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ -8

29. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det $(A \cdot B)$ 20 **c)** det $A \cdot$ det B 20
b) det $(B \cdot A)$ 20

30. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det $(A + B)$ -12 **c)** det $(3 \cdot A)$ -225
b) $3 \cdot$ det A -75 **d)** det A + det B -22

31. Em cada item, depois de calcular os determinantes, responda às questões. (Esta atividade pode ser feita em grupo.)

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

O determinante de uma matriz de ordem 3 com uma linha de zeros sempre vale zero? sim

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

O determinante de uma matriz de ordem 3 em que uma linha é "o dobro de outra linha" sempre vale zero? E se fosse o triplo? sim; sim

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$

Se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma fila (ou linha, ou coluna) triplicada, seu valor triplica? sim

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $ad - bc$

O determinante de uma matriz de ordem 2 e o da matriz obtida dessa, trocando-se as linhas por colunas, são iguais? sim

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$

Determinantes de matrizes de ordem 2 que têm linhas (ou colunas) permutadas são iguais ou opostos? opostos

f) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ abc

O determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal? sim

32. Calcule os determinantes de I_1, I_2 e I_3. Qual valor você imagina para o determinante de I_4?

32. 1, 1, 1. Espera-se que os alunos respondam que o determinante de I_4 é igual a 1.

6 Matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas

Neste capítulo, vimos que matrizes são tabelas que apresentam dados numéricos dispostos em linhas e colunas. Assim, uma tabela de números dispostos de maneira retangular em uma planilha eletrônica é uma matriz.

Observe como a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 15 & 9 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser representada em uma planilha eletrônica:

Campo que mostra a célula selecionada.

Campo que mostra o número ou, quando for o caso, a fórmula associada à célula.

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas da planilha.

A1		*Fórmula*	2
	A	B	C
1	2	3	0
2	−2	15	9
3	7	1	4
4			

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam esses procedimentos e explorem outros recursos das planilhas eletrônicas.
Algumas planilhas podem ter comandos diferentes dos apresentados.
Oriente os alunos caso a planilha eletrônica que tenham disponível funcione de maneira diferente.

Na planilha, cada elemento da matriz ocupa uma coluna (indicada por uma letra) e uma linha (indicada por um número). Assim, o elemento indicado por A1 é o elemento que está na coluna A e na linha 1 (nesse caso, o número 2).

Usando planilhas eletrônicas, é possível calcular o determinante de uma matriz quadrada, além do produto de duas matrizes.

Como exemplo, vamos considerar as matrizes $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ e $B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Vamos, inicialmente, representar a matriz A na planilha eletrônica:

Para calcular o determinante, digitamos, em uma célula vazia da planilha, a fórmula:
=MATRIZ.DETERM(A1:B2)
(Calcula o determinante da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último elemento está em B2)

D2		*Fórmula*	=MATRIZ.DETERM(A1:B2)	
	A	B	C	D	E
1	2	3		Determinante	
2	5	7		−1	
3					

Agora, vamos representar as matrizes A e B na planilha, deixando um espaço de pelo menos uma fila entre elas:

Para calcular o produto $A \cdot B$, digitamos, em uma célula vazia da planilha, a fórmula:
=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)
(Determina o produto da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último está em B2 pela matriz cujo primeiro elemento está em D1 e o último está em F2.)

A5		*Fórmula*	=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)			
	A	B	C	D	E	F
1	2	3		−1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	Produto de *A* por *B*					
5	4					
6						
7						

A seguir, é necessário converter a fórmula em uma fórmula de matriz.
Selecionamos na planilha o intervalo em que ficará a matriz produto, iniciando pela célula em que a fórmula foi digitada. Nesse caso, o produto será do tipo 2×3; então, selecionamos um intervalo com 2 linhas e 3 colunas.
Pressionamos F2 e, em seguida, CTRL+SHIFT+ENTER.
Obtemos, assim, o produto $A \cdot B$.

A5		*Fórmula*	{=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)}			
	A	B	C	D	E	F
1	2	3		−1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	Produto de *A* por *B*					
5	4	17	20			
6	9	41	50			
7						

Nos dois casos, quando os alunos tentarem realizar os cálculos na planilha, obterão uma mensagem de erro.
Por exemplo:

A4		*Fórmula*	=MATRIZ.DETERM(A1:C2)
	A	B	C	D
1	−1	4	10	
2	2	3	0	
3				
4	#VALOR!	Um valor usado na fórmula tem o tipo de dados incorreto.		
5				

ADILSON SECCO

No caso do determinante, isso ocorrerá porque a matriz B não é quadrada; no caso do produto $B \cdot A$, porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

Usando uma planilha eletrônica, calcule o determinante da matriz B e o produto $B \cdot A$.

- Que resultado você obteve em cada caso?
- Compare as respostas que você obteve com as de seus colegas e discutam por que vocês obtiveram esses resultados.