INSTITUTO FEDERAL Baiano

Campus Guanambi

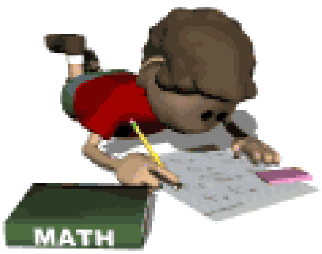
MATEMÁTICA

Trigonometria no Triângulo Retângulo e em um Triângulo Qualquer

Profª: Queila Batista Muniz de Azevedo

O significado da palavra **trigonometria**, vem do grego e resulta da conjunção de três palavras:

Tri – três



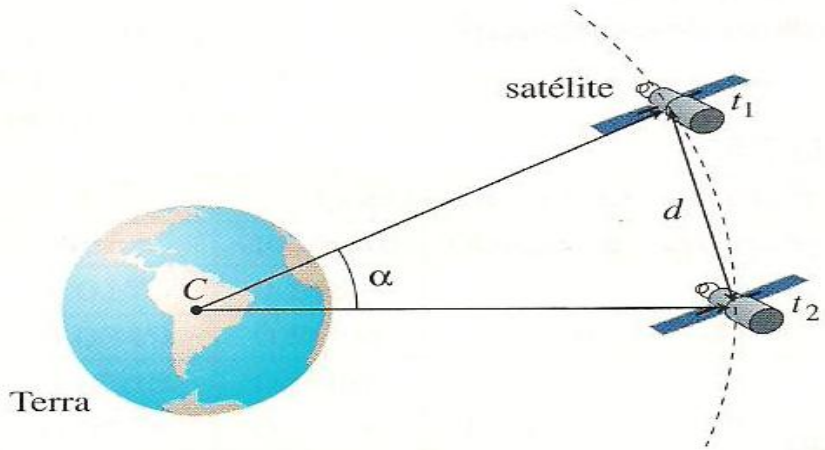
Gonos – ângulo

Metrein - medir

Trigonometria significa, o estudo das medidas dos triângulos.

Na Astronomia

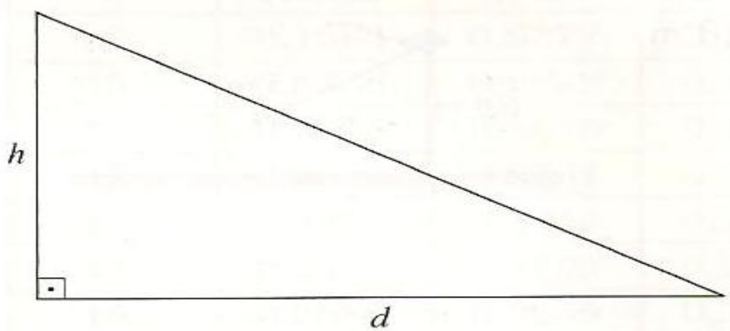
- no cálculo da distância entre dois planetas, entre planetas e satélites, etc.

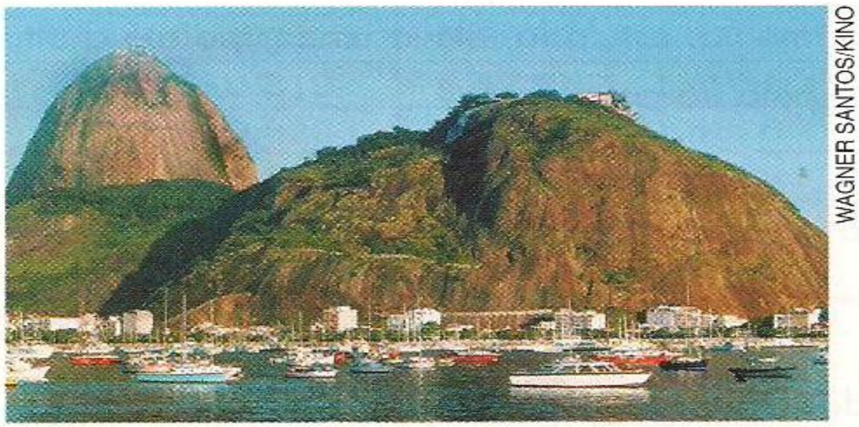


Como determinar a distância percorrida pelo satélite entre os tempos t_1 e t_2?

Na topografia

- na determinação da altura de morros, montanhas e colinas



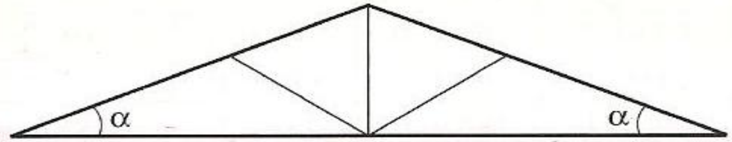


Como determinar a altura do Pão de Açúcar?

Na construção civil

- no cálculo da altura da tesoura de um telhado

LUCIANO BANEZA/CID



Em geral, as inclinações dos telhados são: 10%, 15% e 25%.

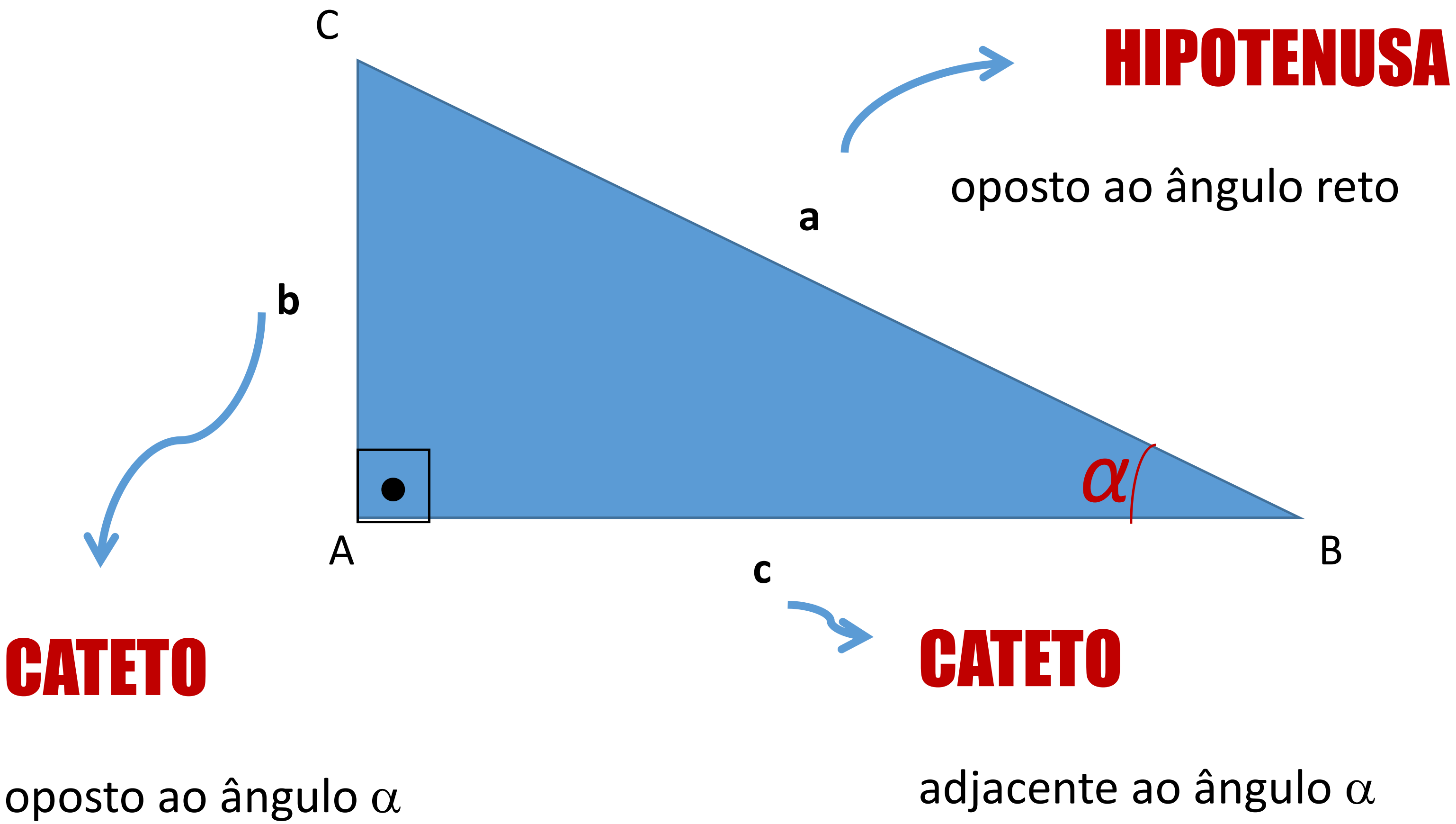
- na determinação do comprimento de uma rampa

Normalmente, as rampas para pedestres têm inclinação de 10%, isto é, para cada 10 cm de altura, são necessários 100 cm de afastamento a partir do início da rampa. Para veículos, essa inclinação pode chegar a 30%.

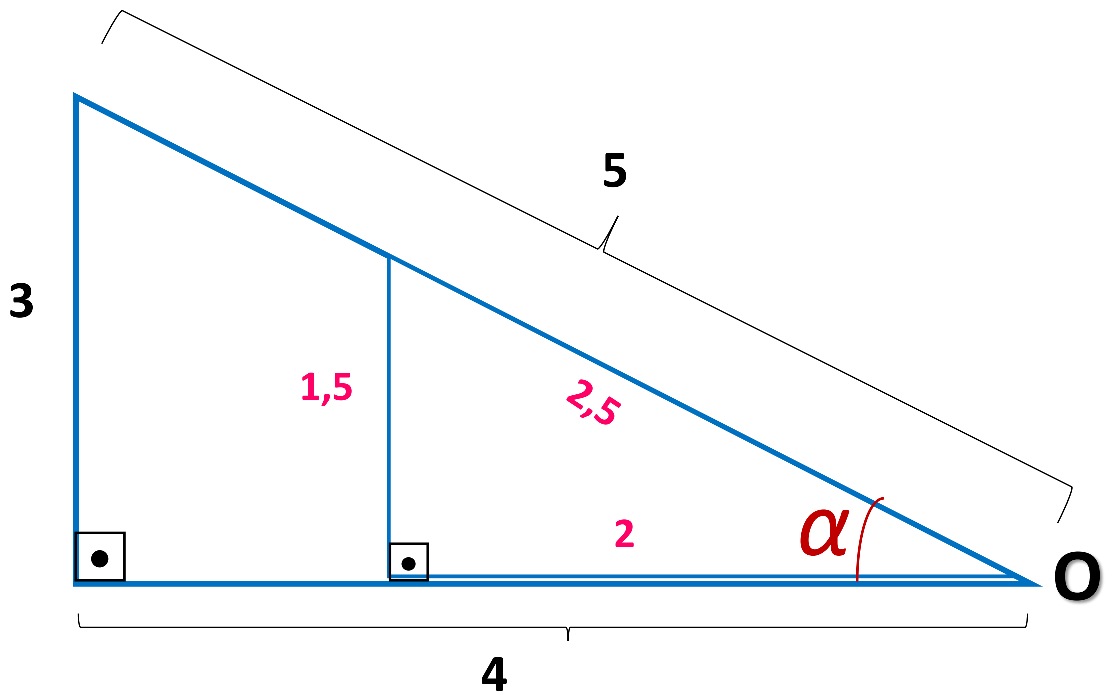
GONZALEZ VICENTE/CID

DELFIM MARTINS/PULSAR

Na construção de rampas e planos inclinados, sabe-se que quanto maior é a inclinação do plano, menor é a distância a ser percorrida, porém maior é a força necessária para percorrê-la. Esse é o motivo pelo qual as rampas para pedestres geralmente têm inclinação menor.

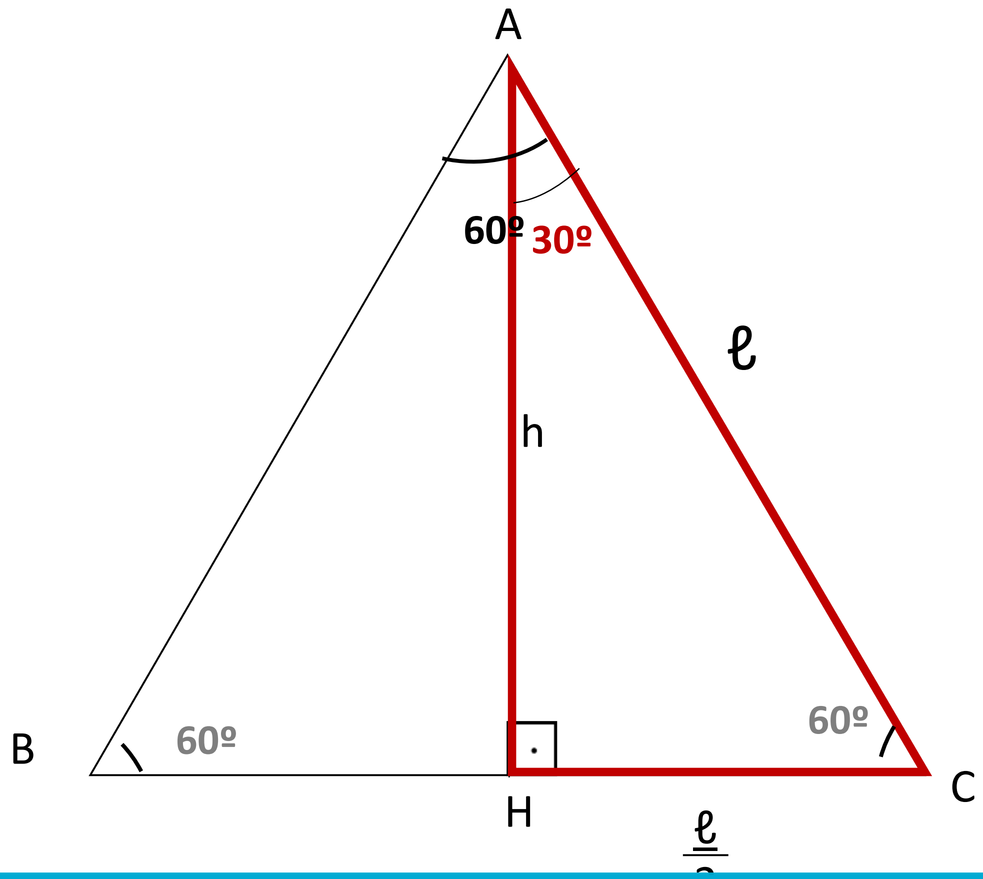


C
HIPOTENUSA
oposto ao ângulo reto
a
b
α
A
c
B
CATETO
CATETO
oposto ao ângulo α
adjacente ao ângulo α

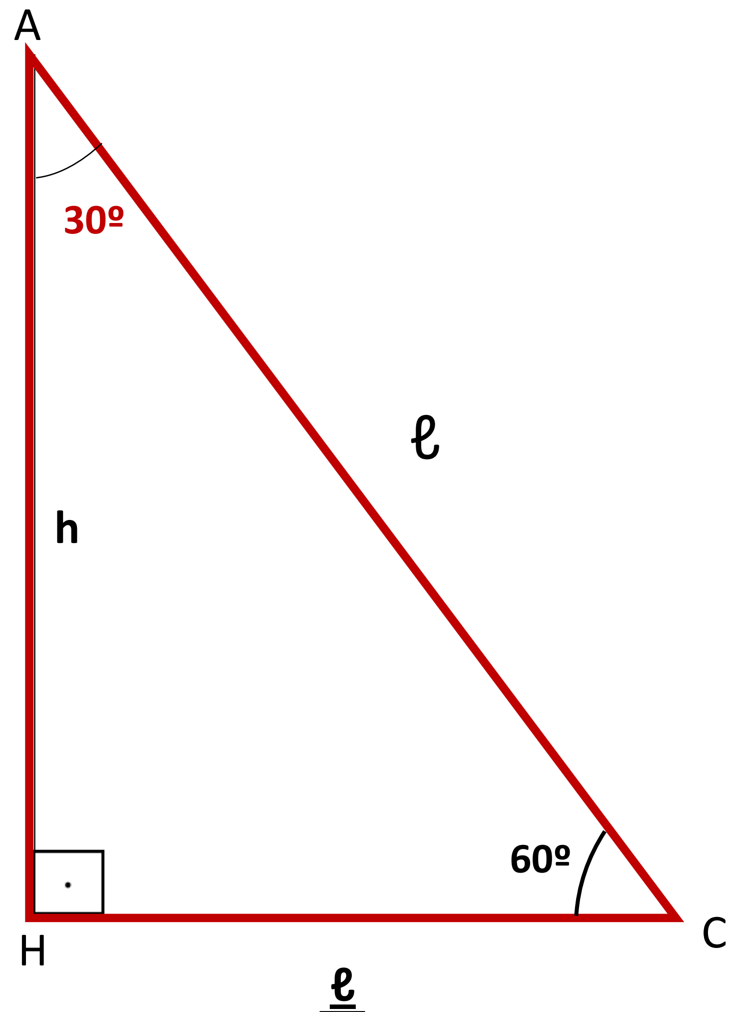

5
3
1,5
2,5
2
α
O
4

- **NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO:**

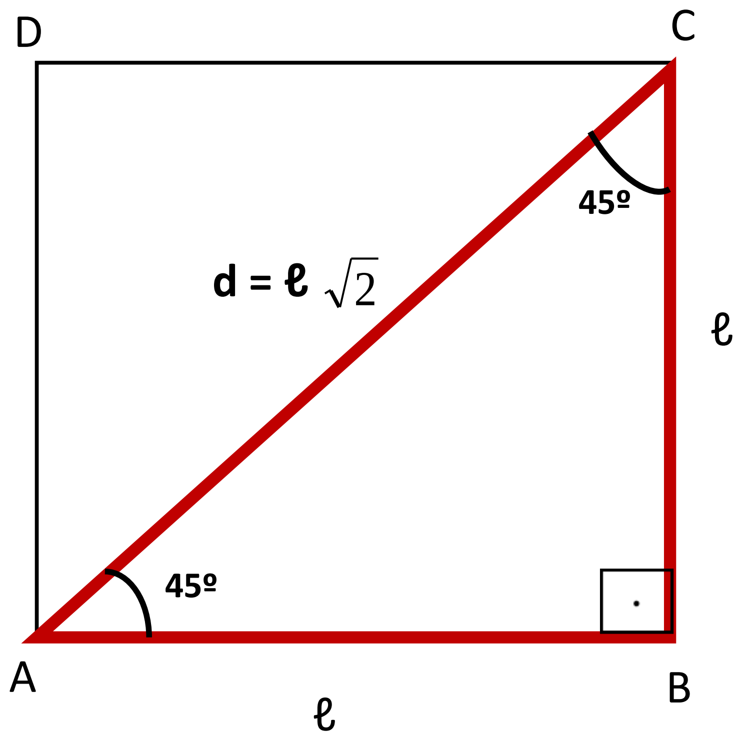
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$



- **NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO:**



- **NO QUADRADO:**

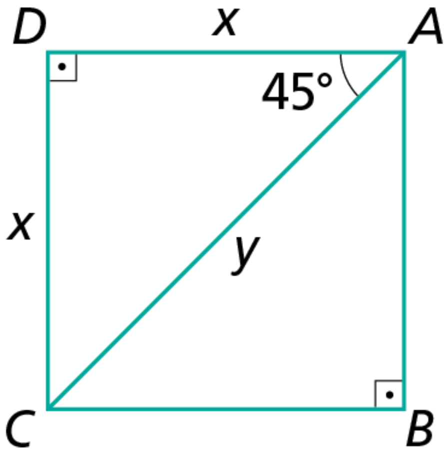


Ângulos notáveis

Exemplo

Vamos calcular o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45º.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos: $y^2 = x^2 + x^2$, ou seja, $y = x\sqrt{2}$. Usando as definições de seno, cosseno e tangente, temos:



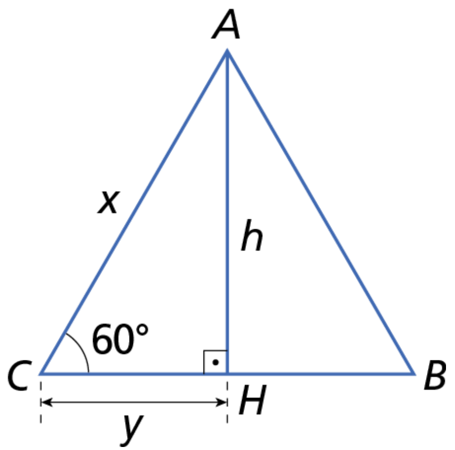
- $\text{sen}\,45° = \cos 45° = \dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{x\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg}\,45° = \dfrac{x}{x} = 1$

Ângulos notáveis

Vamos calcular o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 60º e 30º. Pela figura, temos:

$$\text{sen } 60^{\circ} = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60^{\circ} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2};\ \text{tg } 60^{\circ} = \frac{h}{y} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Como os ângulos de 30º e 60º são complementares, resulta:

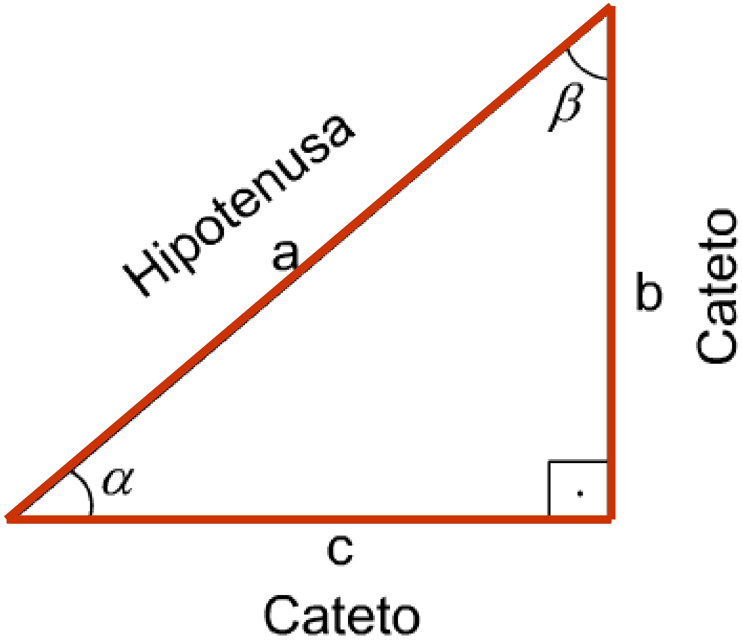


- $\text{sen } 60^{\circ} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60^{\circ} = \text{sen } 30^{\circ} = \frac{1}{2}$
- $\text{tg } 30^{\circ} = \frac{\text{sen } 30^{\circ}}{\cos 30^{\circ}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ângulos notáveis

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Um triângulo é chamado retângulo quando apresenta um de seus ângulos internos igual à 90º. O lado que está oposto ao ângulo reto é o maior lado e é chamado de hipotenusa, enquanto os outros dois são chamados de catetos.



Razões trigonométricas no triângulo retângulo

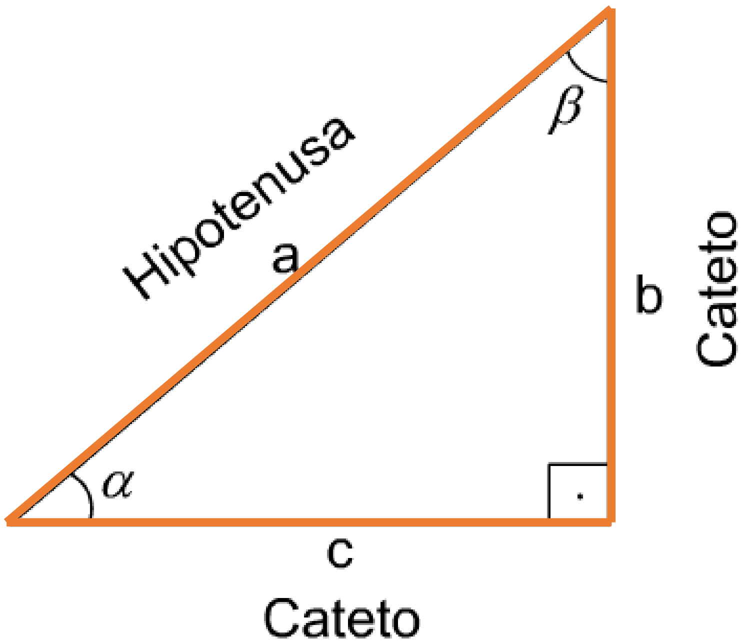
Seno

O seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$sen\alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$sen\beta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Razões trigonométricas no triângulo retângulo



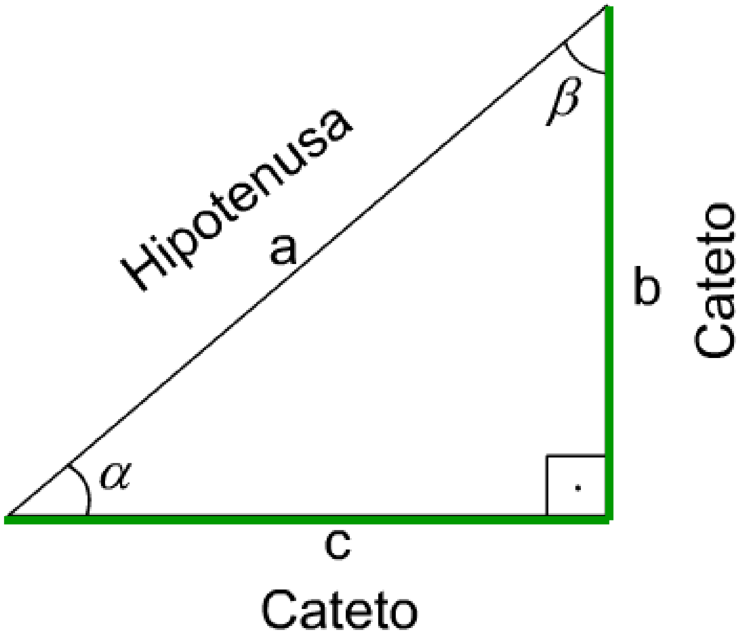
Cosseno

O cosseno de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Razões trigonométricas no triângulo retângulo



Tangente

A tangente de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente a este mesmo ângulo.

$$tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{b}{c}$$

$$tg\beta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{cateto } adjacente \text{ ao ângulo } \beta} = \frac{c}{b}$$

Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Os ângulos agudos α e β são complementares, pois a soma de suas medidas é 90º.

Assim, podemos escrever β em função de α: $\beta = 90º - \alpha$.

Note também que sen $\alpha = \frac{b}{a}$ e cos $\beta = \frac{b}{a}$, então temos: sen α = cos β.

Substituindo β por $90º - \alpha$ na última igualdade, temos:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta = \cos (90º - \alpha)$$

Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Observe também que cos a $\frac{c}{a}$ e sen $\beta = \frac{c}{a}$, então temos:

cos α = sen β.

Substituindo β por 90º – α nessa igualdade, temos:

$$\cos \alpha = \text{sen } \beta = \text{sen } (90^\circ - \alpha)$$

Também valem as relações:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Demonstração no cap. do livro

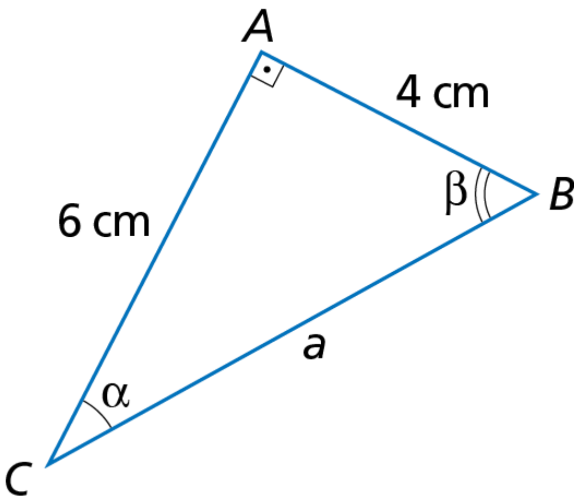
Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Seno e cosseno de ângulos complementares	Seno e cosseno de um ângulo	Seno, cosseno e tangente de um ângulo
$\text{sen}\ \alpha = \cos\ (90^0 - \alpha)$ $\cos\ \alpha = \text{sen}\ (90^0 - \alpha)$	$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$	$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}$

Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Exemplo

Vamos determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 4 cm.



Vamos começar aplicando o teorema de Pitágoras:

$a^2 = 6^2 + 4^2$

$a^2 = 36 + 16$

$a = 2\sqrt{13}$

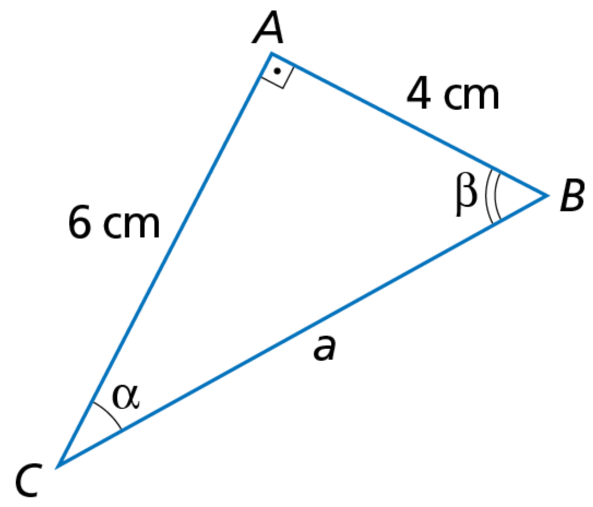
Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha) = \cos\beta = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \cos(90° - \beta) = \cos\alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

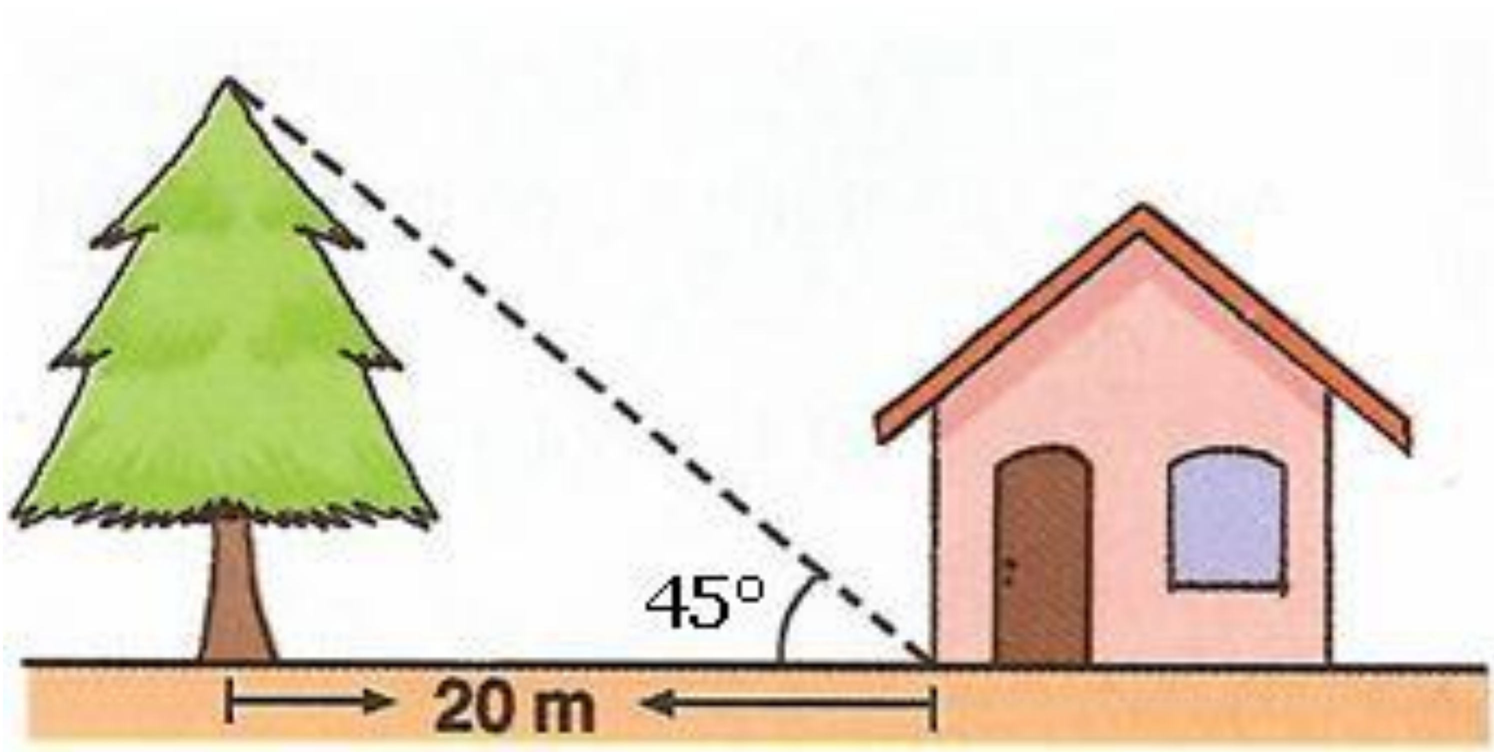
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$



Situação - problema

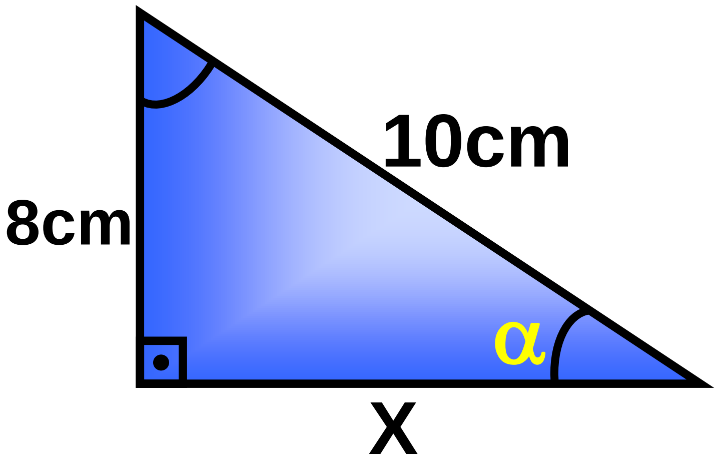
Se houvesse uma ventania e a árvore tombasse para o lado direito, em direção da casa, poderíamos afirmar que árvore atingiria a casa?



Situação - problema

No triângulo retângulo abaixo, qual é o valor do cosseno de α ?

Mas, como descobrir o valor de x ?



HIP ² = CAT ² + CAT ²

$$10^2 = 8^2 + x^2$$

$$100 = 64 + x^2$$

$$36 = x^2$$

$$x = 6$$

SOLUÇÃO:

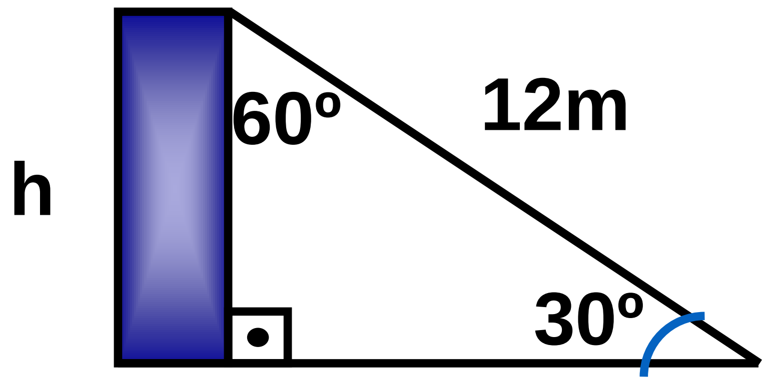
$$\cos\alpha = \frac{C.A.}{HIP} = \frac{x}{10} = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Situação - problema

Uma escada de 12m de comprimento esta apoiada em um prédio fazendo com este um ângulo de 60º. Qual é a altura do prédio?

SOLUÇÃO:

Inicialmente, façamos um esboço que represente a situação descrita.



Exercício resolvido

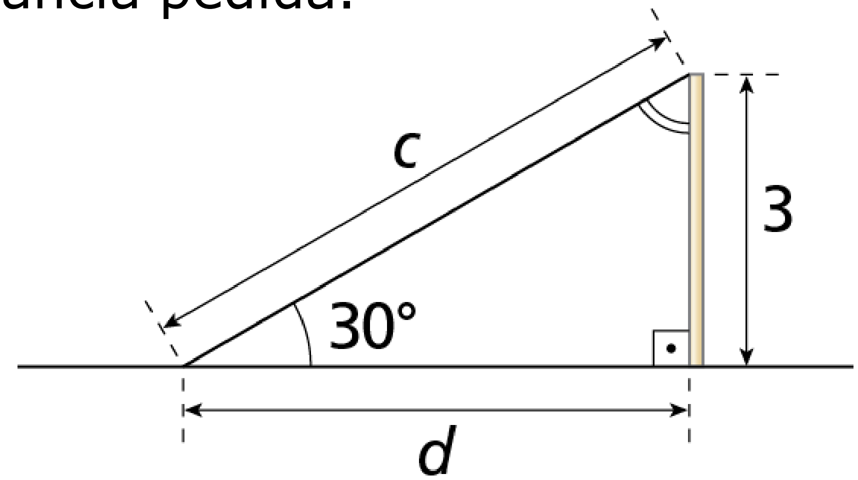
JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

R1. Na dança folclórica do trança-fitas, geralmente se usa um mastro de 3 m de altura. Para certa passagem da dança, é preciso formar um ângulo de 30° entre a fita esticada (com uma ponta na extremidade superior do mastro e a outra ponta no chão) e o piso horizontal. Sabendo que sen $30^\circ = 0{,}5$, determinar o comprimento da fita e a distância da ponta ao mastro.

R1.

Resolução

No esquema a seguir, *c* representa o comprimento da fita e *d*, a distância pedida.



Então:

$$\text{sen}\, 30° = 0{,}5 \Rightarrow \frac{3}{c} = 0{,}5 \Rightarrow c = \frac{3}{0{,}5} \Rightarrow c = 6$$

R1.

Resolução

Pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow d^2 = 27 \Rightarrow d = 3\sqrt{3} \Rightarrow d \simeq 5{,}2$$

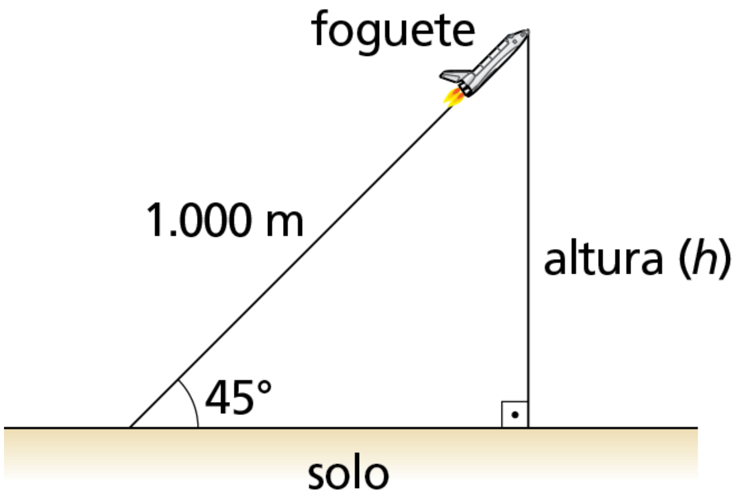
Portanto, a fita tem 6 metros de comprimento e a sua ponta fica a 5,2 metros do mastro, aproximadamente.

Aplicações das razões trigonométricas

Exemplos

a) Vamos imaginar que um foguete foi lançado formando com o solo um ângulo de 45º. Depois de percorrer 1.000 m em linha reta, a que altura o foguete estava do chão?

Para melhor visualizar a situação, é interessante fazer um esboço:



Aplicações das razões trigonométricas

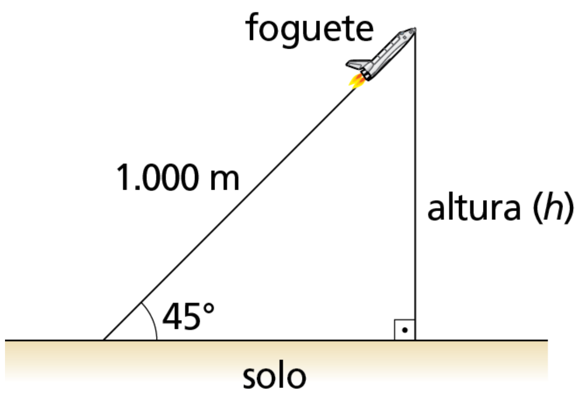
Exemplos

a) Neste caso, para calcular a altura (h) do foguete, usamos o seno de 45º:

$$\text{sen } 45° = \frac{h}{1.000}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{1.000}$$

$$h = 500\sqrt{2}$$

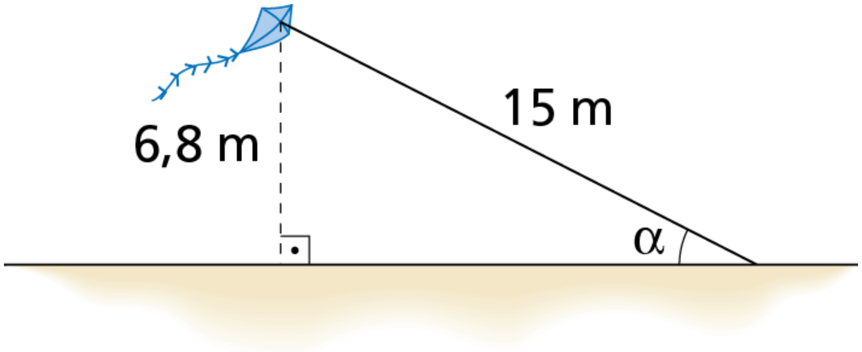


Considerando $\sqrt{2}$ = 1,41, obtemos: h = 705

O foguete estava a 705 m do chão.

Exercício resolvido

R6. Um fio de 15 m de comprimento, esticado, eleva uma pipa até a altura de 6,8 m. Qual é o ângulo formado entre o fio e o solo?



Resolução

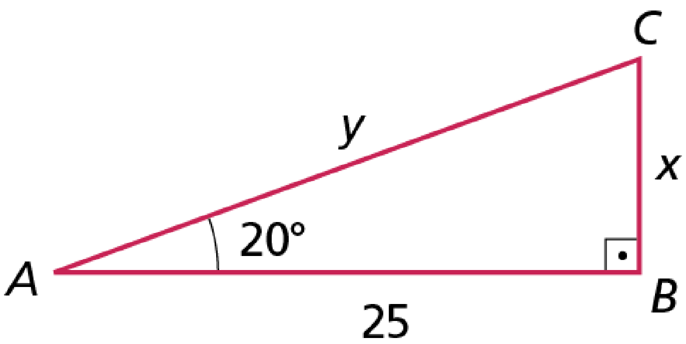
Vamos determinar o seno de α:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{6{,}8}{15} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha \simeq 0{,}4533$$

Consultando a tabela, temos $\alpha \simeq 27°$

Então, o fio forma um ângulo de aproximadamente 27º com o solo.

R8. No triângulo *ABC* abaixo, determinar as medidas *x* e *y*.



Resolução

De acordo com a figura e com a tabela de razões trigonométricas, temos:

$$\text{tg } 20° = \frac{x}{25} = 0{,}3640 = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 9{,}1$$

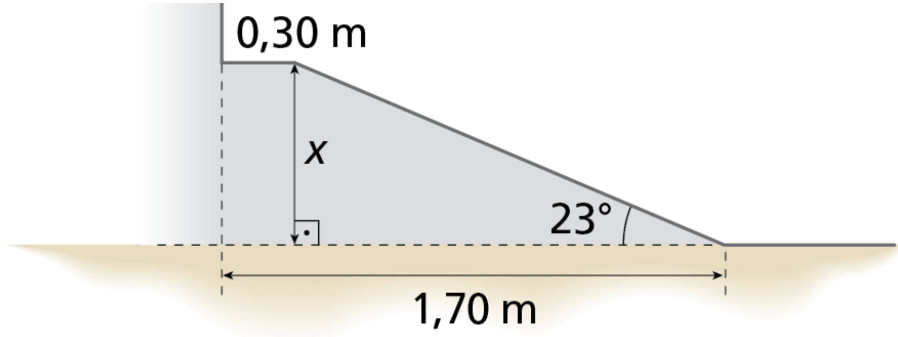
$$\cos 20° = \frac{25}{y} = 0{,}9397 = \frac{25}{y} \Rightarrow y \simeq 26{,}6$$

Exercício resolvido

R10. A construção de um tipo de rampa para *skatistas* obedece ao seguinte padrão: a inclinação é de 23º com o solo, o comprimento horizontal é 1,70 m e a plataforma superior tem 0,30 m. Qual é a altura dessa rampa?

Resolução

Vamos iniciar fazendo um esboço.



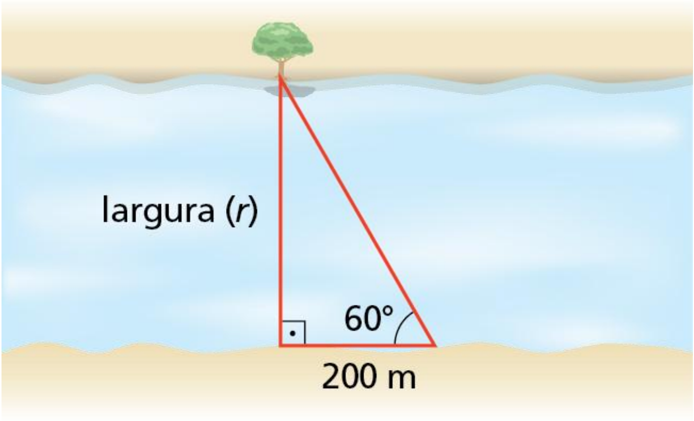
Daí segue que:

$$\text{tg}\, 23° = \frac{x}{1{,}40} \Rightarrow x = 1{,}40 \cdot 0{,}4245 \Rightarrow x \simeq 0{,}59$$

Logo, a rampa tem aproximadamente 0,59 m de altura.

Exercício resolvido

R11. Em certo ponto de uma das margens de um rio de margens paralelas, avista-se na outra margem, bem em frente, em linha reta, uma determinada árvore. Caminhando 200 m pela margem, avista-se essa mesma árvore sob um ângulo de 60º. Qual é a largura aproximada do rio?



Resolução

$$\text{tg}\,60° = \frac{r}{200} \Rightarrow 1{,}7321 = \frac{r}{200} \Rightarrow r \simeq 346$$

Seno e cosseno de ângulos obtusos

$$\text{sen } 90^{\circ} = 1$$

$$\cos 90^{\circ} = 0$$

$$\text{sen } x = \text{sen } (180^{\circ} - x)$$

$$\cos x = -\cos (180^{\circ} - x)$$

Lei dos senos

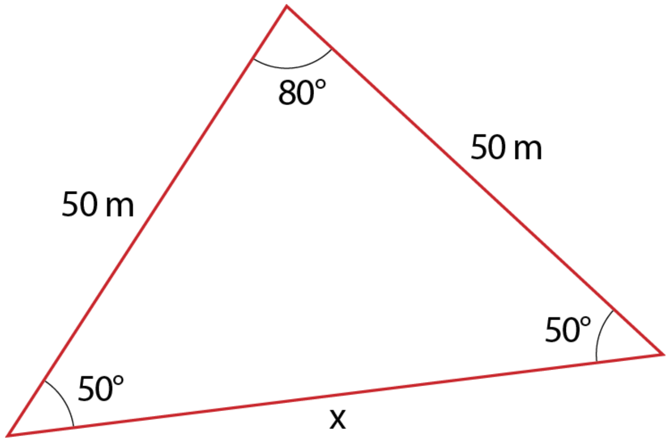
Em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, isto é:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Lei dos senos

Exemplos

b) Dois lados de um terreno triangular medem 50 m e formam entre si um ângulo de 80º. Sabendo que o proprietário pretende construir uma cerca ao redor do terreno, vamos calcular a metragem total da cerca. Observe a representação dessa situação na figura.



Como o triângulo é isósceles, os ângulos da base medem 50º.

Lei dos senos

Exemplos

b) Consultando a tabela de razões trigonométricas, temos:

sen 50º = 0,7660 e sen 80º = 0,9848

Agora vamos aplicar a lei dos senos: $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

$$\frac{x}{\text{sen } 80°} = \frac{50}{\text{sen } 50°} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot 0{,}9848}{0{,}7660} \simeq 64{,}3$$

Logo, para cercar todo o terreno, serão necessários, aproximadamente, 50 m + 50 m + 64,3 m = **164,3 m** de cerca.

Lei dos cossenos

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos duas vezes o produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo formado por esses lados, isto é:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

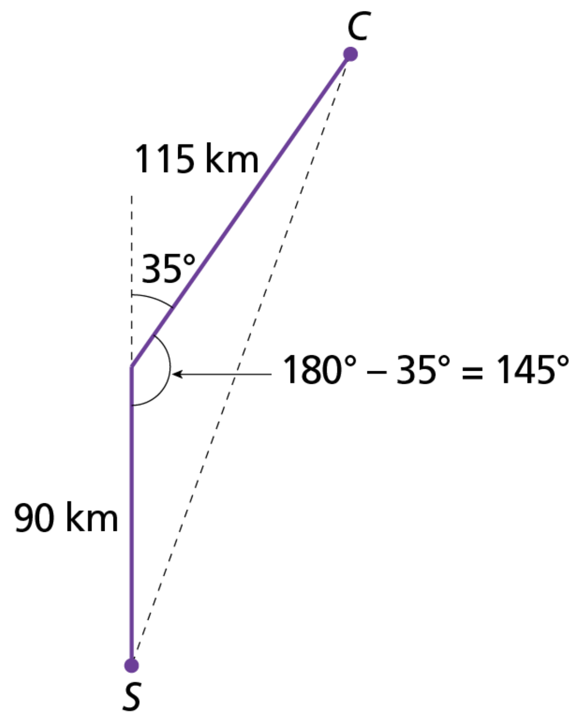
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Lei dos cossenos

Exemplos

a) Um avião percorreu 90 km em direção ao norte, mudou de direção por um ângulo de 35º, no sentido horário, e depois percorreu 115 km até aterrissar. calcular a distância entre os pontos de decolagem e de aterrissagem.



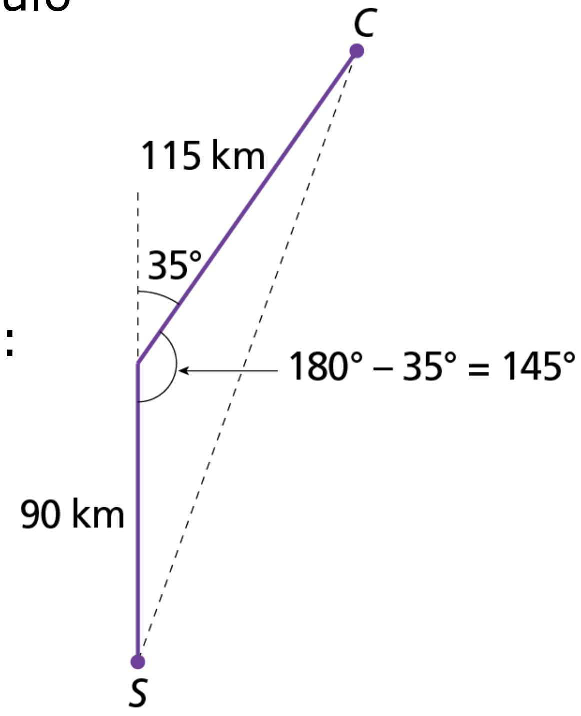
Resolução:

Vamos fazer um esquema para ilustrar a situação e calcular a distância entre os pontos de decolagem e de aterrissagem.

Lei dos cossenos

Exemplos

a) Aplicando o conceito de cosseno de um ângulo obtuso, temos:



$\cos 145^\circ = -\cos (180^\circ - 145^\circ) = -\cos 35^\circ$

Consultando a tabela trigonométrica, segue:

$-\cos 35^\circ = -0{,}8192$

Lei dos cossenos

Exemplos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

a) Agora vamos aplicar a lei dos cossenos:

$x^2 = 115^2 + 90^2 - 2 \cdot 115 \cdot 90 \cdot \cos 145°$

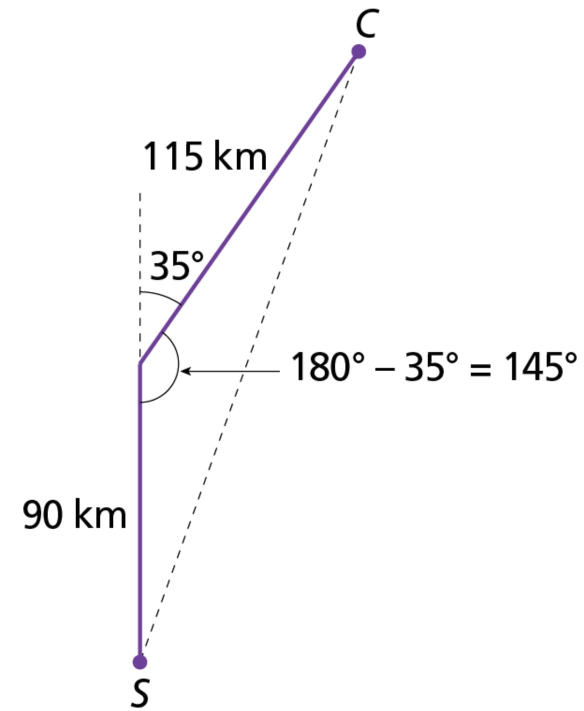
$x^2 = 13.225 + 8.100 - 2 \cdot 115 \cdot$

$\cdot\, 90 \cdot (-0{,}8192)$

$x^2 = 38.282{,}44$

$x = \sqrt{38.282{,}44}$

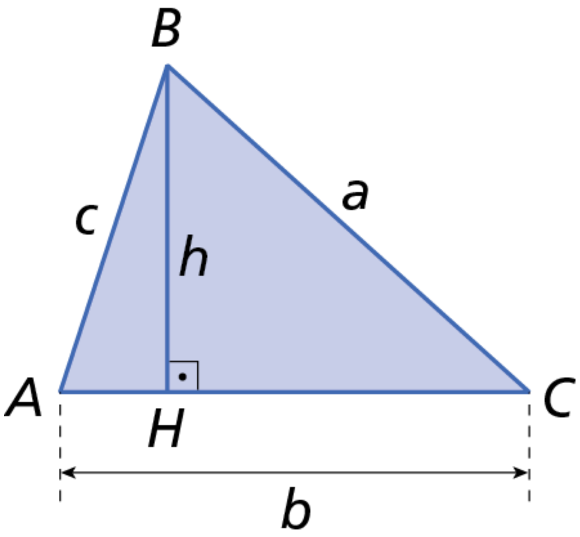
$x \simeq 195{,}66$ km



Assim, a distância entre os pontos de decolagem e de aterrissagem é, aproximadamente, **195,66** km.

Área de superfície triangular

No triângulo retângulo *AHB* da figura,



$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{c} \text{ ou } h = c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$$

Substituindo *h* na fórmula da área:

$$\text{área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2}$$

Do mesmo modo, podemos obter:

$$\text{área} = \frac{a \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2} \text{ e área} = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2}$$

Área de superfície triangular

Em uma superfície (ou região) triangular, a área é igual ao semiproduto das medidas de dois de seus lados pelo seno do ângulo determinado por eles, isto é:

área $= \dfrac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}}{2}$, área $= \dfrac{a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}{2}$ e área $= \dfrac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{2}$

Área de superfície triangular

Exemplo

Vamos calcular a área de uma superfície triangular (ou de um triângulo), sabendo que dois de seus lados medem 4 cm e 6 cm e o ângulo formado por eles mede 30º.

Temos: sen 30º = 0,5

Aplicando a fórmula da área:

$$\text{área} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \text{sen}\, 30°}{2} = 6$$

Então, a área do triângulo é 6 cm^2.


Obrigada pela atenção
e vamos à lista de
exercícios!!

ANOTAÇÕES EM AULA

Coordenação editorial: Juliane Matsubara Barroso

Edição de texto: Ana Paula Souza Nani, Adriano Rosa Lopes, Enrico Briese Casentini, Everton José Luciano, Juliana Ikeda, Marilu Maranho Tassetto, Willian Raphael Silva

Assistência editorial: Pedro Almeida do Amaral Cortez

Preparação de texto: Renato da Rocha Carlos

Coordenação de produção: Maria José Tanbellini

Iconografia: Daniela Chahin Barauna, Erika Freitas, Fernanda Siwiec, Monica de Souza e Yan Comunicação

Ilustração dos gráficos: Adilson Secco

EDITORA MODERNA

Diretoria de Tecnologia Educacional

Editora executiva: Kelly Mayumi Ishida

Coordenadora editorial: Ivonete Lucirio

Editores: Andre Jun, Felipe Jordani e Natália Coltri Fernandes

Assistentes editoriais: Ciça Japiassu Reis e Renata Michelin

Editor de arte: Fabio Ventura

Editor assistente de arte: Eduardo Bertolini

Assistentes de arte: Ana Maria Totaro, Camila Castro e Valdeí Prazeres

Revisores: Antonio Carlos Marques, Diego Rezende e Ramiro Morais Torres

EDITORA MODERNA
Rua Padre Adelino, 758 – Belenzinho
São Paulo – SP – Brasil – CEP: 03303-904
Vendas e atendimento: Tel. (0__11) 2602-5510
Fax (0__11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2012