46. A equação da reta, que tem coeficiente angular: $\frac{0-8}{4-0} = -2$, é $y - 0 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 8$

Do sistema $\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = 8x - 2x^2 \end{cases}$ tem-se $x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 4$ ou $x = 1$.

Os pontos de interseção são A(4, 0) e B(1, 6).

O ponto médio de $\overline{AB}$ é $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

O coeficiente de $\overline{AB}$ é $\frac{6-0}{1-4} = -2$ e o da reta perpendicular a ela é $\frac{1}{2}$.

A equação da mediatriz é:

$y - 3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow 2x - 4y + 7 = 0$

47. $\begin{cases} y = x + m & (1) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Substituindo-se (1) em (2), tem-se:

$5x^2 + (8m)x + (4m^2 - 4) = 0$

Para que haja interseção das curvas, a equação deve ter raízes reais, ou seja:

$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow m^2 - 5 \leqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{5} \leqslant m \leqslant \sqrt{5}$

48. $\begin{cases} y = mx + 2 & (1) \\ y^2 = 4x & (2) \end{cases}$

Substituindo-se (1) em (2), tem-se:

$m^2x^2 + 4(m - 1)x + 4 = 0$, que, para ter solução real, deve satisfazer $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow m \leqslant \frac{1}{2}$.

49. a) Temos:

- circunferência de equação: $x^2 + y^2 = 9$ (1)
- hipérbole com centro na origem, eixo real horizontal com $a = 2$; $2c = F_1F_2 = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5}$

  Daí: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5 = 4 + b^2 \Rightarrow b = 1$

  Equação: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ (2)

  De (1), temos: $x^2 = 9 - y^2$ (*)

  Em (2), obtemos: $\frac{9 - y^2}{4} - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

  Se $y = 1$, em (*), obtemos: $x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

  Temos: $A(2\sqrt{2}, 1)$ e $B(-2\sqrt{2}, 1)$

  Se $y = -1$, em (*), temos: $x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

  Temos: $D(2\sqrt{2}, -1)$ e $C(-2\sqrt{2}, -1)$

b) As assíntotas da hipérbole têm equação $y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}x$; **P** pertence à reta $y = \frac{1}{2}x$; se $x = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1$ (ordenada de **P**).

50. De $3x^2 - y + 1 = 0$, temos: $3x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y - 1}{3}$ (*).

Substituindo na equação da circunferência, temos:

$\frac{y-1}{3} + y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 11y + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1$ ou $y = \frac{8}{3}$

- Se $y = 1$, em (*), obtemos $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; $P_1(0, 1)$
- Se $y = \frac{8}{3}$, em (*), obtemos $x^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$;

  $P_2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $P_3\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

  Portanto, são 3 pontos de interseção.

Desafio

Como med(PÔA) = 45°, temos $x_P = y_P$; $P(x_P, x_P)$

Como **P** pertence à elipse, temos:

$\frac{x_P^2}{100} + \frac{x_P^2}{25} = 1 \Rightarrow 5x_P^2 = 100 \Rightarrow x_P^2 = 20 \xRightarrow{x_P > 0}$

$\xRightarrow{x_P > 0} x_P = 2\sqrt{5} \Rightarrow y_P = 2\sqrt{5}$

Daí $P(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$.

$d_{PO} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{20 + 20} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{PO} = 2\sqrt{10}$ milhões de quilômetros

Alternativa *b*.

CAPÍTULO 5 Estatística básica

Exercícios

1. a) $e = \frac{48}{150} = 0{,}32$; $f = \frac{20}{100} = 0{,}2$; $d = \frac{45}{150} = 0{,}30$;

$g = 1{,}0 - (0{,}30 + 0{,}32 + 0{,}2 + 0{,}16) = 0{,}02 \Rightarrow$

$\Rightarrow e + f + g = 0{,}32 + 0{,}2 + 0{,}02 = 0{,}54$

b) $j = 2\%$, $k = 16\% \Rightarrow 20\% + 2\% + 16\% =$
$= 38\%$; $0{,}38 \cdot 150 = 57$

c) $d = 0{,}30 \Rightarrow h = 30\%$ e $k = 16\% \Rightarrow h + k = 46\%$

d) $e = 0{,}32$; $0{,}32 \cdot 360° \simeq 115°$

2. a) $75\% \cdot 480 = \frac{3}{4} \cdot 480 = 360$; 360 aprovam; 120 reprovam.

b) $\frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$ e $360° - 90° = 270°$

c) Mulheres: $\begin{cases} 0{,}6 \cdot 360 = 216 \\ 0{,}45 \cdot 120 = 54 \end{cases}$; o total é 270.

Homens: $\begin{cases} \text{aprovam: } 360 - 216 = 144 \\ \text{reprovam: } 120 - 54 = 66 \end{cases}$; a diferença é 78.

3. a) 6 200 − 2 400 = 3 800; a diferença é 3 800 litros por segundo.

b) Por segundo: 6 200 litros

Por hora: $60 \cdot 60 \cdot 6200 = 22320000$ (22 320 000 litros)

Por dia: $24 \cdot 22320000 = 535680000 = 5{,}3568 \cdot 10^8$ ($5{,}3568 \cdot 10^8$ litros)

Em 30 dias: $30 \cdot 5{,}3568 \cdot 10^8 = 1{,}60704 \cdot 10^{10} = 16{,}0704 \cdot 10^9$ ($16{,}0704 \cdot 10^9$ litros); aproximadamente 16,1 bilhões de litros de água.

c) Gráfico de linhas, pois os valores da variável (volume de água economizado) variam no decorrer do tempo.

4. **a)** Falsa; $\frac{1}{3}$ de $33\,455 > 11\,000 > 9\,688$

b) Verdadeira;

São Paulo: $\frac{9\,688}{9\,134} \simeq 1,06$; 6% de aumento.

Paraná: $\frac{8\,288}{7\,620} \simeq 1,09$; 9% de aumento.

Santa Catarina: $\frac{3\,292}{2\,724} \simeq 1,2$; 20% de aumento.

Rio Grande do Sul: $\frac{3\,043}{2\,873} \simeq 1,06$; 6% de aumento.

Minas Gerais: $\frac{1\,627}{1\,522} \simeq 1,07$; 7% de aumento.

c) Falsa; o aumento aproximado é de 20%.

d) Verdadeira; total da região $= 8\,288 + 3\,292 + 3\,043 = 14\,623$. Como $8\,288 > \frac{14\,623}{2}$, a afirmação é verdadeira.

e) Falsa; $1\,522 - 1\,093 = 429$;
$1\,627 - 1\,522 = 105$
O acréscimo, por ano, não é constante. A taxa média de variação de 2012-2013 é maior que o quádruplo da taxa média no período 2013-2014.

5. **a)** $19,5\% \cdot 360° = 0,195 \cdot 360° = 70,2°$; o inteiro mais próximo é 70.

b) Devemos calcular 58,3% de 22 700 000:
$0,0583 \cdot 22\,700\,000 = 13\,234\,100$

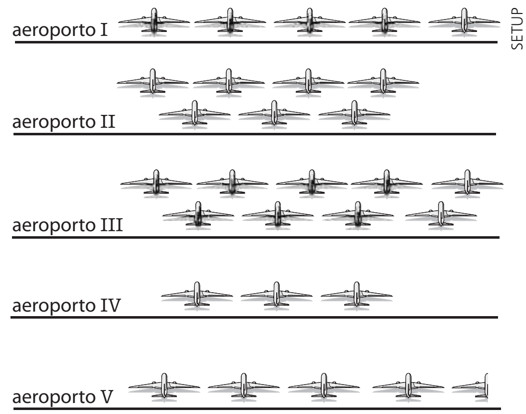
c) Devemos calcular 57% de 6,1%:
$0,57 \cdot 0,061 \simeq 0,035$; o percentual pedido é 3,5%.

d) Devemos calcular 6,1% de 22 700 000:
$0,061 \cdot 22\,700\,000 = 1\,384\,700$

e) Com carteira assinada: $0,43 \cdot 360° = 154,8°$
Sem carteira assinada: $0,57 \cdot 360° = 205,2°$
A diferença pedida é $205,2° - 154,8° = 50,4° = 50°\,24'$

6. **a)** Embora a resposta seja pessoal, é preciso ficar atento a alguns aspectos:

- Se cada avião representasse 500 operações, teríamos, para o aeroporto III, 27 aviões ($13\,500 \div 500 = 27$) para representar, o que não seria muito recomendado, por se tratar de uma "grande" quantidade de figuras.
- Se cada avião representasse 1 000 operações, teríamos, para o aeroporto V, 6,75 aviões ($6\,750 \div 1\,000 = 6,75$). Embora seja possível, seria necessário representar $\frac{3}{4}$ de um avião, o que poderia gerar algumas dúvidas para o leitor.
- Se cada avião representasse 1 500 operações, teríamos:
  I $\rightarrow 7\,500 \div 1\,500 = 5$ (5 aviões)
  II $\rightarrow 10\,500 \div 1\,500 = 7$ (7 aviões)
  III $\rightarrow 13\,500 \div 1\,500 = 9$ (9 aviões)
  IV $\rightarrow 4\,500 \div 1\,500 = 3$ (3 aviões)
  V $\rightarrow 6\,750 \div 1\,500 = 4,5$ (4,5 aviões)
  Tal "escala" parece indicada para fazer o pictograma.



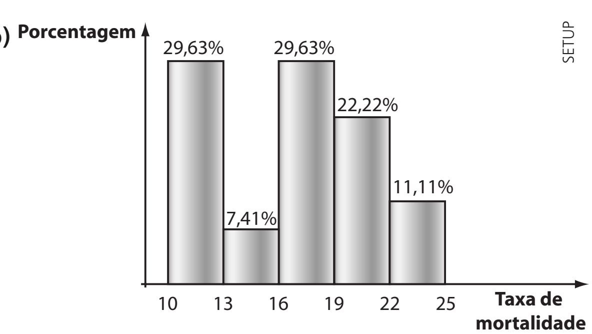
b)
- O número total de operações dos cinco aeroportos reunidos é:
  $7\,500 + 10\,500 + 13\,500 + 4\,500 + 6\,750 = 42\,750$
- O percentual do aeroporto II é $\frac{10\,500}{42\,750} \simeq 0,2456$ e a medida do ângulo pedido é aproximadamente $0,2456 \cdot 360° = 88,5°$.

7. Na tabela foram feitos arredondamentos de até 4 casas decimais.

a)

Taxa de mortalidade infantil	Frequência absoluta	Frequência relativa
10 ⊢ 13	8	0,2963 = 29,63%
13 ⊢ 16	2	0,0741 = 7,41%
16 ⊢ 19	8	0,2963 = 29,63%
19 ⊢ 22	6	0,2222 = 22,22%
22 ⊢ 25	3	0,1111 = 11,11%
Total	27	1,000 = 100%

b)



8. **a)** Região **P**: $4,5 \cdot 1\,500\,000 = 6\,750\,000$
Região **Q**: $7 \cdot 1\,500\,000 = 10\,500\,000$

b) A densidade de **P** é $\frac{6\,750\,000}{135\,000} = 50$
(50 habitantes por km^2).

9. **a)** Muito insatisfeito: $0,08 \cdot 360° = 28,8° = 28°\,48'$
Insatisfeito: $0,32 \cdot 360° = 115,2° = 115°\,12'$
Satisfeito: $0,35 \cdot 360° = 126°$
Muito satisfeito: $0,25 \cdot 360° = 90°$

b) $0{,}35 \cdot 1800 = 630$

c) Consumidores insatisfeitos: $0{,}32 \cdot 1800 = 576$

$\frac{5}{12} \cdot 576 = 240$

$\frac{240}{1800} = \frac{2}{15}$; $\frac{2}{15}$ de 360° é igual a 48°; o acréscimo seria de 48°.

10. 2013

- Valor salarial para a categoria Ensino Superior: $12{,}5\% \cdot 400\,000 = 0{,}125 \cdot 400\,000 = 50\,000$; como havia 10 funcionários, o salário-base, em reais, dessa categoria era $\frac{50\,000}{10} = 5\,000$.
- Valor salarial para a categoria Ensino Médio: $75\% \cdot 400\,000 = 0{,}75 \cdot 400\,000 = 300\,000$; como havia 150 funcionários, o salário-base, em reais, dessa categoria era $\frac{300\,000}{150} = 2\,000$.
- Valor salarial para a categoria Ensino Fundamental: como $400\,000 - 50\,000 - 300\,000 = 50\,000$ e, como havia 50 funcionários nessa categoria, o salário-base, em reais, era $\frac{50\,000}{50} = 1\,000$.

2014

Vamos calcular os valores, em reais, da nova folha de pagamento:

- Ensino Superior: $5\,000 \cdot 20 = 100\,000$
- Ensino Médio: $2\,000 \cdot 180 = 360\,000$
- Ensino Fundamental: $1\,000 \cdot 70 = 70\,000$

Temos: $100\,000 + 360\,000 + 70\,000 = 530\,000$

Como os custos permanecem constantes, o faturamento da empresa deverá aumentar em 130 000 reais ($530\,000 - 400\,000 = 130\,000$).

Alternativa *b*.

11. Seja **x** o número de consumidores entrevistados.

a) Como $\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$, segue que $\frac{1}{3}$ de **x** possui celular com plano pós-pago e o percentual pedido é $33{,}\overline{3}\%$.

b)
- Número de consumidores com plano pré-pago: $\frac{2x}{3}$
- Como $360° - 288° = 72°$ e $\frac{72°}{360°} = \frac{1}{5}$, o número de consumidores que possuem plano pré-pago e não acessam a internet é $\frac{1}{5} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2x}{15}$. Como $\frac{2}{15} = 0{,}1333...$, segue que o percentual pedido é $13{,}\overline{3}\%$.

12. a) $\frac{23 + 20 + 22 + 21 + 28 + 20}{6} = \frac{134}{6} = 22{,}33...$

b) $\frac{2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 9}{10} = \frac{84}{10} = 8{,}4$

c) $\frac{4 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2}{6} = \frac{0{,}8}{6} = 0{,}133...$

d) $\frac{4 + 2 \cdot 4{,}5 + 3 \cdot 5 + 5{,}5 + 6{,}5}{8} = \frac{40}{8} = 5$

e) 3

13. $\frac{36 \cdot 270 + (54 - 36) \cdot 360}{54} = \frac{36 \cdot 270 + 18 \cdot 360}{54} =$

$= \frac{9\,720 + 6\,480}{54} = \frac{16\,200}{54} = 300$ (300 reais)

14. $\frac{a + 8 + 2a + 9 + (a + 1)}{5} = 6{,}8 \Rightarrow 18 + 4a = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 4$

15. $\frac{2{,}8 \cdot 20 + 2{,}6 \cdot 30}{20 + 30} = \frac{56 + 78}{50} = 2{,}68$ (2,68 kg)

16. Média = 12

$\frac{\Sigma \text{ números}}{20} = 12 \Rightarrow \Sigma \text{ números} = 240$

a) $\frac{240 + 33}{21} = \frac{273}{21} = 13$

b) $\frac{240 - 50}{19} = \frac{190}{19} = 10$

c) $\frac{240 + 63 - 51}{20} = \frac{252}{20} = 12{,}6$

17. a) Mulheres, pois a média geral (1 475,20) está mais próxima da média feminina (1 408) do que da masculina (1 632,00).

b)
- Número de homens: **n**

  Média: 1 632

  $\frac{\Sigma \text{ salários (h)}}{n} = 1\,632{,}00 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \Sigma \text{ salários (h)} = 1\,632 \cdot n$ 1

- Número de mulheres: $n + 32$

  Média: 1 408,00

  $\frac{\Sigma \text{ salários (m)}}{n + 32} = 1\,408 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \Sigma \text{ salários (m)} = 1\,408n + 45\,056$ 2

- Geral: média: 1 475,20

  $\Rightarrow \frac{\Sigma \text{ salários (h)} + \Sigma \text{ salários (m)}}{n + (n + 32)} = 1\,475{,}20$

Usando 1 e 2, temos:

$\frac{1\,632 \cdot n + 1\,408 \cdot n + 45\,056}{2n + 32} = 1\,475{,}20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\,040n + 45\,056 = 2\,950{,}40 + 47\,206{,}40 \Rightarrow$

$\Rightarrow 89{,}6n = 2\,150{,}40 \Rightarrow n = 24$

Assim, temos: 24 homens e 56 mulheres.

18. a) $30 + 18 + 7 + 3 + 2 = 60$

b) $\bar{x} = \frac{0 \cdot 30 + 1 \cdot 18 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{60} =$

$= \frac{49}{60} = 0{,}81666... \simeq 0{,}82$

c) Como $\frac{18}{60} = 0{,}3$, a medida do ângulo é $0{,}3 \cdot 360° = 108°$

19. Σ notas dos aprovados $= 80 \cdot 74{,}5 = 5\,960$

Σ notas menores $= 40 \cdot 67 = 2\,680$

Σ notas maiores $= 5\,960 - 2\,680 = 3\,280$

Média (maiores) $= \frac{3280}{40} = 82$

20. Originalmente: $5{,}5 = \frac{\Sigma \text{ notas}}{40} \Rightarrow \Sigma \text{ notas} = 220$. Com a correção feita, a nova média será:

$\dfrac{\Sigma \text{ notas} - 6{,}5 - 3{,}5 + 9{,}5 + 5{,}5}{40} = \dfrac{220 - 10 + 15}{40} =$

$= 5{,}625$

O acréscimo pedido é $5{,}625 - 5{,}5 = 0{,}125$

21. a) $\dfrac{7{,}5 \cdot 4 + 9{,}0 \cdot 3 + 9{,}5 \cdot 2}{4 + 3 + 2} = \dfrac{30 + 27 + 19}{9} = \dfrac{76}{9} \simeq$

$\simeq 8{,}44 < 8{,}5$; reprovado.

b) $\dfrac{8{,}3 \cdot 4 + 7{,}5 \cdot 2 + n \cdot 3}{9} \geqslant 8{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 33{,}2 + 15 + 3n \geqslant 76{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3n \geqslant 28{,}3 \Rightarrow n \geqslant 9{,}433...$

O candidato precisa tirar, no mínimo, 9,5.

22. a) $1 \cdot 2\,800 + 5 \cdot 1\,050 + 2 \cdot 1\,300 + 1 \cdot 1\,000 +$

$+ 3 \cdot 1\,200 = 15\,250$ (15 250 reais)

b) A média é $\dfrac{15\,250}{12} \simeq 1\,270{,}83$ (1 270,83 reais)

c) Seja **s** o salário de cada um dos seguranças.

Devemos ter:

$\dfrac{15\,250 + 2 \cdot s}{14} \leqslant 1\,300 \Rightarrow 2s + 15\,250 \leqslant 18\,200 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2s \leqslant 2\,950 \Rightarrow s \leqslant 1\,475$

O salário máximo que pode ser oferecido é R$ 1 475,00.

23. a) $(16\% + 12\% + 10\%) \cdot 400 = 0{,}38 \cdot 400 = 152$

b) $\bar{x} = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}32 + 3 \cdot 0{,}16 +$
$+ 4 \cdot 0{,}12 + 5 \cdot 0{,}10$

$\bar{x} = 0 + 0{,}2 + 0{,}64 + 0{,}48 + 0{,}48 + 0{,}50 = 2{,}3$ (2,3 filhos)

24. a) Turma **A**: $6{,}2 = \dfrac{\Sigma\,(A)}{30} \Rightarrow \Sigma\,(A) = 186$

Turma **B**: $7{,}2 = \dfrac{\Sigma\,(B)}{35} \Rightarrow \Sigma\,(B) = 252$

Turma **C**: $5{,}4 = \dfrac{\Sigma\,(C)}{55} \Rightarrow \Sigma\,(C) = 297$

A média pedida é: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma\,(A) + \Sigma\,(B) + \Sigma\,(C)}{30 + 35 + 55} =$

$= \dfrac{186 + 252 + 297}{120} = \dfrac{735}{120} = 6{,}125$

b) Seja **n** o número pedido.

Devemos ter para a turma **D**: $5{,}0 = \dfrac{\Sigma\,(D)}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma\,(D) = 5 \cdot n$

Reunindo as 4 turmas, temos:

$\bar{x} \leqslant 5{,}8 \Rightarrow \dfrac{735 + 5 \cdot n}{120 + n} \leqslant 5{,}8$

Como $n > 0$, podemos multiplicar os dois membros por $120 + n$, mantendo o sinal da desigualdade:

$735 + 5n \leqslant (120 + n) \cdot 5{,}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 735 + 5n \leqslant 696 + 5{,}8n \Rightarrow 39 \leqslant 0{,}8n \Rightarrow$

$\Rightarrow 48{,}75 \leqslant n$, isto é, $n \geqslant 48{,}75$

O menor inteiro que satisfaz é $n = 49$.

25. a) $\bar{x} = 2 \cdot 0{,}30 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}20 + 5 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}10 =$

$= 0{,}6 + 0{,}75 + 0{,}8 + 0{,}75 + 0{,}60 = 3{,}5$

3,5 salários mínimos **(V)**

b) $\Sigma \text{ salários} = \underset{\underset{0{,}3 \cdot 40}{\downarrow}}{12} \cdot 2 + \underset{\underset{0{,}25 \cdot 40}{\downarrow}}{10} \cdot 3 + \underset{\underset{0{,}2 \cdot 40}{\downarrow}}{8} \cdot 4 + \underset{\underset{0{,}15 \cdot 40}{\downarrow}}{6} \cdot 5 + \underset{\underset{0{,}1 \cdot 40}{\downarrow}}{4} \cdot 6 =$

$= 24 + 30 + 32 + 30 + 24 = 140$ (140 salários mínimos)

$140 \cdot$ R$ 788,00 = R$ 110 320,00 **(V)**

c) Média em salários mínimos: 3,5

Média em reais: $3{,}5 \cdot 788 = 2\,758$

Σ salários $= 110\,320$ reais

Σ' salários $= (110\,320 + 100 \cdot 40)$ reais $= 114\,320$ reais

Nova média $= \dfrac{114\,320}{40} = 2\,858 > 2\,800$ **(V)**

d) Nova média $= 0{,}55 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}15 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 6 =$
$= 1{,}65 + 0{,}8 + 0{,}75 + 0{,}6 = 3{,}8$ (3,8 salários mínimos)

$3{,}8 \cdot$ R$ 788,00 = R$ 2 994,40 **(F)**

26. Titulares: $2{,}04 = \dfrac{\Sigma \text{ alturas (t)}}{5} \Rightarrow \Sigma \text{ alturas (t)} = 10{,}2$ m

Reservas: $2{,}01 = \dfrac{\Sigma \text{ alturas (r)}}{7} \Rightarrow \Sigma \text{ alturas (r)} = 14{,}07$ m

Sejam **H** e **h** as alturas, respectivas, do jogador que se contundiu e do jogador que o substituiu.

- 2 cm = 0,02 m e 1,5 cm = 0,015 m;
- Σ' alturas (t) $= 10{,}2 - H + h$

  Nova média (t) $= 2{,}04 + 0{,}02 = 2{,}06 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2{,}06 = \dfrac{10{,}2 - H + h}{5} \Rightarrow 10{,}3 = 10{,}2 - H + h \Rightarrow$

  $\Rightarrow H - h = -0{,}1$ $*$
- Σ' alturas (r) $= 14{,}07 - h$

  Nova média (r) $= 2{,}01 - 0{,}015 = 1{,}995 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 1{,}995 = \dfrac{14{,}07 - h}{6} \Rightarrow$

  $\Rightarrow h = 14{,}07 - 11{,}97 = 2{,}10 \overset{*}{\Rightarrow} H = 2{,}10 - 0{,}10 = 2$

a) 2 m **b)** 2,10 m

27. a) O número mínimo pedido corresponde ao caso em que todos os novos questionários são preenchidos com a nota máxima 5.

Seja **n** esse número.

$\Rightarrow 1^{\underline{o}}$ mês: $\bar{x} = 3{,}9 \Rightarrow \dfrac{\Sigma \text{ notas } (1^{\underline{o}})}{2\,000} = 3{,}9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma \text{ notas } (1^{\underline{o}}) = 7\,800$

Novos questionários: $\Sigma \text{ notas } (2^{\underline{o}}) = 5 \cdot n$

Devemos ter:

$4{,}6 = \dfrac{7\,800 + 5 \cdot n}{2\,000 + n} \Rightarrow 5n + 7\,800 = 9\,200 + 4{,}6n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}4n = 1\,400 \Rightarrow n = 3\,500$

b) Considerando que a nota máxima é 5, para que a média fosse igual a 5 todos os questionários deveriam ser preenchidos com nota 5. Logo, não é possível.

28. $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{50}}{50} = 120 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{50} x_i = 6\,000$ $*$

$\dfrac{(x_1 + 1) + (x_2 + 2) + (x_3 + 3) + ... + (x_{50} + 50)}{50} =$

$= \dfrac{(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{50}) + \overbrace{(1 + 2 + 3 + ... + 50)}^{\text{P.A.}}}{50} =$

$= \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{50} x_i\right) + \dfrac{(1 + 50) \cdot 50}{2}}{50} \overset{*}{=} \dfrac{6\,000 + 1\,275}{50} = 145{,}5$

29. a) $\overline{M} = \dfrac{29}{9} = 3{,}222...$; Me = 3 (5º valor); Mo = 4.

b) $\overline{M} = \dfrac{106}{6} = 17{,}666...$; $Me = \dfrac{18 + 18}{2} = 18$; Mo = 18.

c) $\overline{M} = \dfrac{15}{5} = 3$; Me = 3; Mo = não há.

d) $\overline{M} = \dfrac{108}{8} = 13{,}5$; $Me = \dfrac{13 + 15}{2} = 14$; Mo = 15.

e) $\overline{M} = \dfrac{437}{10} = 43{,}7$; $Me = \dfrac{43 + 44}{2} = 43{,}5$;

há duas modas: 43 e 44.

30. $Me = \dfrac{5º\text{ tempo} + 6º\text{ tempo}}{2} = \dfrac{x + 16}{2} = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 16 = 30 \Rightarrow x = 14$

$\overline{M} = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 5 + 8 + 9 + 14 + 16 + 18 + y + 23 + 26 = 140 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 20$

31. a) $(0{,}42 + 0{,}37) \cdot 3\,000 = 2\,370$ (2 370 entrevistados)

b)
- $\overline{x} = 1 \cdot 0{,}42 + 2 \cdot 0{,}37 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}05 =$ $= 0{,}42 + 0{,}74 + 0{,}48 + 0{,}2 = 1{,}84$ (1,84 banheiro)
- Mo = 1 banheiro (maior porcentagem registrada)
- Como são 3 000 valores, devemos determinar a média entre o 1 500º valor e o 1 501º valor, quando estes estão ordenados.

  Observe que:

  $0{,}42 \cdot 3\,000 = 1\,260$; do 1º valor ao 1 260º valor, todas as respostas são iguais a 1;

  $0{,}37 \cdot 3\,000 = 1\,110$; do 1261º valor até o 2 370º valor, encontramos respostas iguais a 2.

  Assim, tanto o 1 500º valor quanto o 1 501º valor são iguais a 2 $\Rightarrow Me = \dfrac{2 + 2}{2} = 2$.

32. a)
- $\overline{x} = \dfrac{17\,420 + 2\,346 + 785 + ... + 100{,}9}{10} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \overline{x} = \dfrac{24\,704{,}3}{10} = 2\,470{,}43$ (2 470,43 bilhões de dólares)
- $Me = \dfrac{5º\text{ valor} + 6º\text{ valor}}{2} = \dfrac{537{,}7 + 381{,}3}{2} =$

  $= \dfrac{919}{2} = 459{,}5$ (459,5 bilhões de dólares)

A média foi "afetada" por um valor discrepante, que é o PIB dos Estados Unidos (observe que o PIB americano é, aproximadamente, 7,5 vezes o PIB do Brasil, 2º na lista).

b) Eliminando do cálculo o PIB americano, teríamos:

$\overline{x} = \dfrac{24\,704{,}3 - 17\,420}{9} = \dfrac{7\,284{,}3}{9} \simeq 809{,}4$ (809,4 bilhões)

Observe que, incluindo os Estados Unidos, a média é $\dfrac{2\,470{,}43}{459{,}5} \simeq 5{,}4$ vezes o valor da mediana; excluindo os Estados Unidos, a média é $\dfrac{809{,}4}{459{,}5} \simeq 1{,}8$ vez o valor da mediana.

33. a) Ordenemos os valores dos bônus:

$\underset{1º}{300} - 300 - ... - \underset{8º}{300} - \underset{9º}{600} - ...$

$- \underset{22º}{600} - \underset{23º}{1000} - 1000 - ... - \underset{40º}{1000}$

Como n = 40 (par), temos que a mediana é a média entre o 20º e o 21º valores da relação acima, a saber $\dfrac{600 + 600}{2} = 600$.

b) Com n = 50 valores, a mediana é calculada fazendo-se a média entre o 25º valor e o 26º valor.

Para que a mediana resulte R$ 800,00 (média entre 600 e 1000), é preciso que o 25º valor seja R$ 600,00 e o 26º valor seja R$ 1000,00.

Como o 22º valor da relação do item *a* é 600, devemos acrescentar exatamente 3 valores iguais a 600. Teríamos:

$... \underset{22º}{600} - \underbrace{\underset{23º}{600} - \underset{24º}{600} - \underset{25º}{600}} - \underset{26º}{1000} ... \underset{50º}{1000}$

Assim, dos 10 funcionários restantes, 3 devem receber bônus de R$ 600,00 e 7 devem receber bônus de R$ 1 000,00.

34. a) $\overline{x} = \dfrac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 1}{8 + 4 + 11 + 1} = \dfrac{29}{24} = 1{,}208\overline{3} \simeq$

$\simeq 1{,}21$ (1,21 imóvel)

Como há 24 valores, a mediana é a média entre o 12º e o 13º valor, quando eles estão ordenados:

$\underset{1º}{0} - 0 - ... - \underset{8º}{0} - \underset{9º}{1} - 1 - 1 - \underset{12º}{1} - \underset{13º}{2} - 2 - ... - \underset{23º}{2} - \underset{24º}{3}$

$Me = \dfrac{1 + 2}{2} = 1{,}5$ (1,5 imóvel)

Mo = 2 (onze valores iguais a 2)

b) A nova distribuição de valores seria:

$\underset{1º}{0} - 0 - ... - \underset{13º}{0} - \underset{14º}{1} - ... - \underset{17º}{1} - \underset{18º}{2} - ... - \underset{28º}{2} - \underset{29º}{3}$

Como temos 29 valores, a mediana é o 15º valor da relação acima, isto é, Me = 1.

35. a)
- $\overline{x} = \dfrac{42{,}7 + 44{,}5 + ... + 43{,}7}{10} = \dfrac{439{,}80}{10} =$

  $= 43{,}98$ (43,98 °C)
- Colocando os valores em ordem crescente:

  $42{,}7 - 42{,}7 - 43 - 43 - \boxed{43{,}7 - 44{,}1} - 44{,}5 -$ $- 45 - 45{,}4 - 45{,}7$

  $Me = \dfrac{43{,}7 + 44{,}1}{2} = \dfrac{87{,}8}{2} = 43{,}9$ (43,9 °C)
- Há duas modas: 42,7 °C e 43 °C.

b) Seja **t** a temperatura pedida, devemos ter:

$\dfrac{439{,}8 + t}{11} = 43{,}98 + 0{,}12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 439{,}8 + t = 11 \cdot 44{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 45{,}3$ °C

36. a)
- $\overline{x} = \dfrac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3}{18} =$

  $= \dfrac{64}{18} = 3{,}555...$

- Mediana:

  Como $\frac{18}{2} = 9$, devemos calcular a média entre o 9º e 10º valores, quando todos se encontram ordenados. Temos:

  1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6

  $Me = \frac{3 + 3}{2} = 3$

- Moda: 3 (a frequência absoluta é 5)

b) Como 25 é ímpar, a mediana de uma relação com 25 valores corresponde ao 13º valor da relação ordenada.

- Como o lançamento do dado só resulta número inteiro, não é possível que a mediana seja 3,5.
- Até o 21º lançamento, temos os seguintes valores ordenados:

  1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6

  Para que a mediana seja 5, o 13º valor da relação ordenada deve ser 5. Como já há 14 valores menores que 5 nos 21 primeiros lançamentos, não é possível que o 13º valor da relação ordenada seja igual a 5.

c) Sim.

Veja algumas possibilidades para os 4 últimos lançamentos:

- 4 − 5 − 5 e 6 (em qualquer ordem); nesse caso, teríamos:
- 1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6 − 6

  Me = 4
- 4 − 5 − 6 e 6, em qualquer ordem

  1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6 − 6 − 6

  Me = 4
- 1 − 2 − 4 − 4, em qualquer ordem

  1 − 1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6

  Me = 4
- 2 − 3 − 4 − 5, em qualquer ordem

  1 − 1 − 1 − 2 − 2 − 2 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 3 − 4 − 4 − 4 − 4 − 4 − 5 − 5 − 5 − 5 − 5 − 6 − 6 − 6

  Me = 4

37. a) $\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6}{6} = 4$

$\sigma^2 = \frac{2 \cdot (3 - 4)^2 + 3 \cdot (4 - 4)^2 + (6 - 4)^2}{6} = \frac{2 + 4}{6} = 1 \Rightarrow \sigma = 1$

Amplitude: 6 − 3 = 3

b) $\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = 2$

$\sigma^2 = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \simeq 1{,}41$

Amplitude: 5 − 1 = 4

c) $\bar{x} = \frac{133}{7} = 19;$

$\sigma^2 = \frac{(-4)^2 + 3^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + (-5)^2}{7} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{72}{7} \simeq 10{,}286 \Rightarrow \sigma \simeq 3{,}21$

Amplitude: 23 − 14 = 9

d) Todos os valores são iguais a 31 $\Rightarrow \bar{x} = 31 \Rightarrow \sigma^2 = 0 \Rightarrow \sigma = 0$

Amplitude: 0

e) $\bar{x} = \frac{70}{10} = 7$

$\sigma^2 = \frac{(5-7)^2 + 2 \cdot (6-7)^2 + 3 \cdot (7 - 7)^2 + 4 \cdot (8-7)^2}{10}$

$\sigma^2 = \frac{4 + 2 + 4}{10} = 1 \Rightarrow \sigma = 1$

Amplitude: 8 − 5 = 3

38. a) $\bar{x} = \frac{3 \cdot 16 + 18 + 2 \cdot 20 + 24 + 28 + 3 \cdot 30 + 40}{12} = \frac{288}{12} = 24$ (24 reais)

$\sigma^2 = \frac{3 \cdot (16 - 24)^2 + (18 - 24)^2 + 2 \cdot (20 - 24)^2 + (28 - 24)^2 + 3 \cdot (24 - 30)^2 + (40 - 24)^2}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{192 + 36 + 32 + 16 + 108 + 256}{12} = \frac{640}{12} = 53{,}\overline{3} \Rightarrow \sigma^2 = 53{,}\overline{3}$ (reais)^2

b) $\sigma = \sqrt{53{,}3} \simeq 7{,}30$ (Aproximadamente 7,30 reais)

c) Amplitude: R\$ 40,00 − R\$ 16,00 = R\$ 24,00

39. a) $\bar{x} = \dfrac{(0 \cdot 28 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4)}{40} = 0{,}4$ (0,4 erro/página)

Como há 40 valores, a mediana é a média entre o 20º e o 21º valores, quando eles estão ordenados, isto é, $\dfrac{0 + 0}{2} = 0$. (Note que do 1º ao 28º da relação ordenada todos os valores são zero.)

A moda é 0, pois esse valor possui maior frequência absoluta.

b) $\sigma^2 = \dfrac{(0-0{,}4)^2 \cdot 28 + (1-0{,}4)^2 \cdot 8 + (2-0{,}4)^2 \cdot 4}{40} = \dfrac{4{,}48 + 2{,}88 + 10{,}24}{40} = \dfrac{17{,}6}{40} = 0{,}44$ e

$\sigma = \sqrt{0{,}44} \simeq 0{,}66$ (0,66 erro/página)

40. a) Amplitude da turma **A**: $7 - 3 = 4$
Amplitude da turma **B**: $6 - 4 = 2$
Amplitude da turma **C**: $9 - 1 = 8$
Amplitude da turma **D**: $8 - 2 = 6$
A ordem seria: **B** − **A** − **D** − **C**

b) Turma **C**: $\bar{x} = \dfrac{9 + 1 + 6 + 5 + 4}{5} = 5$

$\sigma_C^2 = \dfrac{4^2 + (-4)^2 + 1^2 + 0 + (-1)^2}{5} = \dfrac{34}{5} = 6{,}8 \Rightarrow \sigma_C \simeq 2{,}61$

Turma **D**: $\bar{x} = \dfrac{7 + 8 + 5 + 2 + 3}{5} = \dfrac{25}{5} = 5$

$\sigma_D^2 = \dfrac{(7-5)^2 + (8-5)^2 + 0^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2}{5} = \dfrac{4 + 9 + 9 + 4}{5} = \dfrac{26}{5} \Rightarrow \sigma_D = 5{,}2 \Rightarrow \sigma_D \simeq 2{,}28$

Como $\sigma_D \simeq 2{,}28 < \sigma_C \simeq 2{,}61$, concluímos que a turma **D** é mais regular.

c) Turma **A**: $\bar{x} = \dfrac{25}{5} = 5$

$\sigma_A^2 = \dfrac{(-2)^2 + 0 + 2^2 + 0 + 0}{5} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6 \Rightarrow \sigma_A \simeq 1{,}26$

Turma **B**: $\bar{x} = \dfrac{25}{5} = 5$

$\sigma_B^2 = \dfrac{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0}{5} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \sigma_B \simeq 0{,}89$

Como $\sigma_B \simeq 0{,}89 < \sigma_A \simeq 1{,}26$, concluímos que a turma **B** é mais regular.

41. Região Sudeste:

$\bar{x} = \dfrac{21{,}6}{4} = 5{,}4$

$\sigma^2 = \dfrac{2 \cdot (3{,}7 - 5{,}4)^2 + (7{,}6 - 5{,}4)^2 + (6{,}6 - 5{,}4)^2}{4} \Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{5{,}78 + 4{,}84 + 1{,}44}{4} = \dfrac{12{,}06}{4} = 3{,}015 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3{,}015} \simeq 1{,}74$

Região Centro-Oeste:

$\bar{x} = \dfrac{25{,}3}{4} = 6{,}325$

$\sigma^2 = \dfrac{(6{,}325 - 3{,}2)^2 + (6{,}325 - 7{,}1)^2 + (6{,}325 - 7{,}8)^2 + (6{,}325 - 7{,}2)^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{9{,}765625 + 0{,}600625 + 2{,}175625 + 0{,}765625}{4} \Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{13{,}3075}{4} = 3{,}326875 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3{,}326875} \simeq 1{,}82$

O conjunto de valores mais homogêneo é o da Região Sudeste, pois o desvio padrão (Sudeste) é 1,74, e este é menor que o desvio padrão (Centro-Oeste), que é 1,82.

42. Pedro: $\bar{x} = \dfrac{7 + 4{,}5 + 5{,}5 + 5 + 3}{5} = 5$

$\sigma^2 = \dfrac{2^2 + (-0{,}5)^2 + 0{,}5^2 + 0^2 + (-2)^2}{5} = \dfrac{8{,}5}{5} = 1{,}7$

Paulo: $\bar{x} = \dfrac{5 + 5{,}5 + 3 + 4 + 7{,}5}{5} = \dfrac{25}{5} = 5$

$\sigma^2 = \dfrac{0^2 + 0{,}5^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2{,}5^2}{5} = \dfrac{11{,}5}{5} = 2{,}3$

Como σ^2 (Pedro) $< \sigma^2$ (Paulo), Pedro obteve desempenho mais homogêneo.

43. **a)** $\bar{x} = \dfrac{1\,200 \cdot 10 + 1\,440 \cdot 6 + 2\,400 \cdot 4}{20} = \dfrac{30\,240}{20} = 1\,512$; a média salarial é R$ 1 512,00.

$$\sigma^2 = \frac{10 \cdot (1\,512 - 1\,200)^2 + 6 \cdot (1\,512 - 1\,440)^2 + 4 \cdot (1\,512 - 2\,400)^2}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{973\,440 + 31\,104 + 3\,154\,176}{20} = 207\,936 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{207\,936} = 456$; o desvio padrão é R$ 456,00.

b) O salário médio irá diminuir, pois os salários dos novos funcionários são inferiores ao salário médio dos 20 funcionários antigos.

44. $\bar{x} = \dfrac{8{,}7 + 8{,}5 + \ldots + 8{,}7}{12} = \dfrac{104{,}4}{12} = 8{,}7$

$$\sigma^2 = \frac{0^2 + (-0{,}2)^2 + 0{,}5^2 + 0{,}1^2 + 0{,}2^2 + (-0{,}1)^2}{12} + \frac{0 + (-0{,}1)^2 + (-0{,}3)^2 + 0 + (-0{,}1)^2 + 0}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{2 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}01 + 0{,}09}{12} = \frac{0{,}46}{12} = 0{,}038\overline{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma \simeq 0{,}196$

$[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma] = [8{,}7 - 0{,}196; 8{,}7 + 0{,}196] = [8{,}504; 8{,}896]$

Os valores que **não** pertencem a esse intervalo são 8,5; 9,2; 8,9 e 8,4. Logo, temos 4 alunos.

45. Vamos calcular as médias dos cinco candidatos nos quatro “quesitos”.

Candidato **A**: $\bar{x} = \dfrac{27{,}5}{4} = 6{,}875$

Candidato **B**: $\bar{x} = \dfrac{26{,}5}{4} = 6{,}625$

Candidato **C**: $\bar{x} = \dfrac{23{,}5}{4} = 5{,}875$

Candidato **D**: $\bar{x} = \dfrac{25}{4} = 6{,}25$

Candidato **E**: $\bar{x} = \dfrac{27{,}5}{4} = 6{,}875$

- Pelo 1º critério, os candidatos **A**, **B** e **E** continuam na disputa.
- Pelo 2º critério, **B** e **E** continuam na disputa (**A** foi eliminado, pois obteve 6 na dinâmica; **B** e **E** obtiveram, cada um, 7,5).
- Média das provas de **B**: $\dfrac{7 + 5 + 7}{3} = 6{,}\overline{3}$

$$\sigma_B^2 = \frac{(7 - 6{,}\overline{3})^2 \cdot 2 + (5 - 6{,}\overline{3})^2}{3} \simeq \frac{0{,}889 + 1{,}777}{3} \simeq 0{,}89$$

- Média das provas de **E**: $\dfrac{7{,}5 + 4{,}0 + 8{,}5}{3} = 6{,}\overline{6}$

$$\sigma_E^2 = \frac{(7{,}5 - 6{,}\overline{6})^2 + (4 - 6{,}\overline{6})^2 + (8{,}5 - 6{,}\overline{6})^2}{3} \simeq \frac{0{,}694 + 7{,}111 + 3{,}361}{3} \Rightarrow \sigma_E^2 \simeq 3{,}72$$

Pelo 3º critério, o candidato escolhido é **B**.

46. 1º semestre:

$$\bar{x} = \frac{12 + 8 + 7}{3} = 9$$

$$\sigma^2 = \frac{(12 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (7 - 9)^2}{3} = \frac{9 + 1 + 4}{3} = \frac{14}{3}$$

2º semestre:

Seja **p** o percentual pedido.

$$\bar{x} = \frac{9 + 4 + p}{3} = \frac{13 + p}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(9 - \frac{13 + p}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{13 + p}{3}\right)^2 + \left(p - \frac{13 + p}{3}\right)^2}{3} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\left(\frac{14 - p}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1 - p}{3}\right)^2 + \left(\frac{2p - 13}{3}\right)^2}{3}$$

Como os desvios padrão devem ser iguais, as variâncias também devem ser iguais:

$$\frac{14}{3} = \frac{\left(\frac{14 - p}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1 - p}{3}\right)^2 + \left(\frac{2p - 13}{3}\right)^2}{3} \Rightarrow 14 = \frac{196 - 28p + p^2 + 1 + 2p + p^2 + 4p^2 - 52p + 169}{9} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 126 = 366 + 6p^2 - 78p \Rightarrow p^2 - 13p + 40 = 0 \Rightarrow p = 5$ ou $p = 8$

Como **p** deve ser menor que 7%, devemos ter p = 5%.

47. **a)** $\bar{x} = \dfrac{2 + 4 + 6}{3} = 4$

$DM = \dfrac{|2 - 4| + |4 - 4| + |6 - 4|}{3} = \dfrac{2 + 0 + 2}{3} = \dfrac{4}{3}$

b) $\bar{x} = \dfrac{2 + 3 + 5 + 4 + 2 \cdot 8}{6}$

$\bar{x} = \dfrac{30}{6} = 5$

$DM = \dfrac{|-3| + |-2| + |0| + |-1| + 2 \cdot |3|}{6} = \dfrac{3 + 2 + 1 + 6}{6} = 2$

c) $\bar{x} = \dfrac{20 + 25 + 15 + 35 + 30}{5} = \dfrac{125}{5} = 25$

$DM = \dfrac{|-5| + |0| + |-10| + |10| + |5|}{5} = \dfrac{30}{5} = 6$

48. Região **A**: $\bar{x} = \dfrac{7 + 4{,}5 + 5{,}5 + 5{,}0 + 3{,}0}{5} = 5$

$DM = \dfrac{|7 - 5| + |4{,}5 - 5| + |5{,}5 - 5| + |5 - 5| + |3 - 5|}{5} = \dfrac{2 + 0{,}5 + 0{,}5 + 2}{5} = 1{,}0$

Região **B**: $\bar{x} = \dfrac{5 + 8{,}5 + 3{,}0 + 1{,}0 + 7{,}5}{5} = 5$

$DM = \dfrac{|5 - 5| + |8{,}5 - 5| + |3 - 5| + |1 - 5| + |7{,}5 - 5|}{5} = \dfrac{0 + 3{,}5 + 2 + 4 + 2{,}5}{5} = 2{,}4$

Os valores de **A** formam um conjunto mais homogêneo que os de **B**.

49. $\bar{x} = \dfrac{200 \cdot 8 + 450 \cdot 12 + 800 \cdot 5 + 1\,500 \cdot 3 + 2\,500 \cdot 2}{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{1\,600 + 5\,400 + 4\,000 + 4\,500 + 5\,000}{30} = \dfrac{20\,500}{30} = 683{,}3$

Arredondando para o inteiro mais próximo, obtemos 683 reais.

$DM = \dfrac{8 \cdot |-483| + 12 \cdot |-233| + 5 \cdot |117| + 3 \cdot |817| + 2 \cdot |1\,817|}{30}$

$DM = \dfrac{3864 + 2796 + 585 + 2451 + 3634}{30} = \dfrac{13\,330}{30} \simeq 444{,}33$. Arredondando para o inteiro mais próximo, obtemos R$ 444,00.

50. **a)** $50 + 85 + 40 + 25 + 20 = 220$

b) $\bar{x} = \dfrac{50 \cdot 400 + 85 \cdot 600 + 40 \cdot 800 + 25 \cdot 1\,000 + 20 \cdot 1\,200}{(50 + 85 + 40 + 25 + 20)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{20\,000 + 51\,000 + 32\,000 + 25\,000 + 24\,000}{220} = \dfrac{152\,000}{220} \simeq 690{,}90$

c) De 500 a 700 reais.

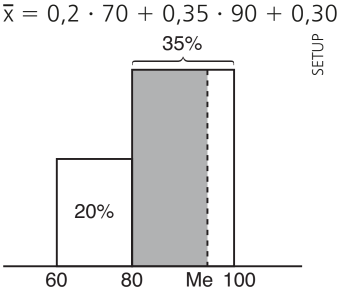
d) $p = \dfrac{40 + 25 + 20}{220} = \dfrac{85}{220} = 0{,}3864$

Aproximadamente 38,64%.

51. **a)** $(20\% + 35\% + 30\%) \cdot 200 = 0{,}85 \cdot 200 = 170$

b) $\bar{x} = 0{,}2 \cdot 70 + 0{,}35 \cdot 90 + 0{,}30 \cdot 110 + 0{,}15 \cdot 130 = 14 + 31{,}50 + 33 + 19{,}5 = 98 \Rightarrow \bar{x} = 98$ kg

c)



$\dfrac{Me - 80}{30\%} = \dfrac{100 - 80}{35\%} \Rightarrow Me \simeq 97{,}1$ kg

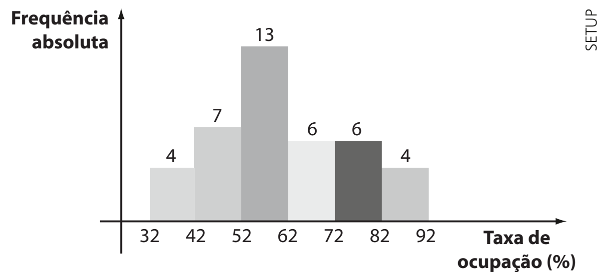
d) $\sigma^2 = 0{,}2 \cdot (70 - 98)^2 + 0{,}35 \cdot (90 - 98)^2 + 0{,}3 \cdot (110 - 98)^2 + 0{,}15 \cdot (130 - 98)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 = 156{,}8 + 22{,}4 + 43{,}2 + 153{,}6 \Rightarrow \sigma^2 = 376 \Rightarrow \sigma = \sqrt{376} \simeq 19{,}4 \Rightarrow \sigma = 19{,}4$ kg

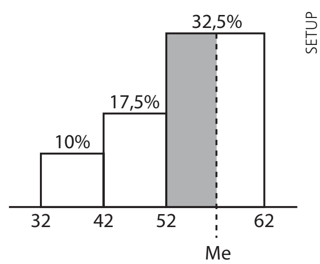
52. **a)** $5 \cdot 1250 + 16 \cdot 1083 + 27 \cdot 762 + 38 \cdot 541 + 49 \cdot 509 + 60 \cdot 321 =$
$= 6250 + 17328 + 20574 + 20558 + 24941 + 19260 = 108911{,}00$ (108 911,00 reais)

b) $15 \cdot 1250 + 26 \cdot 1083 + 37 \cdot 762 + 48 \cdot 541 + 59 \cdot 509 + 70 \cdot 321 =$
$= 18750 + 28158 + 28194 + 25968 + 30031 + 22470 = 153571{,}00$ (153 571,00 reais)

53. **a)**



b) • Taxa mediana:
A mediana encontra-se na 3ª faixa do histograma do item anterior, pois a frequência absoluta acumulada nas três primeiras faixas é $4 + 7 + 13 = 24 > 20$.



$$\frac{Me - 52}{22{,}5\%} = \frac{62 - 52}{32{,}5\%} \Rightarrow Me = 58{,}92\%$$

A classe modal é o intervalo: $[52, 62[= 52 \vdash 62$

• Média:

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 37 + 7 \cdot 47 + 13 \cdot 57 + 6 \cdot 67 + 6 \cdot 77 + 4 \cdot 87}{40} \Rightarrow \bar{x} = \frac{148 + 329 + 741 + 402 + 462 + 348}{40} \Rightarrow$$

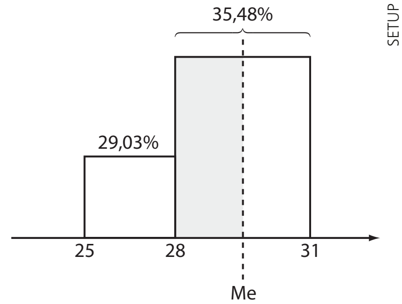
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2430}{40} = 60{,}75\%$$

c) $$\sigma^2 = \frac{4 \cdot (37 - 60{,}75)^2 + 7 \cdot (47 - 60{,}75)^2 + 13 \cdot (57 - 60{,}75)^2 + 6 \cdot (67 - 60{,}75)^2 + 6 \cdot (77 - 60{,}75)^2 + 4 \cdot (87 - 60{,}75)^2}{40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \simeq 208{,}44 \Rightarrow \sigma = 14{,}44\%$$

54. **a)** $$\bar{x} = \frac{26{,}5 \cdot 9 + 29{,}5 \cdot 11 + 32{,}5 \cdot 7 + 35{,}5 \cdot 4}{9 + 11 + 7 + 4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{238{,}5 + 324{,}5 + 227{,}5 + 142}{31} = \frac{932{,}5}{31} = 30{,}08 \Rightarrow \bar{x} = 30{,}08\ ^\circ C$$

• Mediana:
A mediana encontra-se no 2º intervalo, pois a porcentagem acumulada nos dois primeiros intervalos é:
$$\frac{9}{31} + \frac{11}{31} \simeq 0{,}2903 + 0{,}3548 = 0{,}6451 = 64{,}51\%$$



$$\frac{Me - 28}{(50\% - 29{,}03\%)} = \frac{31 - 28}{35{,}48\%} \Rightarrow \frac{Me - 28}{20{,}97\%} = \frac{3}{35{,}48\%} \Rightarrow Me \simeq 29{,}77\ ^\circ C$$

Classe modal: $28\ ^\circ C \vdash 31\ ^\circ C$

b) $\sigma^2 = \dfrac{9 \cdot (26{,}5 - 30{,}08)^2 + 11 \cdot (29{,}5 - 30{,}08)^2 + 7 \cdot (32{,}5 - 30{,}08)^2 + 4 \cdot (35{,}5 - 30{,}08)^2}{31} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 \simeq \dfrac{115{,}35 + 3{,}7 + 40{,}99 + 117{,}51}{31} = \dfrac{277{,}55}{31} \Rightarrow \sigma^2 \simeq 8{,}95\ (°C)^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{8{,}95\ (°C)^2} \Rightarrow \sigma \simeq 2{,}99\ °C$

55. a) Total da amostra: 11 + 18 + 22 + 13 + 8 + 5 + 2 + 1 = 80

Entre meia hora e uma hora e meia: 18 + 22 = 40

O percentual pedido é: $\dfrac{40}{80} = 50\%$

b) $\bar{x} = \dfrac{15 \cdot 11 + 45 \cdot 18 + 75 \cdot 22 + 105 \cdot 13 + 135 \cdot 8 + 165 \cdot 5 + 195 \cdot 2 + 225 \cdot 1}{11 + 18 + 22 + 13 + 8 + 5 + 2 + 1}$

$\bar{x} = \dfrac{6\,510}{80} \Rightarrow \bar{x} = 81{,}375$ minutos.

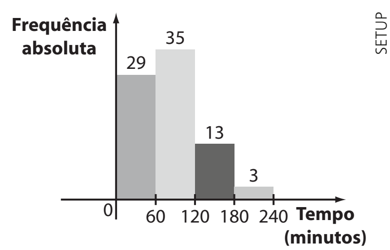
A média é aproximadamente 81,4 minutos.

- Até a 2ª classe, concentram-se 36,25% dos dados $\left(\dfrac{11 + 18}{80} = 36{,}25\%\right)$ e até a 3ª classe concentram-se 63,75% das observações $\left(\dfrac{11 + 18 + 22}{80} = 63{,}75\%\right)$.

Logo, a mediana encontra-se no intervalo $60 \vdash 90$. Temos:

$\dfrac{Me - 60}{(50 - 36{,}25)\%} = \dfrac{90 - 60}{27{,}5\%} \Rightarrow Me = 75$ minutos

c)



$\bar{x} = \dfrac{30 \cdot 29 + 90 \cdot 35 + 150 \cdot 13 + 210 \cdot 3}{80} = 82{,}50 \Rightarrow \bar{x} = 82{,}50$ minutos

- Até o primeiro intervalo concentram-se 36,25% dos dados $\left(\dfrac{29}{80} = 36{,}25\%\right)$; os dois primeiros intervalos concentram 80% dos dados $\left(\dfrac{29 + 35}{80} = 80\%\right)$.

Assim, a mediana se encontra no segundo intervalo.

Temos:

$\dfrac{Me - 60}{(50 - 36{,}25)\%} = \dfrac{120 - 60}{43{,}75\%} \Rightarrow$

$\Rightarrow Me = 78{,}9$ minutos

$\sigma^2 = \dfrac{(82{,}5 - 30)^2 \cdot 29 + (82{,}5 - 90)^2 \cdot 35 + (82{,}5 - 150)^2 \cdot 13 + (210 - 82{,}5)^2 \cdot 3}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{189\,900}{80} = 2\,373{,}75 \Rightarrow \sigma \simeq 48{,}7$ minutos

Desafio

a) Calculemos a nova média $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + 2) + (x_2 + 2) + \ldots + (x_n + 2)}{n} = \underbrace{\boxed{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}}_{\text{média original}} + \frac{\overbrace{2 + 2 + \ldots + 2}^{\textbf{n}\text{ parcelas}}}{n},$$

isto é, $\bar{x}' = \bar{x} + \dfrac{n \cdot 2}{n} \Rightarrow \bar{x}' = \bar{x} + 2$ (a média aumenta em duas unidades)

Calculemos a nova variância $(\sigma')^2$:

$(\sigma')^2 = \dfrac{[x_1 + 2 - (\bar{x} + 2)]^2 + [x_2 + 2 - (\bar{x} + 2)]^2 + \ldots + [x_n + 2 - (\bar{x} + 2)]^2}{n}$

$(\sigma')^2 = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \sigma^2$; a variância não se altera.

Consequentemente, o desvio padrão também não se altera.

b) A nova média é:

$$\overline{x}' = \frac{2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n}{n} = \boxed{\frac{2(x_1 + 2x_2 + \ldots + x_n)}{n}}_{\text{média original}} =$$

$= 2\overline{x}$; a média fica multiplicada por 2.

A nova variância é:

$$(\sigma')^2 = \frac{(2x_1 - 2\overline{x})^2 + (2x_2 - 2\overline{x})^2 + \ldots + (2x_n - 2\overline{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{2^2\left[(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2\right]}{n} =$$

$$= 4 \cdot \underbrace{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}_{\sigma^2}$$

Assim; $(\sigma')^2 = 4 \cdot \sigma^2$, isto é, a variância fica multiplicada por 4. Como o desvio padrão (σ) é a raiz quadrada de variância, temos $\sigma' = \sqrt{4 \cdot \sigma^2} = 2 \cdot \sigma$, ou seja, o desvio padrão fica multiplicado por 2.

c) A nova média é:

$$\overline{x}' = \frac{0{,}8x_1 + 0{,}8x_2 + \ldots + 0{,}8x_n}{n} =$$

$$= 0{,}8 \cdot \left[\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n}\right] = 0{,}8 \cdot \overline{x}$$

Assim, a média é reduzida em 20% (pois $\overline{x}' = 0{,}8\,\overline{x}$; isso significa que a média sofreu uma redução de 20%).

A nova variância é:

$$\sigma'^2 =$$

$$= \frac{(0{,}8x_1 - 0{,}8\overline{x})^2 + (0{,}8x_2 - 0{,}8\overline{x})^2 + \ldots + (0{,}8x_n - 0{,}8\overline{x})^2}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2 =$$

$$= \frac{0{,}8^2 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + 0{,}8^2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + 0{,}8^2 \cdot (x_n - \overline{x})^2}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = 0{,}64 \cdot \left[\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = 0{,}64 \cdot \sigma^2$$

Isso significa que a variância sofreu uma redução de 36%.

Como $\sigma' = \sqrt{\sigma'^2} = \sqrt{0{,}64\,\sigma^2} = 0{,}8\sigma$, podemos dizer que o desvio padrão é reduzido em 20%.

CAPÍTULO 6

Matemática Financeira

Exercícios

1. $0{,}15 \cdot 68 = 10{,}20$
$68 - 10{,}20 = 57{,}80$ (57,80 reais)

2. **a)** $40 \cdot 1{,}12 = 44{,}80$ (44,80 reais)
b) $150 \cdot 1{,}12 = 168{,}00$ (168,00 reais)

3. **a)** $\frac{40}{320} = 0{,}125 = 12{,}5\%$ (12,5% de aumento)
b) $1{,}35 \cdot 320 = 432$ (432 reais)

4. **a)** O desconto, por diária, é de R$ 40,00; percentualmente temos um desconto de:

$$\frac{40}{250} = 0{,}16 = 16\%$$

b)
- Preço de 7 diárias: $7 \cdot 210 = 1\,470$ (1 470 reais)
- $1{,}5\% \cdot 1\,470 = 22{,}05$ (22,05 reais)
- Valor total a ser pago, em reais:
  $1\,470 + 22{,}05 + 15{,}00 = 1\,507{,}05$

5. Observe o que deve ser "digitado" na calculadora:

a) 1 , 2 8 − 7 , 8 % = 1,18016
b) 1 4 8 0 + 1 1 , 3 % = 1647,24
c) 2 8 5 0 − 1 7 , 5 % = 2351,25

6. Produto **A**: $\frac{0{,}10}{0{,}40} = \frac{1}{4} = 25\%$

Produto **B**: $\frac{0{,}30}{1{,}50} = \frac{1}{5} = 20\%$

Produto **C**: $\frac{0{,}15}{0{,}60} = \frac{1}{4} = 25\%$

Assim, B < A = C

7. **a)** $\begin{cases} 124\% \text{ — } 4\,340 \\ 100\% \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x = 3\,500$ (3 500 reais)

b)
- Antes do aumento, o imposto era de $0{,}16 \cdot 3\,500 = 560$ (560 reais)
- Depois do aumento, o imposto passará a ser de $0{,}16 \cdot 4\,340 = 694{,}40$ (694,40 reais)

Raul pagará, a mais, 134,40 reais
$(694{,}40 - 560{,}00 = 134{,}40)$

8. **a)** $\begin{cases} \text{R\$ } 150{,}00 \text{ — } 12\% \\ x \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 1\,250$ (1 250 reais)

b) $1\,250 - 150 = 1\,100$ (1 100 reais)

9. **a)** $\begin{cases} 1\,075 \text{ m}^3 \text{ — } 86\% \\ x \text{ — } 100\% \end{cases} \Rightarrow x = 1\,250 \text{ m}^3$

b) A redução deverá ser de 75 m³; percentualmente, temos:

$\begin{cases} 1\,075 \text{ m}^3 \text{ — } 100\% \\ 75 \text{ m}^3 \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x \simeq 6{,}98\%$

10. **a)** $p + 0{,}38p = 1{,}38p$
b) $p + 0{,}105p = 1{,}105p$
c) $p - 0{,}03p = 0{,}97p$
d) $p - 0{,}124p = 0{,}876p$
e) $p + 0{,}1p = 1{,}1p$;
$1{,}1p + 0{,}2 \cdot 1{,}1p = 1{,}32p$
f) $p - 0{,}2p = 0{,}8p$;
$0{,}8p - 0{,}15 \cdot 0{,}8p = 0{,}68p$
g) $p + 0{,}3p = 1{,}3p$;
$1{,}3p - 0{,}2 \cdot 1{,}3p = 1{,}04p$
h) $p + 0{,}1p = 1{,}1p$;
$1{,}1p + 0{,}1 \cdot 1{,}1p = 1{,}21p$;
$1{,}21p + 0{,}1 \cdot 1{,}21p = 1{,}331p$