Algoritmos de otimização em problemas de processamento de sinais digitais: Design de filtros

Pedro Marcondes
Departamento de Ciência da Computação, Universidade de São Paulo, Brasil
pedro2.marcondes@usp.br
Orientadores: Marcelo Gomes de Queiroz

Resumo

Processamento de sinais digitais é uma tecnologia muito presente em diversas áreas diferentes, como: comunicação, música, radares, medicina, entre outras. Uma tarefa muito comum no processamento de sinais digitais é o design de filtros seletores de frequência que possuam propriedades desejas. Neste trabalho exploramos filtros que utilizam de algum método de otimização no cálculo dos coeficientes do mesmo para que a sua resposta se aproxime à uma resposta resposta em frequência desejada.

Introdução

Em processamento de sinais digitais, filtros digitais são sistemas que realizam operações matemáticas em um sinal discreto com o intuito de atenuar ou realçar certos aspectos do sinal. Os dois usos mais comuns de filtros são a separação de sinais que foram combinados e restauração de sinais que foram distorcidos.

Existem dois tipos básicos de filtros: filtros *IIR* (com resposta ao impulso de duração infinita ou recursivos) ou filtros *FIR* (com resposta ao impulso de duração finita ou não recursivos). Filtros com resposta ao pulso infinita são filtros em que a resposta ao impulso não se torna zero a partir de determinado ponto e são indicados para quando for importante uma resposta bem seletiva no domínio da frequência ou quando for necessário realizar a conversão das especificações de um filtro analógico, diferentemente de filtros com resposta ao pulso finita, porém filtros não recursivos possuem estabilidade garantida e resposta de fase linear.

Design de filtros usando métodos de otimização

Um filtro ideal só é possível se estamos trabalhando com um sinal gravado porém é impossível de ser realizado em outras situações sem termos um sinal que se estende infinitamente no tempo, pois o filtro necessitaria um atraso infinito ou conhecimento do futuro e passado para realizar a convolução.

Métodos de otimização são uma alternativa ao problema para abordar a solução do problema de aproximação em filtros digitais. Nesse caso, uma função de transferência é assumida e uma função de erro formulada com base na resposta de amplitude e/ou de fase.

Diferentemente das formas fechadas de filtros, filtros desenhados usando métodos de otimização geralmente envolvem uma quantidade maior de computação. Porém filtros desenhados com esses algoritmos possuem resposta de amplitude e fase arbitrárias, além de frequentemente produzirem designs superiores.

O design de filtros digitais pode ser divido em três partes:

1. especificar a resposta desejada do filtro;
2. uma função objetiva que é dependente da diferença entre a resposta em magnitude atual e a desejada do filtro;
3. a minimização da função objetiva em relação aos coeficientes da função de transferência (usualmente expressada como a seguir).

$$H(Z) = \sum_{j=0}^{M} \frac{b^j \; z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i \; z^{-i}}$$

Resposta desejada do filtro

Na figura temos um exemplo de um filtro passa-baixas real onde podemos observar o comportamento dos 3 parâmetros que definem seu comportamento: frequência de corte, largura da faixa de transição e a variação máxima da banda passante.

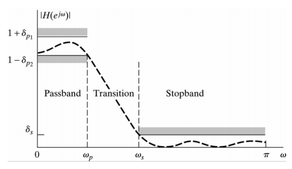

Figura 1: Exemplo de um filtro passa-baixas

Coeficientes da função objetiva

Com um comportamento esperado definido precisamos da ordem do filtro, ou seja, a ordem da equação diferencial que descreve o filtro.

Com uma função de transferência definida podemos calcular a resposta de amplitude do filtro e obter o erro entre a resposta desejada e a atual que obtivemos. Quanto mais próximo de 0 o erro estiver, melhor será comportamento do filtro real em relação ao ideal.

Minimização da diferença

Agora nosso objetivo passa a ser minimizar esse erro com respeito aos coeficientes da função de transferência, caracterizando um problema de otimização onde podemos usar diferentes abordagens.

Algoritmos

Para realização deste trabalho escolhemos 4 algoritmos para usar: método dos mínimos quadrados, quasi-Newton (BFGS), algoritmo de Remez e colônia artificial de abelhas.

Esses algoritmos foram selecionamos por possuírem abordagens diferentes e aplicações em diversas outras áreas. Todos os testes foram realizados com filtros passa-baixas de ordem 8, frequência de corte 7500hz, faixa de transição de 500hz e máxima variação da banda passante 0.5db.

Método dos mínimos quadrados

Método dos mínimos quadrados é um método matemático que busca encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. No caso do filtro *FIR* desenhado esse método é aplicado para minimizar a norma L_2 com peso:

$$\varepsilon_2 = \int_0^{\pi} W(\omega)(A(\omega) - D(\omega))^2 \, \mathrm{d}\omega$$

onde A(ω) é resposta em amplitude D(ω) é a resposta desejada e W(ω) é uma função de peso não negativa.

Quasi-Newton (BFGS)

Em cálculo, o método de Newton é um algoritmo iterativo para achar raízes de uma função diferenciável. Já na otimização o método de Newton é aplicado na derivada de uma função duplamente derivável para achar as raízes da derivada (pontos críticos), definido como:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \gamma[\mathbf{H}f(\mathbf{x}_n)]^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_n)$$

Onde γ é o tamanho do passo e Hf é a hessiana de f, $(Hf)_{ij} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Semelhante ao método do gradiente descendente o método de Newton usa informação da curva para traçar um caminho mais direto.

Já nos métodos quasi-Newton a matriz Hessiana não precisa ser computada, ela é atualizada analisando vetores gradientes sucessivos. A aproximação da Hessiana B é escolhida pra satisfazer essa equação, chamada de equação da secante:

$$\nabla f(x_k + \Delta x) = \nabla f(x_k) + B\,\Delta x$$

Os métodos quasi-Newton se diferem na forma em que a aproximação da Hessiana é calculada. Neste trabalho foi escolhido o BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno), pois esse algoritmo possui a propriedade de que se B_k é positiva definida e dada mais algumas condições B_{k+1} também é definida positiva.

O algoritmo também foi aplicado para minimizar a norma L_2 com peso em um filtro *IIR*.

Remez

Algoritmo de Remez é um algoritmo iterativo de múltiplas variáveis que é adequado para solução do problema minimax que é minimizar a norma L_∞.

O algoritmo se baseia em minimizar funções de uma maneira simples, aproximando por funções no espaço de Chebyshev. O algoritmo de Remez possui 3 passos básicos:

1. Inicialização: o algoritmo pode ser inicializado escolhendo N pontos de frequência entre zero e π em que a função de peso não seja 0.
2. Interpolação: esse passo requer resolver um sistema linear. No caso do desenho de filtros é usado o teorema da alternação [1] para chegar ao sistema linear definido por:

$$W(\omega_i)\,(A(\omega_i) - D(\omega_i)) = (-1)^i\,\delta$$
$$A(\omega_i) - D(\omega_i) = \frac{(-1)^i\,\delta}{W(\omega_i)}$$

   onde D(ω) é a resposta esperada, W(ω) a função de peso, ω as frequências extremas, δ variação da banda e A(ω) os coeficientes do filtro
3. Atualização: depois do passo da interpolação, a função de erro de Chebyshev com peso é comparado com o parâmetro de convergência para decidir se o algoritmo finaliza ou vai para uma nova iteração.

Neste trabalho o algoritmo foi usado no design de um filtro *FIR*.

Colônia artificial de abelhas (ABC)

O algoritmo de colônia artificial de abelhas é um método de otimização por enxame que se baseia no comportamento de uma colônia de abelhas. Os passos do algoritmo são:

1. Fontes iniciais de comida são produzidas.
2. Cada abelha vai para uma fonte de comida da sua memória e determina a fonte mais próxima, avalia seu valor e passa a dançar.
3. As abelhas observadoras escolhem uma das abelhas que estão dançando e escolhe uma fonte de comida delas. Depois disso acham um vizinho próximo a essa fonte e avaliam seu valor.
4. Checa se os critérios foram atingidos, se foram o programa se encerra, caso não volta ao passo 2.

Para o design de um filtro passa-baixas o método de avaliação das fontes de comida foi o mesmo usado no método dos mínimos quadrados e quasi-Newton, L_2 com peso.

Resultados

Parte do objetivo da pesquisa era conhecer alguns métodos e como aplicá-los. Os testes se basearam em uma análise simples de sua resposta em magnitude e tempo.

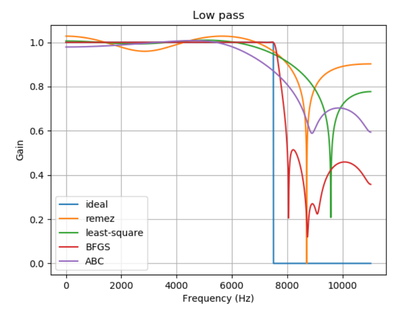

Figura 2: Resposta em magnitude dos filtros

Algoritmos	Dist. Euclidiana	Dist. Chebyshev
Quadrados mínimos	20.274	0.946
Remez	22.028	0.959
BFGS	12.403	0.998
ABC	18.113	0.869

Distâncias em relação a resposta em magnitude do filtro ideal

Algoritmos	Tempo médio	Desvio padrão 100 amostras
Quadrados mínimos	0.045	0.101
Remez	0.0007	5.755e-05
BFGS	0.063	0.044
ABC	8.295	1.889

Podemos observar que o filtro usando o BFGS possui melhor comportamento, mais próximo do filtro ideal com uma boa performance computacional. O método de Remez foi o mais eficiente em termos computacional, porém o método ABC teve uma performance consideravelmente pior e problemática se pensarmos em aplicar em um sinal em tempo real, entretanto é possível melhorar a performance do mesmo algoritmo com paralelização, o que será um objetivo futuro desse trabalho.

Referências

[1] Palghat P. Vaidyanathan and T. Q. Nguyen. A simple proof of the alternation theorem. *Conference Record of the Forty-First Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 1111–1115, 2007.

[2] Andreas Antoniou. *Digital filters*. McGraw Hill, 1993.

[3] Dervis Karaboga. Artificial bee colony algorithm. *scholarpedia*, 5(3):6915, 2010.

[4] Er. Karamjeet Singh and Gurpreet Kaur. Design of low pass fir filter using artificial bee colony optimization technique and its comparison with particle swarm optimization. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 4(9), 2014.