

Sprawozdanie: Minimalne drzewo rozpinające i grafy spójne

Miłosz Sawicki

6 sierpnia 2019

1 Reprezentacje grafów jako struktur danych

Do reprezentacji grafów w pamięci komputera stosuje się głównie:

1. Macierz sąsiedztwa - macierz kwadratowa o stopniu równym liczbie wierzchołków w grafie. Jest to tablica wypełniona zerami - jeśli dwa wierzchołki nie są połączone oraz jedynkami - jeśli są połączone. Macierz ta jest zawsze symetryczna
2. Macierz incydencji - macierz o wymiarze $n \times m$, gdzie n - liczba wierzchołków, m - liczba krawędzi grafu skierowanego. Jeden wiersz macierzy odwzorowuje konkretny wierzchołek grafu, a jedna kolumna konkretną krawędź. Macierz jest wypełniona wartościami $\{-1, 0, 1\}$ (1 - dany wierzchołek jest początkiem krawędzi, -1 - dany wierzchołek jest końcem krawędzi, 0 - dany wierzchołek nie należy do krawędzi).
3. Lista sąsiedztwa - tablica n - elementowa, gdzie n jest liczbą wierzchołków grafu. Elementami tablicy są listy, które zawierają numery sąsiadów wierzchołka startowego. W przypadku grafu nieskierowanego listy są dłuższe, ponieważ zawierają krawędzie biegnące w obu kierunkach.

2 Drzewo

Drzewo jest strukturą danych, której elementami są węzły. Pierwszy z nich jest nazywany korzeniem. Węzły połączone są ze sobą krawędziami. W drzewach stosuje się nazwy:

- ojciec - węzeł nadrzędny
- syn - węzeł podrzędny

Węzły, które posiadają synów to węzły wewnętrzne, natomiast te nieposiadające synów nazywane są liśćmi.

Specjalną grupą drzew są drzewa binarne, czyli takie, w których każdy węzeł może mieć maksymalnie dwóch synów. Drzewa bardzo dobrze odwzorowują

hierarchię danych, przez co ułatwiają i przyspieszają wyszukiwanie. Można wykonywać na nich podstawowe operacje, np : zliczenie elementów, wyszukiwanie, dodawanie czy usuwanie elementu.

3 Minimalne drzewo rozpinające

Minimalne drzewo rozpinające (MST) jest to drzewo danego grafu o najmniejszej możliwej sumie wag krawędzi. Utworzony podgraf nie może być cykliczny i musi łączyć wszystkie wierzchołki. Najpopularniejszymi algorytmami, które pozwalają na znalezienie MST grafu są:

- algorytm Prima (zastosowany w programie),
- algorytm Kruskala

3.1 Algorytmu Prima

Budowę minimalnego drzewa rozpinającego rozpoczynamy w dowolnym wierzchołku, który dodajemy do drzewa. Następnie wszystkie krawędzie wychodzące z tego wierzchołka umieszczamy w kopcu posortowanym według wag. Potem z utworzonego kopca ściągamy krawędź o najmniejszej wadze i sprawdzamy czy jej drugi wierzchołek jest już w drzewie, jeśli nie dodajemy go do drzewa (jeśli tak bierzemy inną krawędź i powtarzamy sprawdzanie). Kolejnym krokiem jest dodanie do kopca krawędzi wychodzących z dodanego wierzchołka i powtórzenie czynności.

4 Algorytm przechodzenia grafu w głąb

Algorytm przechodzenia grafu w głąb (DFS) rozpoczynamy od wybrania wierzchołka i umieszczenia go na stosie jako odwiedzonego. Następnie należy sprawdzić jego sąsiadów i powtórzyć procedurę. Jeżeli dany wierzchołek nie ma krawędzi łączących z nieodwiedzonymi wierzchołkami należy usunąć go ze stosu i pobrać kolejny wierzchołek do przeszukania.

5 Algorytm sprawdzania spójności grafu

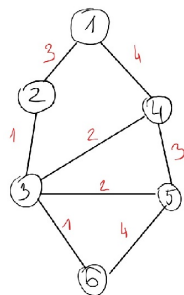
Graf spójny - graf spełniający warunek, że dla każdej pary wierzchołków istnieje ścieżka, która je łączy. Algorytm sprawdzający spójność grafu jest oparty o algorytm DFS. Badanie rozpoczynamy od uruchamiania procedury przechodzenia w głąb. Jeśli wierzchołek został odwiedzony do tablicy *visited[i]* zostaje dodana wartość 1 (w przeciwnym wypadku 0). Po zakończeniu procedury DFS zliczona zostaje suma wartości z *visited[i]*. Jeżeli jest ona równa liczbie wierzchołków grafu to jest on spójny, inaczej jest on niespójny.

6 Działanie programu

Po uruchomieniu programu użytkownik ma do wybrania 3 opcje: minimalne drzewo rozpinające, grafy spojne oraz wyjście.

Po wybraniu opcji pierwszej program przechodzi do algorytmu tworzenia minimalnego drzewa rozpinającego. Użytkownik ma do wyboru samodzielne wpisanie danych lub opcje zastosowania algorytmu na grafach wczytywanych z plików tekstowych o 5, 8, 12, 16 i 20 wierzchołkach. Po wybraniu 7 program cofnie się do głównego menu.

Opcja numer 1 pozwala użytkownikowi na wpisanie dowolnych danych dotyczących grafu. Następnie zostaje sprawdzona spójność grafu oraz (dla grafu spójnego) zastosowany algorytm Prima. Przykład działania tej opcji przedstawię na podstawie grafu o 6 wierzchołkach i 8 krawędziach (szkic na rysunku nr 1).



Rysunek 1: Graf spójny

Rysunek nr 2 przedstawia przykład działania programu dla danego grafu. Algorytm sprawdza, że jest to graf spójny i wyznacza dla niego minimalne drzewo rozpinające.

```
Algorytm tworzenia minimalnego drzewa rozpinającego:
1. Podanie danych przez użytkownika
2. Graf o 5 wierzchołkach
3. Graf o 8 wierzchołkach
4. Graf o 12 wierzchołkach
5. Graf o 16 wierzchołkach
6. Graf o 20 wierzchołkach
7. Powrót
1
Podaj liczbę wierzchołków oraz liczbę krawędzi: 6 8
Podaj numery połączonych wierzchołków oraz wagę krawędzi łączącej: 1 2 3
1 4 4
2 3 1
3 4 2
3 5 2
3 6 1
4 5 3
5 6 4
Suma: 6
Graf jest spójny
Minimalne drzewo rozpinające:
2 -- 1
3 -- 2
4 -- 3
5 -- 3
6 -- 3
```

Rysunek 2: Działanie programu dla przykładowego grafu

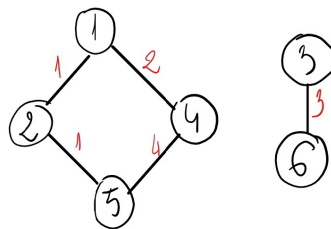
Kolejny przykład to działanie programu dla grafu o 8 wierzchołkach, który jest wczytywany z pliku. Plik ten zawiera następującą reprezentację grafu:

```
8 12
1 2 4
1 3 2
1 4 5
2 3 4
3 4 2
4 5 6
5 6 1
6 7 2
7 8 3
2 5 2
6 8 1
3 6 3
```

```
Algorytm tworzenia minimalnego drzewa rozpinającego:
1. Podanie danych przez użytkownika
2. Graf o 5 wierzchołkach
3. Graf o 8 wierzchołkach
4. Graf o 12 wierzchołkach
5. Graf o 16 wierzchołkach
6. Graf o 20 wierzchołkach
7. Powrot
3
Minimalne drzewo rozpinające:
2 -- 5
3 -- 1
4 -- 3
5 -- 6
6 -- 3
7 -- 6
8 -- 6
```

Rysunek 3: Działanie programu dla grafu o 8 wierzchołkach

Teraz sprawdzimy działanie algorytmu sprawdzającego spójność grafu, czyli z głównego menu wybieramy opcję numer 2. Użytkownik ponownie zostaje poproszony o wpisanie danych. Działanie tego fragmentu programu pokażę na przykładzie grafu nieskierowanego o 6 wierzchołkach i 5 krawędziach (szkic na rysunku nr 4).



Rysunek 4: Graf niespójny

```
1. Minimalne drzewo rozpinajace
2. Grafy spojne
3. Wyjście
2
Podaj liczbe wierzchołkow oraz liczbe krawedzi:
6 5
Podaj numery polaczonych wierzchołkow oraz wage krawedzi laczaczych:
1 2 1
1 4 2
2 5 1
3 6 3
4 5 4
Suma: 4
Graf nie jest spojny
```

Rysunek 5: Działanie programu dla grafu nieskierowanego