TP1 TID

SCAIA Matteo, MARIAC Damien

October 22, 2024

Contents

1 Exercice 1

On considère le tableau ci-dessous, répartissant la population active occupée selon l'âge (A), le sexe (S) et la catégorie socioprofessionnelle (C) (source: INSEE, enquête emploi 2016).

Catégorie socioprofessionnelle des actifs occupés selon le sexe et l'âge

Âge	**De 15 à 29 ans**	***De 30 à 49 ans***	**De 30 à 39 ans**	**De 40 à 49 ans**	**De 50 à 59 ans**	**60 ans ou plus**
	Effectifs (en milliers)	Effectifs (en milliers)	Effectifs (en milliers)	Effectifs (en milliers)	Effectifs (en milliers)	Effectifs (en milliers)
SEXE : Femmes						
Agriculteurs	27,8	189,7	70,0	119,6	187,1	76,9
Artisans, con	117,4	914,0	357,9	556,1	525,8	184,8
Cadres et pro	564,9	2 638,5	1 209,0	1 429,5	1 161,6	360,0
Professions i	1 353,7	3 735,7	1 840,7	1 895,0	1 507,8	256,2
Employés	1 570,9	3 486,4	1 605,6	1 880,9	1 819,6	397,0
Ouvriers	1 271,6	2 648,6	1 285,9	1 362,7	1 300,4	180,5
SEXE : Hommes						
Agriculteurs	24,2	146,0	56,2	89,8	138,0	43,4
Artisans, con	79,2	645,6	258,4	387,2	378,7	128,7
Cadres et pro	315,7	1 538,5	685,3	853,2	719,0	240,1
Professions i	613,3	1 750,4	834,7	915,7	755,9	123,7
Employés	476,0	865,5	449,5	416,0	329,8	58,3
Ouvriers	1 085,8	2 133,9	1 068,4	1 065,5	987,9	130,1

Figure 1: Tableau répartissant la population active occupée selon des catégories

1.1 Modélisation et variable

Tout d'abord de manière intuitive, nous avons envie de modéliser la variable socioprofessionnelle avec les deux autres. Cependant, nous devons le montrer de manière formelle. Grâce au code fourni dans la partie 4, nous calculons l'information mutuelle de chacune des variables.

Premièrement, nous calculons l'entropie de chacune de ces variables.
Pour la variable A, nous avons le tableau suivant (en fréquence).

	15-29 ans	30-39 ans	40-49 ans	50-59 ans	60+ ans
Age	0.1866	0.2419	0.2730	0.2441	0.0542

Table 1: Distribution par âge (A)

Nous pouvons calculer l'entropie de A.

$$H(A) = -\sum_{n=1}^{6} p_i \log_2(p_i) = 2,1833$$

De même manière, nous calculons l'entropie de C et S.

	Femme	Homme
Proportion	0,6589	0,3411

Table 2: Distribution par sexe (S)

	Agriculteur	Artisans	Cadres	Profession In	Employes	Ouvrier
Proportion	0,0207	0,0740	0,1875	0,2512	0,2240	0,2423

Table 3: Distribution par catégorie socioprofessionnelle (C)

Nous obtenons.

$$H(S) = 0,9258 \qquad H(C) = 2,3266$$

A présent, nous devons calculer les valeurs suivantes : $H(A,S)$, $H(A,C)$ et $H(S,C)$.

	15-29 ans	30-39 ans	40-49 ans	50-59 ans	60+
Femme	0,1220	0,1584	0,1803	0,1618	0,0362
Homme	0,0645	0,0834	0,0927	0,0823	0,1802

Table 4: Distribution jointe sexe (S) et âge (A)

	15-29 ans	30-39 ans	40-49 ans	50-59 ans	60+
Agriculteur	0,0013	0,0031	0,0052	0,0081	0,0030
Artisans	0,0049	0,0153	0,0234	0,0225	0,0080
Cadres	0,0219	0,0471	0,0568	0,0468	0,0149
Professions In	0,0489	0,0665	0,0699	0,0563	0,0094
Employes	0,0509	0,0511	0,0571	0,0535	0,0113
Ouvrier	0,0586	0,0586	0,0604	0,0569	0,0077

Table 5: Distribution jointe (C) et âge (A)

	Agriculteur	Artisans	Cadres	Profession IN	Employes	Ouvrier
Femmes	0.0119	0.0433	0,1175	0.1705	0.1810	0.1344
Homme	0.0087	0.0307	0,0700	0.0807	0.0430	0.1079

Table 6: Distribution jointe (C) et (S)

Nous obtenons les valeurs suivantes.

$$H(A,S) = 3,1092 \qquad H(A,C) = 4,4817 \qquad H(C,S) = 3,2242$$

De plus, nous obtenons pour $H(A,S,C)$ la valeur suivante.

$$H(A,C,S) = -\sum_{n=1}^{72} p_i \log_2(p_i) = 5,3778$$

Nous pouvons calculer les informations mutuelles.

$$I(C,(AS)) = H(C) + H(A,S) - H(A,S,C) = 0,0580$$

$$I(A,(SC)) = 0,029803$$

$$I(S,(CA)) = 0,029813$$

Cherchons le rapport entre l'information mutuelle et la variable conditionnée le plus élevé.

$$R_1 = \frac{I(C,(AS))}{H(A,C)} = 0,0187$$

$$R_2 = \frac{I(A,(SC)))}{H(S,C)} = 0,0092$$

$$R_3 = \frac{I(S,(CA)))}{H(A,C)} = 0,0066$$

Le rapport R_1 est le plus élevé. Donc c'est la variable C modélisé par les deux autres (A et S) qui nous donne le plus d'information.

1.2 Arbre de segmentation binaire

Grâce à la partie 1.1, nous pouvons calculer les informations mutuelles suivantes.

$$I(A,S) = H(A) + H(S) - H(A,S) = 5,1104 * 10^{-5}$$

$$I(A,C) = 0,02830$$

$$I(S,C) = 0,02831$$

Faisons, la somme de ses informations mutuelles avec chacune des deux autres.

$$\bar{I_A} = I(A,S) + I(A,C) = 0,02835$$

$$\bar{I_S} = 0,02836$$

$$\bar{I_C} = 0,0566$$

Nous avons donc $\bar{I_C}$ qui est le plus élevé. Ainsi, l'arbre de segmentation commencera avec la variable C.

2 Exercice 2

2.1 Recodages

2.1.1 Recodage en 2 variables

En agrégeant seulement les classes contigues, nous avons 4 possibilités de regroupement binaire de X.

$$Z1 = \{\{0\%\}, \{0 - 0.5\%, 0.5 - 1\%, 1 - 3\%, > 3\%\}\}$$
$$Z2 = \{\{0\%, 0 - 0.5\%\}, \{0.5 - 1\%, 1 - 3\%, > 3\%\}\}$$
$$Z3 = \{\{0\%, 0 - 0.5\%, 0.5 - 1\%\}, \{1 - 3\%, > 3\%\}\}$$
$$Z4 = \{\{0\%, 0 - 0.5\%, 0.5 - 1\%, 1 - 3\%\}, \{> 3\%\}\}$$

L'entropie de chacun de ses recodages se calcule numeriquement et donne :

$$H(Z1) = -\left(\frac{29}{72} log(\frac{29}{72}) + \frac{43}{72} log(\frac{43}{72})\right) = 0.674$$

De la même manière, nous trouvons.

$$H(Z2) = 0.661 \qquad H(Z3) = 0.427 \qquad H(Z4) = 0.073$$

Le meilleur recodage est donc le premiers c'est à dire : $Z1 = \{\{0\%\}, \{0 - 0.5\%, 0.5 - 1\%, 1 - 3\%, > 3\%\}\}$

2.1.2 Recodage en 3 variables

En procédant de la meme facon, on considère alors 6 cas :

$$Z1 = \{\{0\%\}, \{0 - 0.5\%\}, \{0.5 - 1\%, 1 - 3\%, > 3\%\}\}$$
$$Z2 = \{\{0\%\}, \{0 - 0.5\%, 0.5 - 1\%\}, \{1 - 3\%, > 3\%\}\}$$
$$Z3 = \{\{0\%\}, \{0 - 0.5\%, 0.5 - 1\%, 1 - 3\%\}, \{> 3\%\}\}$$
$$Z4 = \{\{0\%, 0 - 0.5\%\}, \{0.5 - 1\%, 1 - 3\%\}, \{> 3\%\}\}$$
$$Z5 = \{\{0\%, 0 - 0.5\%\}, \{0.5 - 1\%\}, \{1 - 3\%, > 3\%\}\}$$
$$Z6 = \{\{0\%, 0 - 0.5\%, 0.5 - 1\%\}, \{1 - 3\%\}, \{> 3\%\}\}$$

L'entropie est calculé numériquement :

$$H(Z1) = 1.068 \quad H(Z2) = 1.014 \quad H(Z3) = 0.740 \quad H(Z4) = 0.720 \quad H(Z5) = 0.915 \quad H(Z6) = 0.474$$

Nous remarquons que le meilleure recodage en 3 variables est $Z1$.

2.2 Le meilleur recodage de X pour prédire Y

Il sagit ici de recoder X en réduisant l'incertitude sur Y. Nous devons donc trouver le Z_k qui maximise l'information mutuelle entre Z_k et Y.
C'est à dire, trouvons le recodage Z_k qui maximise :

$$I(Z_k; Y) = \sum_{z \in Z_k} \sum_{y \in Y} p(z, y) \log \left(\frac{p(z, y)}{p(z)p(y)} \right) \tag{1}$$

Détaillons le calcul pour le premier recodage :

	0%	$\neq 0\%$
OUI	2/72	20/72
NON	27/72	23/72

Ainsi

$$p(Z1 = 0\%) = \frac{29}{72}, \quad p(Z1 \neq 0\%) = \frac{43}{72}$$
$$p(Y = \text{Oui}) = \frac{22}{72}, \quad p(Y = \text{Non}) = \frac{50}{72}$$

De plus

$$p(Z1 = 0\%, Y = \text{Oui}) = \frac{2}{72}, \quad p(Z1 = 0\%, Y = \text{Non}) = \frac{27}{72}$$
$$p(Z1 \neq 0\%, Y = \text{Oui}) = \frac{20}{72}, \quad p(Z1 \neq 0\%, Y = \text{Non}) = \frac{23}{72}$$

Nous pouvons calculer l'information mutuelle $I(Z1, Y)$, en utilisant la formule 1.

$$I(Z1; Y) = p(Z1 = 0\%, Y = \text{Oui}) \log_2 \left(\frac{p(Z1 = 0\%, Y = \text{Oui})}{p(Z1 = 0\%)p(Y = \text{Oui})} \right) + \dots$$
$$+p(Z1 = 0\%, Y = \text{Non}) \log_2 \left(\frac{p(Z1 = 0\%, Y = \text{Non})}{p(Z1 = 0\%)p(Y = \text{Non})} \right) + \dots$$
$$+p(Z1 \neq 0\%, Y = \text{Oui}) \log_2 \left(\frac{p(Z1 \neq 0\%, Y = \text{Oui})}{p(Z1 \neq 0\%)p(Y = \text{Oui})} \right) + \dots$$
$$+p(Z1 \neq 0\%, Y = \text{Non}) \log_2 \left(\frac{p(Z1 \neq 0\%, Y = \text{Non})}{p(Z1 \neq 0\%)p(Y = \text{Non})} \right)$$

Nous trouvons alors.

$$I(Z1; Y) = 0.176$$

En faisant de même pour chaque information mutuelle, on trouve :

$$I(Z1, Y) = 0.176$$

$$I(Z2, Y) = 0.091$$

$$I(Z3, Y) = 0.033$$

$$I(Z4, Y) = 0.024$$

L'information mutuelle la plus grande est le recodage Z1. Cela signifie que Z1 est le meilleur recodage qui permet de prédire Y.

3 Exercice 3

3.1 Description

On considère le tableau recensant des espèces de champignons suivant 4 variables qualitatifs.

Table 7: Caractéristiques des espèces de champignons

Espèce	Comestible	Chapeau	Tige	Couleur
a	o	a	e	b
b	o	a	e	j
c	o	a	e	b
d	o	pl	f	j
e	o	pl	f	b
f	n	po	f	r
g	n	po	f	j
h	n	po	e	r
i	n	a	f	j
j	n	pl	f	j

On cherche à faire un arbre de discrimination qui permet de prédire la comestibilité à partir des autres caractéristiques, tout en étant le plus court possible.

Pour ce faire, on calcul les informations mutuelles totales entre chaque variable. En effet en pratique, nous allons chercher la variables qui informe le plus sur les autres. Cela revient a calculer.

$$\bar{I}_k = \sum_{n \neq k=1}^{4} I(X_n, X_k) \tag{2}$$

et choisir la variable tel que $\bar{I}_k$ est maximale.

où

$$X_1 = \{Comestible\} \qquad X_2 = \{Chapeau\} \qquad X_3 = \{Tige\} \qquad X_4 = \{Couleur\}$$

3.2 Calculs

3.2.1 Détails pour le premier calcul

On calcul l'information mutuelle avec $I(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2)$.

Table 8: Croissement entre comestibilité (X1) et forme du chapeau (X2)

X1\X2	Po	a	Pl
O	0	3	2
N	3	1	1

Nous trouvons que $I(X1, X2) = H(X1) + H(X2) - H(X1, X2) = 0.277$

En procédant de la même manière pour les cas restant, nous trouvons :

$I(X_1, X_3) = 0.086$ $\quad I(X_1, X_4) = 0.357$ $\quad I(X_2, X_3) = 0.257$ $\quad I(X_2, X_4) = 0.370$ $\quad I(X_3, X_4) = 0.093$

3.3 Informations mutuelles totales

On calcul l'information mutuelle, avec la formule 2.

$$\bar{I}_1 = 0.720 \qquad \bar{I}_2 = 0.905 \qquad \bar{I}_3 = 0.437 \qquad \bar{I}_4 = 0.820$$

Ainsi, X_2 ("forme du chapeau") est la variable qui donne le plus d'information sur les autres.

Nous allons alors analyser les information mutuelles en fonction de leur forme

3.4 Information mutuelle par forme

3.4.1 Chapeau de forme pointu

On remarque qu'aucun des champigons pointu est commestible. (cf tableau 7)

3.4.2 Chapeau de forme arrondi

Si on considère que les chapeau de forme arrondi, on obtient les tableaux suivant:

Table 9: X1 et X3 avec chapeau arrondi

X1\X3	E	F
O	3	0
N	0	1

Table 10: X1 et X4 avec chapeau arrondi

X1\X4	b	j	r
O	2	1	0
N	0	1	0

Table 11: X3 et X4 avec chapeau arrondi

X3\X4	b	j	r
E	2	1	0
F	0	1	0

Les information mutuelles sont alors :

$$I(X_1, X_3) = 0.562 \qquad I(X_1, X_4) = 0.216 \qquad I(X_3, X_4) = 0.216$$

On a alors :

$$\bar{I_1} = I(X_1, X_3) + I(X_1, X_4) = 0.778$$
$$\bar{I_3} = I(X_1, X_3) + I(X_3, X_4) = 0.778$$
$$\bar{I_4} = I(X_1, X_4) + I(X_3, X_4) = 0.432$$

On choisit pour les chapeaux arrondi la variable X_3.

3.4.3 Chapeau de forme plat

Si on considère que les chapeaux de formes plat, on obtient les tableaux suivant:

Table 12: X1 et X3 avec chapeau plat

X1\X3	E	F
O	0	2
N	0	1

Table 13: X1 et X4 avec chapeau plat

X1\X4	b	j	r
O	1	1	0
N	0	1	0

Table 14: X3 et X4 avec chapeau plat

X3\X4	b	j	r
E	0	0	0
F	1	2	0

Les information mutuelles sont alors :

$$I(X_1, X_3) = 0;$$
$$I(X_1, X_4) = 0.174;$$
$$I(X_3, X_4) = 0;$$

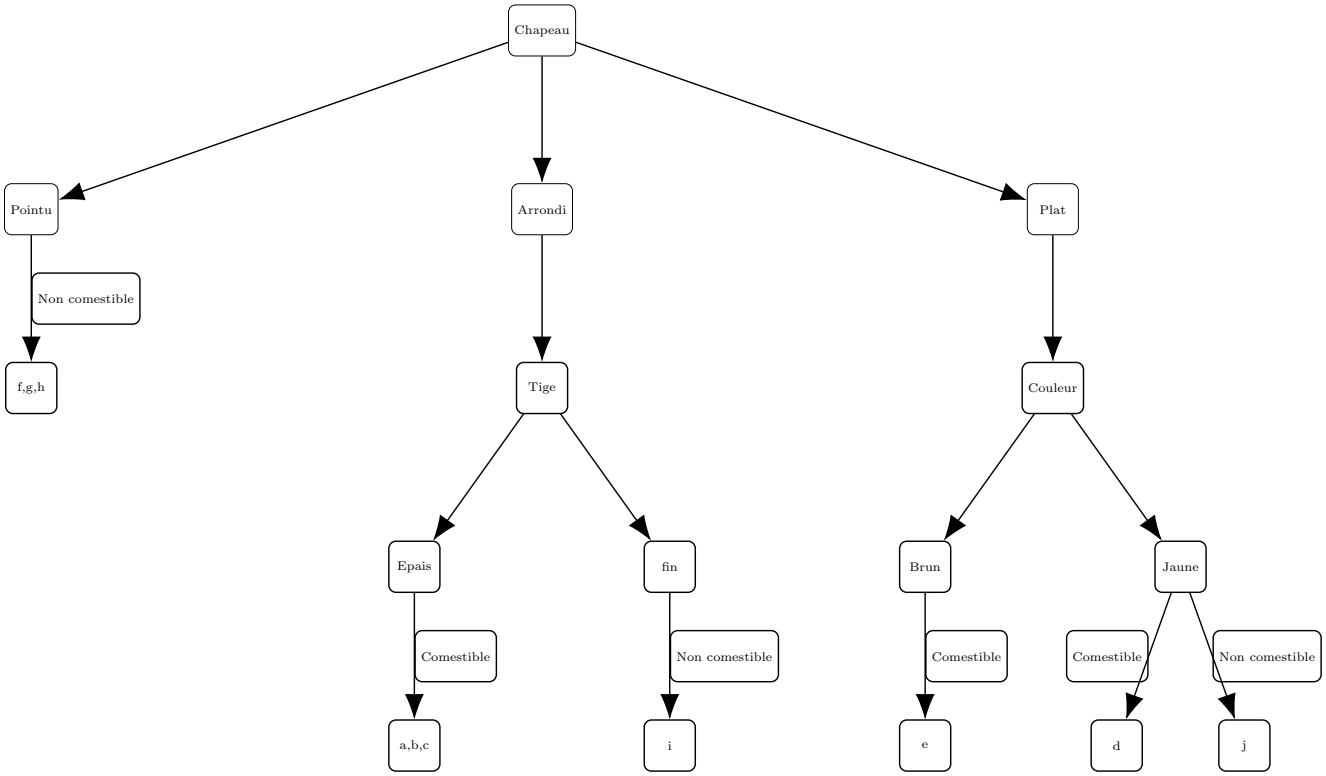
Donc on obtient :

$$\bar{I}_1 = 0.174$$
$$\bar{I}_3 = 0$$
$$\bar{I}_4 = 0.174$$

3.5 Arbre de discrimination

Avec toutes les informations mutuelles calculé, on obtient alors l'arbre suivant :

Figure 2: Arbre de discrimination pour la comestibilité d'un champignon



4 ANNEXE