

# Graphen I

Gustavo Crivelli, Beini Ma, Matthias Schimek, Matthias Schmitt

ICPC-Praktikum 2015 - Graphen I

Einleitung

BFS

DFS

Bipartite Graphen

Iterative Tiefensuche

Starke Zusammenhangskomponenten

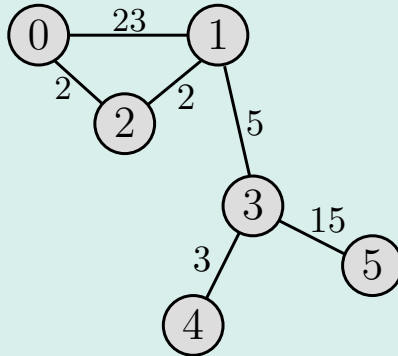
Brücken und Separatoren

# Einleitung

### Graph

- Ein Graph  $G$  ist ein geordnetes Paar  $G = (V, E)$
- $V$  Menge von Knoten/Vertices
- $E$  Menge von Kanten/Edges
  - gerichteter Graph (ohne Mehrfachkanten)  $E \subseteq V \times V$
  - ungerichteter Graph (ohne Mehrfachkanten)  
 $E \subseteq V \times V \wedge (u, w) \in E \iff (w, u) \in E$

### Ungerichteter Beispielgraph



### Adjazenzmatrix

int[][]

- Speicherverbrauch  $\mathcal{O}(|V|^2)$
- über Nachbarn iterieren  $\mathcal{O}(|V|)$
- ICPC nur bei Floyd-Warschall

### Visualisierung

	0	1	2	3	4	5
0	0	23	2	0	0	0
1	23	0	2	0	0	0
2	2	2	0	5	0	0
3	0	0	5	0	3	15
4	0	0	0	3	0	0
5	0	0	0	15	0	0

### Adjazenzlist

`vector<vector<pair<int,int>>>`

- Speicherverbrauch  $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- kompakter und effizienter, da  $|E| \ll \frac{|V|(|V|-1)}{2} \in \mathcal{O}(|V|^2)$
- über alle  $k$  Nachbarn iterieren  $\mathcal{O}(k)$
- ICPC Standardwahl

### Visualisierung

0 :	(23,1)	(2,2)	
1 :	(23,0)	(2,2)	(5,3)
2 :	(2,0)	(2,1)	
3 :	(5,1)	(3,4)	(15,3)
4 :	(3,3)		
5 :	(15,3)		

### Kantenlist

`vector<tuple<int,int,int>>`

- Speicherverbrauch  $\mathcal{O}(|E|)$
- sortiert (nach Gewicht) wichtige Representation
- so nur für Algorithmen die ausschließlich Kanten beachten
- ICPC selten

### Visualisierung

<b>0 :</b>	23	0	1
<b>1 :</b>	2	0	2
<b>2 :</b>	2	2	1
<b>3 :</b>	5	1	3
<b>4 :</b>	3	3	4
<b>5 :</b>	15	3	5



# Breitensuche breadth-first search, BFS

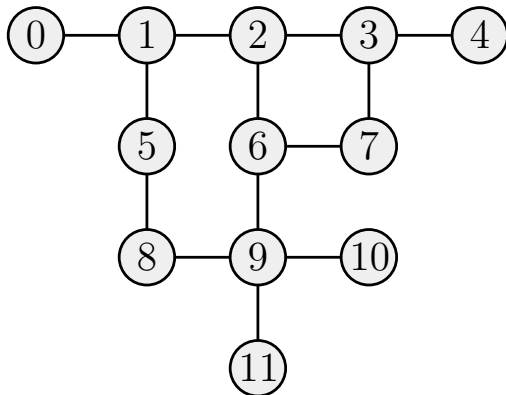
## Breitensuche

Traversieren der Knoten der Breite/der Entfernung zum Startknoten nach.

**Idee:** Besuche den Startknoten, dann dessen Nachbarn, dann deren Nachbarn, usw...

**Implementierung:** Queue und besuchte Knoten markieren

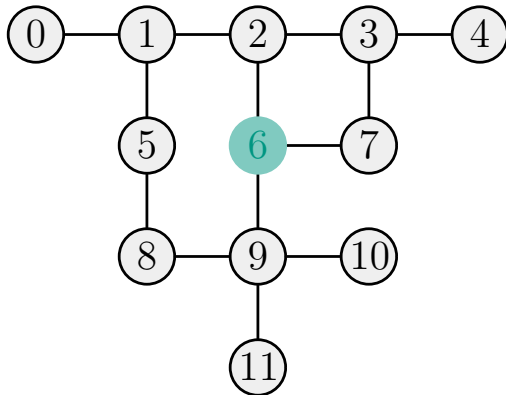
1. Startknoten markieren und in die Queue einreihen
2. den ersten Knoten **u** aus der Queue nehmen
3. alle nicht markierten Nachbarn von **u** markieren und einreihen
4. gehe zu 2. wenn Queue nicht leer sonst fertig



Startknoten  $s = 6$

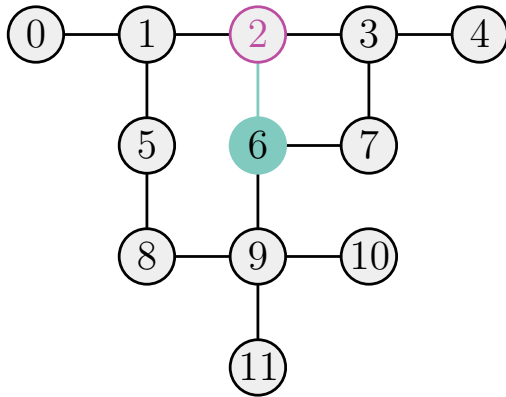
Queue  $q = \{6\}$

Markierte Knotenmenge  $d = \{6\}$



$u = 6$   
 $d = \{6\}$

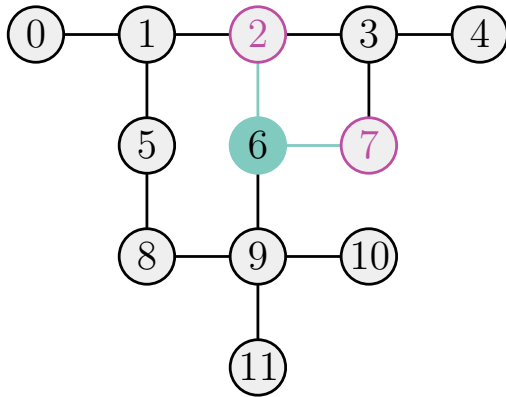
$q = \{\}$



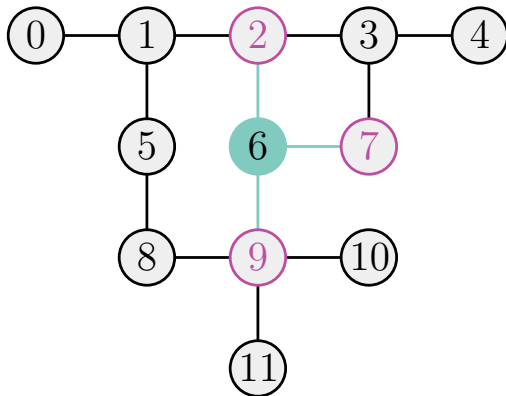
$u = 6$

$q = \{2\}$

$d = \{6, 2\}$

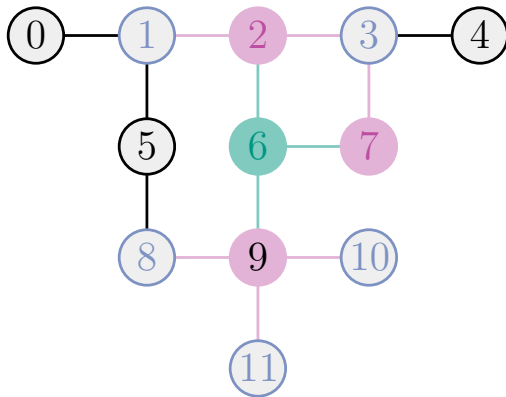


$u = 6$        $q = \{2, 7\}$   
 $d = \{6, 2, 7\}$



$u = 6$        $q = \{2, 7, 9\}$

$d = \{6, 2, 7, 9\}$



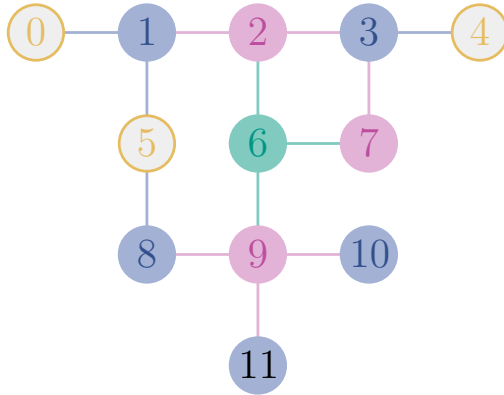
$u = 9$        $q = \{1, 3, 8, 10, 11\}$

$d = \{6, 2, 7, 9, 1, 3, 8, 10, 11\}$

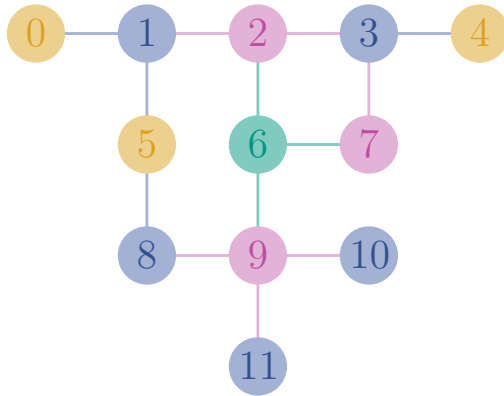


# Breitensuche

## Beispiel



$u = 11$        $q = \{0, 5, 4\}$   
 $d = \{6, 2, 7, 9, 1, 3, 8, 10, 11, 0, 5, 4\}$



$q = \{\}$

$d = \{6, 2, 7, 9, 1, 3, 8, 10, 11, 0, 5, 4\}$

- **Laufzeit:**  $\mathcal{O}(|V| + |E|)$  bzw.  $\mathcal{O}(|V|^2)$
- **Speicher:**  $\mathcal{O}(|V|)$  da alle entdeckten Knoten gespeichert werden
- statt zu markieren, speichere das "Level" von **u** und erhalte die "Kantenentfernung" zu **s**
  - $\iff$  Länge des kürzesten ungewichteten Pfades (Anzahl der Hops) von **s** nach **u**

```
vector<int> d(V, -1);
d[s] = 0;
queue<int> q;
q.push(s);
while (!q.empty()) {
    int u = q.front();
    q.pop();
    for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++) {
        int v = AdjList[u][j];
        if (d[v] == -1) {
            d[v] = d[u] + 1;
            q.push(v);
        }
    }
}
```

# Tiefensuche

depth-first search, BFS

### Indiana Jones and the Fate of Atlantis

Indiana Jones braucht unsere Hilfe! Er ist auf der Suche nach einer mysteriösen Statue muss er ein Labyrinth überwinden. Alles was er als Hilfsmittel besitzt ist eine (unendlich lange )rote Schnur. Wie geht Indy vor, um möglichst wenig Zeit zu verschwenden?

### Anforderungen

- findet stets die Lösung, wenn sie existiert
- vermeidet doppelte Wege

### Indiana Jones and the Fate of Atlantis

Indiana Jones braucht unsere Hilfe! Er ist auf der Suche nach einer mysteriösen Statue muss er ein Labyrinth überwinden. Alles was er als Hilfsmittel besitzt ist eine (unendlich lange )rote Schnur. Wie geht Indy vor, um möglichst wenig Zeit zu verschwenden?

### Anforderungen

- findet stets die Lösung, wenn sie existiert
- vermeidet doppelte Wege

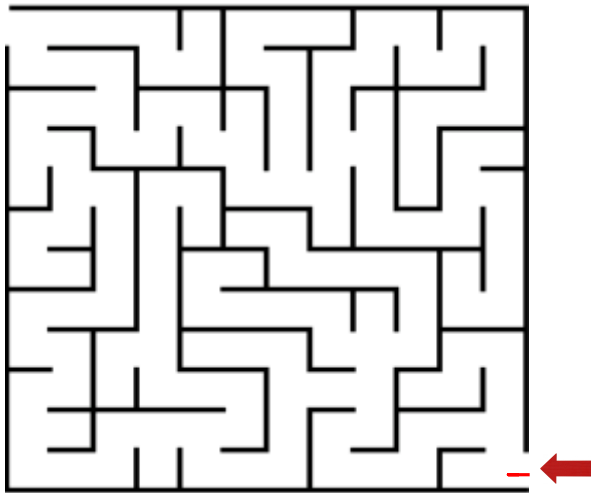
### Strategie

- Die ganze Zeit lang spannen wir unsere rote Schnur und markieren damit bereits gesehene Wege.
- Wenn wir auf eine Gabelung stoßen, gehen wir immer einen Weg, den wir noch nicht gesehen haben.
- Wenn wir auf eine Sackgasse stoßen, gehen wir zurück zu der letzten Gabelung, in der sich noch ein ungesehener Weg befindet.



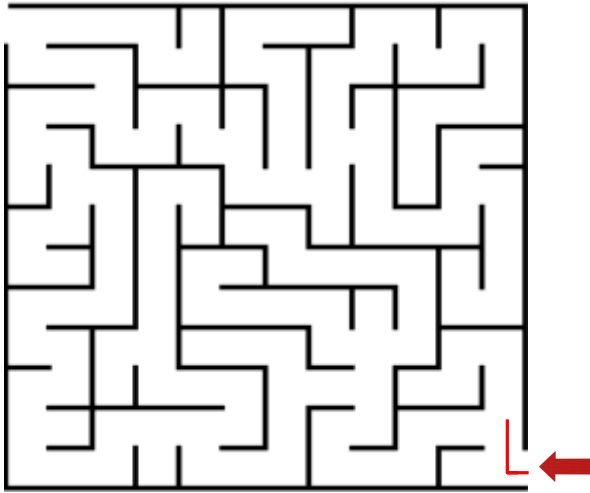
# Tiefensuche

## Einführung



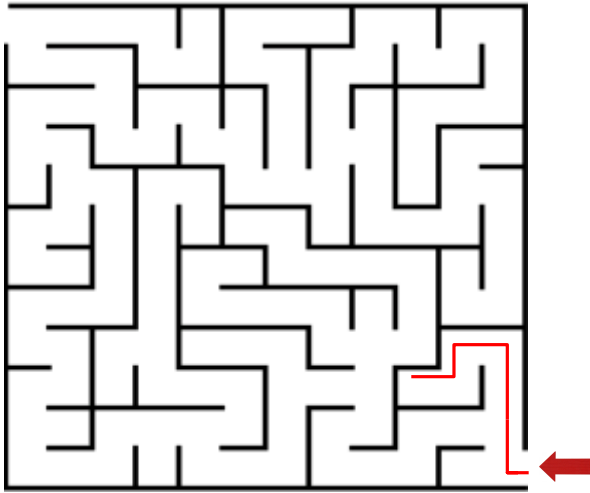
# Tiefensuche

## Einführung



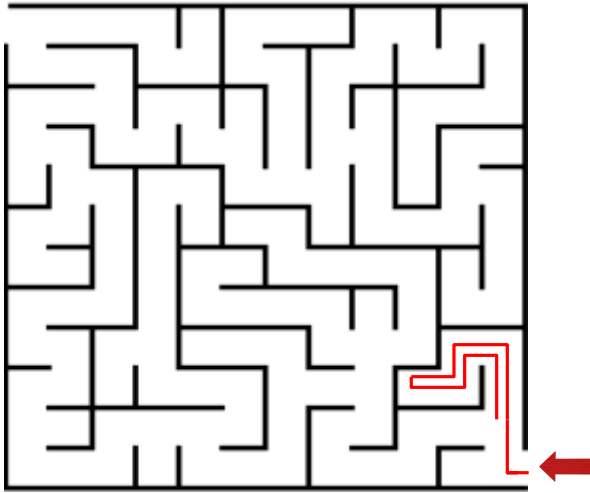
# Tiefensuche

## Einführung



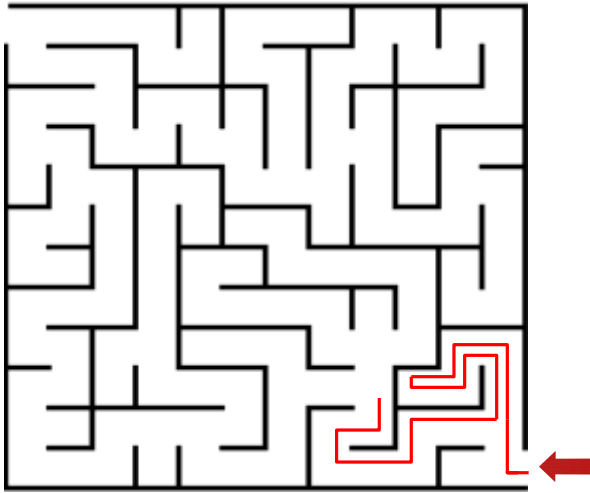
# Tiefensuche

## Einführung



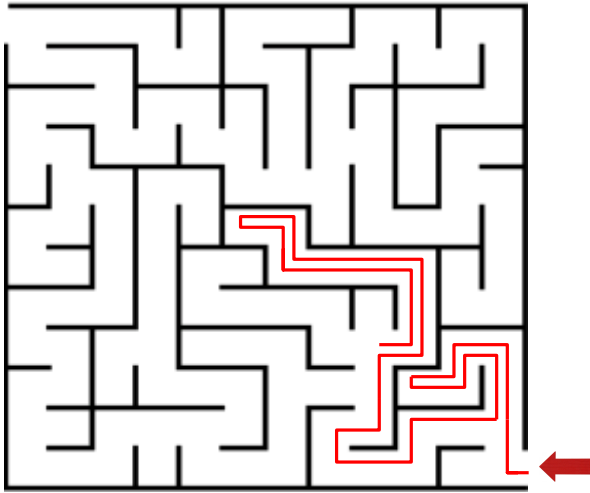
# Tiefensuche

# Einführung



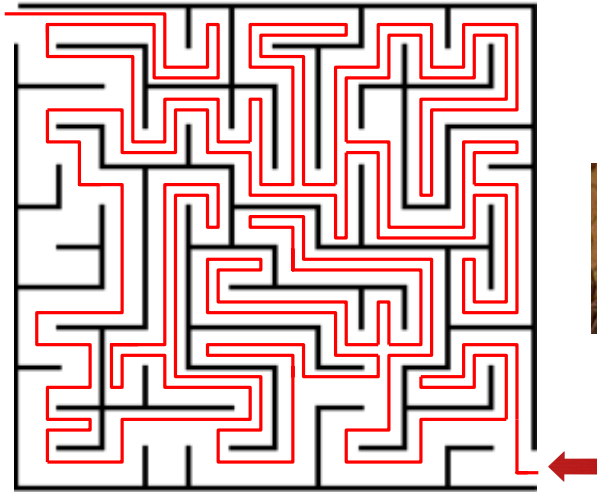
# Tiefensuche

## Einführung



# Tiefensuche

## Einführung



# Tiefensuche

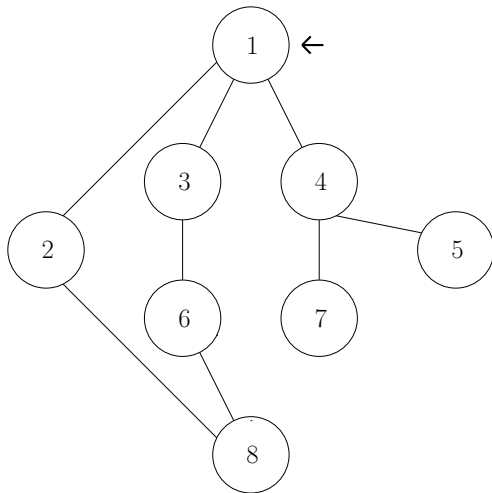
## rekursive Implementierung

```
typedef vector<int> vi;  
typedef pair<int,int> ii;  
typedef vector<ii> vii;  
  
vector <vii> AdjList;  
vector <bool> dfs_visited;  
  
void dfs(int u) {  
    dfs_visited[u] = true;  
    for (int i = 0; i < (int) AdjList[u].size(); i++) {  
        ii v = AdjList[u][i];  
        if (dfs_visited[v.first] == false) {  
            dfs(v.first);  
        }  
    }  
}
```



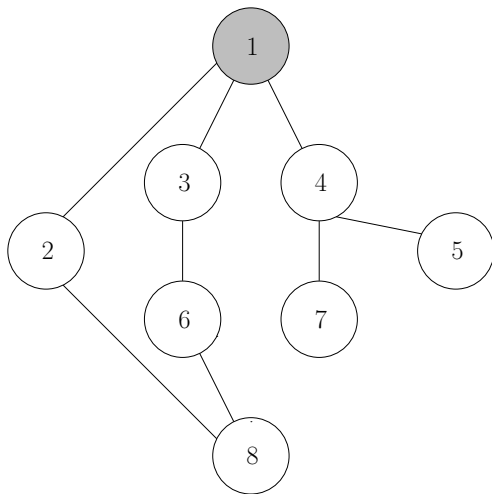
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



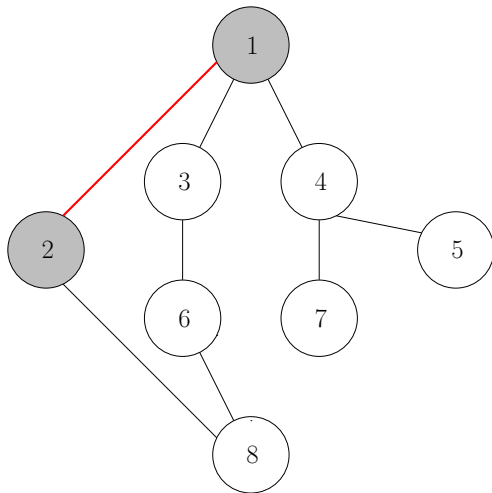
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



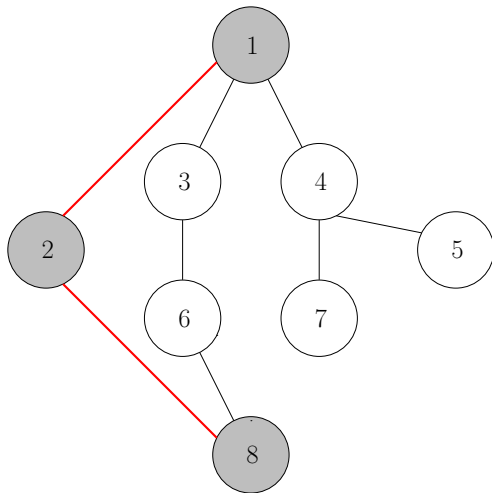
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



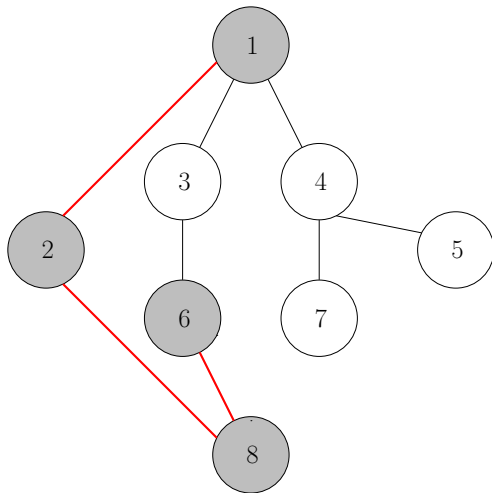
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



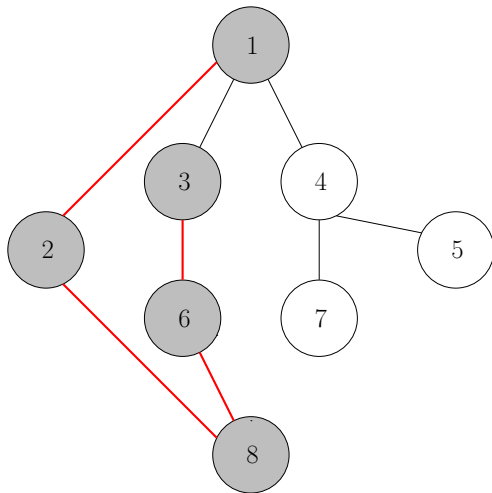
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



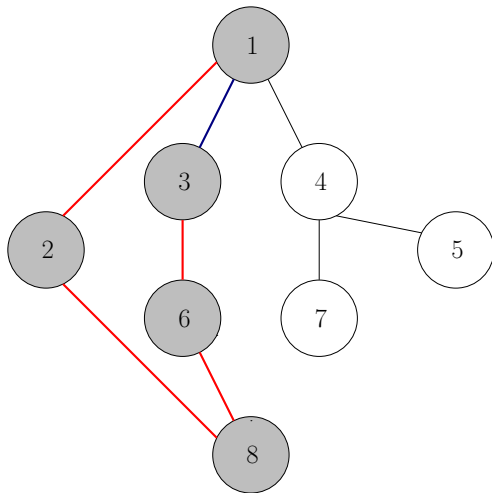
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



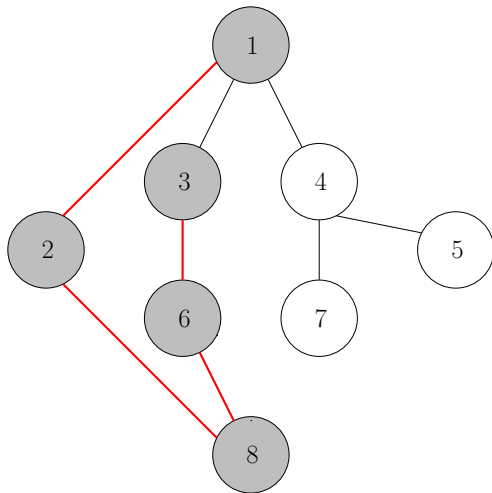
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



# Tiefensuche

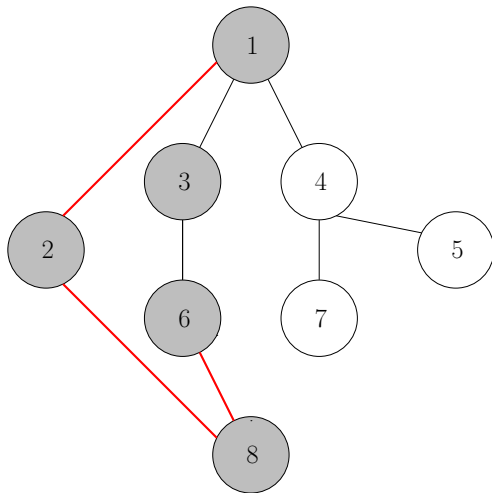
## graphische Darstellung





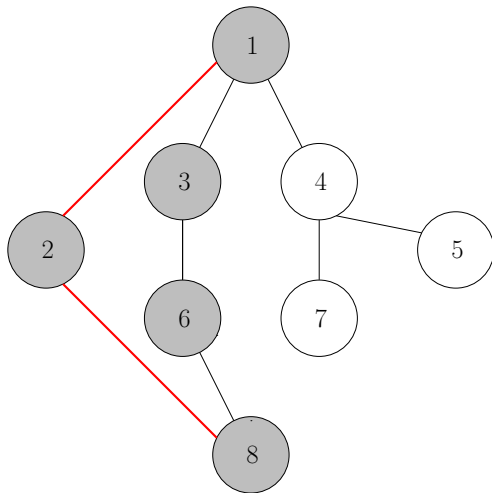
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



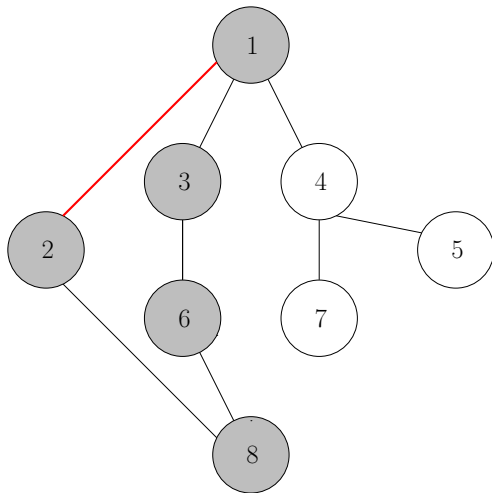
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



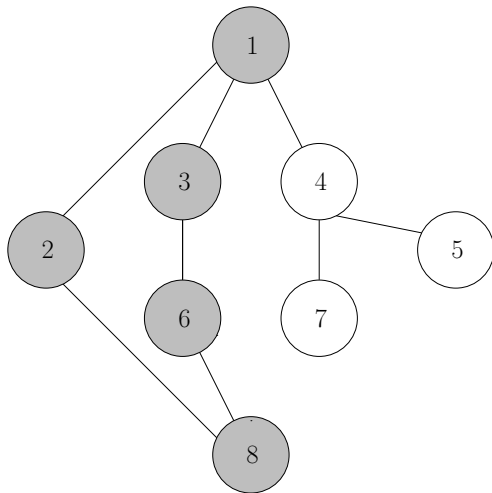
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



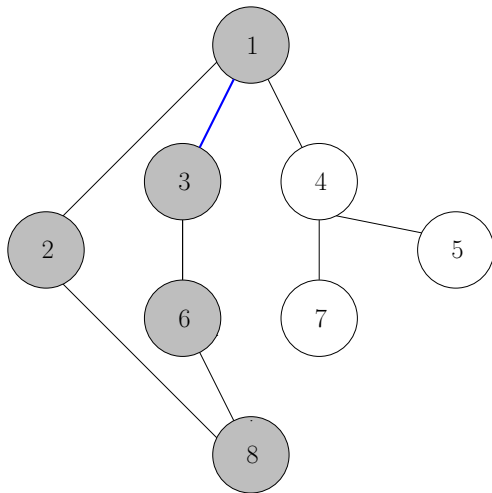
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



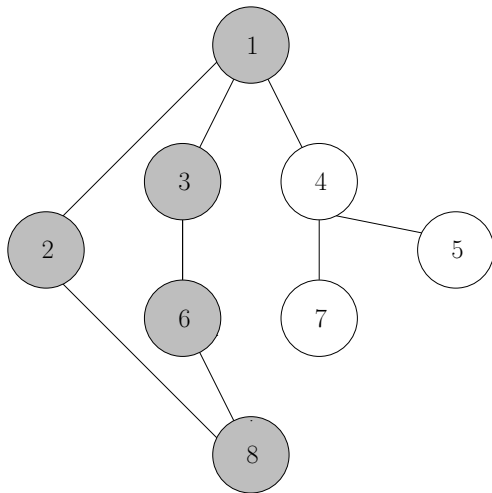
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



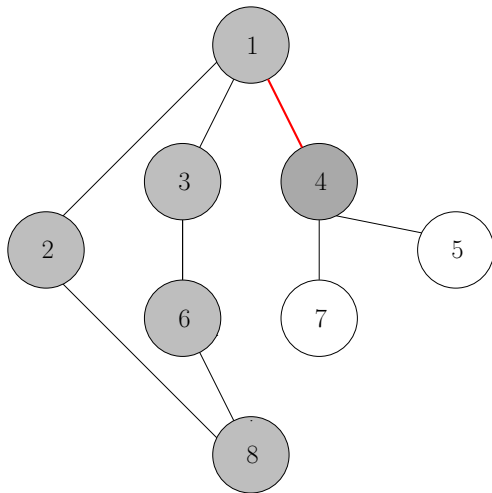
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



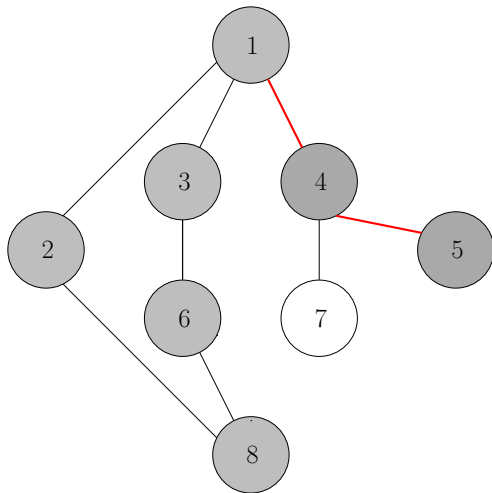
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



# Tiefensuche

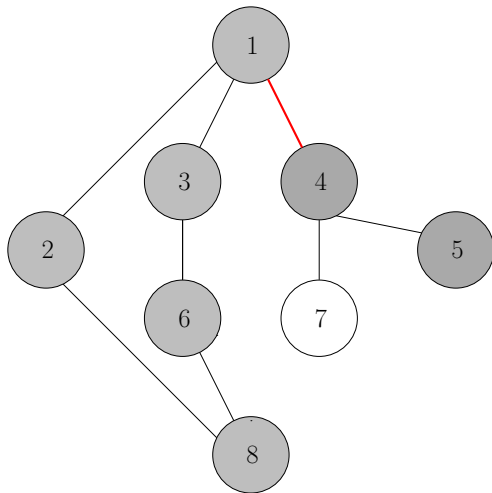
## graphische Darstellung





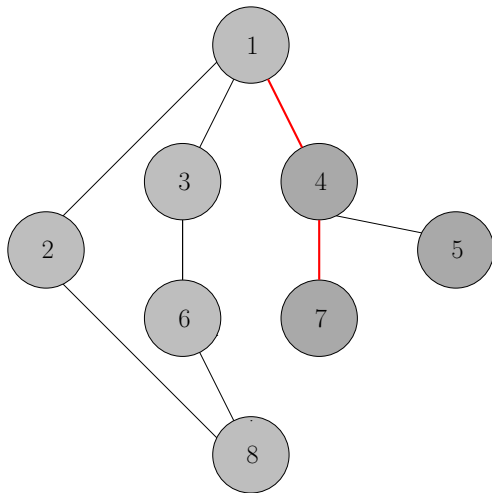
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



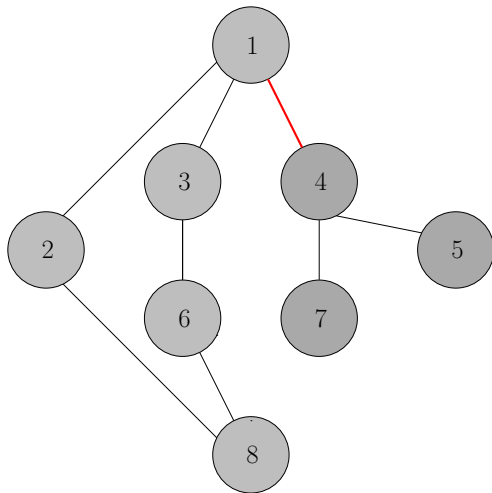
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



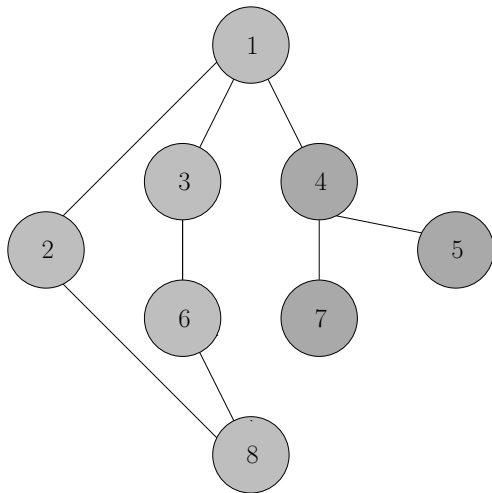
# Tiefensuche

## graphische Darstellung



# Tiefensuche

## graphische Darstellung



- Laufzeit:  $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ , wenn der Graph als Adjazenzliste gespeichert ist oder als Adjazentmatrix  $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Die Tiefensuche ist nicht optimal, wird im Allgemeinen nicht die kürzeste Verbindung zum Ziel gefunden.
- Der Speicherbrauch ist linear, da nur Informationen darüber gespeichert werden, ob ein Knoten schon besucht wurde.

# Tiefensuche

## mögliche Probleme

- Der Graph ist unendlich groß, in diesem Fall gibt es keine Möglichkeit, für jeden Knoten Informationen zu speichern.
- Es ist nach einem optimalen Ergebnis gefragt.
- Durch die vielen Rekursionsebenen wird das Rekursionslimit vom Betriebssystem überschritten.

# Tiefensuche

## nichtrekursive Implementierung

```
void nrdfs(int u) {
    dfs_visited[u] = true;
    stack<ii> myStack;
    int pos = 0;
    int i = u;
    while (!myStack.empty() || pos < AdjList[i].size()) {
        if (pos < (int) AdjList[i].size()) {
            ii v = AdjList[i][pos];
            if (dfs_visited[v.first] == false) {
                ii p(i, pos + 1);
                myStack.push(p);
                i = v.first;
                pos = 0;
                dfs_visited[v.first] = true;
            } else {
                pos++;
            }
        }
    }
}
```

# Tiefensuche

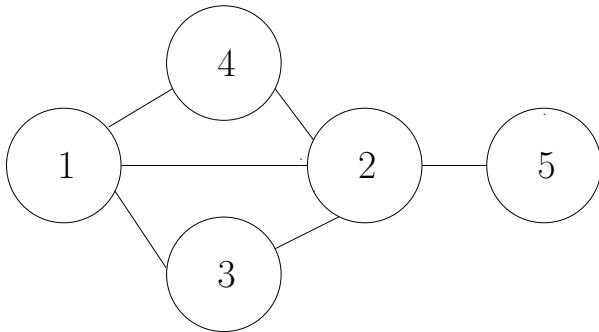
## nichtrekursive Implementierung

```
        else {  
            ii p = myStack.top();  
            myStack.pop();  
            i = p.first;  
            pos = p.second;  
        }  
    }  
}
```



### Dominator

Ein Knoten X eines Graphen dominiert einen anderen Knoten Y, wenn alle Wege von einem gegebenen Startknoten zu Y durch X gehen müssen. Wenn ein Knoten Z nicht vom Startknoten erreicht werden kann, hat Z keinen Dominator.



### Dominator

Gegeben sei ein Graph. Die Aufgabe ist es, für einen gegebenen Graphen für jeden Knoten die Dominator auszurechnen. Dabei ist zu erwähnen, dass der Eingabegraph sehr klein sind, mit weniger als 100 Knoten.

### Idee

- Lassen zunächst Tiefensuche mit dem Anfangsknoten als Startknoten laufen und speichern uns alle Knoten ein, die erreicht worden sind.
- Um zu prüfen, welche Knoten von einem Knoten  $X$  dominiert werden, löschen (oder blenden aus) wir temporär den Knoten  $X$  und laufen mit Tiefensuche durch den Graph.
- Alle Knoten, die nun nicht mehr erreicht werden können, werden von  $X$  dominiert.
- Laufzeit ist  $\mathcal{O}(|V|^3)$  im worst case.

### Idee

- Lassen zunächst Tiefensuche mit dem Anfangsknoten als Startknoten laufen und speichern uns alle Knoten ein, die erreicht worden sind.
- Um zu prüfen, welche Knoten von einem Knoten  $X$  dominiert werden, löschen (oder blenden aus) wir temporär den Knoten  $X$  und laufen mit Tiefensuche durch den Graph.
- Alle Knoten, die nun nicht mehr erreicht werden können, werden von  $X$  dominiert.
- Laufzeit ist  $\mathcal{O}(|V|^3)$  im worst case.

### Idee

- Lassen zunächst Tiefensuche mit dem Anfangsknoten als Startknoten laufen und speichern uns alle Knoten ein, die erreicht worden sind.
- Um zu prüfen, welche Knoten von einem Knoten X dominiert werden, löschen (oder blenden aus) wir temporär den Knoten X und laufen mit Tiefensuche durch den Graph.
- Alle Knoten, die nun nicht mehr erreicht werden können, werden von X dominiert.
- Laufzeit ist  $\mathcal{O}(|V|^3)$  im worst case.

### Idee

- Lassen zunächst Tiefensuche mit dem Anfangsknoten als Startknoten laufen und speichern uns alle Knoten ein, die erreicht worden sind.
- Um zu prüfen, welche Knoten von einem Knoten  $X$  dominiert werden, löschen (oder blenden aus) wir temporär den Knoten  $X$  und laufen mit Tiefensuche durch den Graph.
- Alle Knoten, die nun nicht mehr erreicht werden können, werden von  $X$  dominiert.
- Laufzeit ist  $\mathcal{O}(|V|^3)$  im worst case.

# Bipartite Graphen

## Definition

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

- $G$  heißt **bipartit** falls sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen  $A, B$  aufteilen lassen, so dass es zwischen den Knoten innerhalb einer Teilmenge keine Kanten gibt.
- Das heißt, für jede Kante  $\{u, v\} \in E$  gilt entweder  $u \in A$  und  $v \in B$  oder  $u \in B$  und  $v \in A$ .



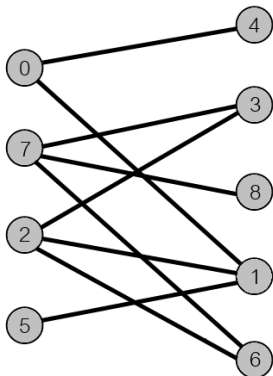
## UVa 10004 Bicoloring

Ein ungerichteter Graph wird als Eingabe gegeben. Die Aufgabe ist zu bestimmen ob der Graph eingefärbt werden kann, so dass keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe haben.

# Bipartite Graphen

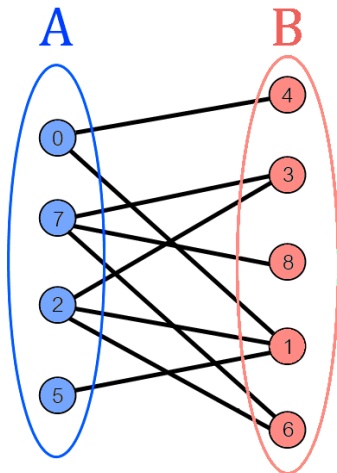
## Beispiel

G



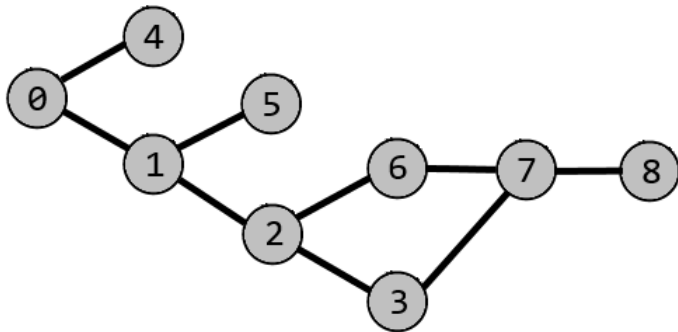
# Bipartite Graphen

## Beispiel



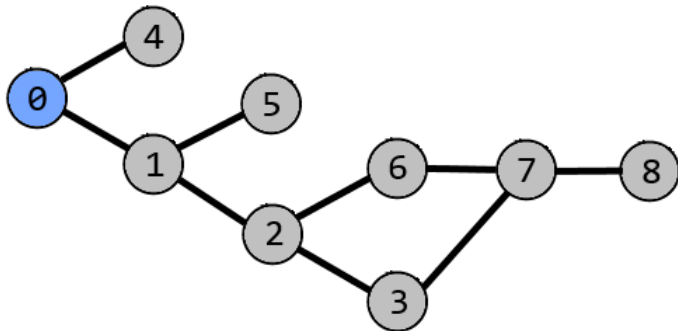
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



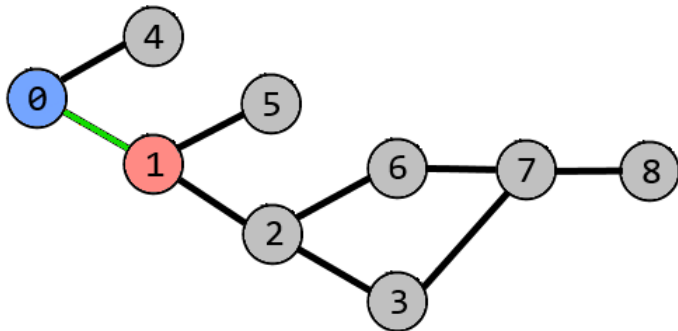
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



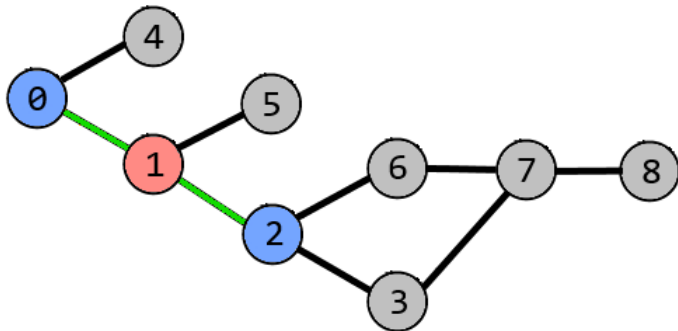
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



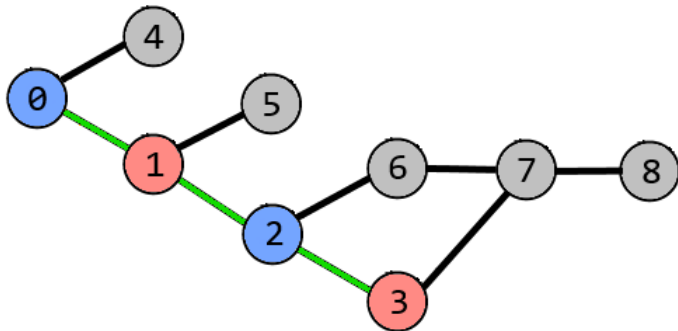
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



# Bipartite Graph Check

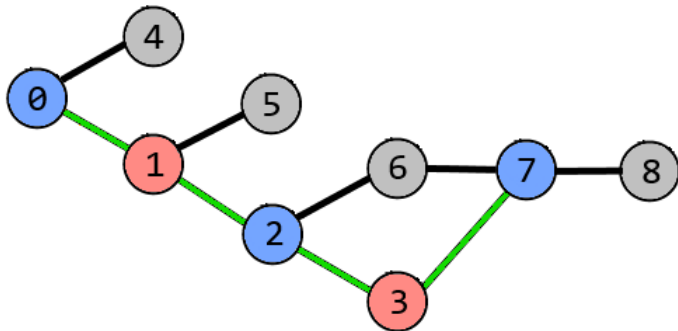
## DFS Algorithmus





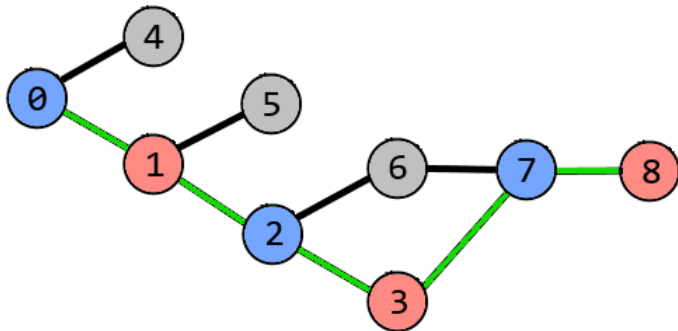
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



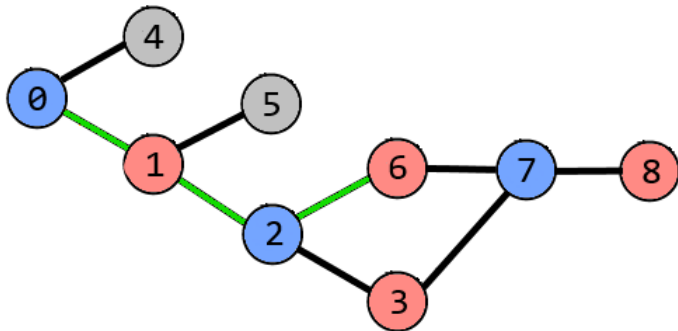
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



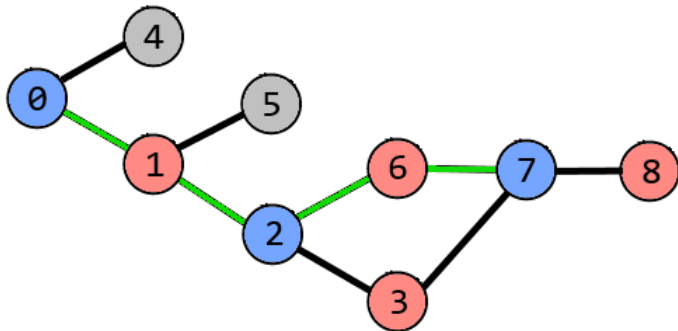
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



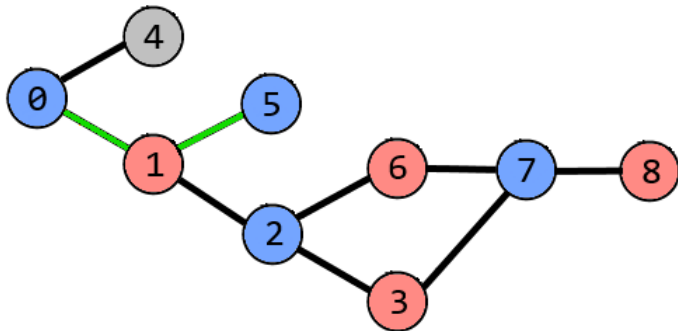
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



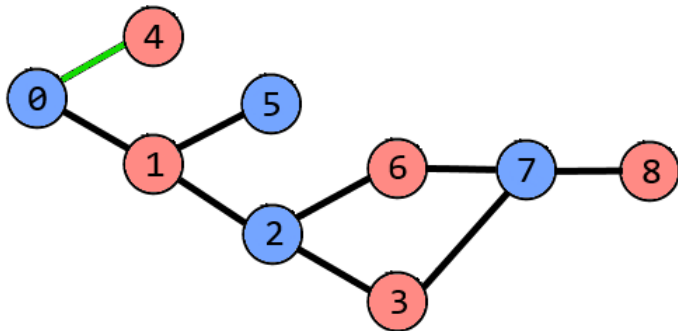
# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus



# Bipartite Graph Check

## DFS Algorithmus

```
vector< vector<int> > adjList;  
vector<int> colorDFS[200];  
const int UNVISITED = -1, NOT_BIP = 0, BIP = 1;  
int checkDFS(int v, int color) // int main() -> checkDFS(0,0)  
{  
    if (colorDFS[v] == UNVISITED)  
    {  
        colorDFS[v] = color;  
        for (int i = 0; i < adjList[v].size(); i++)  
            if (solveDFS(adjList[v][i], 1 - color) == NOT_BIP)  
                return NOT_BIP;  
    }  
    else if (colorDFS[v] != color)  
        return NOT_BIP;  
    return BIP;  
}
```

# Bipartite Graph Check

## BFS Algorithmus

```
vector< vector<int> > adjList;  
const int UNVISITED = -1, NOT_BIP = 0, BIP = 1;  
  
int checkBFS(int nVertex) {  
    vector<int> color(nVertex, UNVISITED);  
    queue<int> q; q.push(0);  
    while (!q.empty()) {  
        int vertex = q.front(); q.pop();  
        for(int i = 0; i < adjList[vertex].size(); i++) {  
            int next = adjList[vertex][i];  
            if (color[next] == UNVISITED) {  
                color[next] = 1 - color[vertex];  
                q.push(next);  
            }  
            else if (color[next] == color[vertex])  
                return NOT_BIP;  
        }  
    }  
    return BIP;  
}
```



# Iterative Tiefensuche

## Begrenzte Tiefensuche

- **Begrenzte Tiefensuche:** wird als eine DFS durchgeführt, die nicht tiefer als eine Tiefe  $T$  sucht (tiefere Knoten werden ignoriert).
- Für sich allein nur in besonderen Situationen nützlich, ist aber eine wichtige Komponente in Iterative Tiefensuche.

# Iterative Tiefensuche

## Rekursive begrenzte DFS Algorithmus

```
vector<node> goalPath;  
int limitedDFS(node v, int depth)  
{  
    if (v == goal) {  
        goalPath.push_back(v);  
        return 1;  
    }  
  
    if (depth > 0) {  
        vector<node> neighbors = neighborhood(v);  
        for ( int i = 0; i < neighbors.size(); i++) {  
            if ( limitedDFS(neighbors[i], depth-1) == 1) {  
                goalPath.push_back(v);  
                return 1;  
            }  
        }  
    }  
    return 0;  
}
```

## Iterative Tiefensuche

- Idee: Führe eine Folge begrenzter Tiefensuchen mit ansteigender Tiefengrenze durch bis eine Lösung gefunden wird.
- Sei  $b$  der durchschnittliche Knotengrad und  $d$  die minimale Lösungstiefe eines gegebenen Graphen  $G$ .

Der Zeitaufwand der iterativen Tiefensuche ist dann  
 $(d+1) + db + (d-1)b^2 + (d-2)b^3 + \dots + 2b^{d-1} + b^d = \mathcal{O}(b^d)$   
und der Speicheraufwand beträgt  $\mathcal{O}(bd)$ .

- BFS  $\Rightarrow 1 + b + b^2 + \dots + b^d = \mathcal{O}(b^d)$

```
void iterativeDFS(node origin) {  
    int depth = 0;  
    while( limitedDFS(origin, depth) != 1)  
        depth++;  
    return;  
}
```

## Iterative Tiefensuche

- Idee: Führe eine Folge begrenzter Tiefensuchen mit ansteigender Tiefengrenze durch bis eine Lösung gefunden wird.
- Sei  $b$  der durchschnittliche Knotengrad und  $d$  die minimale Lösungstiefe eines gegebenen Graphen  $G$ .

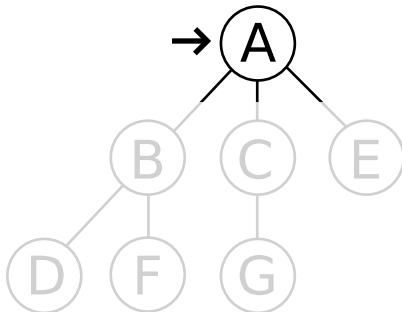
Der Zeitaufwand der iterativen Tiefensuche ist dann  
 $(d+1) + db + (d-1)b^2 + (d-2)b^3 + \dots + 2b^{d-1} + b^d = \mathcal{O}(b^d)$   
und der Speicheraufwand beträgt  $\mathcal{O}(bd)$ .

- BFS  $\Rightarrow 1 + b + b^2 + \dots + b^d = \mathcal{O}(b^d)$

```
void iterativeDFS(node origin) {  
    int depth = 0;  
    while( limitedDFS(origin, depth) != 1)  
        depth++;  
    return;  
}
```

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)

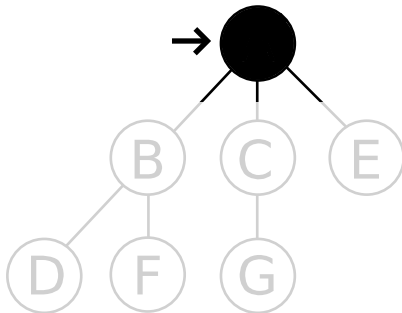


Wurzel: A

$d = 0$ : A

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)

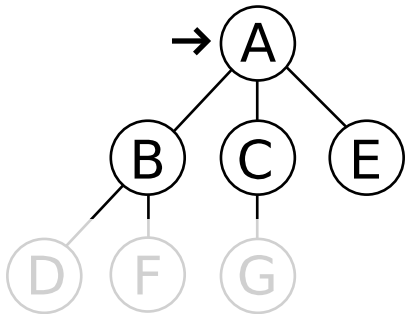


Wurzel: A

$d = 0$ : A

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

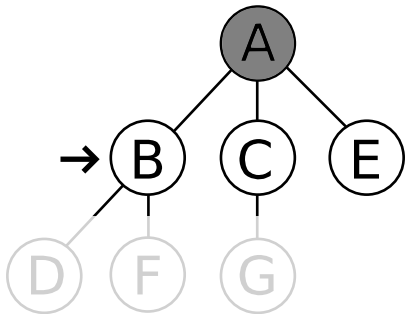
$d = 0$ : A

$d = 1$ : A



# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



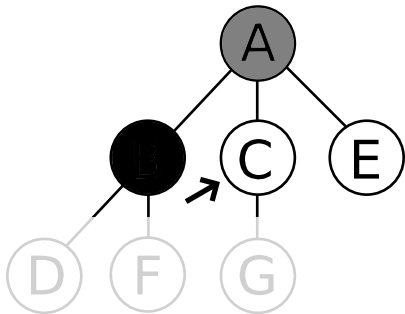
Wurzel: A

$d = 0$ : A

$d = 1$ : AB

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



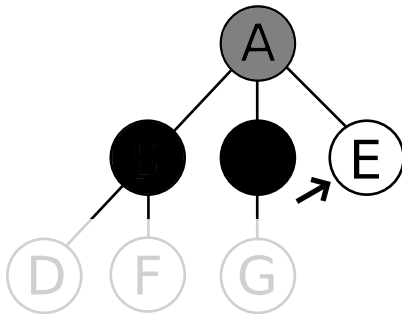
Wurzel: A

$d = 0$ : A

$d = 1$ : ABC

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



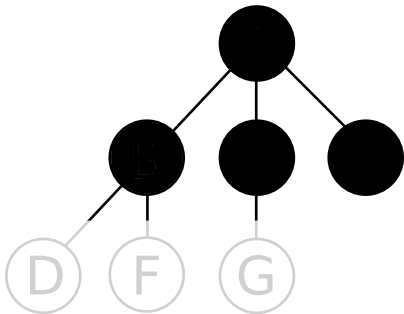
Wurzel: A

$d = 0$ : A

$d = 1$ : ABCE

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



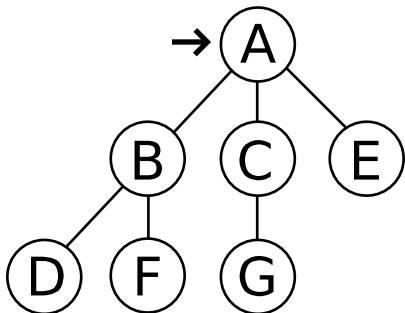
Wurzel: A

$d = 0$ : A

$d = 1$ : ABCE

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

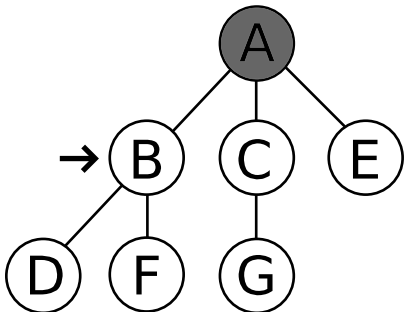
d = 0: A

d = 1: ABCE

d = 2: A

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

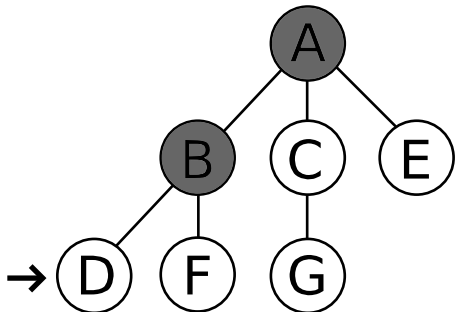
d = 0: A

d = 1: ABCE

d = 2: AB

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

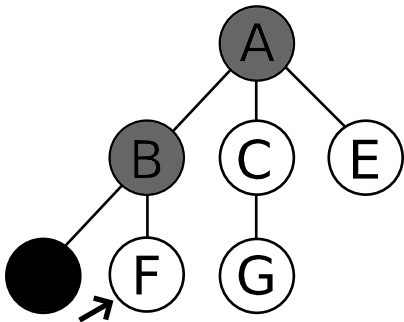
d = 0: A

d = 1: ABCE

d = 2: ABD

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

d = 0: A

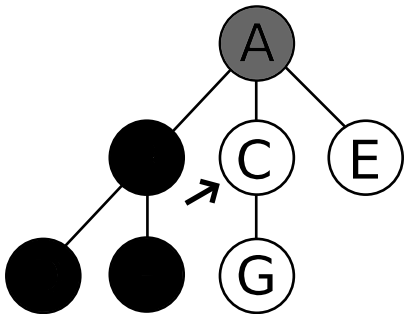
d = 1: ABCE

d = 2: ABDF



# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

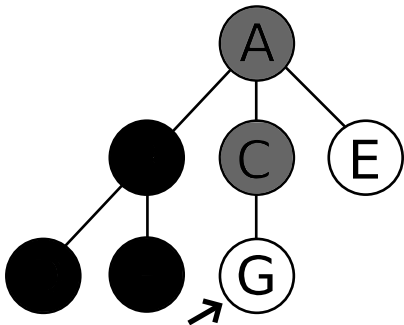
d = 0: A

d = 1: ABCE

d = 2: ABDFC

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

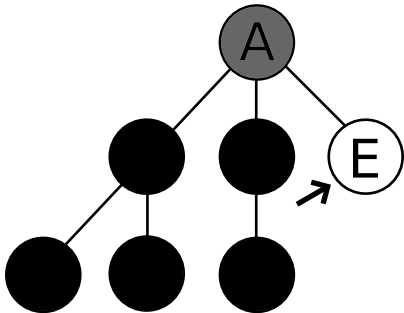
d = 0: A

d = 1: ABCE

d = 2: ABDFCG

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

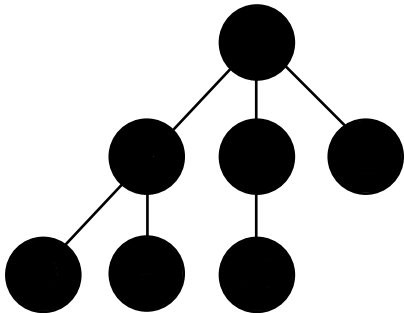
d = 0: A

d = 1: ABCE

d = 2: ABDFCGE

# Iterative Tiefensuche

Beispiel (gerichteter Graph)



Wurzel: A

d = 0: A

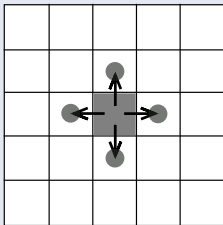
d = 1: ABCE

d = 2: ABDFCGE

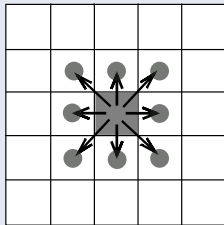
Warte mal: jede Iteration besucht die vorherigen Knoten noch einmal! Warum dann nicht BFS oder DFS benutzen?

## Bewertung

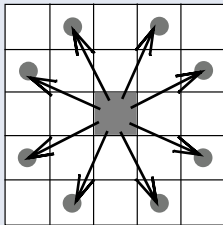
- Einige Graphen können mit herkömmlichen Suchverfahren nicht durchgelaufen werden, bspw. implizite Graphen die unendlich groß sind und nicht im Speicher gehalten werden können.



Von-Neumann-Nachbarschaft



Moore-Nachbarschaft



Pferd-Nachbarschaft

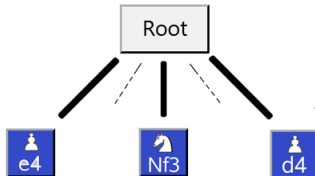
## Schach

- Auch sinnvoll für Probleme, die einen sehr hohen branching factor  $b$  haben, z.B.: **Schach**
- Im Durchschnitt hat ein Schachspieler für jede Position 35~38 mögliche Züge. Das heißt, nach 5 Zügen werden  $\sim 10^7$  Positionen möglich, nach 10 Zügen  $\sim 10^{15}$ .
- Adaptierte iterative Tiefensuche berechnet den besten Zug bis entweder die Zeit abgelaufen ist oder die maximale Suchtiefe erreicht ist.
- Suche kann mit Heuristiken verbessert werden, so dass die vielversprechendsten Richtungen zuerst erforscht sind.

# Iterative Tiefensuche

Schach

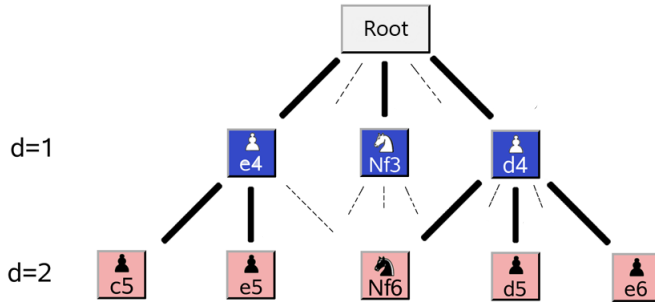
d=1





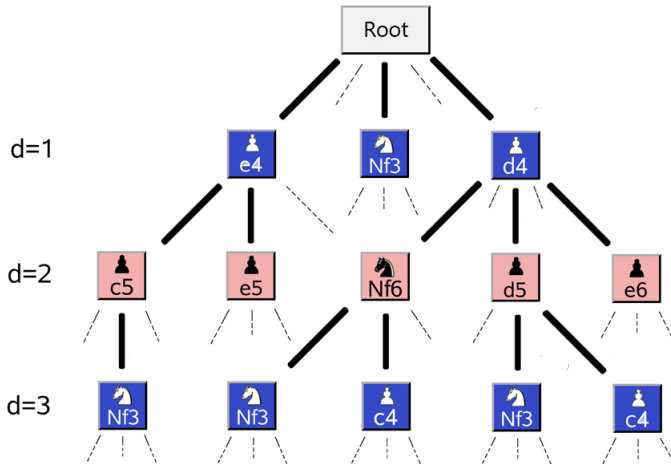
# Iterative Tiefensuche

Schach



# Iterative Tiefensuche

Schach



Source code: [www.craftychess.com/crafty-23.4.zip](http://www.craftychess.com/crafty-23.4.zip)

# Starke Zusammenhangskomponenten

# SCCs finden mittels DFS

## Beispielaufgabe

### UVa 11383 Come and Go

In einer Stadt gibt es  $N$  Kreuzungen, die durch Straßen verbunden sind. Da man in der Stadt von einem Punkt (Kreuzung) zu jedem anderen kommen möchte, sollte es eine Verbindung zwischen zwei beliebigen Kreuzungen geben.

Für eine gegebene Stadt mit  $N$  Kreuzungen und  $M$  Straßen soll entschieden werden, ob dies möglich ist.

### Definition Strongly Connected Components SCC

In einem gerichteten Graph  $G = (V, E)$ , wird  $V' \subseteq V$  starke Zusammenhangskomponente (SCC) genannt, wenn zwischen je zwei Knoten in  $V'$  ein Pfad existiert.

# SCCs finden mittels DFS

## Beispielaufgabe

### UVa 11383 Come and Go

In einer Stadt gibt es  $N$  Kreuzungen, die durch Straßen verbunden sind. Da man in der Stadt von einem Punkt (Kreuzung) zu jedem anderen kommen möchte, sollte es eine Verbindung zwischen zwei beliebigen Kreuzungen geben.

Für eine gegebene Stadt mit  $N$  Kreuzungen und  $M$  Straßen soll entschieden werden, ob dies möglich ist.

### Definition Strongly Connected Components SCC

In einem gerichteten Graph  $G = (V, E)$ , wird  $V' \subseteq V$  starke Zusammenhangskomponente (SCC) genannt, wenn zwischen je zwei Knoten in  $V'$  ein Pfad existiert.

- Zum Lösen der Aufgabe untersuchen, ob das Straßennetz der Stadt aus einer oder mehreren SCCs besteht.
- $\Rightarrow$  Benötigen effizienten Algorithmus zum Finden von SCCs

## Algorithmus von Tarjan für SCCs

- Wurde von Robert Tarjan gefunden
- Basiert auf dem Konzept der DFS
- Laufzeit:  $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

- Zum Lösen der Aufgabe untersuchen, ob das Straßennetz der Stadt aus einer oder mehreren SCCs besteht.
- $\Rightarrow$  Benötigen effizienten Algorithmus zum Finden von SCCs

## Algorithmus von Tarjan für SCCs

- Wurde von Robert Tarjan gefunden
- Basiert auf dem Konzept der DFS
- Laufzeit:  $\mathcal{O}(|V| + |E|)$



# SCCs finden mittels DFS

## Idee des Algorithmus

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \text{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- SCCs werden mittels dem von der DFS erzeugten Spannbaum gefunden
- Wenn Backedge von einem Knoten  $u$  zur Wurzel  $r$  eines Teilbaums, sind alle Knoten auf dem Weg zwischen  $u$  und  $v$  in einer SCC.

# SCCs finden mittels DFS

## Idee des Algorithmus

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \text{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- SCCs werden mittels dem von der DFS erzeugten Spannbaum gefunden
- Wenn Backedge von einem Knoten  $u$  zur Wurzel  $r$  eines Teilbaums, sind alle Knoten auf dem Weg zwischen  $u$  und  $v$  in einer SCC.

# SCCs finden mittels DFS

## Idee des Algorithmus

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \mathbf{dfs\_num(v)} \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- SCCs werden mittels dem von der DFS erzeugten Spannbaum gefunden
- Wenn Backedge von einem Knoten  $u$  zur Wurzel  $r$  eines Teilbaums, sind alle Knoten auf dem Weg zwischen  $u$  und  $v$  in einer SCC.

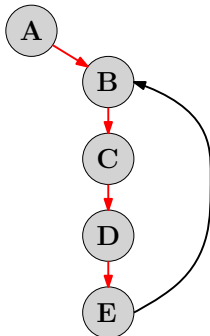
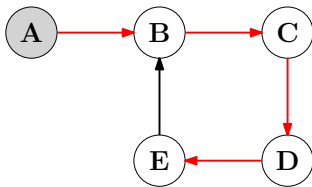
# SCCs finden mittels DFS

## Idee des Algorithmus

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \text{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- SCCs werden mittels dem von der DFS erzeugten Spannbaum gefunden
- Wenn Backedge von einem Knoten  $u$  zur Wurzel  $r$  eines Teilbaums, sind alle Knoten auf dem Weg zwischen  $u$  und  $r$  in einer SCC.

# SCCs finden mittels DFS

## DFS-Spannbaum



# SCCs finden mittels DFS

## Idee des Algorithmus

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \text{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- SCCs werden mittels dem von der DFS erzeugten Spannbaum gefunden
- Wenn Backedge von einem Knoten  $u$  zur Wurzel  $r$  eines Teilbaums, sind alle Knoten auf dem Weg zwischen  $u$  und  $v$  in einer SCC.
- Wenn **dfs\_low(v) = dfs\_num(v)**, dann ist  $v$  die "Wurzel" einer SCC
- Knoten werden - sobald besucht - auf **STACK** gespeichert und wenn Wurzel gefunden, ausgegeben

# SCCs finden mittels DFS

## Idee des Algorithmus

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \text{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- SCCs werden mittels dem von der DFS erzeugten Spannbaum gefunden
- Wenn Backedge von einem Knoten  $u$  zur Wurzel  $r$  eines Teilbaums, sind alle Knoten auf dem Weg zwischen  $u$  und  $v$  in einer SCC.
- Wenn **dfs\_low(v) = dfs\_num(v)**, dann ist  $v$  die "Wurzel" einer SCC
- Knoten werden - sobald besucht - auf **STACK** gespeichert und wenn Wurzel gefunden, ausgegeben

# SCCs finden mittels DFS

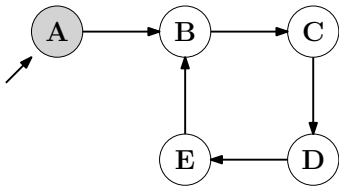
## Idee des Algorithmus

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \mathbf{dfs\_num(v)} \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- SCCs werden mittels dem von der DFS erzeugten Spannbaum gefunden
- Wenn Backedge von einem Knoten  $u$  zur Wurzel  $r$  eines Teilbaums, sind alle Knoten auf dem Weg zwischen  $u$  und  $v$  in einer SCC.
- Wenn **dfs\_low(v) = dfs\_num(v)**, dann ist  $v$  die "Wurzel" einer SCC
- Knoten werden - sobald besucht - auf **STACK** gespeichert und wenn Wurzel gefunden, ausgegeben



# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(A) = 0$

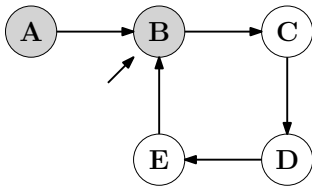


STACK:

- A

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$

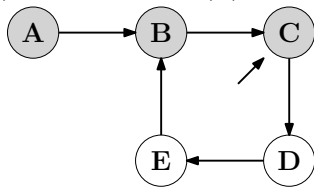


STACK:

- A
- B

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 2$

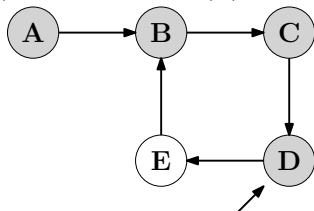


STACK:

- A
- B
- C

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 2$



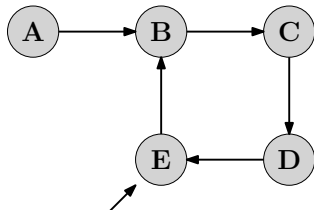
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(D) = 3$

STACK:

- A
- B
- C
- D

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 2$



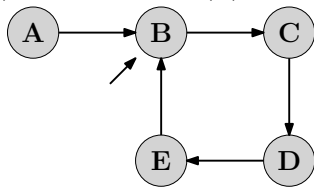
- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 4$
- $\text{dfs low}(D) = 3$

STACK:

- A
- B
- C
- D
- E

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 2$



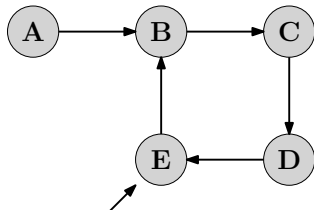
- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 1$
- $\text{dfs low}(D) = 3$

STACK:

- A
- B
- C
- D
- E

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 2$



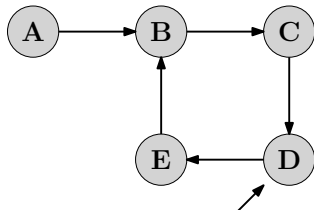
- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 1$
- $\text{dfs low}(D) = 1$

STACK:

- A
- B
- C
- D
- E

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = \boxed{1}$



- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 1$
- $\text{dfs low}(D) = 1$

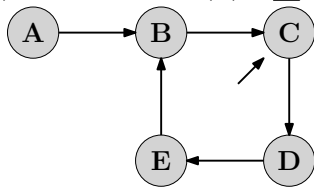
STACK:

- A
- B
- C
- D
- E



# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 1$



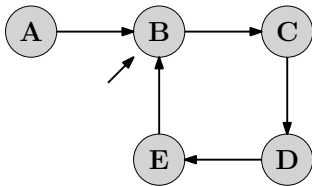
- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 1$
- $\text{dfs low}(D) = 1$

STACK:

- A
- B
- C
- D
- E

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 1$



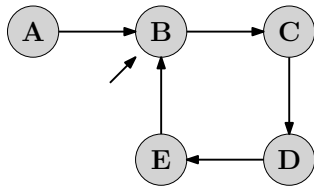
- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 1$
- $\text{dfs low}(D) = 1$

STACK:

- A
- B
- C
- D

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 1$



- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 1$
- $\text{dfs low}(D) = 1$

STACK:

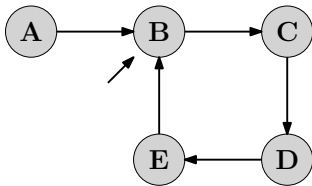
- A
- B
- C

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
- $\text{dfs num}(B) = 1$
- $\text{dfs num}(C) = 2$
- $\text{dfs low}(A) = 0$
- $\text{dfs low}(B) = 1$
- $\text{dfs low}(C) = 1$

STACK:

- A
- B



- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 1$
- $\text{dfs low}(D) = 1$

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$

- $\text{dfs num}(B) = 1$

- $\text{dfs num}(C) = 2$

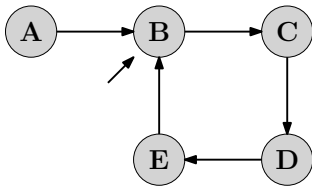
STACK:

- $\text{dfs low}(A) = 0$

- $\text{dfs low}(B) = 1$

- $\text{dfs low}(C) = 1$

- A



- $\text{dfs num}(E) = 4$

- $\text{dfs num}(D) = 3$

- $\text{dfs low}(E) = 1$

- $\text{dfs low}(D) = 1$

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$

- $\text{dfs num}(B) = 1$

- $\text{dfs num}(C) = 2$

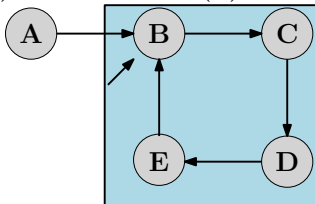
STACK:

- $\text{dfs low}(A) = 0$

- $\text{dfs low}(B) = 1$

- $\text{dfs low}(C) = 1$

- A



- $\text{dfs num}(E) = 4$

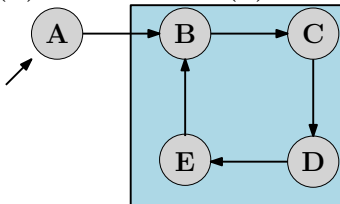
- $\text{dfs num}(D) = 3$

- $\text{dfs low}(E) = 1$

- $\text{dfs low}(D) = 1$

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$
  - $\text{dfs num}(B) = 1$
  - $\text{dfs num}(C) = 2$
- STACK:
- - $\text{dfs low}(A) = 0$
  - $\text{dfs low}(B) = 1$
  - $\text{dfs low}(C) = 1$



- $\text{dfs num}(E) = 4$
- $\text{dfs num}(D) = 3$
- $\text{dfs low}(E) = 1$
- $\text{dfs low}(D) = 1$

# SCCs finden mittels DFS

- $\text{dfs num}(A) = 0$

- $\text{dfs num}(B) = 1$

- $\text{dfs num}(C) = 2$

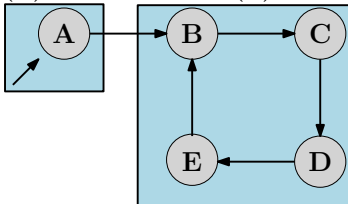
STACK:

- $\text{dfs low}(A) = 0$

- $\text{dfs low}(B) = 1$

- $\text{dfs low}(C) = 1$

- 



- $\text{dfs num}(E) = 4$

- $\text{dfs num}(D) = 3$

- $\text{dfs low}(E) = 1$

- $\text{dfs low}(D) = 1$



# SCCs finden mittels DFS

## Sourcecode

```
void findSCC(int u) {
    dfs_low[u] = dfs_num[u] = dfsNumberCounter++; // initialize
    S.push_back(u); visited[u] = 1; // S is Stack

    for (int j = 0; j < AdjacencyList[u].size(); j++) {
        int v = AdjacencyList[u][j]; // Pair
        if (dfs_num[v.first] == UNVISITED) // not yet visited by DFS
            findSCC(v.first);
        if (visited[v.first]) // belongs to current SCC
            dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_low[v.first]);
    }
    if (dfs_low[u] == dfs_num[u]) { // root of current SCC
        cout << "SCC_" << ++numSCC; // print vertices in SCC
        while(true) {
            int v = S.back(); S.pop_back(); visited[v] = 0;
            cout << "_" << v;
            if (u == v) break;
        }
        cout << endl;
    }
}
```

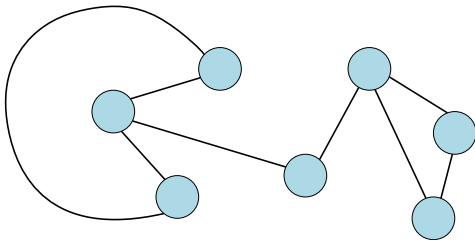
- **findSCC(int u)** findet alle SCCs, die von Knoten **u** aus erreichbar sind.
- Für vollständige Liste an SCCs **findSCC(int u)** für alle Knoten eines Graphen laufen lassen.

# Brücken und Separatoren

### Separatoren und Brücken in ungerichteten Graphen

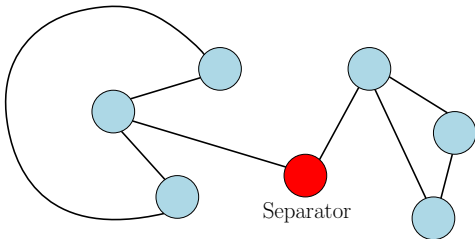
Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

- Ein Knoten  $v \in V$  heißt **Separator** von  $G$ , wenn durch sein Entfernen bestehende Zusammenhangskomponenten aufgetrennt werden.
- Eine Kante  $\{u, v\} \in E$  heißt **Brücke**, wenn durch ihr Entfernen  $u$  und  $v$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen.



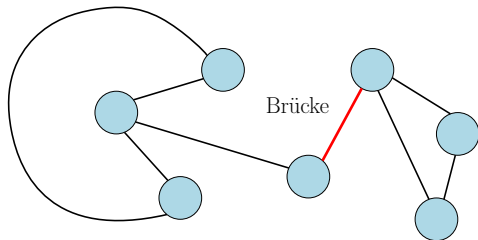
# Brücken und Separatoren

## Beispiel



# Brücken und Separatoren

## Beispiel



- Naive Herangehensweise:
  1. Entferne einen Knoten/Kante
  2. Prüfe mittels DFS/BFS ob sich eine neue Zusammenhangskomponente ergeben hat
  3. Wiederhole Schritt 1 für alle Knoten/Kanten
- Laufzeit:  $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| + |E|))$  bzw.  $\mathcal{O}(|E| \cdot (|V| + |E|))$
- Es existiert Algorithmus in  $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Basiert auf DFS und ähnelt Algorithmus zum Finden von SCCs



### Numerierung

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \mathbf{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- Wenn **dfs\_low(v)  $\geq$  dfs\_num(u)**, dann ist  $u$  ein Separator
  - Von  $v$  kann kein Knoten  $w$  "vor"  $u$  erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: **dfs\_num(w)  $>$  dfs\_num(u)**
  - Um Knoten  $w$  "vor"  $u$  zu erreichen, muss man durch  $u$  laufen.
  - $\Rightarrow u$  teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - Spezialfall: Gilt nicht, wenn  $u$  Wurzel der DFS

### Numerierung

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \mathbf{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- Wenn **dfs\_low(v)  $\geq$  dfs\_num(u)**, dann ist  $u$  ein Separator
  - Von  $v$  kann kein Knoten  $w$  "vor"  $u$  erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: **dfs\_num(w)  $>$  dfs\_num(u)**
  - Um Knoten  $w$  "vor"  $u$  zu erreichen, muss man durch  $u$  laufen.
  - $\Rightarrow u$  teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - Spezialfall: Gilt nicht, wenn  $u$  Wurzel der DFS

### Numerierung

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \mathbf{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- Wenn **dfs\_low(v)  $\geq$  dfs\_num(u)**, dann ist  $u$  ein Separator
  - Von  $v$  kann kein Knoten  $w$  "vor"  $u$  erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: **dfs\_num(w)  $>$  dfs\_num(u)**
  - Um Knoten  $w$  "vor"  $u$  zu erreichen, muss man durch  $u$  laufen.
  - $\Rightarrow u$  teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - Spezialfall: Gilt nicht, wenn  $u$  Wurzel der DFS

### Numerierung

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \text{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- Wenn **dfs\_low(v) > dfs\_num(u)**, dann ist  $\{u, v\}$  eine Brücke
  - Von  $v$  kann Knoten  $u$  nur über die Kante  $u, v$  erreicht werden.
  - Ansonsten **dfs\_low(v)  $\leq$  dfs\_num(u)**.
  - $\Rightarrow \{u, v\}$  teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.

### Numerierung

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs\_num(u)**: Speichert Schritt, in dem Knoten  $u$  von DFS besucht wurde.
  2. **dfs\_low(u)**:  $\min \{ \mathbf{dfs\_num}(v) \mid v \text{ erreichbar von } u \}$
- Wenn **dfs\_low(v) > dfs\_num(u)**, dann ist  $\{u, v\}$  eine Brücke
  - Von  $v$  kann Knoten  $v$  nur über die Kante  $u, v$  erreicht werden.
  - Ansonsten **dfs\_low(v) seq dfs\_num(u)**.
  - $\Rightarrow \{u, v\}$  teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.

# Brücken und Separatoren

## Illustration des Algorithmus'

- $\text{dfs num}(A) = 0$

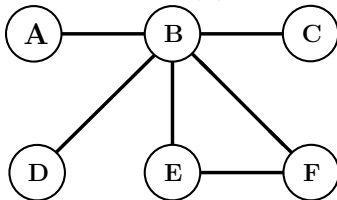
- $\text{dfs low}(A) = 0$

- $\text{dfs num}(B) = 1$

- $\text{dfs low}(B) = 1$

- $\text{dfs num}(C) = 2$

- $\text{dfs low}(C) = 2$



- $\text{dfs num}(D) = 3$

- $\text{dfs low}(D) = 3$

- $\text{dfs num}(E) = 4$

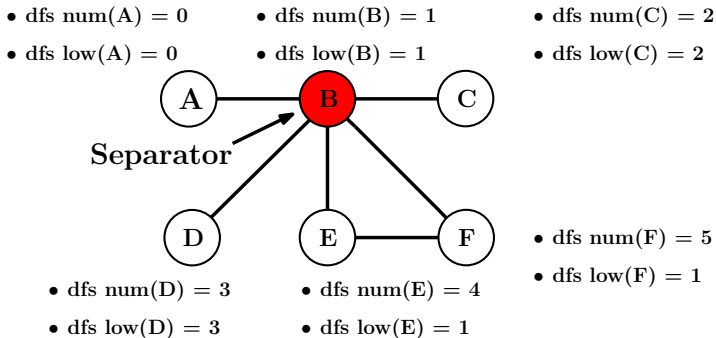
- $\text{dfs low}(E) = 1$

- $\text{dfs num}(F) = 5$

- $\text{dfs low}(F) = 1$

# Brücken und Separatoren

## Illustration des Algorithmus'



# Brücken und Separatoren

## Illustration des Algorithmus'

- $\text{dfs num}(A) = 0$

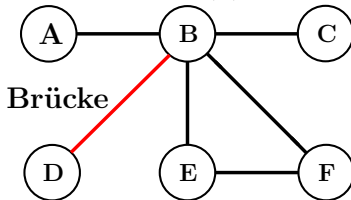
- $\text{dfs low}(A) = 0$

- $\text{dfs num}(B) = 1$

- $\text{dfs low}(B) = 1$

- $\text{dfs num}(C) = 2$

- $\text{dfs low}(C) = 2$



- $\text{dfs num}(D) = 3$

- $\text{dfs low}(D) = 3$

- $\text{dfs num}(E) = 4$

- $\text{dfs low}(E) = 1$

- $\text{dfs num}(F) = 5$

- $\text{dfs low}(F) = 1$