Karlsruher Institut für Technologie

Graphen I

Gustavo Crivelli, Beini Ma, Matthias Schimek, Matthias Schmitt

ICPC-Praktikum 2015 - Graphen I

Gliederung

Bipartite Graphen

Bipartite Graphen

Definition

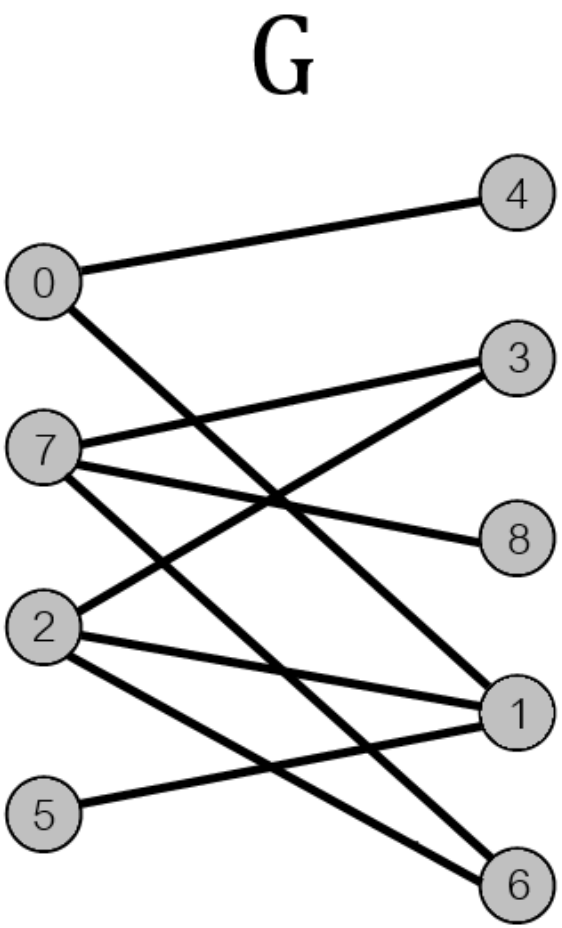
Separatoren und Brücken in ungerichteten Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- G heißt **Bipartite** falls sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen A, B aufteilen lassen, so dass es zwischen den Knoten innerhalb einer Teilmenge keine Kanten gibt.
- Das heißt, für jeder Kante $\{u, v\} \in E$ gilt entweder $u \in A$ und $v \in B$ oder $u \in B$ und $v \in A$.

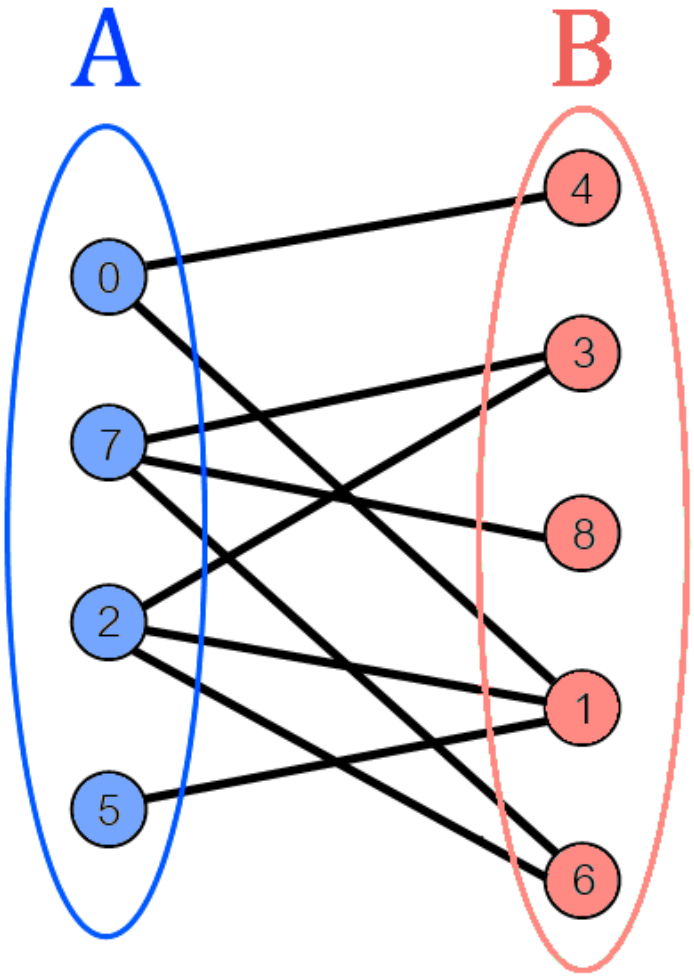
Bipartite Graphen

Beispiel



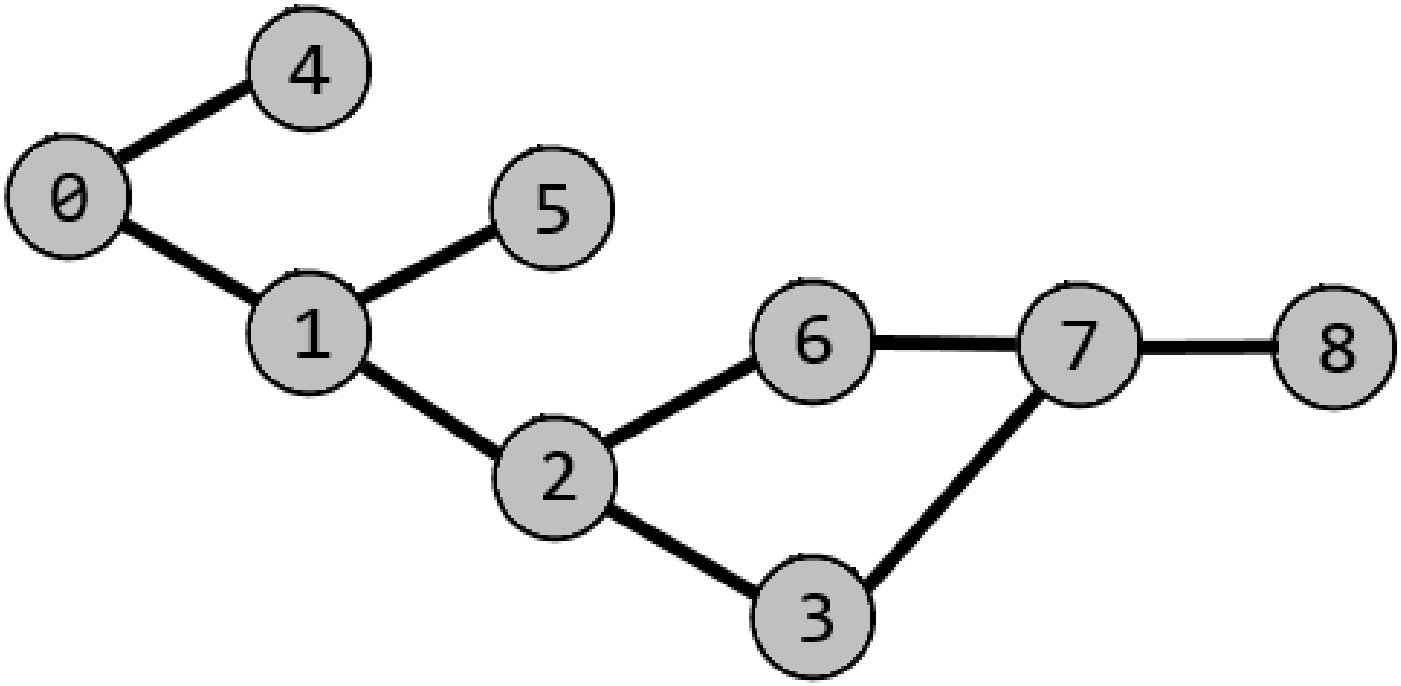
Bipartite Graphen

Beispiel



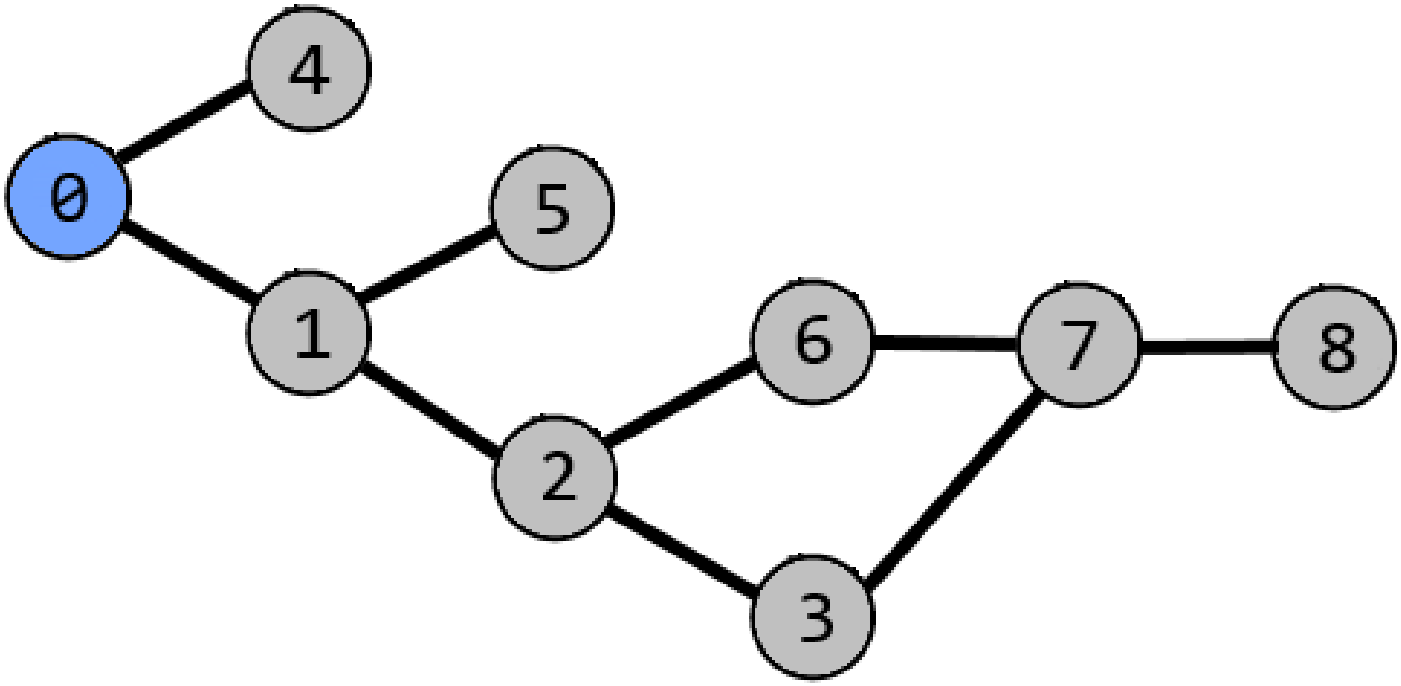
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



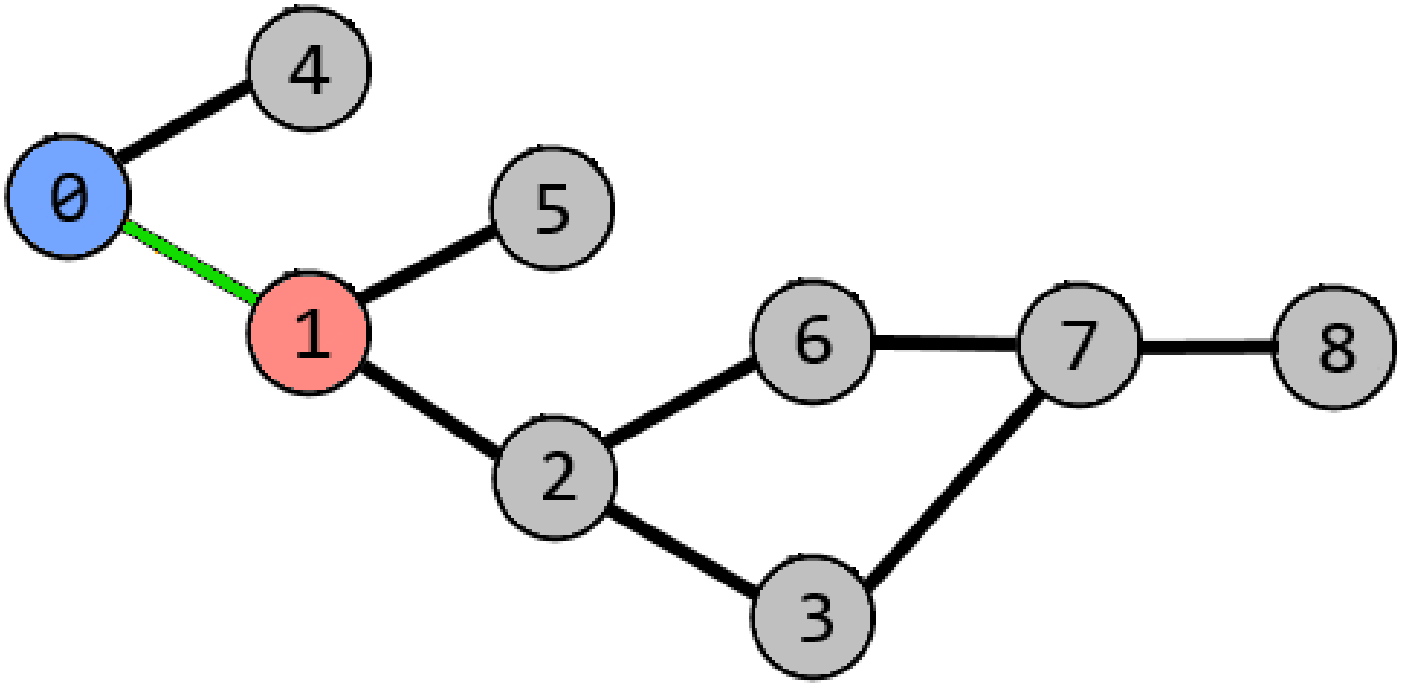
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



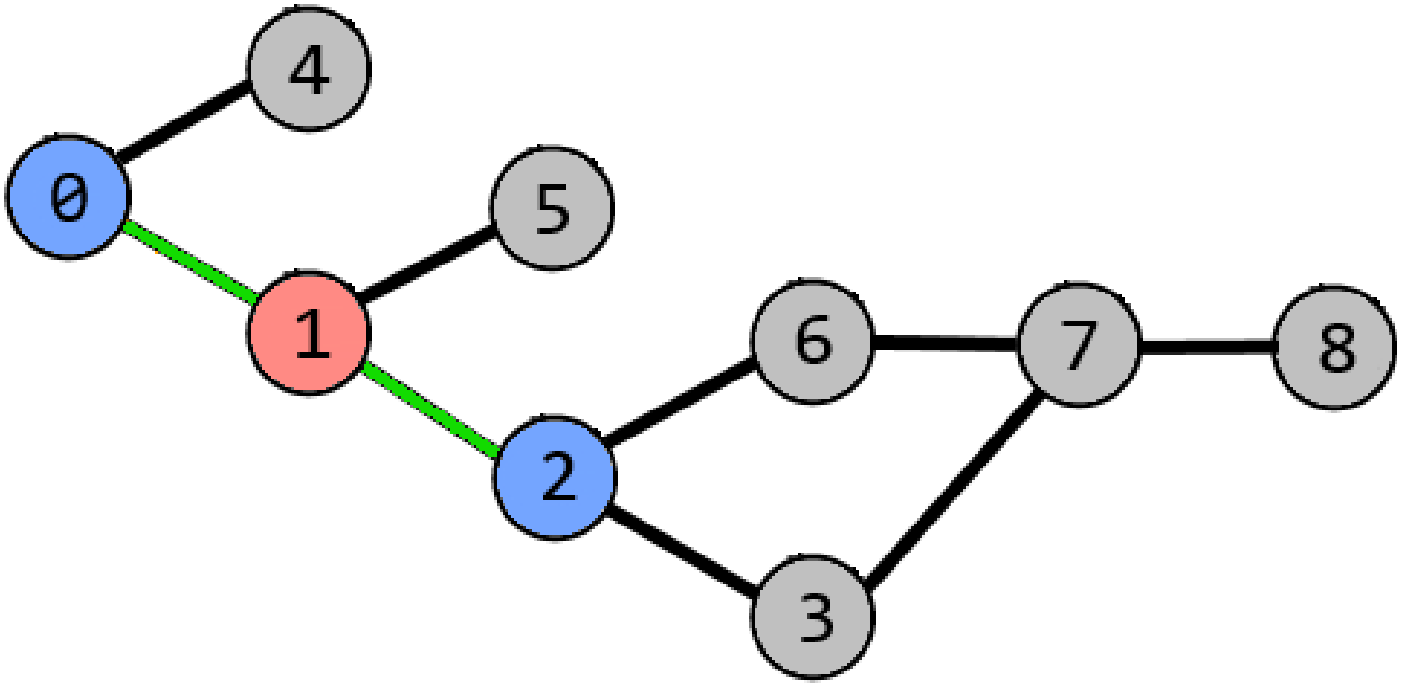
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



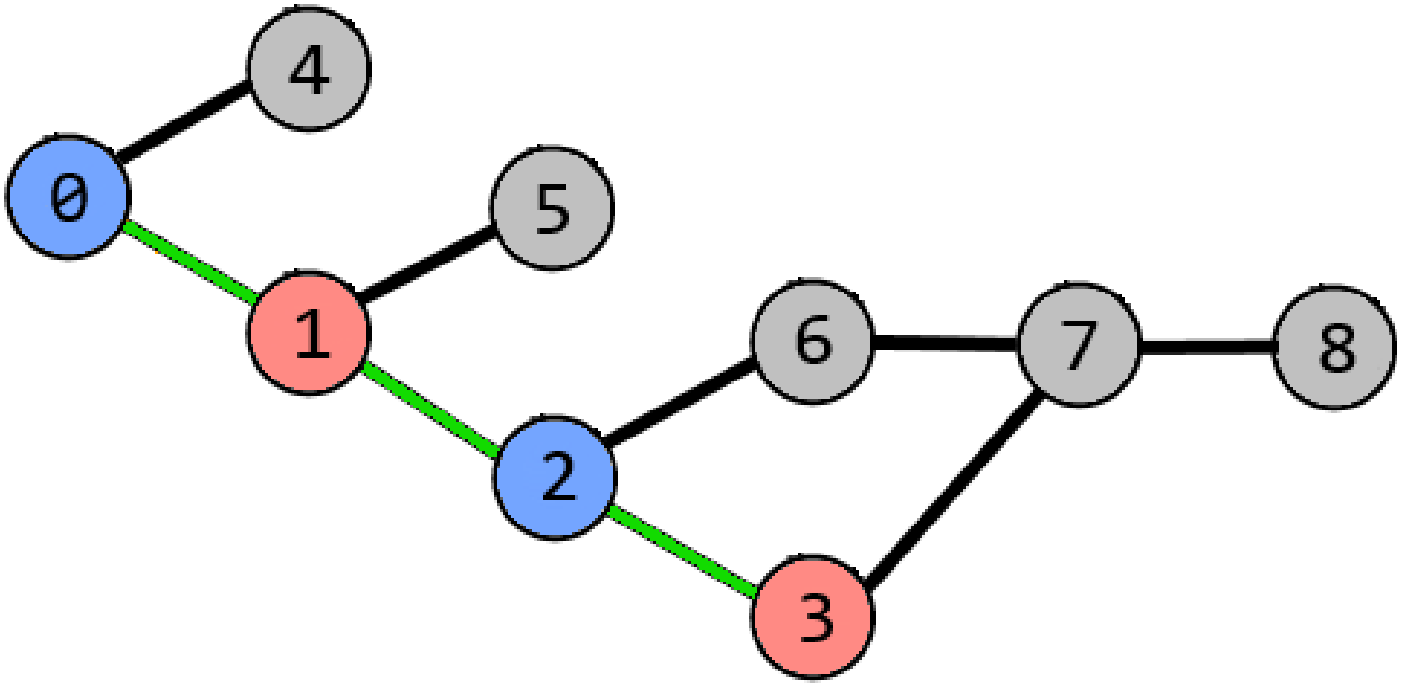
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



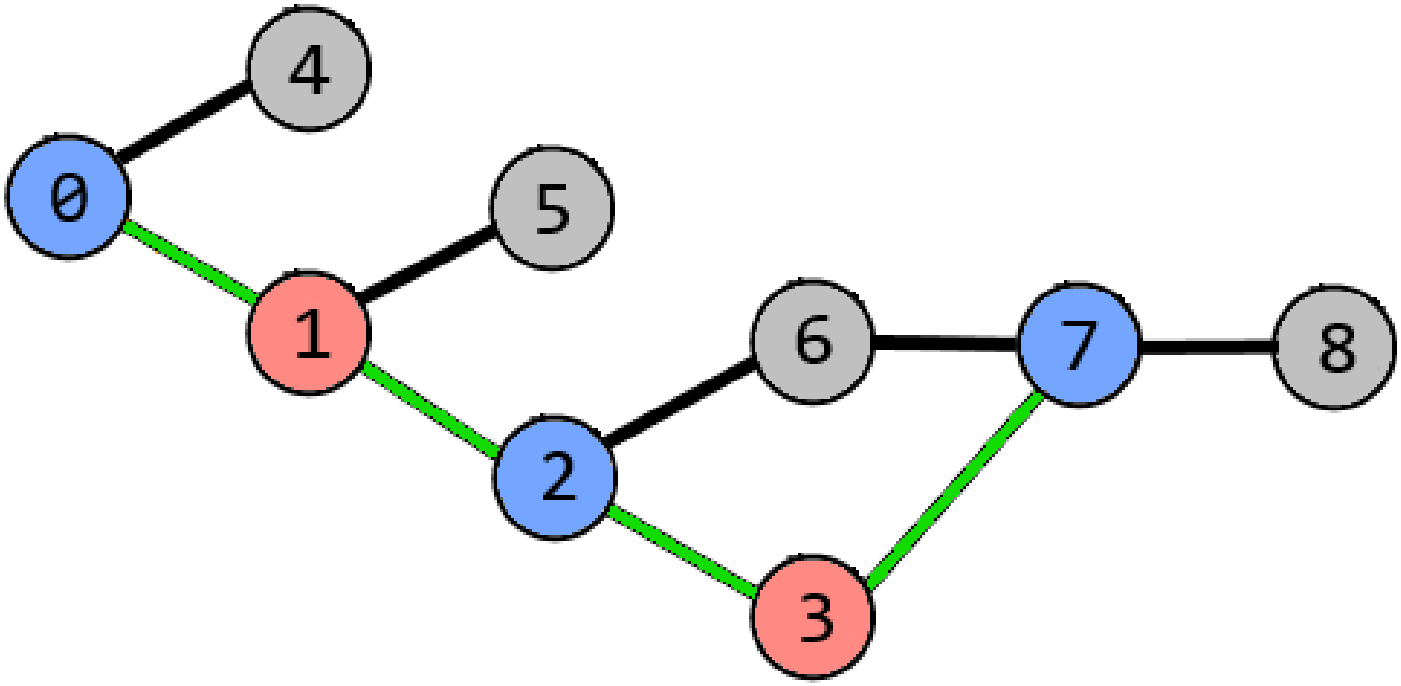
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



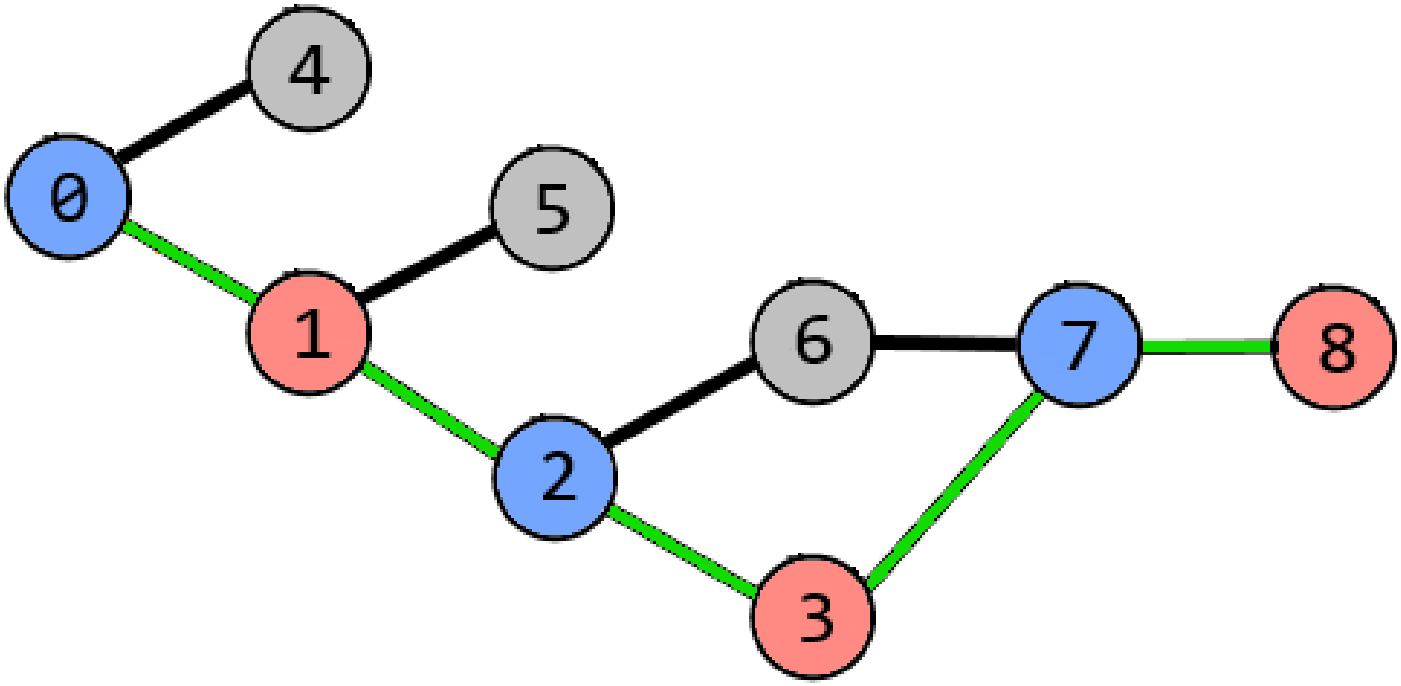
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



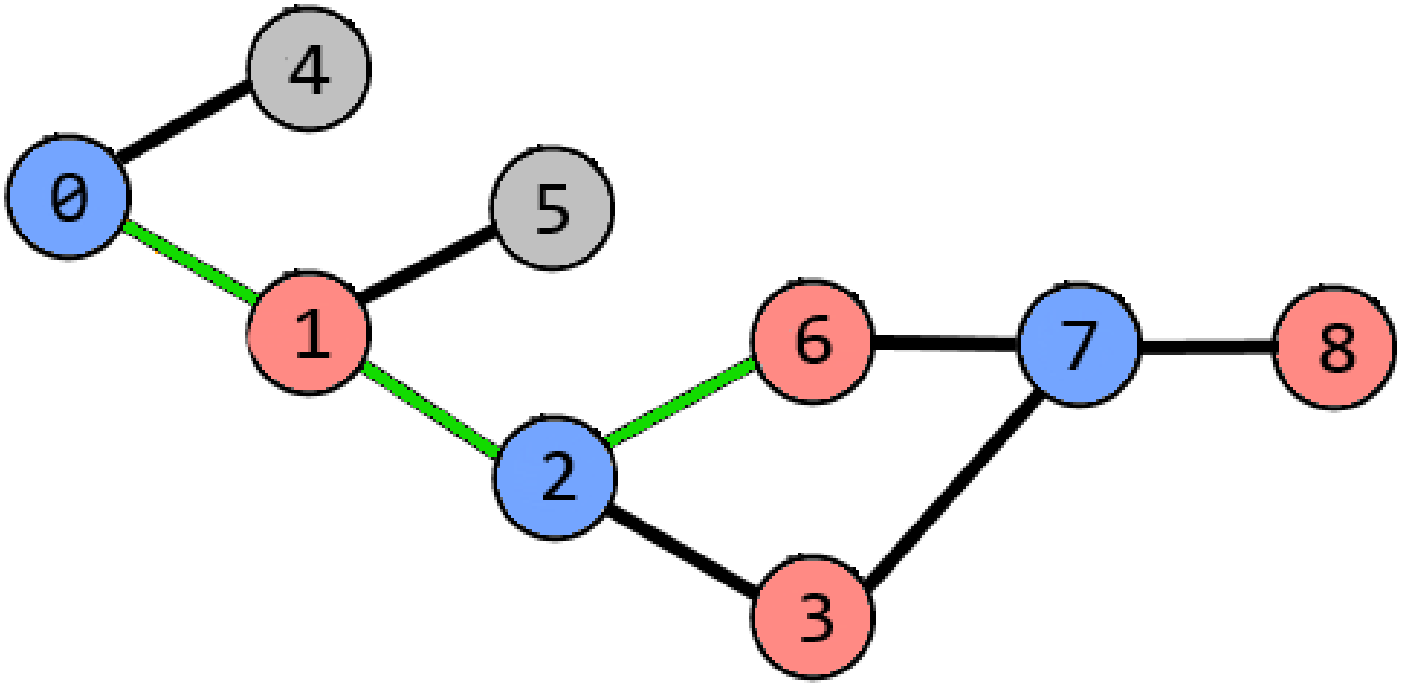
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



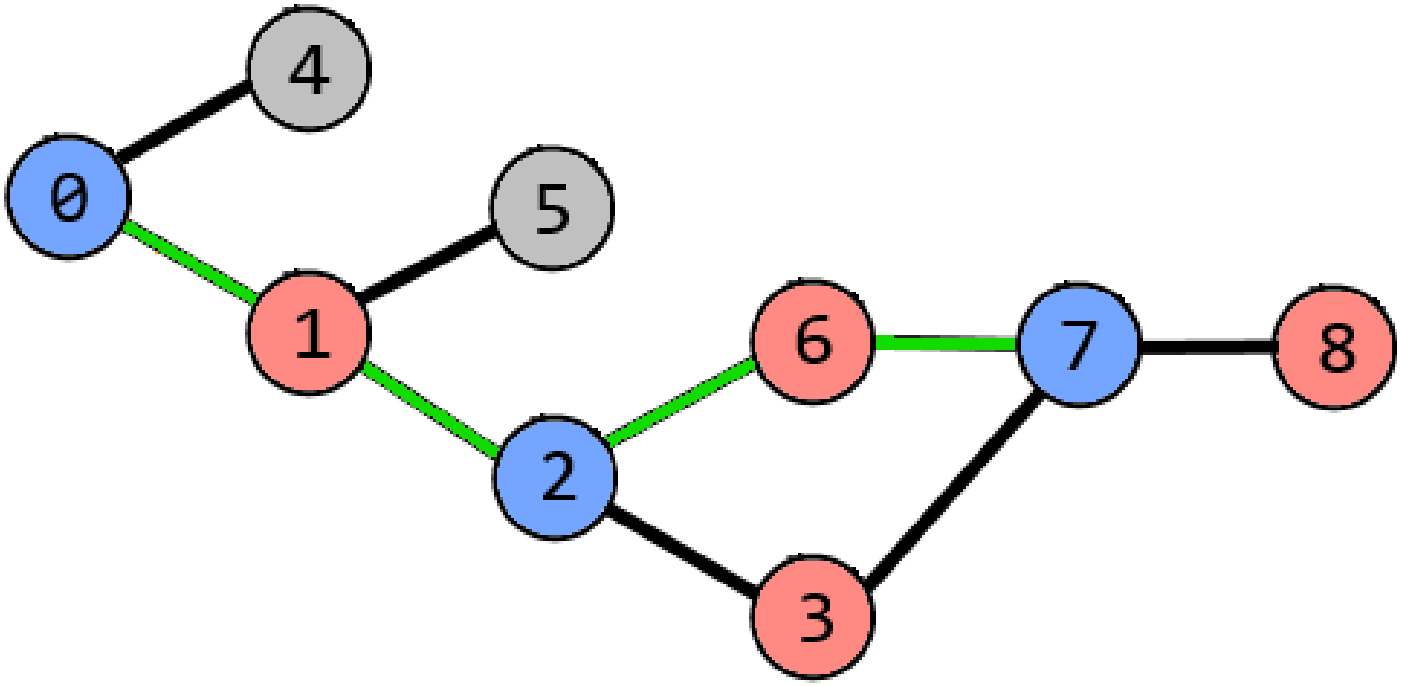
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



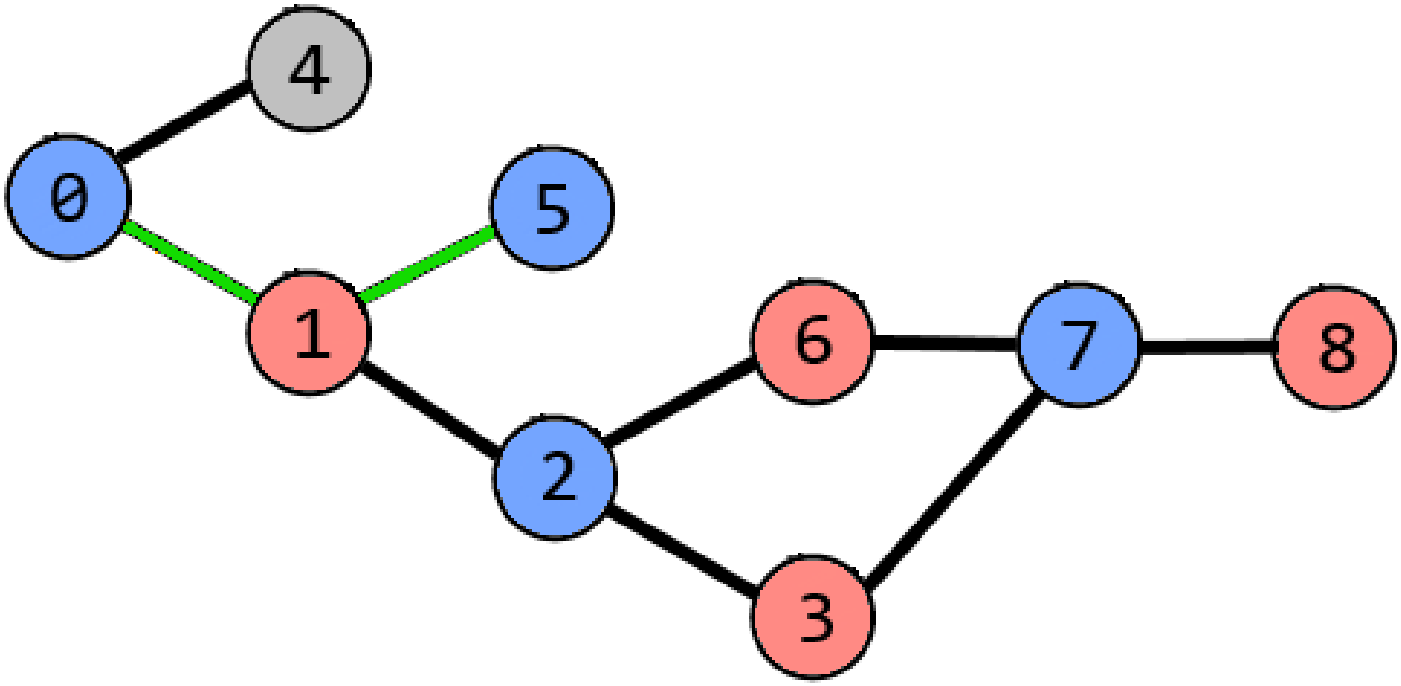
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



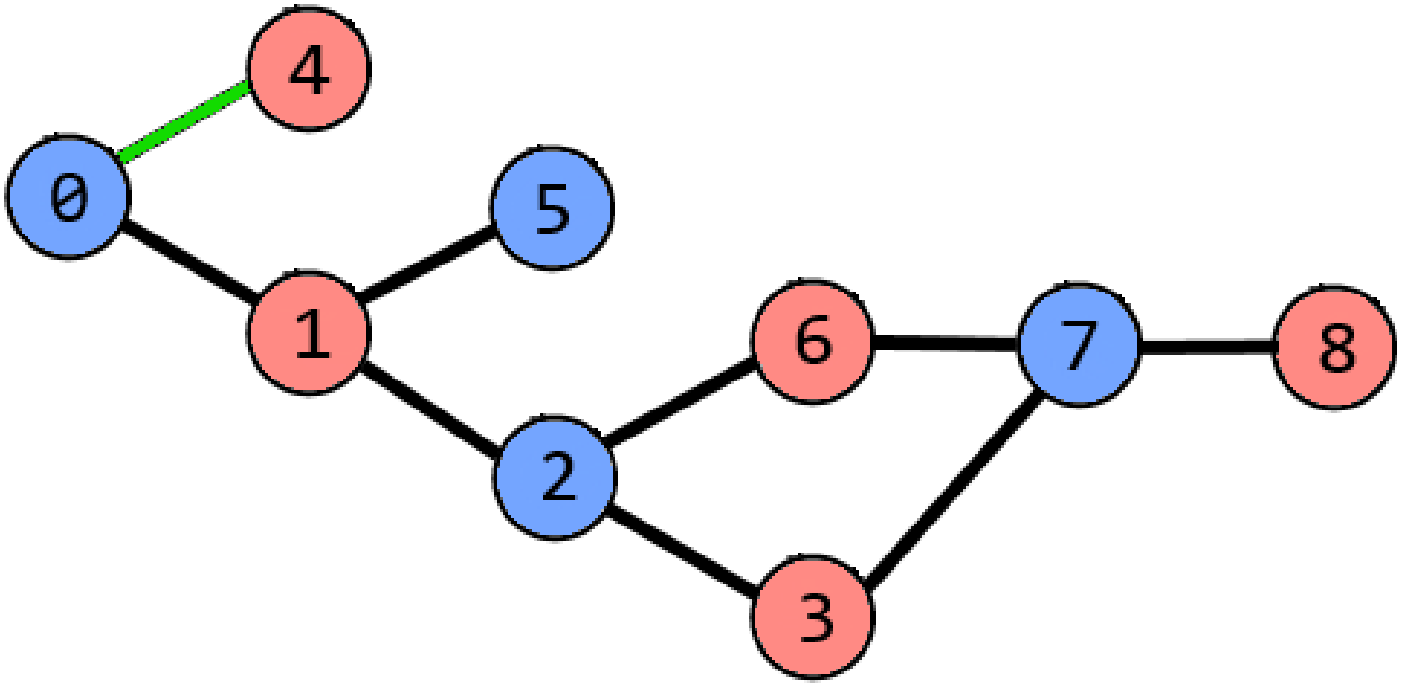
Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus



Bipartite Graph Check

DFS Algorithmus

```
vector< vector<int> > adjList;
vector<int> colorDFS[200];
const int UNVISITED = -1, NOT_BIP = 0, BIP = 1;
int solveDFS(int v, int color) //int main() -> solveDFS(0,0)
{
    if(colorDFS[v] == UNVISITED)
    {
        colorDFS[v] = color;
        for(int i = 0; i < adjList[v].size(); i++)
            if(solveDFS(adjList[v][i], 1 - color) == NOT_BIP)
                return NOT_BIP;
    }
    else if(colorDFS[v] != color)
        return NOT_BIP;
    return BIP;
}
```

Bipartite Graph Check

BFS Algorithmus

```
vector< vector<int> > adjList;
const int UNVISITED = -1, NOT_BIP = 0, BIP = 1;

int checkBFS(int nVertex) {
    vector<int> color(nVertex, UNVISITED);
    queue<int> q; q.push(0);
    while(!q.empty()) {
        int vertex = q.front(); q.pop();
        for(int i = 0; i < adjList[vertex].size(); i++) {
            int next = adjList[vertex][i];
            if(color[next] == UNVISITED) {
                color[next] = 1 - color[vertex];
                q.push(next); }
            else if(color[next] == color[vertex])
                return NOT_BIP;
        }
    }
    return BIP;
}
```

Iterative Tiefensuche

Iterative Tiefensuche

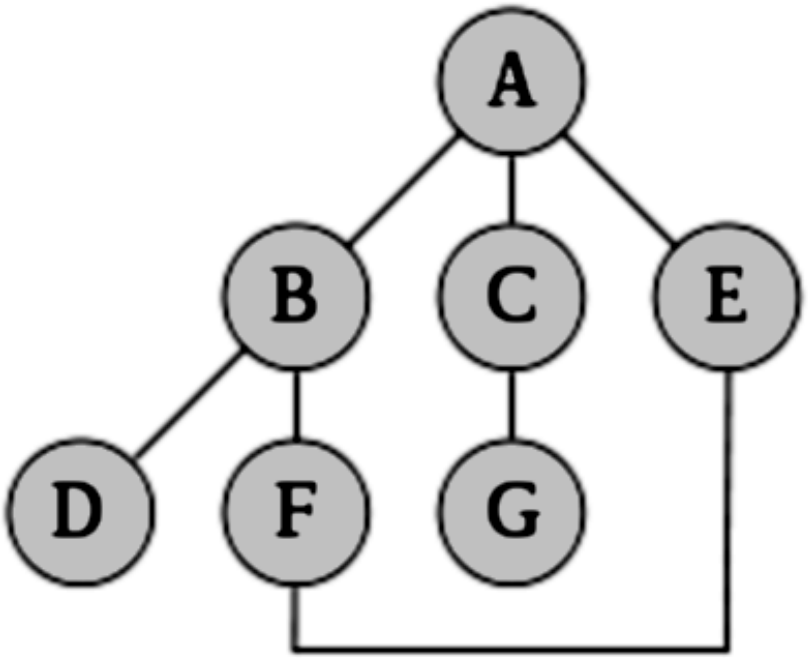
Idee des Algorithmus

- DFS Algorithmus mit begrenzt Suchtiefe, repetiert mit steigenden Werte.
- Besucht neue Knoten in BFS Ordnung, hat aber geringer Speicherverbrauch als BFS
  - BFS Speicherverbrauch: $\mathcal{O}(b^d)$
  - Iterative Tiefensuche Speicherverbrauch: $\mathcal{O}(bd)$

  Wo b (*branching factor*) die durchschnittliche Zahl Nachbarn eines Knotens ist,

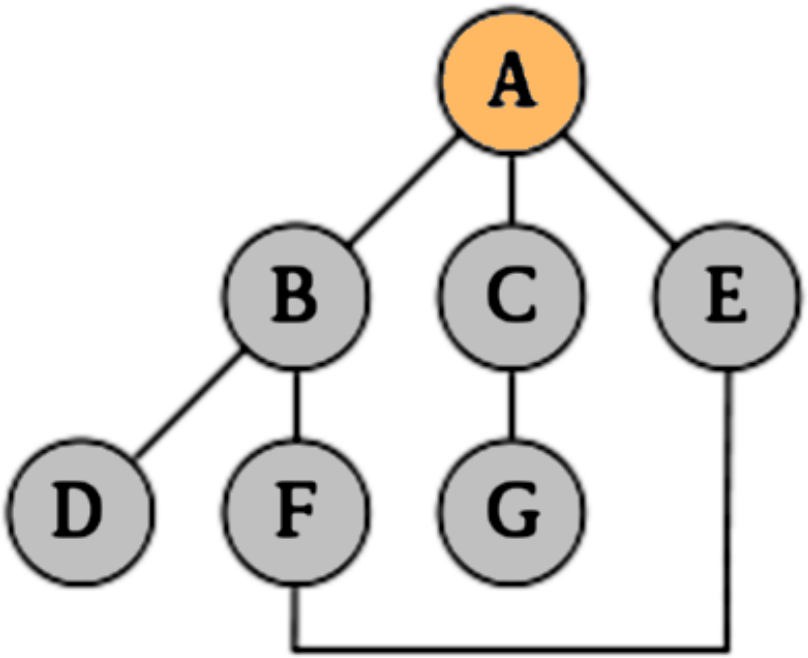
  und d die Tiefe des flachsten Ziels.
- Laufzeit: $\mathcal{O}(b^d)$

Iterative Tiefensuche



Anfang: A

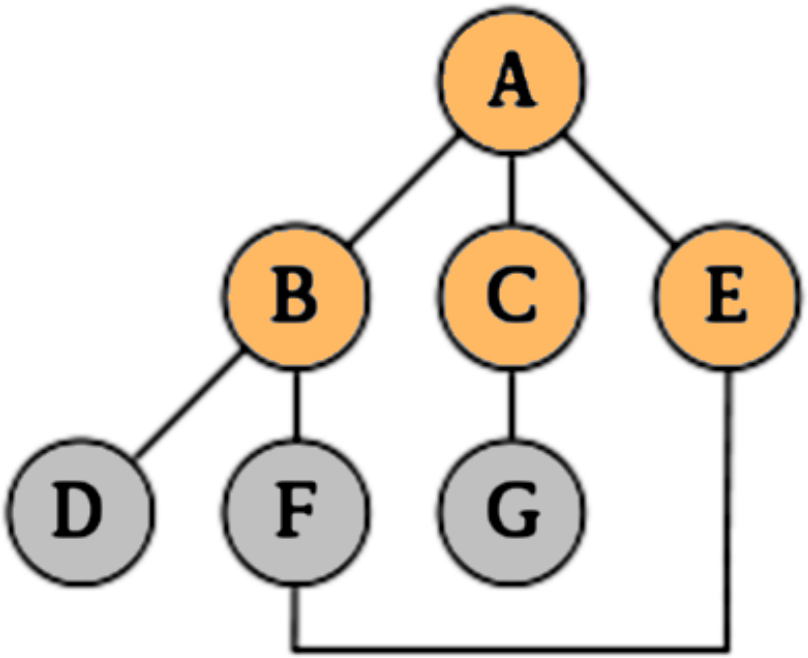
Iterative Tiefensuche



Anfang: A

d = 0: A

Iterative Tiefensuche

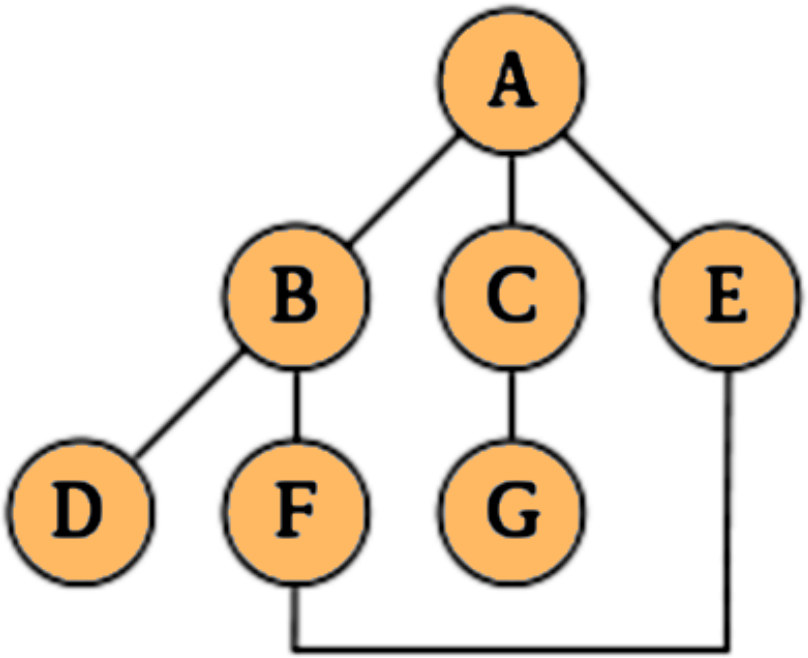


Anfang: A

d = 0: A

d = 1: ABCE

Iterative Tiefensuche



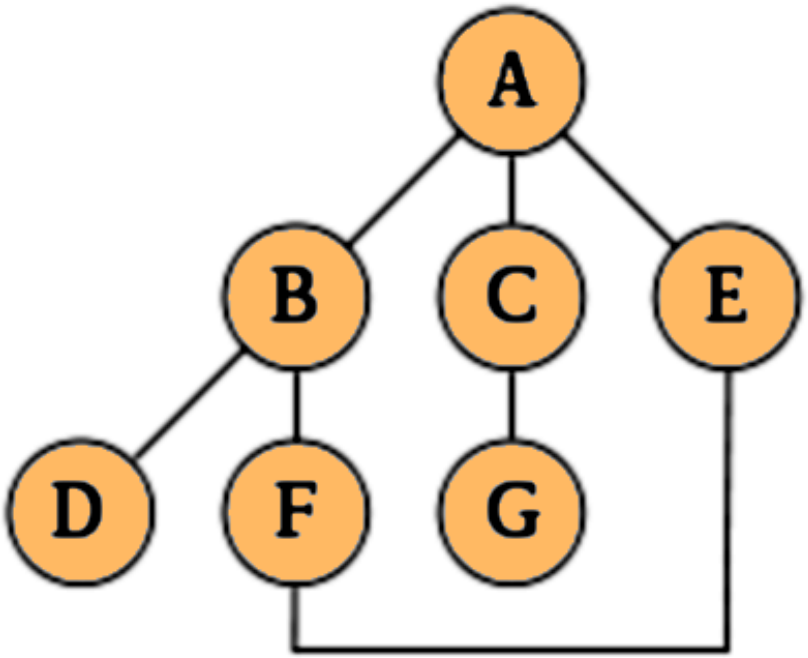
Anfang: A

d = 0: A

d = 1: ABCE

d = 2: ABDFCGEF

Iterative Tiefensuche



Anfang: A

d = 0: A

d = 1: ABCE

d = 2: ABDFCGEF

d = 3: ABDFECGEFB

Iterative Tiefensuche

Rekursive begrenzt DFS Algorithmus

```
vector< vector<int> > adjList;
const int LIMITBREAK = -1;

int iterativeDFS(int origin)
{
    int depth = 0, found = LIMITBREAK;
    while(found == LIMITBREAK)
    {
        found = limitedDFS(origin,depth);
        depth++;
    }
    return found;
}
```

Iterative Tiefensuche

Rekursive begrenzt DFS Algorithmus

```
int limitedDFS(int v, int depth)
{
    if(depth == 0 && v == goal)
        return v;
    else if(depth > 0)
    {
        for(int i = 0; i < adjList[v].size(); i++)
        {
            int found = limitedDFS(adjList[v][i], depth-1);
            if(found != LIMITBREAK)
                return found;
        }
    }
    return LIMITBREAK;
}
```

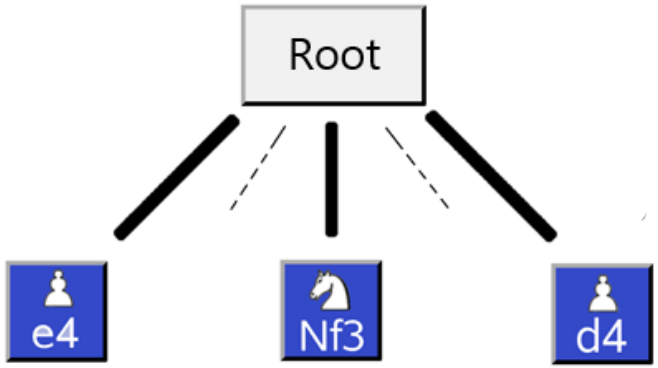
Iterative Tiefensuche

Schach

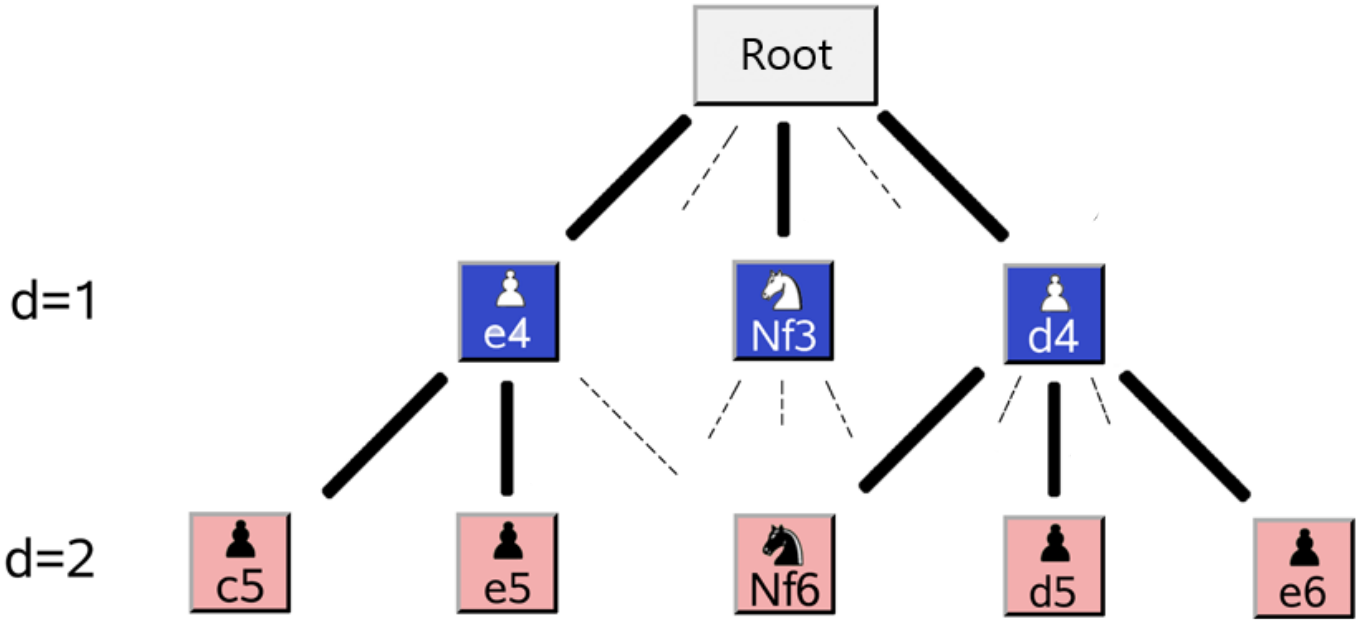
- Besonders sinnvoll für Probleme, die hoch branching factor haben, z.B.: **Schach**
- Im Durchschnitt hat ein Schachspieler für jeder Position 35~38 mögliche Bewegungen
- Iterative Tiefensuche findet die beste Bewegung bis zum eine Tiefe T, innerhalb ein Zeitlimit

Iterative Tiefensuche

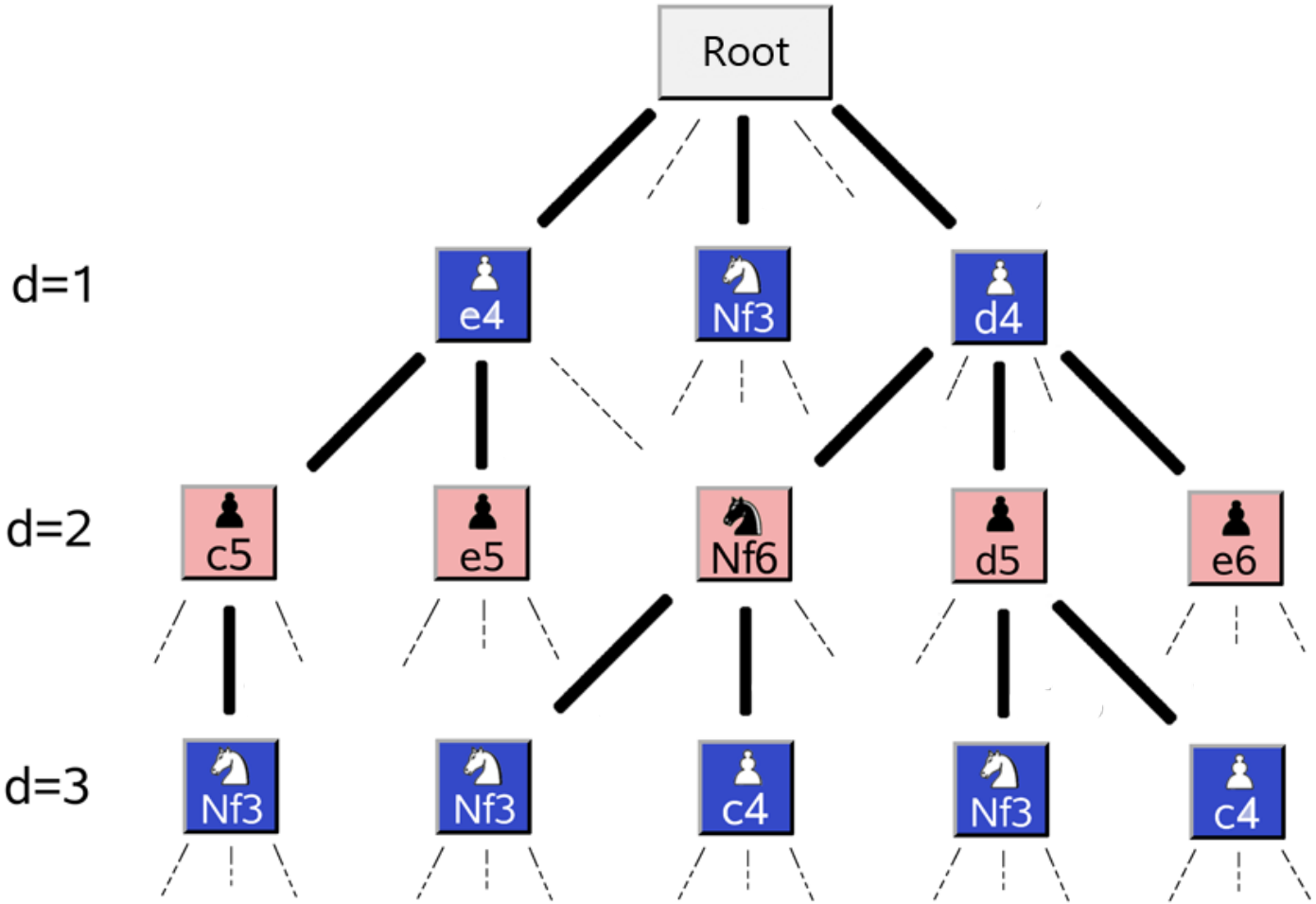
d=1



Iterative Tiefensuche



Iterative Tiefensuche



Starke Zusammenhangskomponenten

SCCs finden mittels DFS

Beispielaufgabe

UVa 11383 Come and Go

In einer Stadt gibt es N Kreuzungen, die durch Straßen verbunden sind. Da man in der Stadt von einem Punkt (Kreuzung) zu jedem anderen kommen möchte, sollte es eine Verbindung zwischen zwei beliebigen Kreuzungen geben.
Für eine gegebene Stadt mit N Kreuzungen und M Straßen soll entschieden werden, ob dies möglich ist.

Definition Strongly Connected Components SCC

In einem gerichteten Graph $G = (V, E)$, wird $V' \subseteq V$ starke Zusammenhangskomponente (SCC) genannt, wenn zwischen je zwei Knoten in V' ein Pfad existiert.

SCCs finden mittels DFS

Beispielaufgabe

UVa 11383 Come and Go

In einer Stadt gibt es N Kreuzungen, die durch Straßen verbunden sind. Da man in der Stadt von einem Punkt (Kreuzung) zu jedem anderen kommen möchte, sollte es eine Verbindung zwischen zwei beliebigen Kreuzungen geben.
Für eine gegebene Stadt mit N Kreuzungen und M Straßen soll entschieden werden, ob dies möglich ist.

Definition Strongly Connected Components SCC

In einem gerichteten Graph $G = (V, E)$, wird $V' \subseteq V$ starke Zusammenhangskomponente (SCC) genannt, wenn zwischen je zwei Knoten in V' ein Pfad existiert.

SCCs finden mittels DFS

- Zum Lösen der Aufgabe untersuchen, ob das Straßennetz der Stadt aus einer oder mehreren SCCs besteht.
- $\Rightarrow$ Benötigen effizienten Algorithmus zum Finden von SCCs

Algorithmus von Tarjan für SCCs

- Wurde von Robert Tarjan gefunden
- Basiert auf dem Konzept der DFS
- Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

SCCs finden mittels DFS

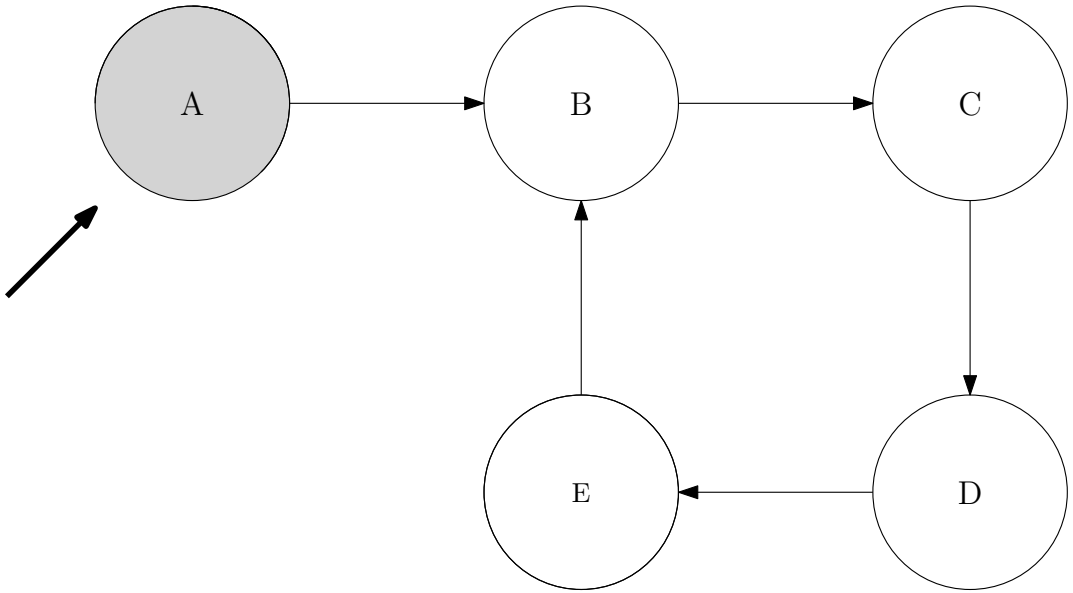
- Zum Lösen der Aufgabe untersuchen, ob das Straßennetz der Stadt aus einer oder mehreren SCCs besteht.
- $\Rightarrow$ Benötigen effizienten Algorithmus zum Finden von SCCs

Algorithmus von Tarjan für SCCs

- Wurde von Robert Tarjan gefunden
- Basiert auf dem Konzept der DFS
- Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

SCCs finden mittels DFS

- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0



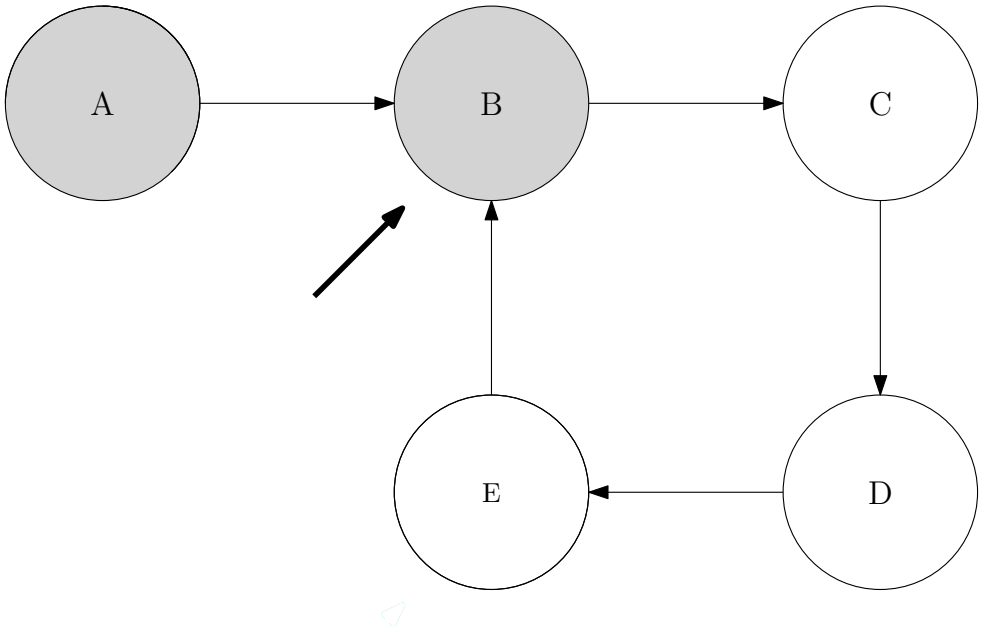
STACK:

- A

SCCs finden mittels DFS

- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

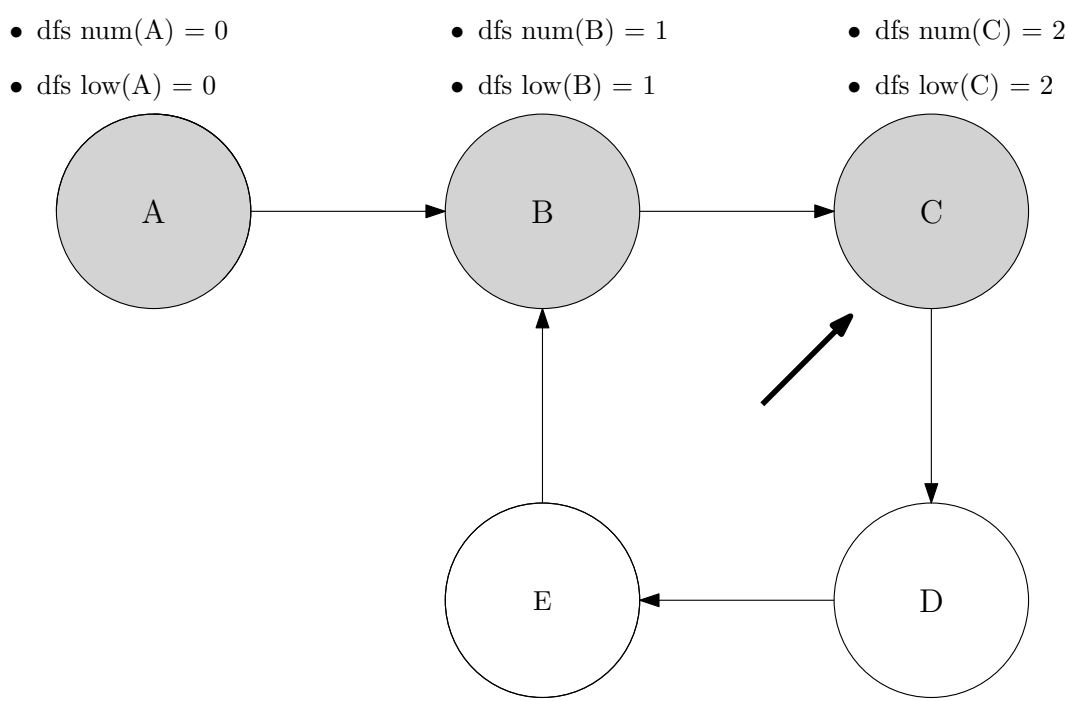
- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = 1



STACK:

- A
- B

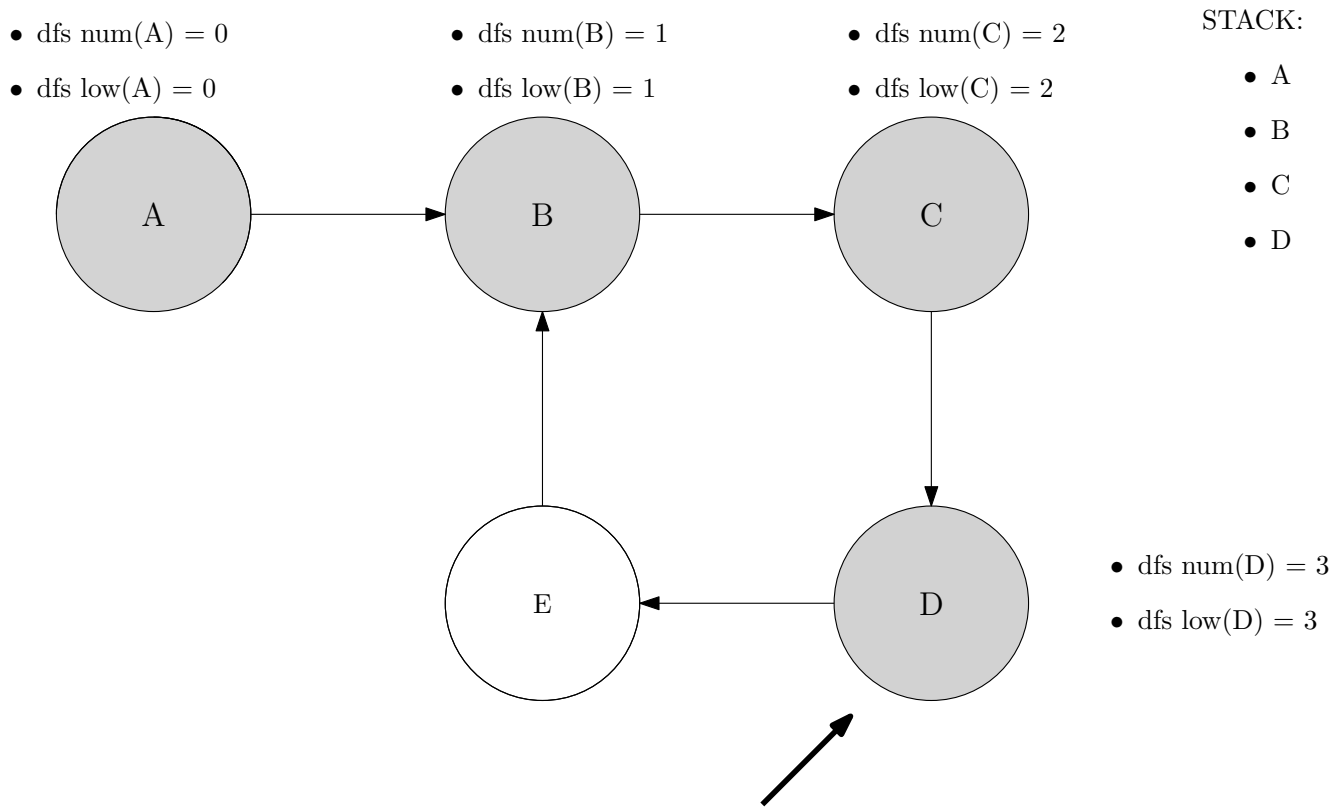
SCCs finden mittels DFS



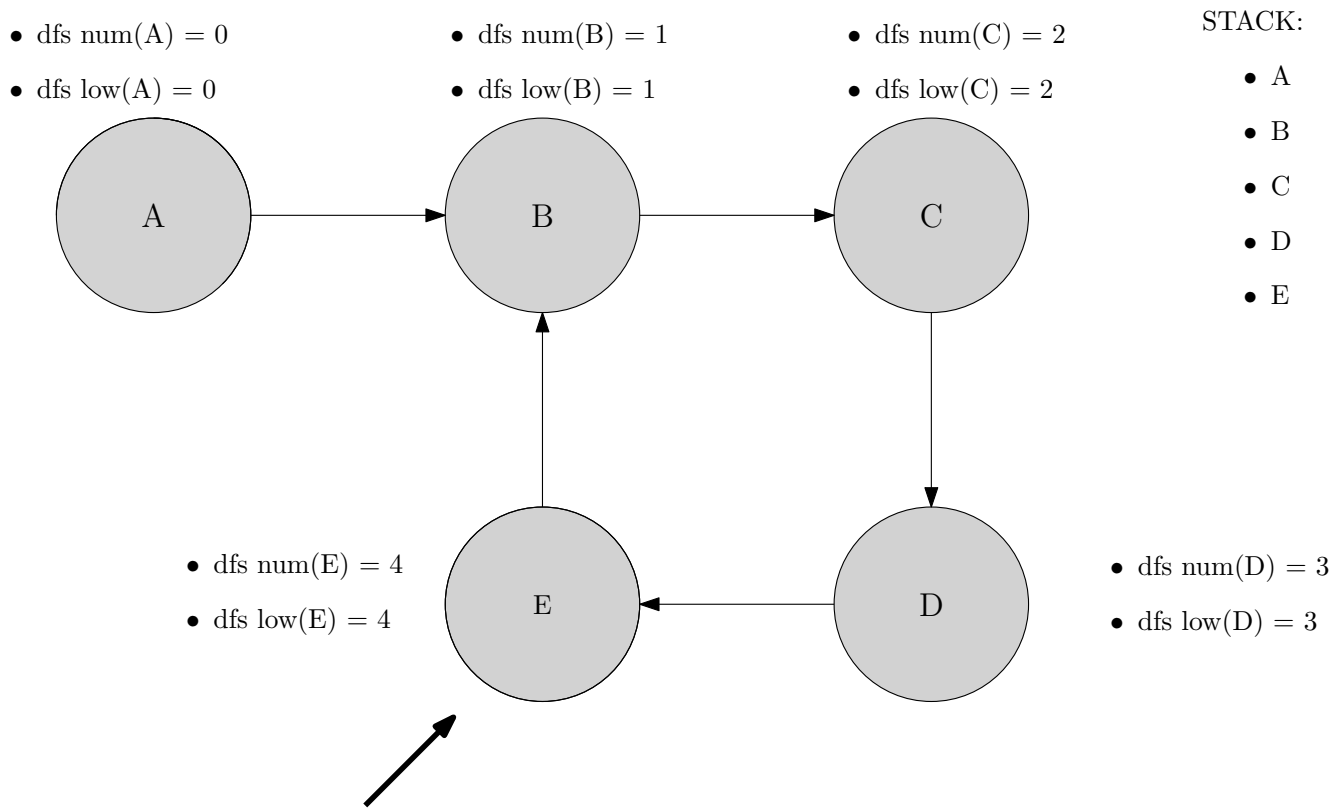
STACK:

- A
- B
- C

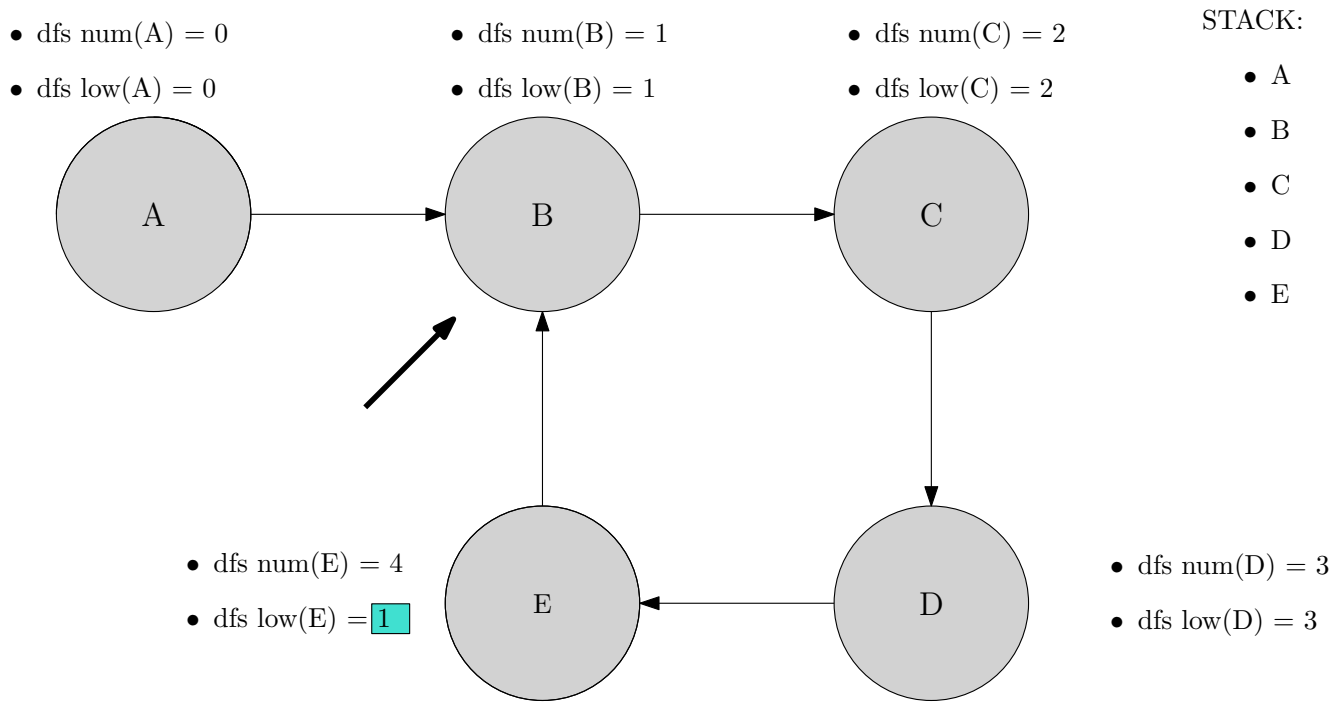
SCCs finden mittels DFS



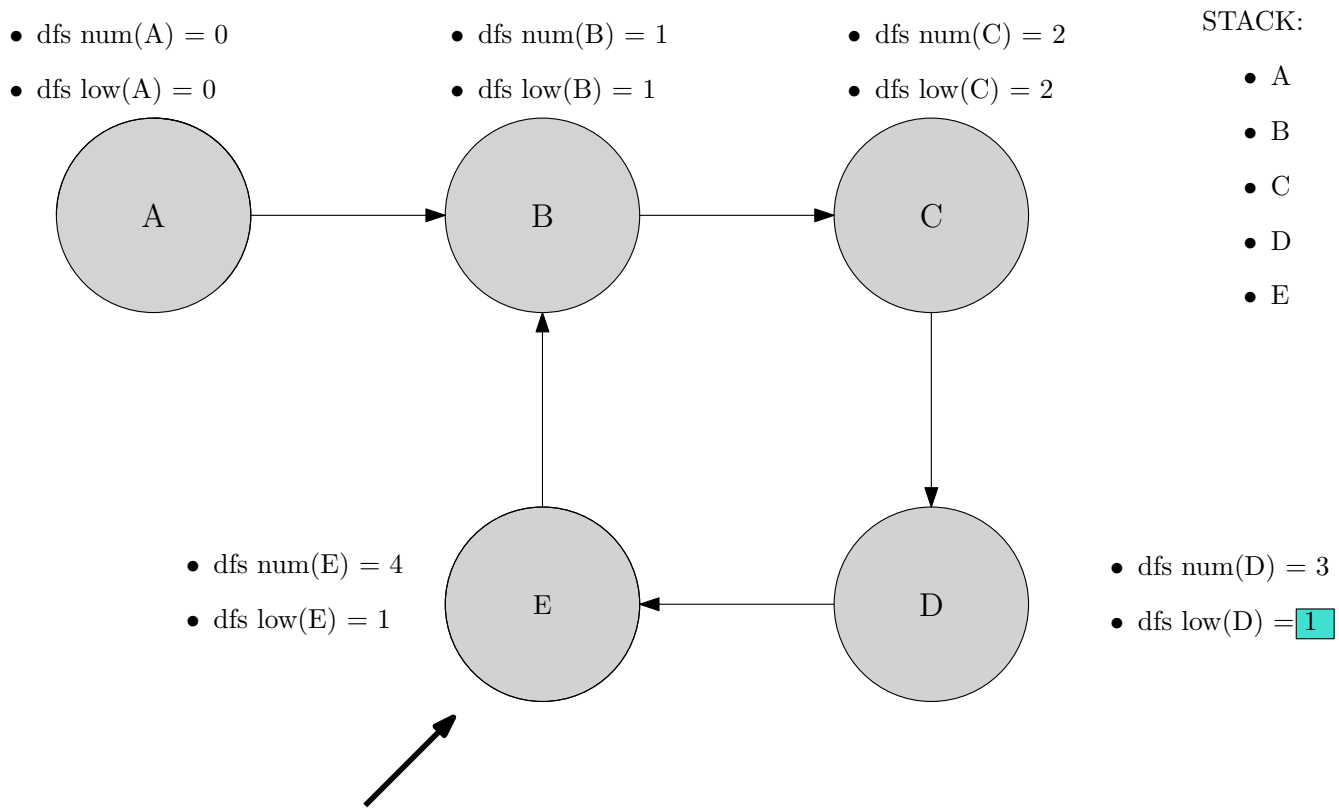
SCCs finden mittels DFS



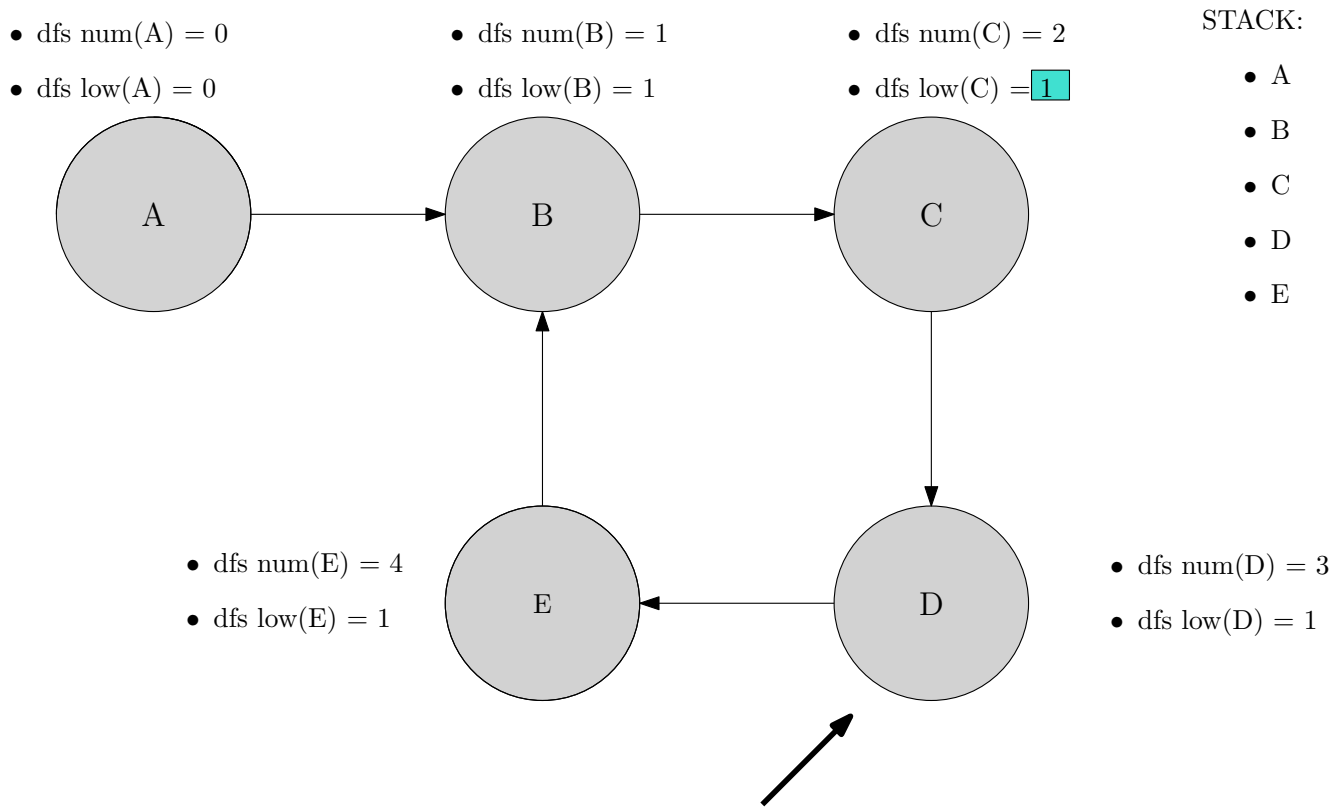
SCCs finden mittels DFS



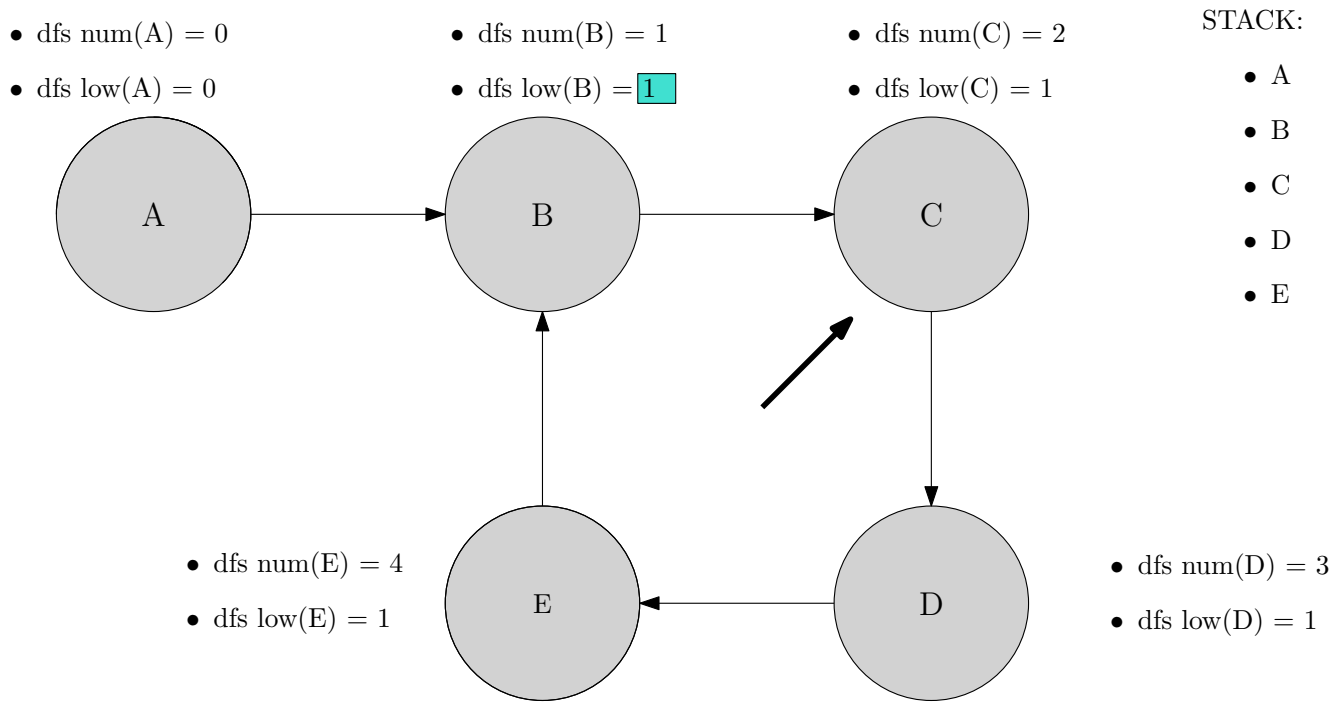
SCCs finden mittels DFS



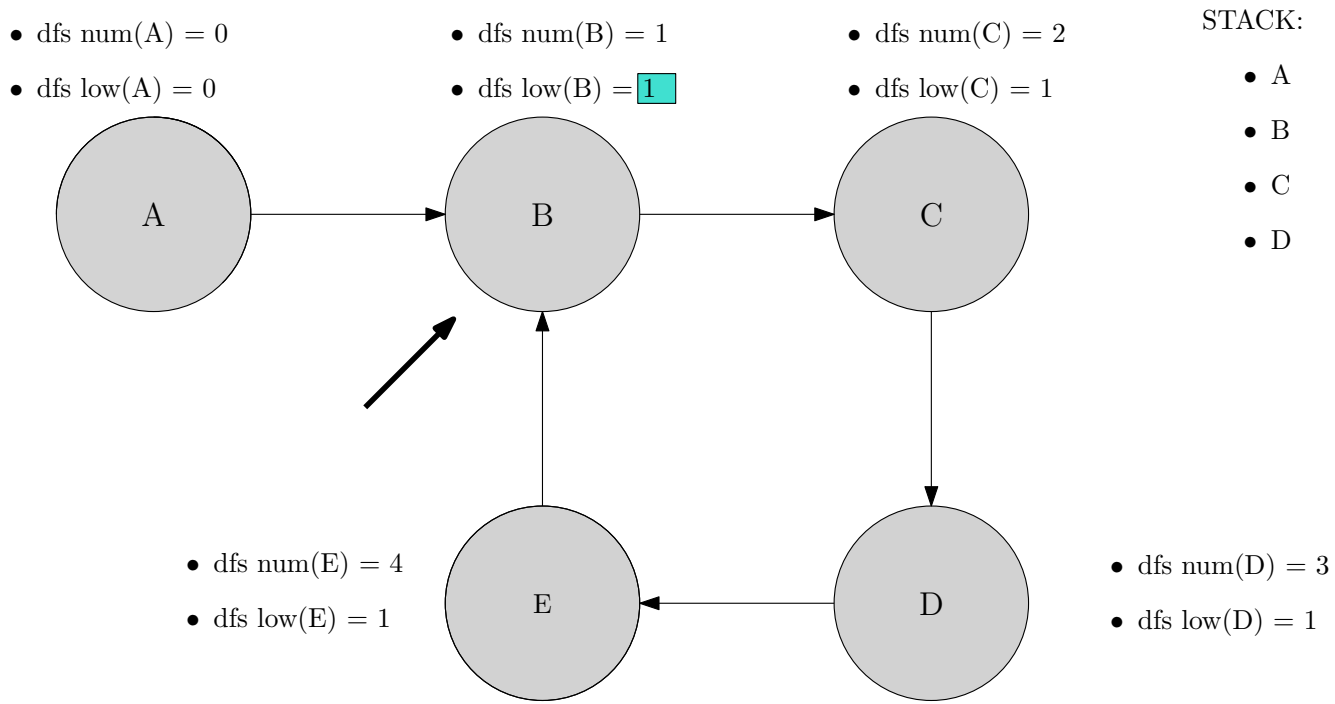
SCCs finden mittels DFS



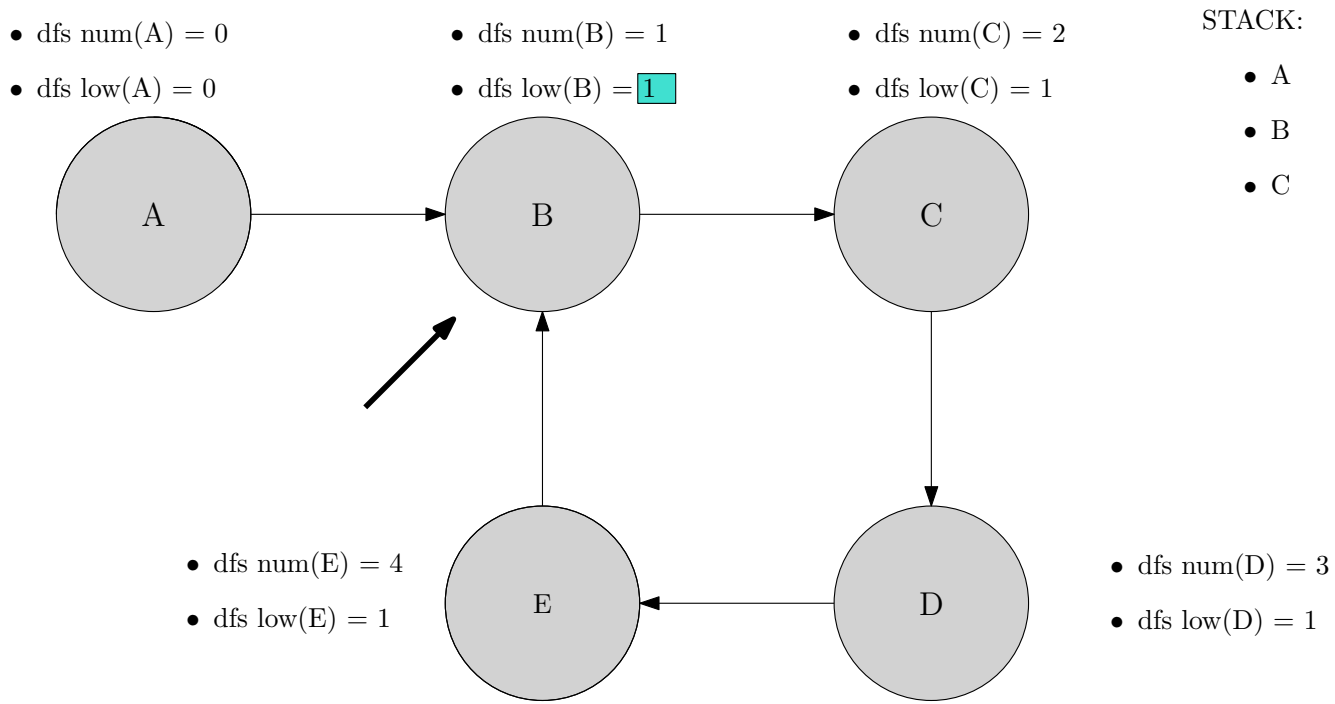
SCCs finden mittels DFS



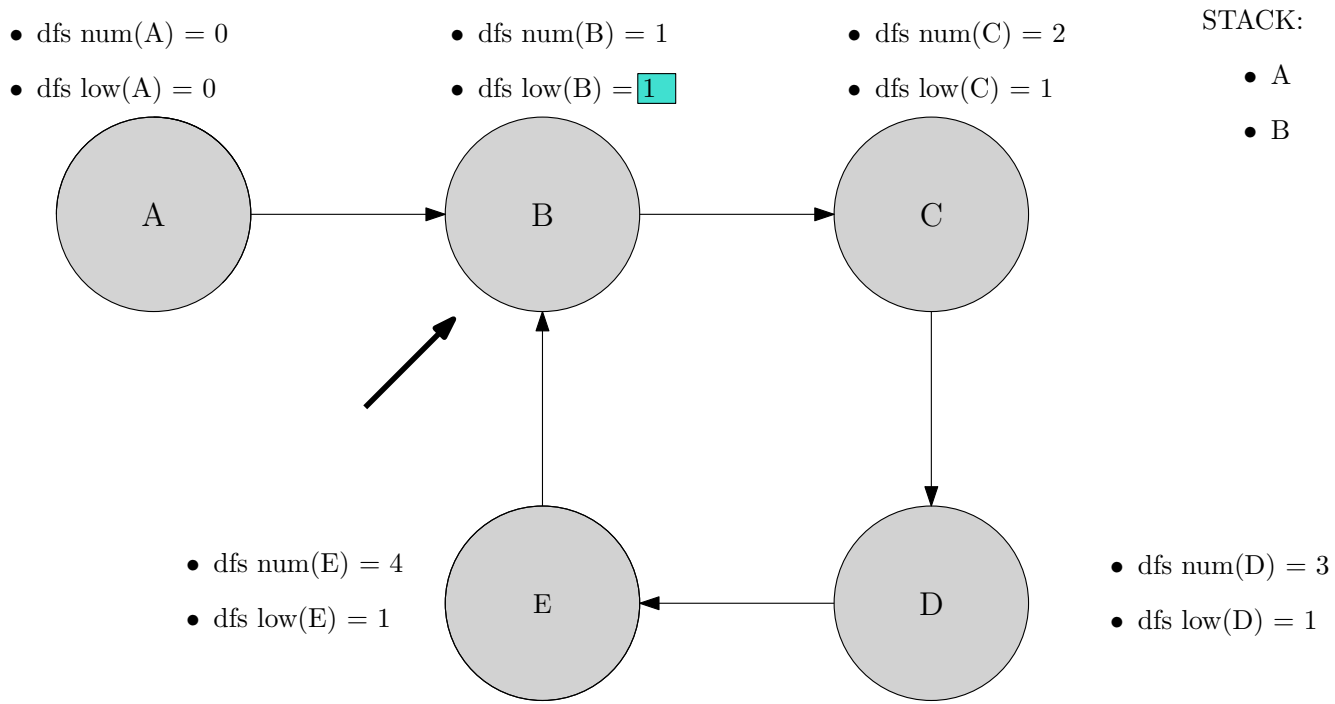
SCCs finden mittels DFS



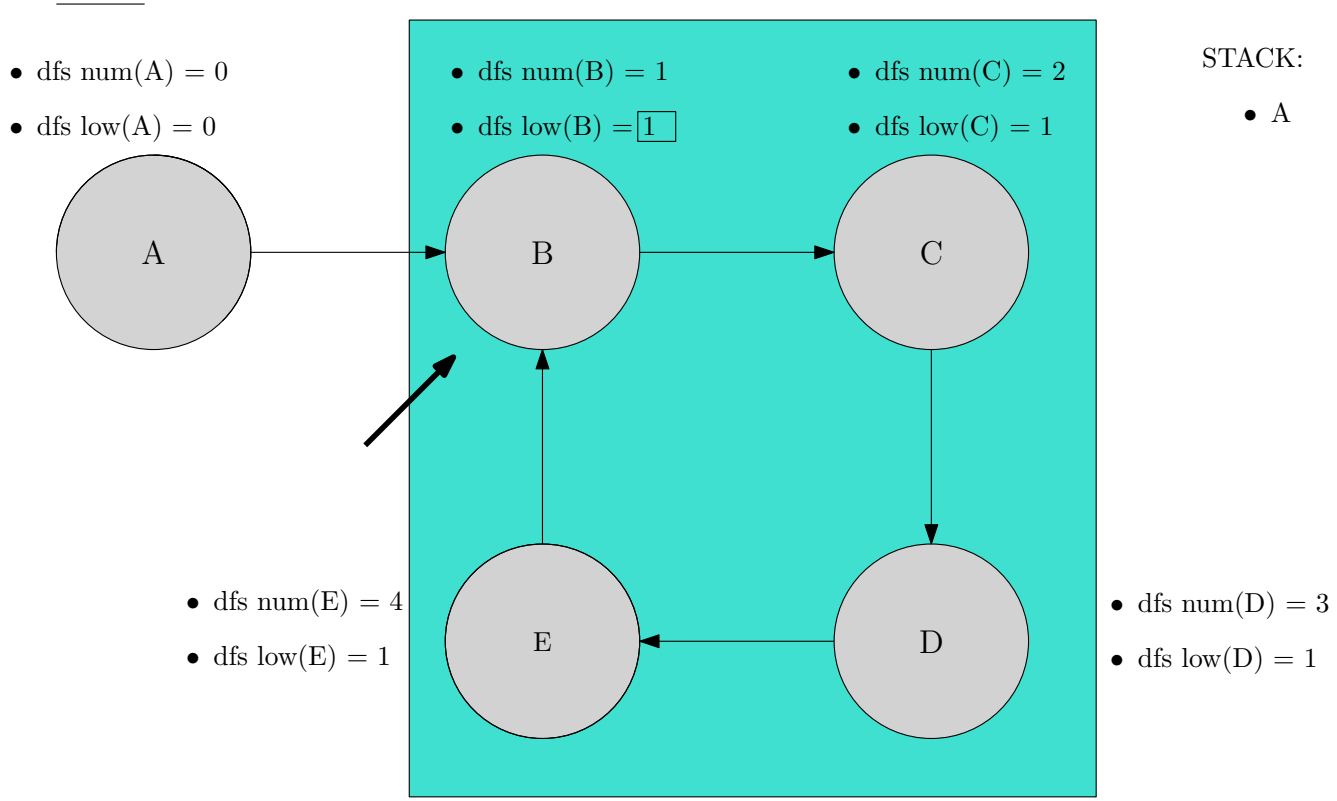
SCCs finden mittels DFS



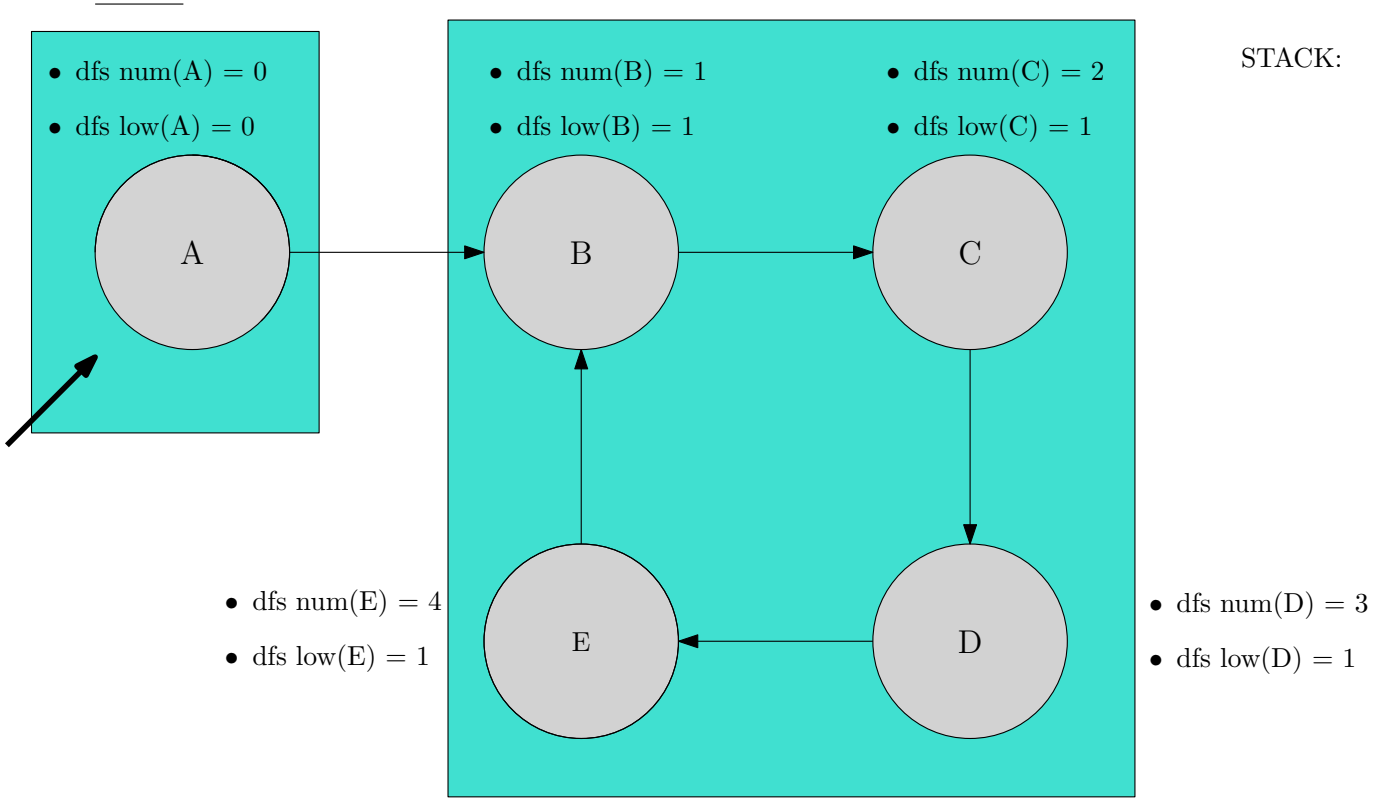
SCCs finden mittels DFS



SCCs finden mittels DFS



SCCs finden mittels DFS



SCCs finden mittels DFS

Sourcecode

```
void findSCC(int u) {
        dfs_low[u] = dfs_num[u] = dfsNumberCounter++; // initalize
        S.push_back(u); visited[u]  = 1;

        for (int j = 0; j < AdjacenceList[u].size(); j++) {
                ii v = AdjacenceList[u][j];
                if (dfs_num[v.first] == UNVISITED) // not yet visited by DFS
                        findSCC(v.first);
                if (visited[v.first]) // belongs to current SCC
                        dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_low[v.first]);
        }
        if (dfs_low[u] == dfs_num[u]) { // root of current SCC
                cout << "SCC " << ++numSCC; // print vertices in SCC
                while(true) {
                        int v = S.back(); S.pop_back(); visited[v] = 0;
                        cout << " " <<v;
                        if (u == v) break;
                }
                cout << endl;
        }
}
```

- **findSCC(int u)** findet alle SCCs, die von Konten **u** aus erreichbar sind.
- Für vollständige Liste an SCCs **findSCC(int u)** für alle Knoten eines Graphen laufen lassen.

Brücken und Separatoren

Brücken und Separatoren

Definition

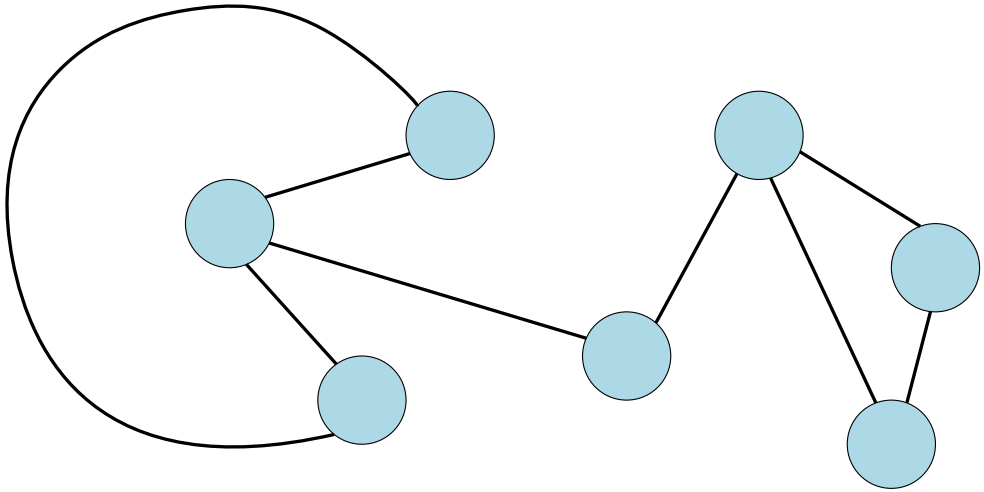
Separatoren und Brücken in ungerichteten Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Ein Knoten $v \in V$ heißt **Separator** von G, wenn durch sein Entfernen bestehende Zusammenhangskomponenten aufgetrennt werden.
- Eine Kante $\{u, v\} \in E$ heißt **Brücke**, wenn durch ihr Entfernen u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen.

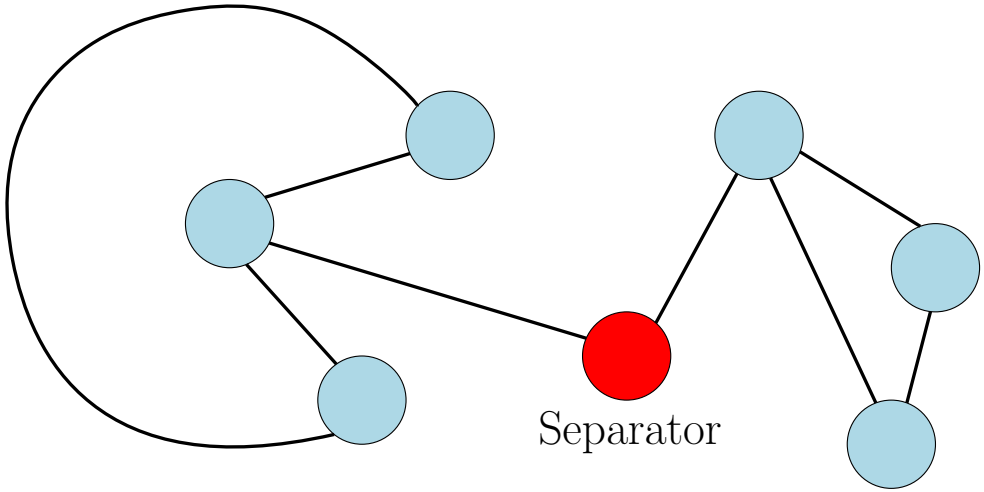
Brücken und Separatoren

Beispiel



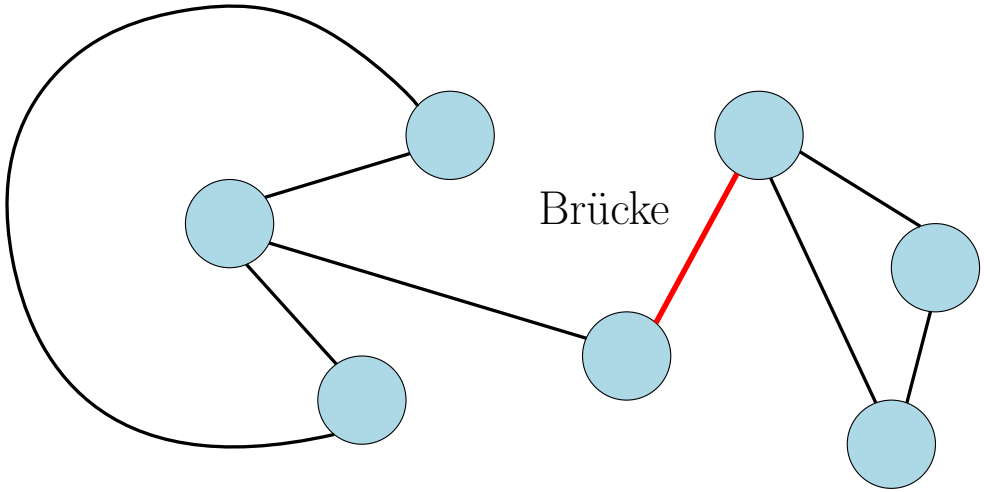
Brücken und Separatoren

Beispiel



Brücken und Separatoren

Beispiel



Brücken und Separatoren

Algorithmen

- Naive Herangehensweise:
  1. Entferne einen Knoten/Kante
  2. Prüfe mittels DFS/BFS ob sich eine neue Zusammenhangskomponente ergeben hat
  3. Wiederhole Schritt 1 für alle Knoten/Kanten
- Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| + |E|))$ bwz. $\mathcal{O}(|E| \cdot (|V| + |E|))$
- Es existiert Algorithmus in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Basiert auf DFS und ähnelt Algorithmus zum Finden von SCCs

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $\geq$ **dfs_num(u)**, dann ist u ein Separator
  - Von v kann kein Knoten w "vor" u erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: (**dfs_num(**w**)** $>$ **dfs_num(**u**)**)
  - Um Knoten w "vor" u zu erreichen, muss man durch u laufen.
  - $\Rightarrow$ u teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - (Spezialfall: Gilt nicht, wenn u Wurzel der DFS)

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $\geq$ **dfs_num(u)**, dann ist u ein Separator
  - Von v kann kein Knoten w "vor" u erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: (**dfs_num(**w**)** $>$ **dfs_num(**u**)**)
  - Um Knoten w "vor" u zu erreichen, muss man durch u laufen.
  - $\Rightarrow$ u teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - (Spezialfall: Gilt nicht, wenn u Wurzel der DFS)

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $\geq$ **dfs_num(u)**, dann ist u ein Separator
  - Von v kann kein Knoten w "vor" u erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: (**dfs_num**(w) $>$ **dfs_num**(u))
  - Um Knoten w "vor" u zu erreichen, muss man durch u laufen.
  - $\Rightarrow$ u teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - (Spezialfall: Gilt nicht, wenn u Wurzel der DFS)

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $\geq$ **dfs_num(u)**, dann ist u ein Separator
  - Von v kann kein Knoten w "vor" u erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: (**dfs_num(**w**)** $>$ **dfs_num(**u**)**)
  - Um Knoten w "vor" u zu erreichen, muss man durch u laufen.
  - $\Rightarrow$ u teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - (Spezialfall: Gilt nicht, wenn u Wurzel der DFS)

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $>$ **dfs_num(u)**, dann ist $\{u, v\}$ eine Brücke
  - Von v kann Knoten v nur über die Kante u, v erreicht werden.
  - Ansonsten **dfs_low(v)** *seq* **dfs_num(u)**.
  - $\Rightarrow \{u, v\}$ teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

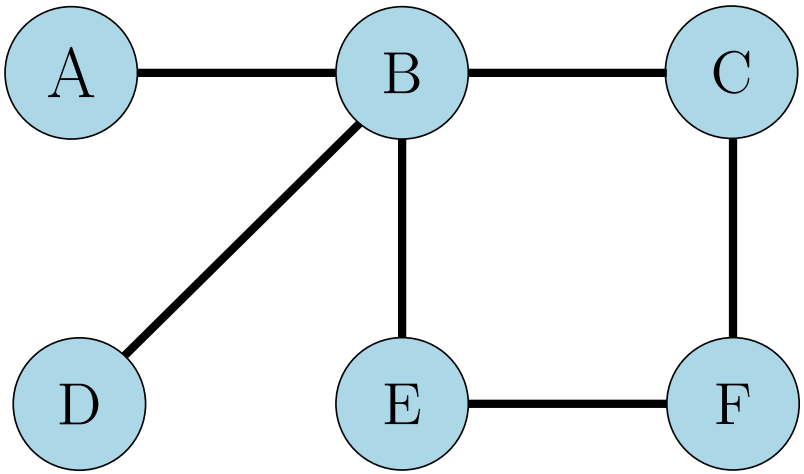
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $>$ **dfs_num(u)**, dann ist $\{u, v\}$ eine Brücke
  - Von v kann Knoten v nur über die Kante u, v erreicht werden.
  - Ansonsten **dfs_low(v)** *seq* **dfs_num(u)**.
  - $\Rightarrow \{u, v\}$ teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.

Brücken und Separatoren

Illustration des Algorithmus'

- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = 1



- dfs num(C) = 2
- dfs low(C) = 2

- dfs num(D) = 3
- dfs low(D) = 3

- dfs num(E) = 4
- dfs low(E) = 1

- dfs num(F) = 5
- dfs low(F) = 1