Graphen I

Gustavo Crivelli, Beini Ma, Matthias Schimek, Matthias Schmitt

ICPC-Praktikum 2015 - Graphen I

Gliederung

Tiefensuche

Einführung

Indiana Jones and the Fate of Atlantis

Indiana Jones braucht unsere Hilfe! Er ist auf der Suche nach einer mysteriösen Statue muss er ein Labyrinth überwinden. Alles was er als Hilfsmittel besitzt ist eine (unendlich lange)rote Schnur. Wie geht Indy vor, um möglichst wenig Zeit zu verschwenden?

Anforderungen

- findet stets die Lösung, wenn sie existiert
- vermeidet doppelte Wege

Tiefensuche
Einführung

Indiana Jones and the Fate of Atlantis

Indiana Jones braucht unsere Hilfe! Er ist auf der Suche nach einer mysteriösen Statue muss er ein Labyrinth überwinden. Alles was er als Hilfsmittel besitzt ist eine (unendlich lange)rote Schnur. Wie geht Indy vor, um möglichst wenig Zeit zu verschwenden?

Anforderungen

- findet stets die Lösung, wenn sie existiert
- vermeidet doppelte Wege

Tiefensuche

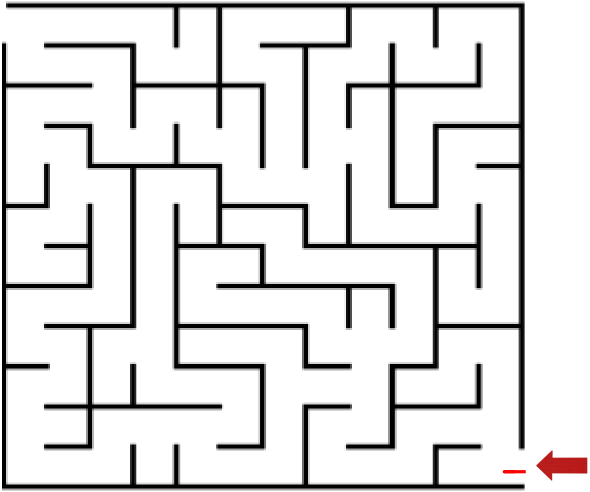
Einführung

Strategie

- Die ganze Zeit lang spannen wir unsere rote Schnur und markieren damit bereits gesehene Wege.
- Wenn wir auf eine Gabelung stoßen, gehen wir immer einen Weg, den wir noch nicht gesehen haben.
- Wenn wir auf eine Sackgasse stoßen, gehen wir zurück zu der letzten Gabelung, in der sich noch ein ungesehener Weg befindet.

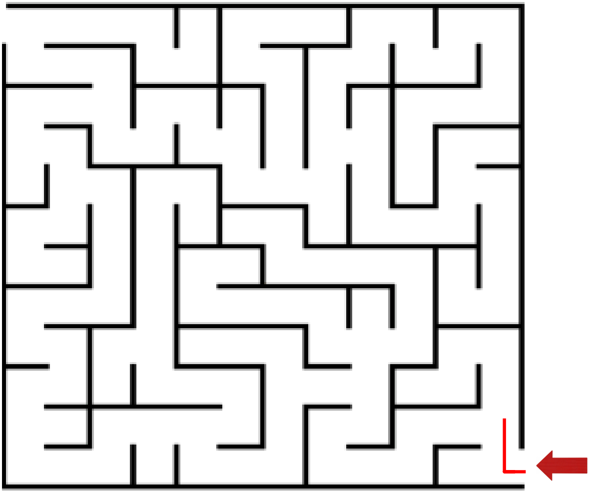
Tiefensuche

Einführung



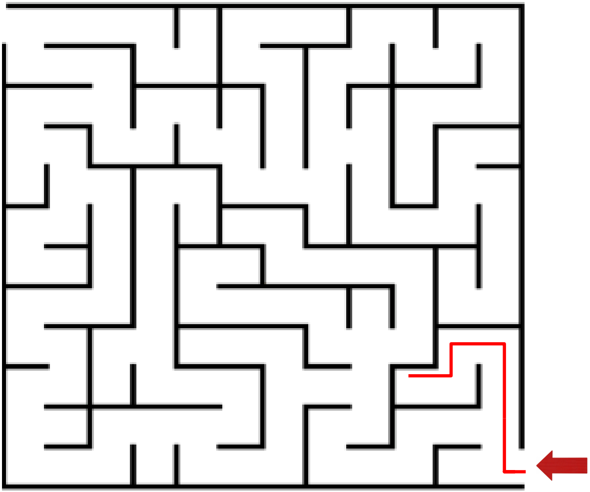
Tiefensuche

Einführung



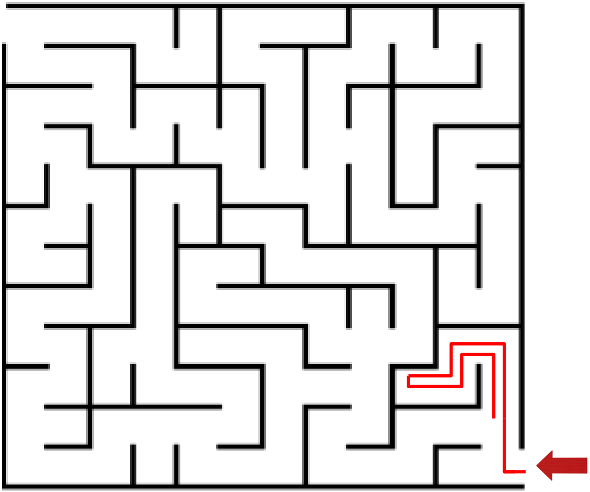
Tiefensuche

Einführung



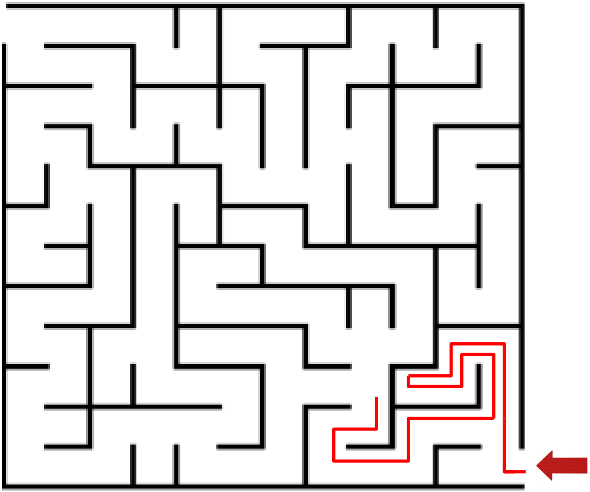
Tiefensuche

Einführung



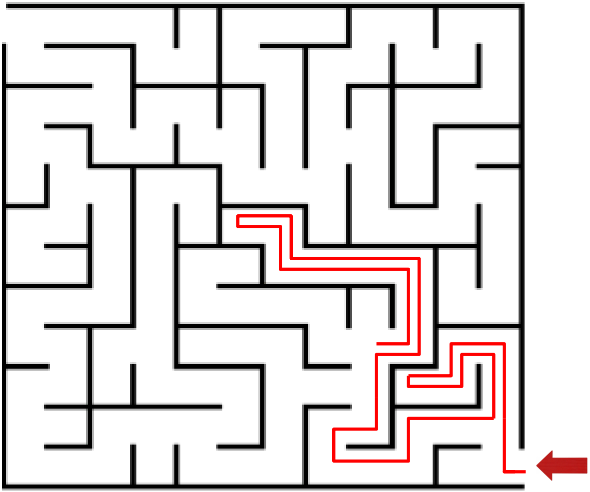
Tiefensuche

Einführung



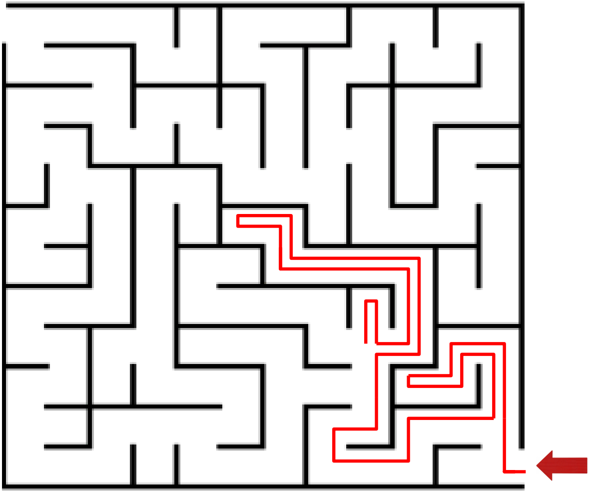
Tiefensuche

Einführung



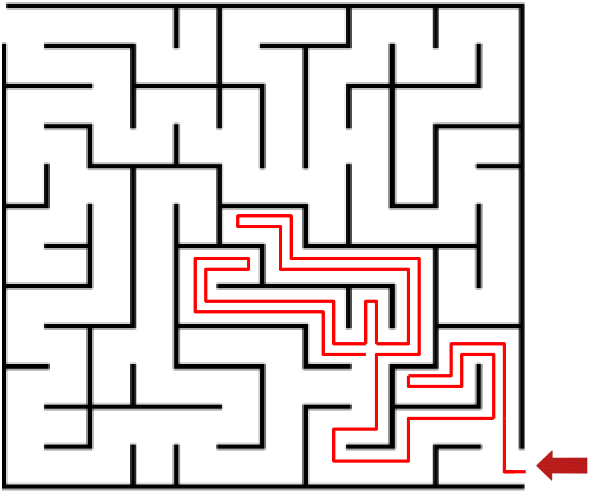
Tiefensuche

Einführung



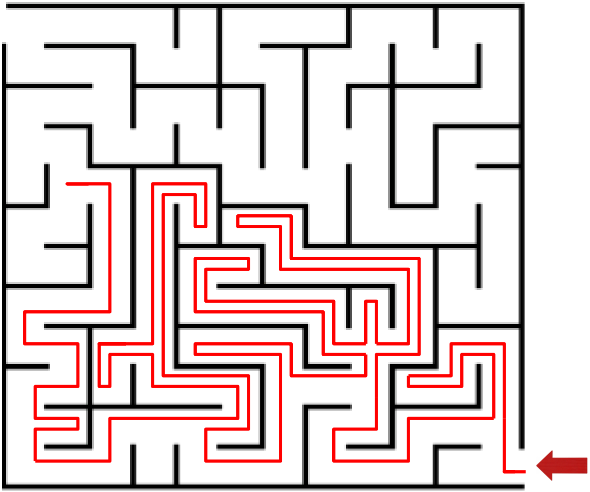
Tiefensuche

Einführung



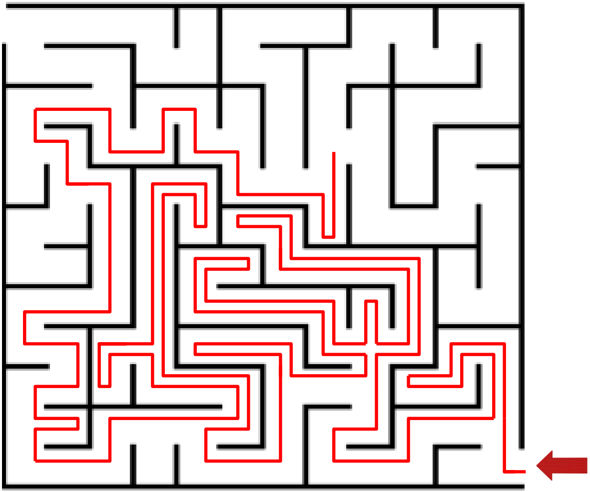
Tiefensuche

Einführung



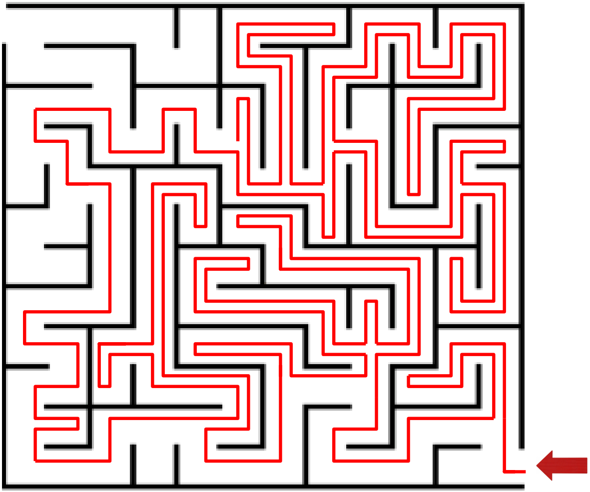
Tiefensuche

Einführung



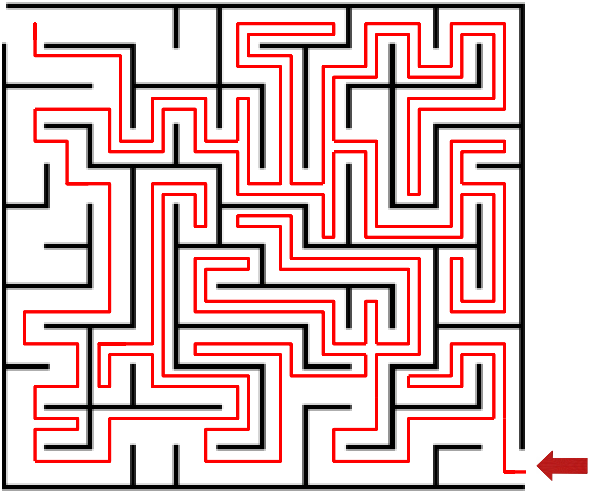
Tiefensuche

Einführung

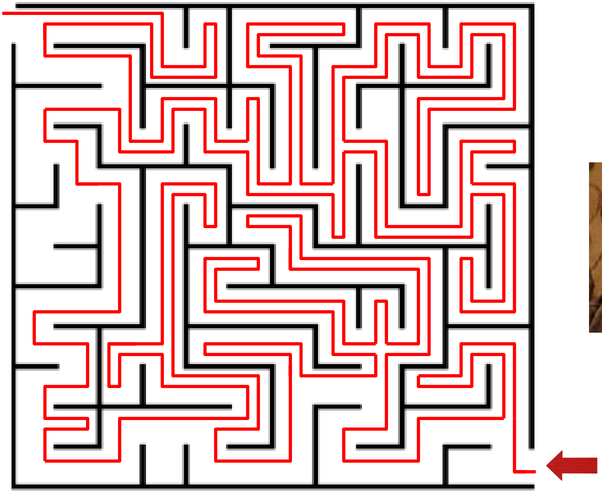


Tiefensuche

Einführung



Tiefensuche
Einführung



Tiefensuche

rekursive Implementierung

```
bool dfs_visited[AdjMatrix.size()];

void dfs(int u) {
        dfs_visited[u] = true;
        // possibly do something
        for (int i = 0; i < AdjMatrix[u].size(); i++) {
                if (AdjMatrix[u][i] == 1
                        && dfs_visited[i] == false) {
                        dfs(i);
                }
        }
}

for (int i = 0; i < AdjMatrix.size(); i++) {
        if (dfs_visited[i] == false) {
                dfs(i);
        }
}
```

Laufzeit: $\mathcal{O}(|V|^2)$, wenn der Graph als Adjazenzmatrix gespeichert ist, sonst $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

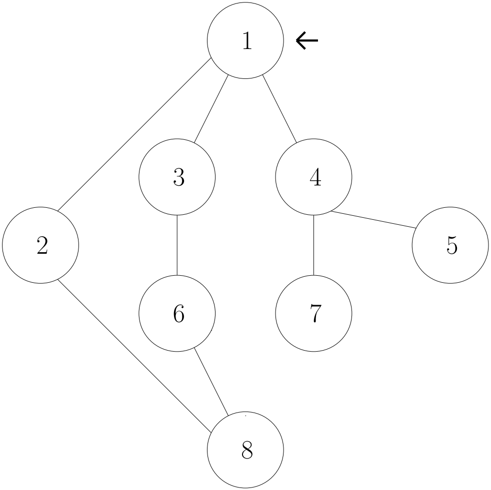
Tiefensuche

rekursive Implementierung

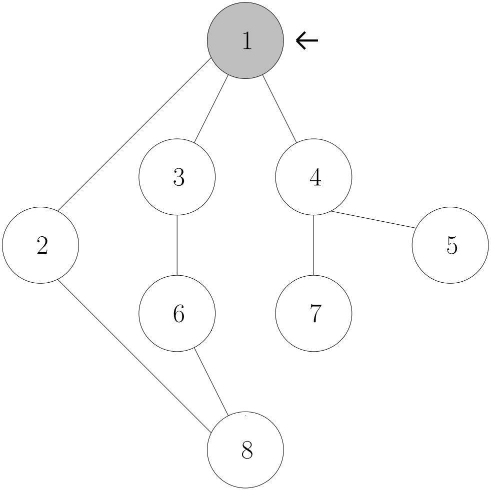
```
bool dfs_visited[AdjMatrix.size()];

void dfs(int u) {
        dfs_visited[u] = true;
        // possibly do something
        for (int i = 0; i < AdjMatrix[u].size(); i++) {
                if (AdjMatrix[u][i] == 1
                        && dfs_visited[i] == false) {
                        dfs(i);
                }
        }
}

for (int i = 0; i < AdjMatrix.size(); i++) {
        if (dfs_visited[i] == false) {
                dfs(i);
        }
}
```

Laufzeit: $\mathcal{O}(|V|^2)$, wenn der Graph als Adjazenzmatrix gespeichert ist, sonst $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

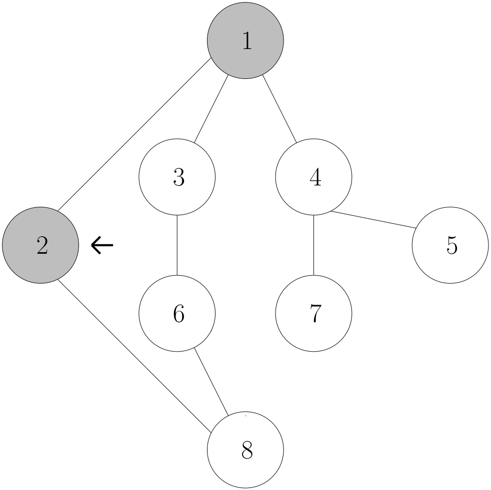
Tiefensuche
graphische Darstellung



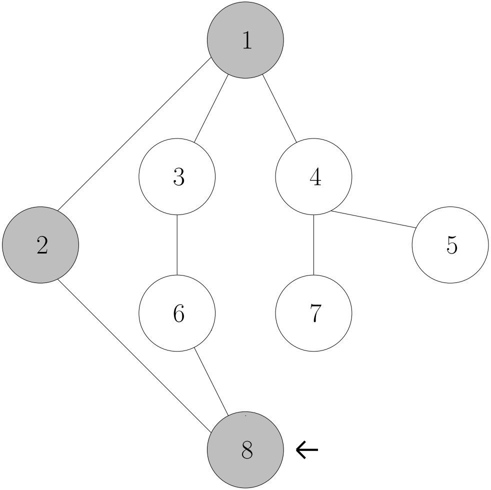
Tiefensuche
graphische Darstellung



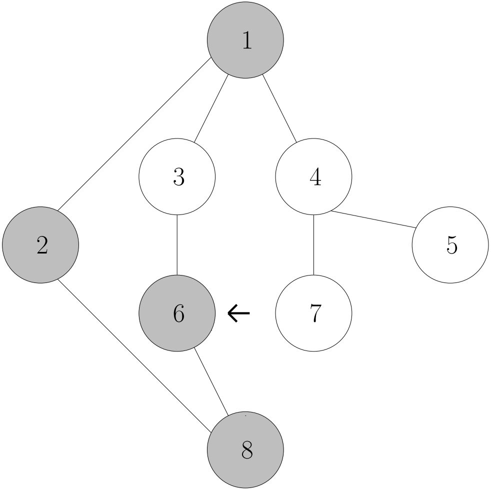
Tiefensuche
graphische Darstellung



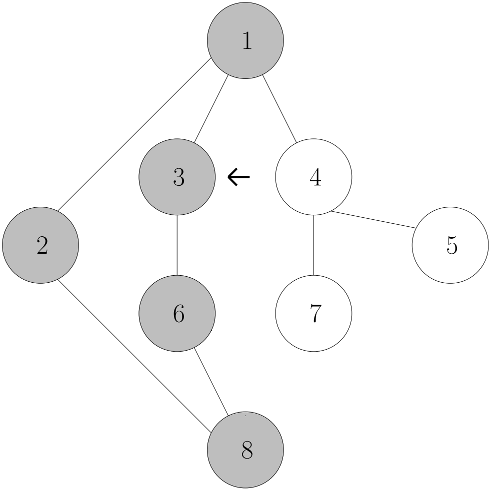
Tiefensuche
graphische Darstellung



Tiefensuche
graphische Darstellung



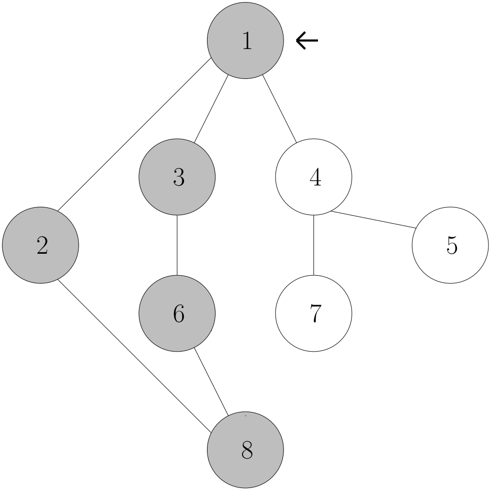
Tiefensuche
graphische Darstellung



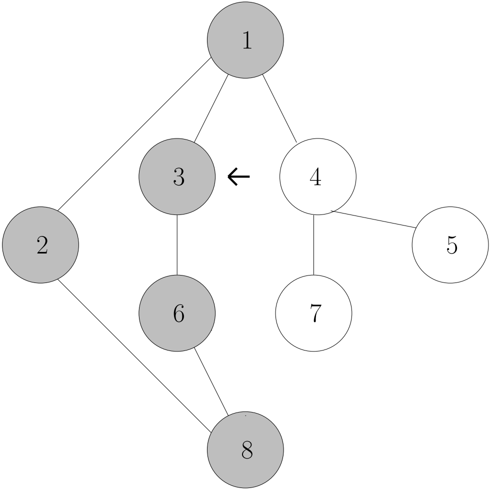
Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Tiefensuche

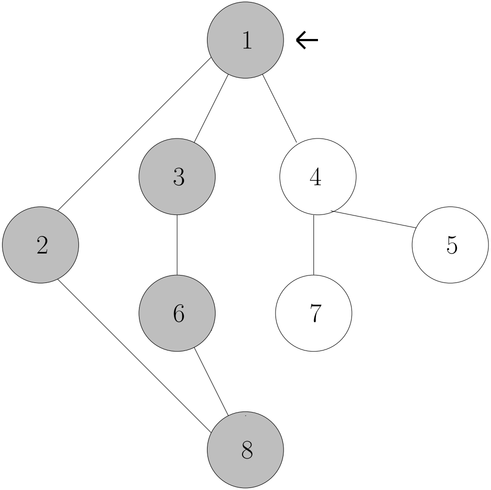
graphische Darstellung



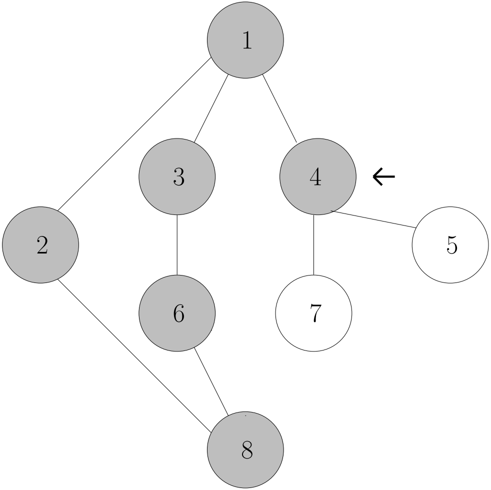
Tiefensuche
graphische Darstellung



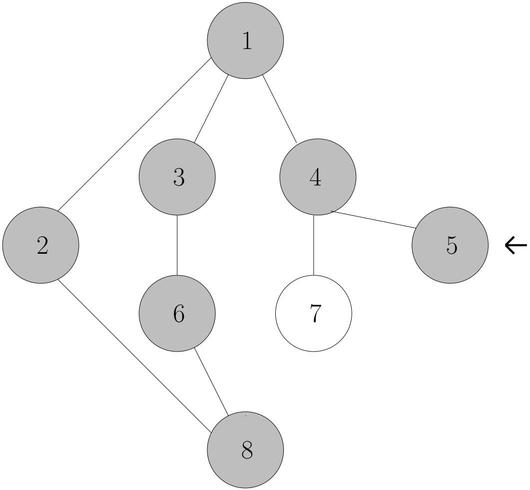
Tiefensuche
graphische Darstellung



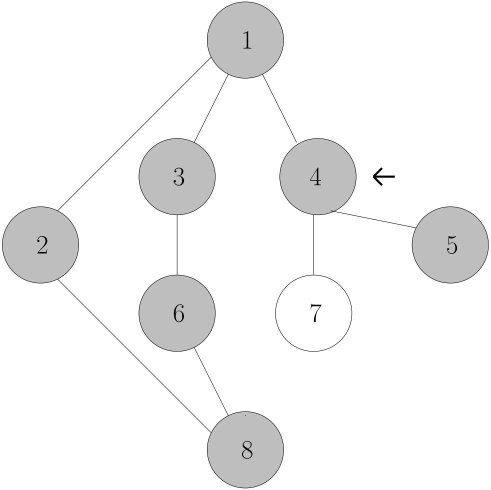
Tiefensuche
graphische Darstellung



Tiefensuche
graphische Darstellung

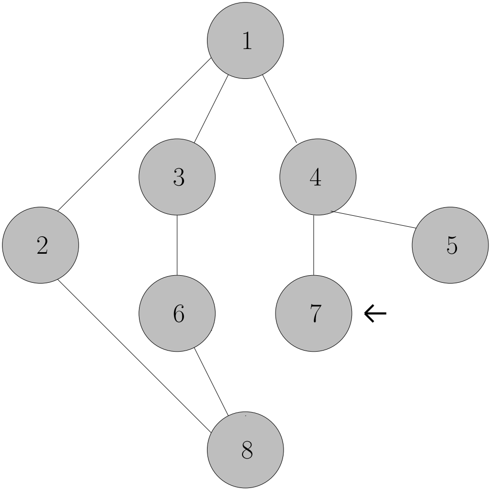


Tiefensuche
graphische Darstellung



Tiefensuche

graphische Darstellung



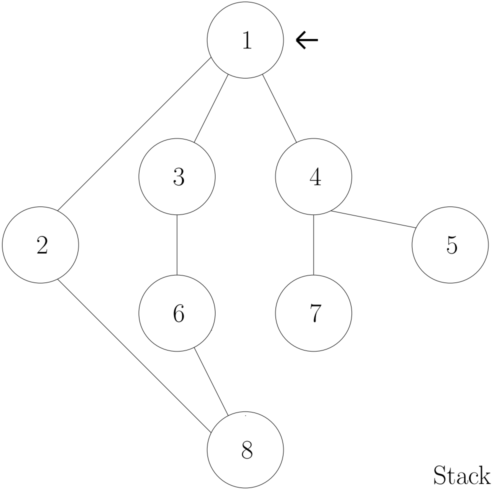
Tiefensuche

rekursive Implementierung

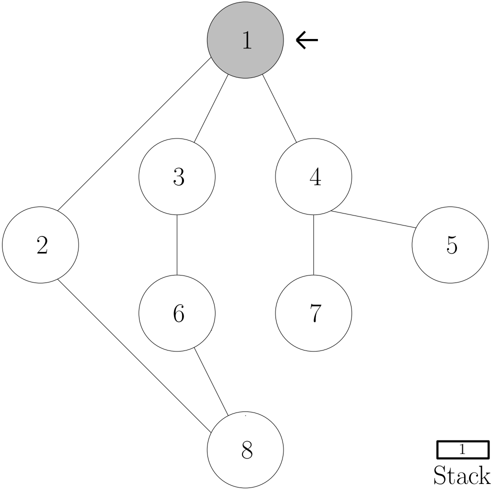
```
bool dfs_visited[AdjMatrix.size()] = {0};

nrdfs(int u) {
        stack myStack;
        myStack.push(u);
        int current;
        while(!myStack.empty()){
                current = myStack.top();
                myStack.pop();
                for(int i = 0; i < AdjMatrix.size(); i++){
                        if(AdjMatrix[current][i] == 1){
                                if(dfs_visited[i] == false){
                                        myStack.push(i);
                                        visit_table[i] = true;
                                        // possibly do something
                                }
                        }
                }
        }
}
```

Tiefensuche

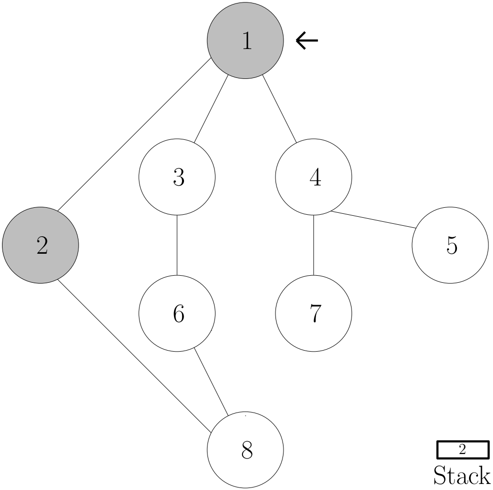
graphische Darstellung



Tiefensuche
graphische Darstellung

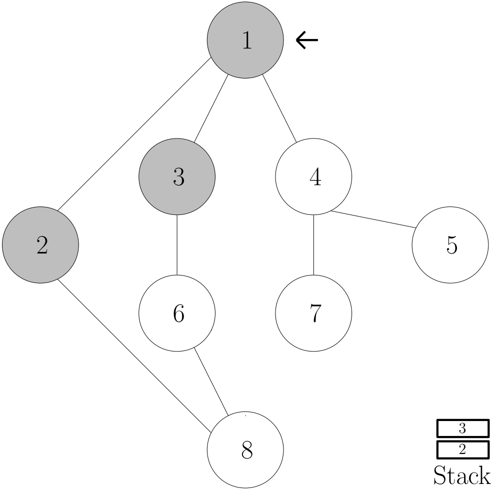


Tiefensuche
graphische Darstellung



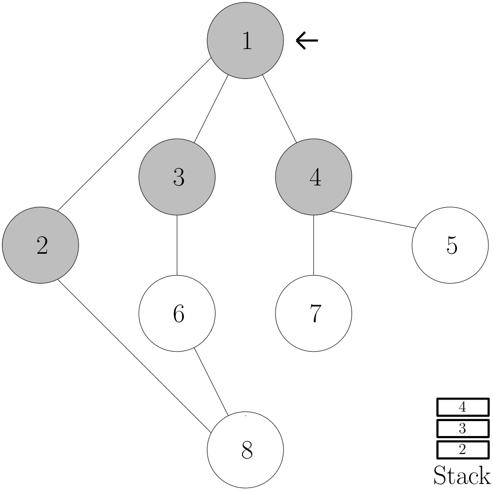
Tiefensuche

graphische Darstellung



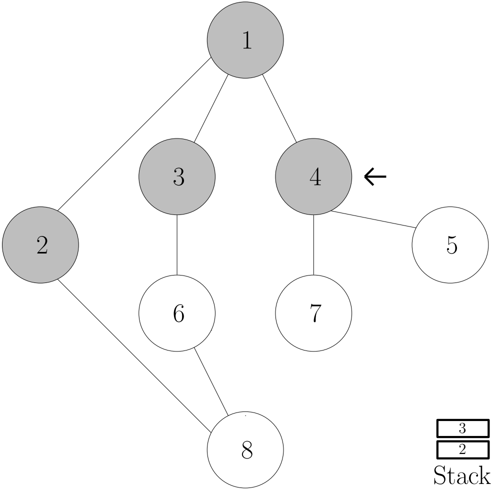
Tiefensuche

graphische Darstellung

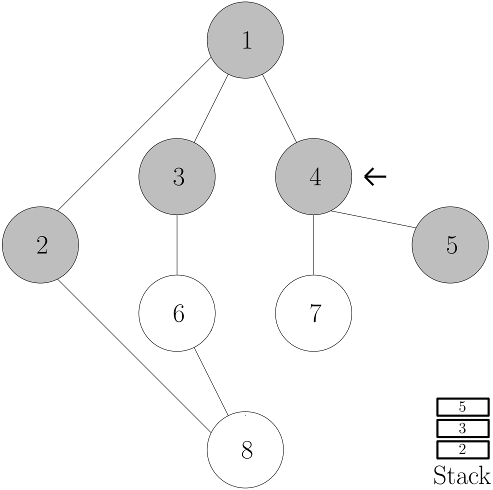


Tiefensuche

graphische Darstellung

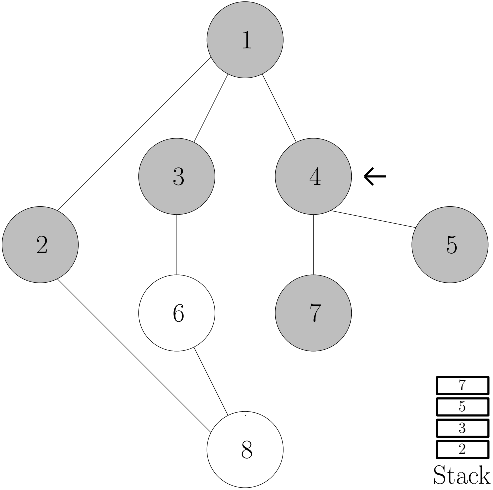


Tiefensuche
graphische Darstellung



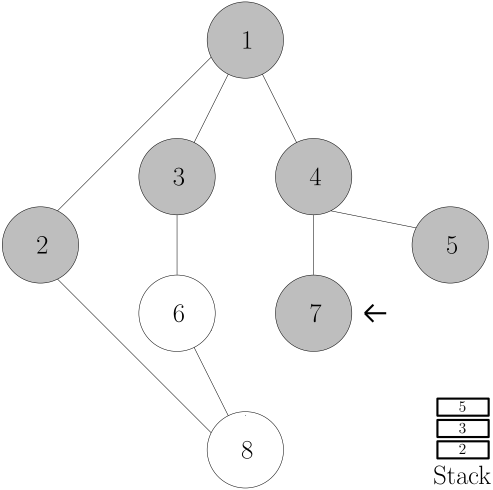
Tiefensuche

graphische Darstellung

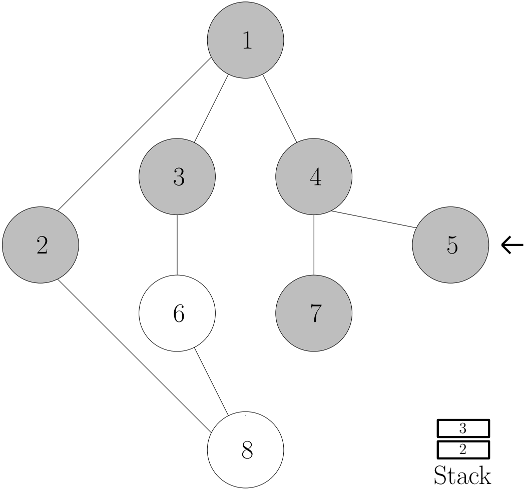


Tiefensuche

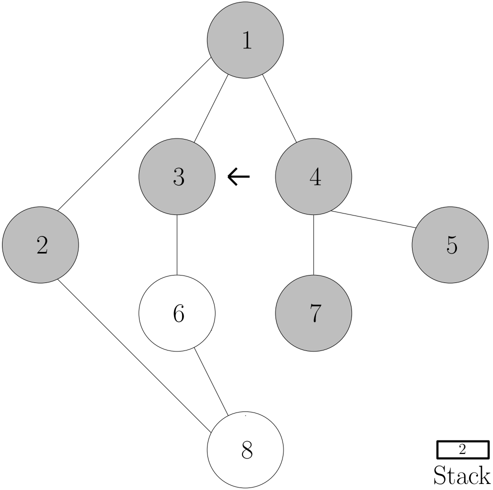
graphische Darstellung



Tiefensuche
graphische Darstellung

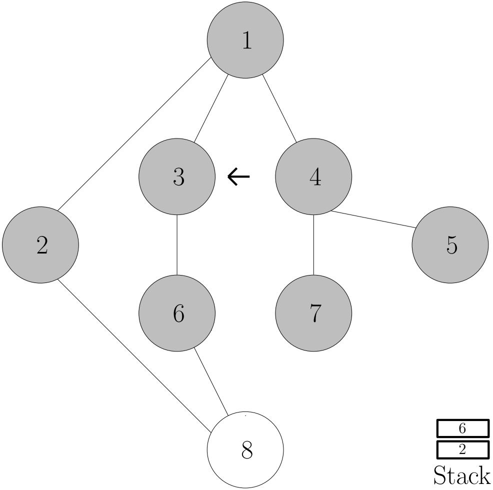


Tiefensuche
graphische Darstellung



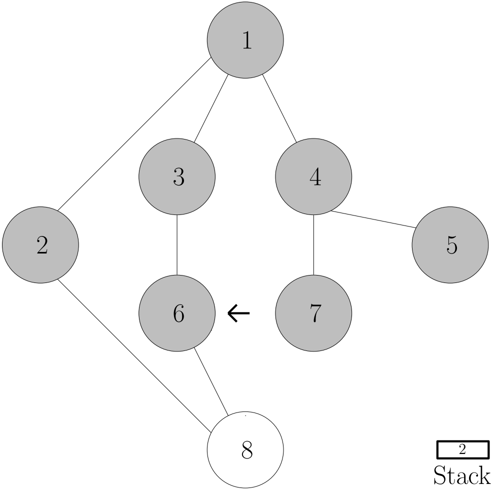
Tiefensuche

graphische Darstellung

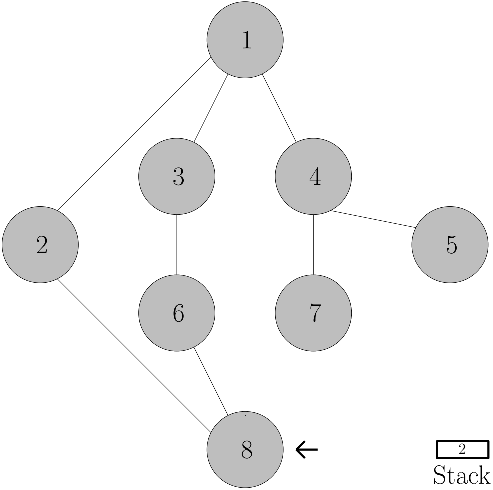


Tiefensuche

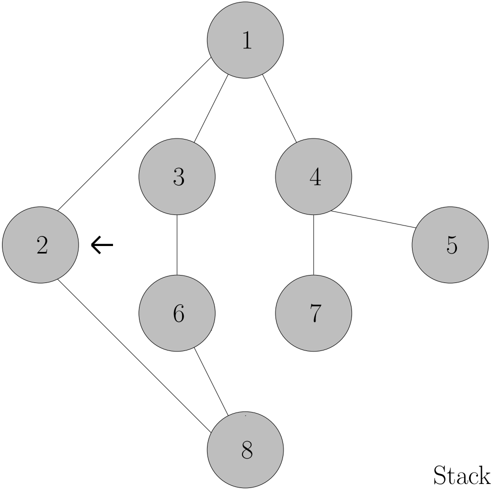
graphische Darstellung



Tiefensuche
graphische Darstellung



Tiefensuche
graphische Darstellung

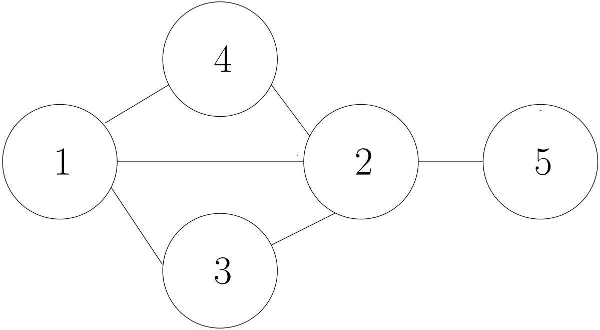


Tiefensuche

Beispielproblem

Dominator

Ein Knoten X eines Graphen dominiert einen anderen Knoten Y, wenn alle Wege von einem gegebenen Startknoten zu Y durch X gehen müssen. Wenn ein Knoten Z nicht vom Startknoten erreicht werden kann, hat Z keinen Dominator.



Tiefensuche

Beispielproblem

Dominator

Gegeben sei ein Graph. Die Aufgabe ist es, für einen gegebenen Graphen für jeden Knoten die Dominator auszurechnen. Dabei ist zu erwähnen, dass der Eingabegraph sehr klein sind, mit weniger als 100 Knoten.

Tiefensuche

Beispielproblem

Idee

- Lassen zunächst Tiefensuche mit dem Anfangsknoten als Startknoten laufen und speichern uns alle Knoten ein, die erreicht worden sind.

- Um zu prüfen, welche Knoten von einem Knoten X dominiert werden, löschen (oder blenden aus) wir temporär den Knoten X und laufen mit Tiefensuche durch den Graph.

- Alle Knoten, die nun nicht mehr erreicht werden können, werden von X dominiert.

- Laufzeit ist $\mathcal{O}(|V|^3)$ im worst case.

Tiefensuche

Beispielproblem

Idee

- Lassen zunächst Tiefensuche mit dem Anfangsknoten als Startknoten laufen und speichern uns alle Knoten ein, die erreicht worden sind.
- Um zu prüfen, welche Knoten von einem Knoten X dominiert werden, löschen (oder blenden aus) wir temporär den Knoten X und laufen mit Tiefensuche durch den Graph.
- Alle Knoten, die nun nicht mehr erreicht werden können, werden von X dominiert.
- Laufzeit ist $\mathcal{O}(|V|^3)$ im worst case.

Tiefensuche
Beispielproblem

Idee

- Lassen zunächst Tiefensuche mit dem Anfangsknoten als Startknoten laufen und speichern uns alle Knoten ein, die erreicht worden sind.

- Um zu prüfen, welche Knoten von einem Knoten X dominiert werden, löschen (oder blenden aus) wir temporär den Knoten X und laufen mit Tiefensuche durch den Graph.

- Alle Knoten, die nun nicht mehr erreicht werden können, werden von X dominiert.

- Laufzeit ist $\mathcal{O}(|V|^3)$ im worst case.

Tiefensuche
Beispielproblem

Idee

- Lassen zunächst Tiefensuche mit dem Anfangsknoten als Startknoten laufen und speichern uns alle Knoten ein, die erreicht worden sind.
- Um zu prüfen, welche Knoten von einem Knoten X dominiert werden, löschen (oder blenden aus) wir temporär den Knoten X und laufen mit Tiefensuche durch den Graph.
- Alle Knoten, die nun nicht mehr erreicht werden können, werden von X dominiert.
- Laufzeit ist $\mathcal{O}(|V|^3)$ im worst case.

SCCs finden mittels DFS

Beispielaufgabe

UVa 11383 Come and Go

In einer Stadt gibt es N Kreuzungen, die durch Straßen verbunden sind. Da man in der Stadt von einem Punkt (Kreuzung) zu jedem anderen kommen möchte, sollte es eine Verbindung zwischen zwei beliebigen Kreuzungen geben.
Für eine gegebene Stadt mit N Kreuzungen und M Straßen soll entschieden werden, ob dies möglich ist.

Definition Strongly Connected Components SCC

In einem gerichteten Graph $G = (V, E)$, wird $V' \subseteq V$ starke Zusammenhangskomponente (SCC) genannt, wenn zwischen je zwei Knoten in V' ein Pfad existiert.

SCCs finden mittels DFS

Beispielaufgabe

UVa 11383 Come and Go

In einer Stadt gibt es N Kreuzungen, die durch Straßen verbunden sind. Da man in der Stadt von einem Punkt (Kreuzung) zu jedem anderen kommen möchte, sollte es eine Verbindung zwischen zwei beliebigen Kreuzungen geben.
Für eine gegebene Stadt mit N Kreuzungen und M Straßen soll entschieden werden, ob dies möglich ist.

Definition Strongly Connected Components SCC

In einem gerichteten Graph $G = (V, E)$, wird $V' \subseteq V$ starke Zusammenhangskomponente (SCC) genannt, wenn zwischen je zwei Knoten in V' ein Pfad existiert.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

SCCs finden mittels DFS

- Zum Lösen der Aufgabe untersuchen, ob das Straßennetz der Stadt aus einer oder mehreren SCCs besteht.
- $\Rightarrow$ Benötigen effizienten Algorithmus zum Finden von SCCs

Algorithmus von Tarjan für SCCs

- Wurde von Robert Tarjan gefunden
- Basiert auf dem Konzept der DFS
- Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

SCCs finden mittels DFS

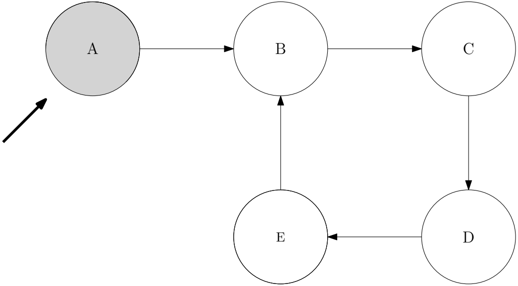
- Zum Lösen der Aufgabe untersuchen, ob das Straßennetz der Stadt aus einer oder mehreren SCCs besteht.
- $\Rightarrow$ Benötigen effizienten Algorithmus zum Finden von SCCs

Algorithmus von Tarjan für SCCs

- Wurde von Robert Tarjan gefunden
- Basiert auf dem Konzept der DFS
- Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

SCCs finden mittels DFS

- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0



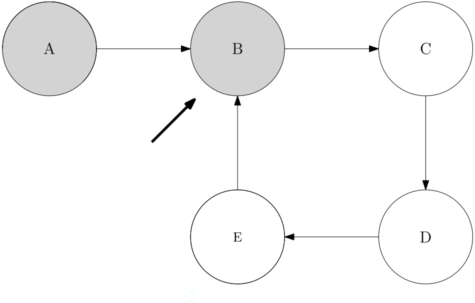
STACK:

- A

SCCs finden mittels DFS

- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = 1



STACK:

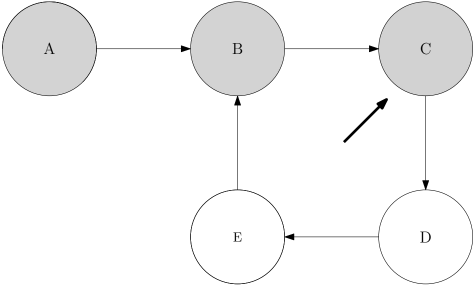
- A
- B

SCCs finden mittels DFS

- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = 1

- dfs num(C) = 2
- dfs low(C) = 2



STACK:

- A
- B
- C

SCCs finden mittels DFS

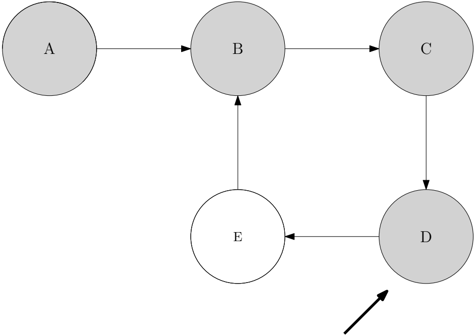
- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = 1

- dfs num(C) = 2
- dfs low(C) = 2

STACK:

- A
- B
- C
- D



- dfs num(D) = 3
- dfs low(D) = 3

SCCs finden mittels DFS

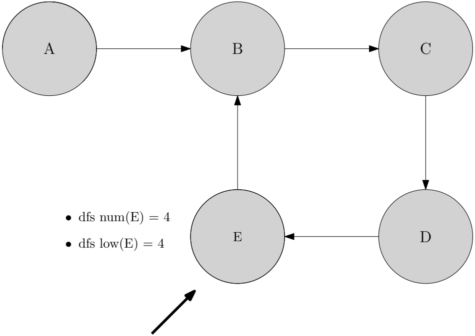
- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = 1

- dfs num(C) = 2
- dfs low(C) = 2

STACK:

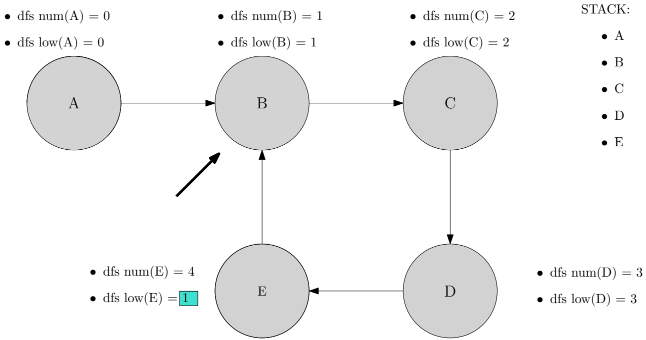
- A
- B
- C
- D
- E



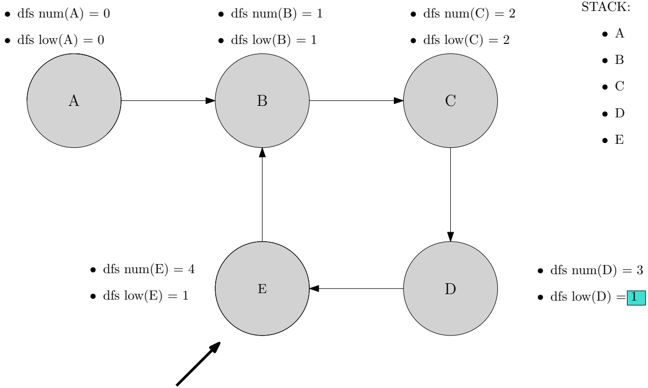
- dfs num(E) = 4
- dfs low(E) = 4

- dfs num(D) = 3
- dfs low(D) = 3

SCCs finden mittels DFS



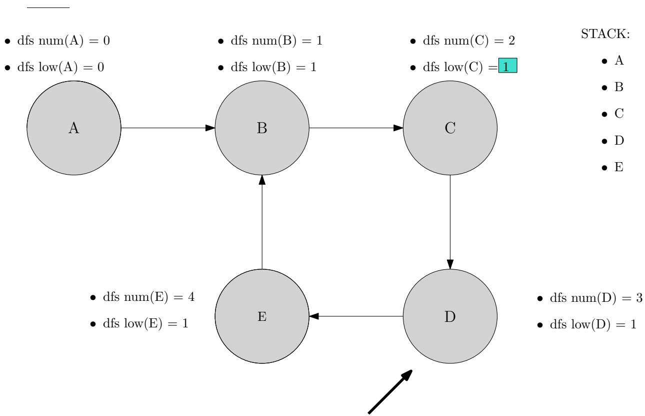
SCCs finden mittels DFS



STACK:

- A
- B
- C
- D
- E

SCCs finden mittels DFS



Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

SCCs finden mittels DFS

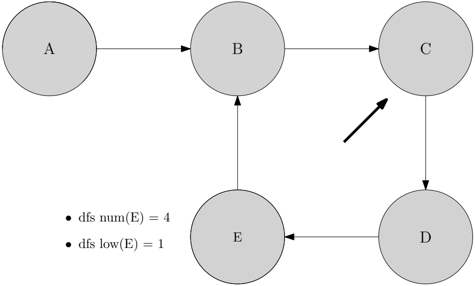
- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = $\boxed{1}$

- dfs num(C) = 2
- dfs low(C) = 1

STACK:

- A
- B
- C
- D
- E



- dfs num(E) = 4
- dfs low(E) = 1

- dfs num(D) = 3
- dfs low(D) = 1

SCCs finden mittels DFS

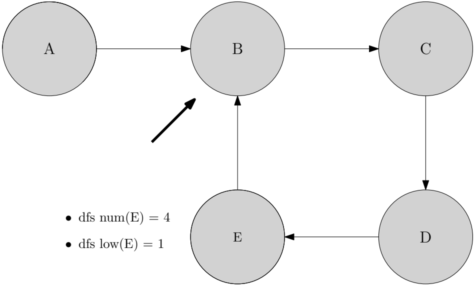
- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = 1

- dfs num(C) = 2
- dfs low(C) = 1

STACK:

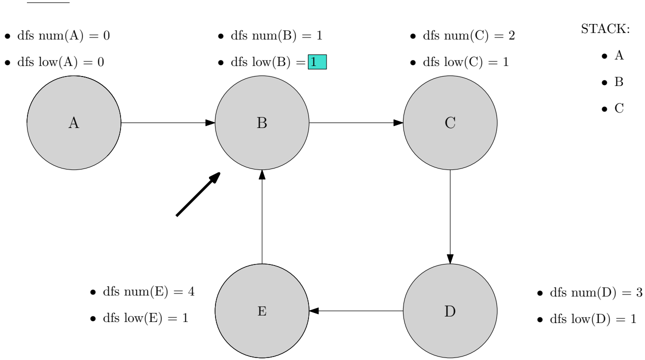
- A
- B
- C
- D



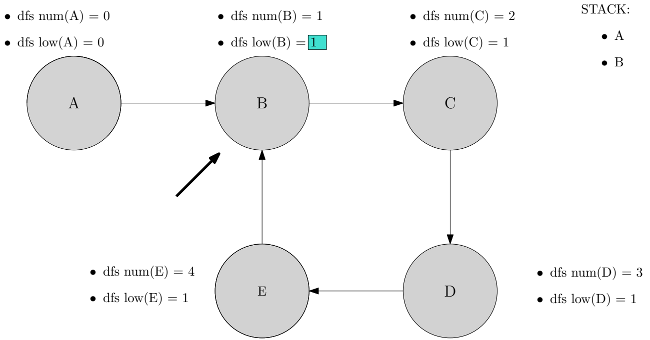
- dfs num(E) = 4
- dfs low(E) = 1

- dfs num(D) = 3
- dfs low(D) = 1

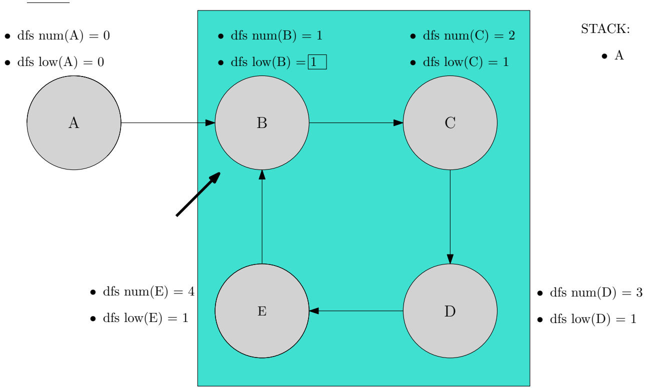
SCCs finden mittels DFS



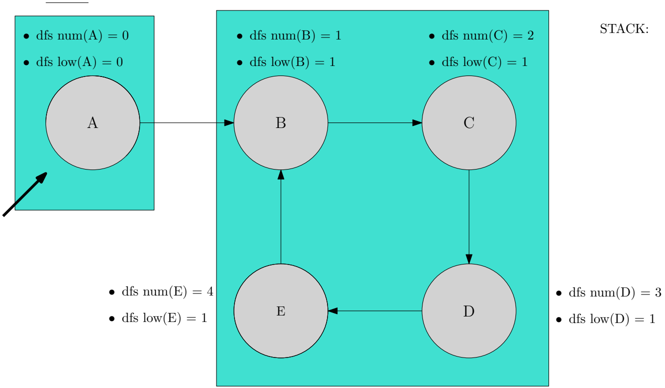
SCCs finden mittels DFS



SCCs finden mittels DFS



SCCs finden mittels DFS



STACK:

SCCs finden mittels DFS
Sourcecode

```
void findSCC(int u) {
        dfs_low[u] = dfs_num[u] = dfsNumberCounter++; // initalize
        S.push_back(u); visited[u]  = 1;

        for (int j = 0; j < AdjacenceList[u].size(); j++) {
                ii v = AdjacenceList[u][j];
                if (dfs_num[v.first] == UNVISITED) // not yet visited by DFS
                        findSCC(v.first);
                if (visited[v.first]) // belongs to current SCC
                        dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_low[v.first]);
        }
        if (dfs_low[u] == dfs_num[u]) { // root of current SCC
                cout << "SCC␣" << ++numSCC; // print vertices in SCC
                while(true) {
                        int v = S.back(); S.pop_back(); visited[v] = 0;
                        cout << "␣" <<v;
                        if (u == v) break;
                }
                cout << endl;
        }
}
```

- **findSCC(int u)** findet alle SCCs, die von Konten **u** aus erreichbar sind.
- Für vollständige Liste an SCCs **findSCC(int u)** für alle Knoten eines Graphen laufen lassen.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Brücken und Separtoren

Definition

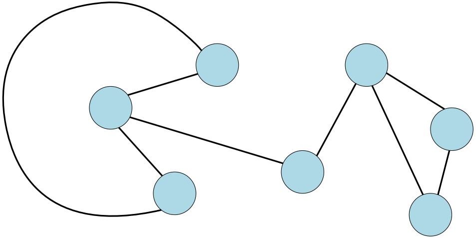
Separatoren und Brücken in ungerichteten Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Ein Knoten $v \in V$ heißt **Separator** von G, wenn durch sein Entfernen bestehende Zusammenhangskomponenten aufgetrennt werden.
- Eine Kante $\{u, v\} \in E$ heißt **Brücke**, wenn durch ihr Entfernen u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen.

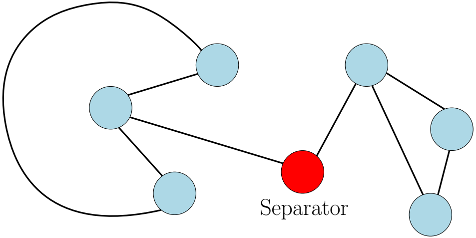
Brücken und Separatoren

Beispiel



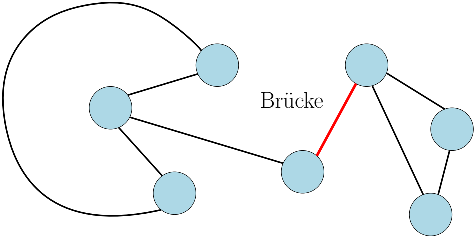
Brücken und Separatoren

Beispiel



Brücken und Separatoren

Beispiel



Brücken und Separatoren

Algorithmen

- Naive Herangehensweise:
  1. Entferne einen Knoten/Kante
  2. Prüfe mittels DFS/BFS ob sich eine neue Zusammenhangskomponente ergeben hat
  3. Wiederhole Schritt 1 für alle Knoten/Kanten
- Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| + |E|))$ bwz. $\mathcal{O}(|E| \cdot (|V| + |E|))$
- Es existiert Algorithmus in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Basiert auf DFS und ähnelt Algorithmus zum Finden von SCCs

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten *u* von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten *u* aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $\geq$ **dfs_num(u)**, dann ist *u* ein Separator
  - Von *v* kann kein Knoten *w* "vor" *u* erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: (**dfs_num(*w*)** $>$ **dfs_num(*u*)**)
  - Um Knoten *w* "vor" *u* zu erreichen, muss man durch *u* laufen.
  - $\Rightarrow$ *u* teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - (Spezialfall: Gilt nicht, wenn *u* Wurzel der DFS)

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $\geq$ **dfs_num(u)**, dann ist u ein Separator
  - Von v kann kein Knoten w "vor" u erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: (**dfs_num(**w**)** $>$ **dfs_num(**u**)**)
  - Um Knoten w "vor" u zu erreichen, muss man durch u laufen.
  - $\Rightarrow$ u teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - (Spezialfall: Gilt nicht, wenn u Wurzel der DFS)

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten *u* von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten *u* aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $\geq$ **dfs_num(u)**, dann ist *u* ein Separator
  - Von *v* kann kein Knoten *w* "vor" *u* erreicht werden.
  - "vor" bedeutet: (**dfs_num(***w***)** $>$ **dfs_num(***u***)**)
  - Um Knoten *w* "vor" *u* zu erreichen, muss man durch *u* laufen.
  - $\Rightarrow$ *u* teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
  - (Spezialfall: Gilt nicht, wenn *u* Wurzel der DFS)

Brücken und Separatoren
Idee des effizienten Algorithmus'

- Führe eine DFS im Graph durch.
- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
    1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
    2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $\geq$ **dfs_num(u)**, dann ist u ein Separator
    - Von v kann kein Knoten w "vor" u erreicht werden.
    - "vor" bedeutet: (**dfs_num(**w**)** $>$ **dfs_num(**u**)**)
    - Um Knoten w "vor" u zu erreichen, muss man durch u laufen.
    - $\Rightarrow$ u teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.
    - (Spezialfall: Gilt nicht, wenn u Wurzel der DFS)

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten u von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten u aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $>$ **dfs_num(u)**, dann ist $\{u, v\}$ eine Brücke
  - Von v kann Knoten v nur über die Kante u, v erreicht werden.
  - Ansonsten **dfs_low(v)** *seq* **dfs_num(u)**.
  - $\Rightarrow \{u, v\}$ teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Brücken und Separatoren

Idee des effizienten Algorithmus'

- Besuchte Knoten erhalten zwei Nummern:
  1. **dfs_num(u):** Speichert Schritt, in dem Knoten *u* von DFS besucht wurde.
  2. **dfs_low(u):** Niedrigster Wert von **dfs_low**, der von Knoten *u* aus erreicht werden kann.
- Wenn **dfs_low(v)** $>$ **dfs_num(u)**, dann ist $\{u, v\}$ eine Brücke
  - Von *v* kann Knoten *v* nur über die Kante *u*, *v* erreicht werden.
  - Ansonsten **dfs_low(v)** *seq* **dfs_num(u)**.
  - $\Rightarrow \{u, v\}$ teilt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten.

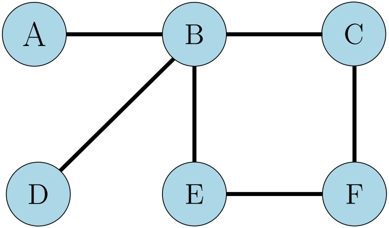
Brücken und Separatoren

Illustration des Algorithmus'

- dfs num(B) = 1
- dfs low(B) = 1

- dfs num(A) = 0
- dfs low(A) = 0

- dfs num(C) = 2
- dfs low(C) = 2



- dfs num(D) = 3
- dfs low(D) = 3

- dfs num(F) = 5
- dfs low(F) = 1

- dfs num(E) = 4
- dfs low(E) = 1