🟦 Heapsort

1️⃣ Grundidee

Heapsort nutzt eine **Heap-Datenstruktur** (meist Max-Heap), um das größte Element effizient zu bestimmen. Der Algorithmus besteht aus zwei Phasen:

1. Aufbau eines Heaps aus der Liste
2. Wiederholtes Entfernen des Maximums und Einfügen ans Listenende

---

2️⃣ Voraussetzungen

- ❌ keine
- funktioniert auf **beliebigen vergleichbaren Elementen**

3️⃣ Laufzeiten & Eigenschaften

Eigenschaft	Wert
Best Case	O(n log n)
Average Case	O(n log n)
Worst Case	O(n log n)
Speicherbedarf	O(1)
In-place	ja
Stabil	nein

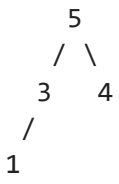
Hinweis: Die Laufzeit ist unabhängig von der Eingabereihenfolge.

4️⃣ Schritt-für-Schritt-Beispiel

Ausgangsliste:

```
[5, 3, 4, 1]
```

Heap-Aufbau (Max-Heap: Jeder Knoten ist grösser gleich seinen Kindern)



Sortieren

- Tausche 5 mit letztem Element → [1, 3, 4, 5]
- Heapify Rest → [4, 3, 1, 5]
- Tausche 4 → [1, 3, 4, 5]
- Heapify → [3, 1, 4, 5]

Ergebnis:

```
[1, 3, 4, 5]
```

5️⃣ Besonderheiten / Prüfungsrelevante Hinweise

- Garantierte Laufzeit O(n log n)
- Kein zusätzlicher Speicher
- Schlechtere Cache-Lokalität als Quicksort

6️⃣ Vor- und Nachteile

Vorteile

- in-place
- garantierte Laufzeit
- kein zusätzlicher Speicher

Nachteile

- nicht stabil
- langsamer als Quicksort in der Praxis

🧠 Merksatz für die Prüfung

Heapsort sortiert mithilfe eines Heaps in O(n log n), ist in-place, aber nicht stabil.

7️⃣ Python-Implementierung

In [1]:
```python
def heapify(arr, n, i):
    largest = i
    left = 2 * i + 1
    right = 2 * i + 2

    if left < n and arr[left] > arr[largest]:
        largest = left
    if right < n and arr[right] > arr[largest]:
        largest = right

    if largest != i:
        arr[i], arr[largest] = arr[largest], arr[i]
        heapify(arr, n, largest)

def heap_sort(arr):
    n = len(arr)

    for i in range(n // 2 - 1, -1, -1):
        heapify(arr, n, i)

    for i in range(n - 1, 0, -1):
        arr[0], arr[i] = arr[i], arr[0]
        heapify(arr, i, 0)

    return arr
```

Beispielaufgaben

Implementieren einer Sink funktion

Element an Index i wird in einem Max-Heap "gesunken", bis die Heap-Eigenschaft wiederhergestellt ist.

Heap-Index-Regeln:\

- Linkes Kind: 2*i + 1\
- Rechtes Kind: 2*i + 2\
- Elternteil: (i - 1) // 2

Algorithmus für sink(k):

1. Solange k mindestens 1 Kind hat
2. Bestimme das grössere Kind
3. Wenn heap[k] >= heap[grösseres Kind] => fertig
4. Sonst tausche heap[k] mit heap[grösseres Kind] und setze k auf Index des grösseren Kindes
5. Wiederhole

Hier der Code dazu:

In [1]:
```
class MaxHeap:
    def __init__(self):
        self.heap = []

    def swap(self, i, j):
        self.heap[i], self.heap[j] = self.heap[j], self.heap[i]

    def sink(self, k):
        n = len(self.heap)

        while True:
            left = 2 * k + 1
            right = 2 * k + 2
            largest = k

            if left < n and self.heap[left] > self.heap[largest]:
                largest = left

            if right < n and self.heap[right] > self.heap[largest]:
                largest = right

            if largest == k:
                break

            self.swap(k, largest)
            k = largest
```

Implementieren einer swim Funktion

Wenn ein Element zu Gross ist, muss es "aufsteigen", um die Heap-Eigenschaft wiederherzustellen.

Idee: Vergleiche mit Parent und tausche, solange heap[k] > heap[parent].

Laufzeit: O(log n)

In [ ]:
```
class MaxHeap:
    def __init__(self):
        self.heap = []

    def swap(self, i, j):
        self.heap[i], self.heap[j] = self.heap[j], self.heap[i]

    def swim(self, k):
        while k > 0:
            parent = (k - 1) // 2
            if self.heap[k] <= self.heap[parent]:
                break
            self.swap(k, parent)
            k = parent
```

Implementieren der Einfügeoperation

Fügt ein neues Element in den Max-Heap ein.

Idee: Neues Element ans Ende hängen und dann swim.

Laufzeit: O(log n)

In [ ]:
```
class MaxHeap:
    def __init__(self):
        self.heap = []

    def swap(self, i, j):
        self.heap[i], self.heap[j] = self.heap[j], self.heap[i]

    def swim(self, k):
        while k > 0:
            parent = (k - 1) // 2
            if self.heap[k] <= self.heap[parent]:
                break
            self.swap(k, parent)
            k = parent

    def insert(self, x):
        self.heap.append(x)
        self.swim(len(self.heap) - 1)
```

Implementieren der Löschoperation

Entfernt das Maximum (Wurzel) aus dem Max-Heap.

Vorgehen:

1. Tausche Wurzel mit letztem Element
2. Entferne letztes Element (altes Maximum)
3. Sink die neue Wurzel, um Heap-Eigenschaft wiederherzustellen

Laufzeit: O(log n)

In [2]:
```
class MaxHeap:
    def __init__(self):
        self.heap = []

    def swap(self, i, j):
        self.heap[i], self.heap[j] = self.heap[j], self.heap[i]

    def sink(self, k):
        n = len(self.heap)
        while True:
            left = 2 * k + 1
            right = 2 * k + 2
```

```
            largest = k

            if left < n and self.heap[left] > self.heap[largest]:
                largest = left
            if right < n and self.heap[right] > self.heap[largest]:
                largest = right

            if largest == k:
                break

            self.swap(k, largest)
            k = largest

    def extract_max(self):
        if not self.heap:
            raise IndexError("extract_max from empty heap")

        max_val = self.heap[0]
        last = self.heap.pop()  # entfernt letztes Element

        if self.heap:
            self.heap[0] = last
            self.sink(0)

        return max_val
```

Implementieren der Heapify-Funktion

Wandelt eine unsortierte Liste in einen Max-Heap um.

Idee: Von unten nach oben sink auf alle Nicht-Blatt-Knoten.

Laufzeit: O(n)

In [3]:
```
class MaxHeap:
    def __init__(self):
        self.heap = []

    def swap(self, i, j):
        self.heap[i], self.heap[j] = self.heap[j], self.heap[i]

    def sink(self, k):
        n = len(self.heap)
        while True:
            left = 2 * k + 1
            right = 2 * k + 2
            largest = k

            if left < n and self.heap[left] > self.heap[largest]:
                largest = left
            if right < n and self.heap[right] > self.heap[largest]:
                largest = right

            if largest == k:
```

```
                break

            self.swap(k, largest)
            k = largest

    def heapify(self, arr):
        self.heap = list(arr)
        n = len(self.heap)
        # letzter innerer Knoten:
        for k in range((n // 2) - 1, -1, -1):
            self.sink(k)
```

Implementieren des Heapsort-Algorithmus

Sortiert eine Liste mithilfe von Heapsort.

Idee: Heap bauen, dann wiederholt Maximum extrahieren und ans Ende setzen.

Wenn aufsteigend, dann einfach am Ende out[::-1] zurückgeben.

In [ ]:
```
def heapsort(arr):
    h = MaxHeap()
    h.heapify(arr)
    out = []
    while h.heap:
        out.append(h.extract_max())
    return out  # absteigend sortiert
```