

# Warshall-Algorithmus (Floyd-Warshall)

## 1 Grundidee

Der **Warshall-Algorithmus** (häufig als **Floyd-Warshall** bezeichnet) berechnet die **kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren** eines Graphen.

- Dynamic-Programming-Ansatz
  - Betrachtet schrittweise alle Knoten als mögliche Zwischenknoten
  - Funktioniert für **gewichtete Graphen**
  - **Negative Kantengewichte erlaubt**, aber **keine negativen Zyklen**
- 

## 2 Voraussetzungen

- Gewichteter Graph
  - Darstellung als **Adjazenzmatrix**
  - Keine negativen Zyklen
- 

## 3 Laufzeiten & Eigenschaften

Eigenschaft	Wert
Laufzeit	$O(V^3)$
Speicherbedarf	$O(V^2)$
Kürzeste Wege	alle Paare
Negative Kanten	✓ erlaubt
Negative Zyklen	✗ nicht erlaubt

**Hinweis:** Der Algorithmus ist unabhängig von der Anzahl der Kanten – nur die Anzahl der Knoten zählt.

---

## 4 Idee des Algorithmus

Wir prüfen für jedes Knotenpaar  $(i, j)$ , ob der Weg über einen Zwischenknoten  $k$  kürzer ist:

$$\text{dist}[i][j] = \min(\text{dist}[i][j], \text{dist}[i][k] + \text{dist}[k][j])$$

Dies wird für alle  $k$  von 1 bis  $V$  durchgeführt.

---

## 5 Schritt-für-Schritt-Beispiel

Graph (Adjazenzmatrix):

	A	B	C
A	0	3	$\infty$
B	$\infty$	0	1
C	2	$\infty$	0

### Zwischenknoten B

- Prüfe  $A \rightarrow B \rightarrow C$ :  $3 + 1 = 4 < \infty \rightarrow \text{Update}$

Ergebnis:

	A	B	C
A	0	3	4
B	$\infty$	0	1
C	2	$\infty$	0

---

## 6 Besonderheiten / Prüfungsrelevante Hinweise

- Warshall berechnet **alle kürzesten Wege**
- Sehr häufige Prüfungsfrage:
  - *Unterschied Dijkstra vs. Warshall?*
- Negative Kantengewichte erlaubt
- Negative Zyklen müssen ausgeschlossen sein

---

## 7 Vor- und Nachteile

### Vorteile

- alle kürzesten Wege auf einmal
- einfacher, kompakter Algorithmus
- negative Kanten erlaubt

### Nachteile

- hohe Laufzeit  $O(V^3)$
- ungeeignet für große Graphen

---

## Merksatz für die Prüfung

*Der Warshall-Algorithmus berechnet alle kürzesten Wege mit dynamischer Programmierung und erlaubt negative Kantengewichte ohne negative Zyklen.*

---

## Python-Implementierung

```
In [1]: def floyd_warshall(dist):
        n = len(dist)

        for k in range(n):
            for i in range(n):
                for j in range(n):
                    if dist[i][k] + dist[k][j] < dist[i][j]:
                        dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j]

        return dist

# Beispiel
INF = float("inf")

dist = [
    [0, 3, INF],
    [INF, 0, 1],
    [2, INF, 0]
]

result = floyd_warshall(dist)

for row in result:
    print(row)
```

```
[0, 3, 4]
```

```
[3, 0, 1]
```

```
[2, 5, 0]
```