

Rot-Schwarz-Baum (Red-Black Tree)

Grundidee

Ein Rot-Schwarz-Baum ist ein **selbstbalancierender binärer Suchbaum**, der durch **Farben (rot/schwarz)** bestimmte Eigenschaften einhält, um die Baumhöhe zu begrenzen.

Ziel ist es, den Baum **annähernd balanciert** zu halten und dadurch **garantierte logarithmische Laufzeiten** zu erreichen – mit weniger Rotationen als beim AVL-Baum.

Voraussetzungen

- Elemente müssen **vergleichbar** sein (Ordnung $<$, $>$)
 - Duplikate nur mit klarer Regel (oder verbieten)
 - Jeder Knoten besitzt eine **Farbe**: rot oder schwarz
-

Laufzeiten & Eigenschaften

Eigenschaft	Wert
Suche	$O(\log n)$
Einfügen	$O(\log n)$
Löschen	$O(\log n)$
Speicherbedarf	$O(n)$
In-place	nein
Stabil	nein

Hinweis: Die Höhe eines Rot-Schwarz-Baums ist höchstens $2 \cdot \log_2(n + 1)$.

Rot-Schwarz-Eigenschaften (klassischer Prüfungsstoff)

Ein Rot-Schwarz-Baum erfüllt **immer** folgende Regeln:

1. Jeder Knoten ist **rot oder schwarz**
2. Die **Wurzel ist schwarz**
3. Alle **Blätter (NIL-Knoten)** sind schwarz

4. **Keine zwei roten Knoten** stehen direkt hintereinander
5. Jeder Pfad von einem Knoten zu seinen NIL-Blättern enthält **gleich viele schwarze Knoten**

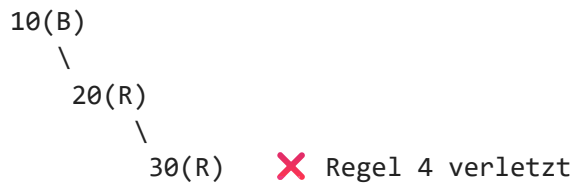
→ Diese Regeln garantieren die logarithmische Höhe.

5 Schritt-für-Schritt-Beispiel

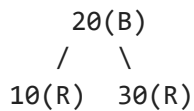
Wir fügen ein:

[10, 20, 30]

Nach normalem BST-Insert



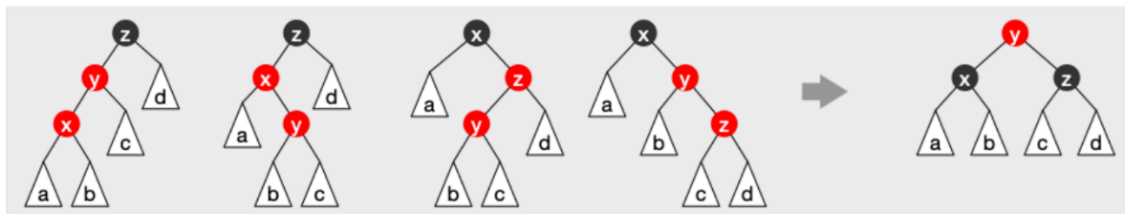
Rebalancing (Rotation + Umfärben)



Baum ist wieder gültig.

Das folgende Bild zeigt die möglichen Ausgangssituationen. Korrigiert wird immer zum recht platzierten Baum.

Einer der folgenden Verletzungen wird zur rechten Lösung migriert.



Case Analysis for fixing insertions:

- Case 1: Recoloring and Propagating Upwards
 - If the parent and uncle of the new node are both red, recolor the parent and uncle to black, and the grandparent to red. if grandparent is root, then dont change to red. Then, recursively apply the fix-up to the grandparent.

- Case 2: Rotation and Recoloring
 - einfach das bild umsetzen oder so, keine Ahnung...

Rot-Schwarz-Baum – Algorithmus in Worten (Grundidee)

Ein Rot-Schwarz-Baum ist ein selbstbalancierender binärer Suchbaum.

Jeder Knoten besitzt zusätzlich eine Farbe: rot oder schwarz.

Durch feste Farbbregeln wird sichergestellt,

dass der Baum annähernd ausgeglichen bleibt.

Dadurch sind Suche, Einfügen und Löschen stets effizient.

Rot-Schwarz-Baum – Eigenschaften in Worten (sehr prüfungsrelevant)

Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

Die Wurzel des Baumes ist immer schwarz.

Alle Blätter (NIL-Knoten) gelten als schwarz.

Ein roter Knoten darf keinen roten Eltern- oder Kindknoten haben.

Jeder Pfad von einem Knoten zu einem Blatt

enthält die gleiche Anzahl schwarzer Knoten.

Diese Regeln verhindern, dass der Baum zu stark entartet.

Einfügen in einen Rot-Schwarz-Baum – Algorithmus in Worten

Der neue Wert wird zunächst wie in einem normalen binären Suchbaum eingefügt.

Der neu eingefügte Knoten wird rot markiert.

Anschließend werden die Rot-Schwarz-Eigenschaften überprüft.

Verstößt der Baum gegen eine Regel,

wird der Baum durch Umlackieren und Rotationen korrigiert.

Dieser Vorgang wird fortgesetzt,

bis alle Rot-Schwarz-Regeln wieder erfüllt sind.

Am Ende ist der Baum wieder gültig und balanciert.

Korrigieren beim Einfügen – Algorithmus in Worten

Tritt ein Regelverstoß auf, wird die Beziehung

zwischen Knoten, Elternknoten und Onkelknoten betrachtet.

Ist der Onkelknoten rot, werden die beteiligten Knoten umgefärbt.

Ist der Onkelknoten schwarz, werden Rotationen durchgeführt.

Dabei bleibt die Ordnungsregel des binären Suchbaums erhalten.

Durch diese Schritte wird der Baum schrittweise repariert.



- Weniger strikt balanciert als AVL
 - Dafür **weniger Rotationen**
 - Sehr häufig in **Standardbibliotheken**
 - z. B. Java `TreeMap`, `TreeSet`
 - Fokus in Prüfungen liegt oft auf **Regeln**, nicht auf Code
-

7 Vor- und Nachteile

Vorteile

- garantierte Laufzeiten $O(\log n)$
- weniger Rotationen als AVL
- gut für häufige Einfüge- und Löschoperationen

Nachteile

- komplexe Regeln
 - schwierige Implementierung
 - schlechtere Suchperformance als AVL (konstanten Faktor)
-

Merksatz für die Prüfung

Rot-Schwarz-Bäume balancieren sich über Farbregeleln statt Höhen und garantieren logarithmische Laufzeiten mit weniger Rotationen als AVL.

8 Python-Implementierung (vereinfachtes Lehrbeispiel)

```
In [1]: RED = True
BLACK = False

class Node:
    def __init__(self, value, color=RED):
        self.value = value
        self.color = color
        self.left = None
        self.right = None
        self.parent = None

class RedBlackTree:
    def __init__(self):
        self.NIL = Node(None, BLACK)
```

```

self.root = self.NIL

def insert(self, value):
    node = Node(value)
    node.left = self.NIL
    node.right = self.NIL

    parent = None
    current = self.root

    while current != self.NIL:
        parent = current
        if value < current.value:
            current = current.left
        else:
            current = current.right

    node.parent = parent
    if parent is None:
        self.root = node
    elif value < parent.value:
        parent.left = node
    else:
        parent.right = node

    node.color = RED
    self.fix_insert(node)

def fix_insert(self, node):
    while node.parent and node.parent.color == RED:
        if node.parent == node.parent.parent.left:
            uncle = node.parent.parent.right
            if uncle.color == RED:
                node.parent.color = BLACK
                uncle.color = BLACK
                node.parent.parent.color = RED
                node = node.parent.parent
            else:
                if node == node.parent.right:
                    node = node.parent
                    self.rotate_left(node)
                node.parent.color = BLACK
                node.parent.parent.color = RED
                self.rotate_right(node.parent.parent)
        else:
            uncle = node.parent.parent.left
            if uncle.color == RED:
                node.parent.color = BLACK
                uncle.color = BLACK
                node.parent.parent.color = RED
                node = node.parent.parent
            else:
                if node == node.parent.left:
                    node = node.parent
                    self.rotate_right(node)
                node.parent.color = BLACK

```

```

        node.parent.parent.color = RED
        self.rotate_left(node.parent.parent)

    self.root.color = BLACK

def rotate_left(self, x):
    y = x.right
    x.right = y.left
    if y.left != self.NIL:
        y.left.parent = x
    y.parent = x.parent
    if x.parent is None:
        self.root = y
    elif x == x.parent.left:
        x.parent.left = y
    else:
        x.parent.right = y
    y.left = x
    x.parent = y

def rotate_right(self, y):
    x = y.left
    y.left = x.right
    if x.right != self.NIL:
        x.right.parent = y
    x.parent = y.parent
    if y.parent is None:
        self.root = x
    elif y == y.parent.right:
        y.parent.right = x
    else:
        y.parent.left = x
    x.right = y
    y.parent = x

```