

■ Rot-Schwarz-Baum (Red-Black Tree)

1 Grundidee

Ein Rot-Schwarz-Baum ist ein **selbstbalancierender binärer Suchbaum**, der durch **Farben (rot/schwarz)** bestimmte Eigenschaften einhält, um die Baumhöhe zu begrenzen.

Ziel ist es, den Baum **annähernd balanciert** zu halten und dadurch **garantierte logarithmische Laufzeiten** zu erreichen – mit weniger Rotationen als beim AVL-Baum.

2 Voraussetzungen

- Elemente müssen **vergleichbar** sein (Ordnung $<$, $>$)
 - Duplikate nur mit klarer Regel (oder verbieten)
 - Jeder Knoten besitzt eine **Farbe**: rot oder schwarz
-

3 Laufzeiten & Eigenschaften

Eigenschaft	Wert
Suche	$O(\log n)$
Einfügen	$O(\log n)$
Löschen	$O(\log n)$
Speicherbedarf	$O(n)$
In-place	nein
Stabil	nein

Hinweis: Die Höhe eines Rot-Schwarz-Baums ist höchstens $2 \cdot \log_2(n + 1)$.

■ Rot-Schwarz-Eigenschaften (klassischer Prüfungsstoff)

Ein Rot-Schwarz-Baum erfüllt **immer** folgende Regeln:

1. Jeder Knoten ist **rot oder schwarz**
2. Die **Wurzel ist schwarz**
3. Alle **Blätter (NIL-Knoten)** sind schwarz

4. **Keine zwei roten Knoten** stehen direkt hintereinander
 5. Jeder Pfad von einem Knoten zu seinen NIL-Blättern enthält **gleich viele schwarze Knoten**

→ Diese Regeln garantieren die logarithmische Höhe.

5 Schritt-für-Schritt-Beispiel

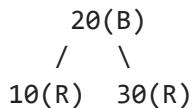
Wir fügen ein:

[10, 20, 30]

Nach normalem BST-Insert



Rebalancing (Rotation + Umfärbung)



Baum ist wieder gültig.

Rot-Schwarz-Baum – Algorithmus in Worten (Grundidee)

Ein Rot-Schwarz-Baum ist ein selbstbalancierender binärer Suchbaum.

Jeder Knoten besitzt zusätzlich eine Farbe: rot oder schwarz.

Durch feste Farbregeln wird sichergestellt,

dass der Baum annähernd ausgeglichen bleibt.

Dadurch sind Suche, Einfügen und Löschen stets effizient.

Rot-Schwarz-Baum – Eigenschaften in Worten (sehr prüfungsrelevant)

Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.

Die Wurzel des Baumes ist immer schwarz.

Alle Blätter (NIL-Knoten) gelten als schwarz.

Ein roter Knoten darf keinen roten Eltern- oder Kindknoten haben

Jeder Pfad von einem Knoten zu einem Blatt

enthält die gleiche Anzahl schwarzer Knoten.

Diese Regeln verhindern, dass der Baum zu stark entartet.

Einfügen in einen Rot-Schwarz-Baum – Algorithmus in Worten

Der neue Wert wird zunächst wie in einem normalen binären Suchbaum eingefügt.

Der neu eingefügte Knoten wird rot markiert.

Anschließend werden die Rot-Schwarz-Eigenschaften überprüft.

Verstößt der Baum gegen eine Regel,

wird der Baum durch Umlackieren und Rotationen korrigiert.

Dieser Vorgang wird fortgesetzt,

bis alle Rot-Schwarz-Regeln wieder erfüllt sind.

Am Ende ist der Baum wieder gültig und balanciert.

Korrigieren beim Einfügen – Algorithmus in Worten

Tritt ein Regelverstoß auf, wird die Beziehung zwischen Knoten, Elternknoten und Onkelknoten betrachtet.

Ist der Onkelknoten rot, werden die beteiligten Knoten umgefärbt.

Ist der Onkelknoten schwarz, werden Rotationen durchgeführt.

Dabei bleibt die Ordnungsregel des binären Suchbaums erhalten.

Durch diese Schritte wird der Baum schrittweise repariert.

6 Besonderheiten / Prüfungsrelevante Hinweise

- Weniger strikt balanciert als AVL
 - Dafür **weniger Rotationen**
 - Sehr häufig in **Standardbibliotheken**
 - z. B. Java `TreeMap`, `TreeSet`
 - Fokus in Prüfungen liegt oft auf **Regeln**, nicht auf Code
-

7 Vor- und Nachteile

Vorteile

- garantierte Laufzeiten $O(\log n)$
- weniger Rotationen als AVL
- gut für häufige Einfüge- und Löschoperationen

Nachteile

- komplexe Regeln

- schwierige Implementierung
 - schlechtere Suchperformance als AVL (konstanten Faktor)
-

Merksatz für die Prüfung

Rot-Schwarz-Bäume balancieren sich über Farbregeln statt Höhen und garantieren logarithmische Laufzeiten mit weniger Rotationen als AVL.

8 Python-Implementierung (vereinfachtes Lehrbeispiel)

```
In [1]: RED = True
BLACK = False

class Node:
    def __init__(self, value, color=RED):
        self.value = value
        self.color = color
        self.left = None
        self.right = None
        self.parent = None

class RedBlackTree:
    def __init__(self):
        self.NIL = Node(None, BLACK)
        self.root = self.NIL

    def insert(self, value):
        node = Node(value)
        node.left = self.NIL
        node.right = self.NIL

        parent = None
        current = self.root

        while current != self.NIL:
            parent = current
            if value < current.value:
                current = current.left
            else:
                current = current.right

            node.parent = parent
            if parent is None:
                self.root = node
            elif value < parent.value:
                parent.left = node
            else:
```

```

        parent.right = node

        node.color = RED
        self.fix_insert(node)

    def fix_insert(self, node):
        while node.parent and node.parent.color == RED:
            if node.parent == node.parent.parent.left:
                uncle = node.parent.parent.right
                if uncle.color == RED:
                    node.parent.color = BLACK
                    uncle.color = BLACK
                    node.parent.parent.color = RED
                    node = node.parent.parent
                else:
                    if node == node.parent.right:
                        node = node.parent
                        self.rotate_left(node)
                        node.parent.color = BLACK
                        node.parent.parent.color = RED
                        self.rotate_right(node.parent.parent)
                    else:
                        uncle = node.parent.parent.left
                        if uncle.color == RED:
                            node.parent.color = BLACK
                            uncle.color = BLACK
                            node.parent.parent.color = RED
                            node = node.parent.parent
                        else:
                            if node == node.parent.left:
                                node = node.parent
                                self.rotate_right(node)
                                node.parent.color = BLACK
                                node.parent.parent.color = RED
                                self.rotate_left(node.parent.parent)

            self.root.color = BLACK

    def rotate_left(self, x):
        y = x.right
        x.right = y.left
        if y.left != self.NIL:
            y.left.parent = x
        y.parent = x.parent
        if x.parent is None:
            self.root = y
        elif x == x.parent.left:
            x.parent.left = y
        else:
            x.parent.right = y
        y.left = x
        x.parent = y

    def rotate_right(self, y):
        x = y.left
        y.left = x.right

```

```
if x.right != self.NIL:
    x.right.parent = y
x.parent = y.parent
if y.parent is None:
    self.root = x
elif y == y.parent.right:
    y.parent.right = x
else:
    y.parent.left = x
x.right = y
y.parent = x
```