



Binärer Suchbaum (Binary Search Tree, BST)

1 Grundidee

Ein binärer Suchbaum ist ein **binärer Baum mit Ordnungsregel**:

- Alle Werte im **linken Teilbaum** sind **kleiner** als der Knoten
- Alle Werte im **rechten Teilbaum** sind **größer** als der Knoten
- Beide Teilbäume sind selbst wieder binäre Suchbäume

Diese Eigenschaft erlaubt **effizientes Suchen, Einfügen und Löschen**.

Siehe BFS für: Suche levelweise von oben nach unten und von links nach rechts. Also Ebene für Ebene über alle Zweige hinweg.

Siehe DFS für: Traversierungen (Inorder, Preorder, Postorder). Also einen Zweig komplett durch und dann zum nächsten

2 Voraussetzungen

- Elemente müssen **vergleichbar** sein (Ordnung $<$, $>$)
 - **keine Duplikate** (oder klare Regel, wohin Duplikate eingefügt werden)
-

3 Laufzeiten & Eigenschaften

Eigenschaft	Wert
Suche (Best / Avg)	$O(\log n)$
Suche (Worst)	$O(n)$
Einfügen	$O(\log n) / O(n)$
Löschen	$O(\log n) / O(n)$
Speicherbedarf	$O(n)$
In-place	nein
Stabil	nein

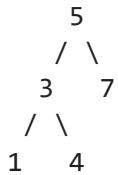
Hinweis: Der Worst Case tritt auf, wenn der Baum **degeneriert** (z. B. sortierte Eingabe).

4 Schritt-für-Schritt-Beispiel

Einfügen der Werte:

[5, 3, 7, 1, 4]

Aufbau des Baums



Suche nach 4

- $4 < 5 \rightarrow$ gehe links
 - $4 > 3 \rightarrow$ gehe rechts
 - gefunden
-

5 Besonderheiten / Prüfungsrelevante Hinweise

- Inorder-Traversierung liefert **sortierte Reihenfolge**
 - Performance hängt stark von der **Baumhöhe** ab
 - Grundlage für AVL-Bäume und Rot-Schwarz-Bäume
 - Nicht selbstbalancierend
-

6 Vor- und Nachteile

Vorteile

- effiziente Suche bei balanciertem Baum
- dynamische Datenstruktur
- natürliche Sortierung möglich

Nachteile

- Worst Case $O(n)$
 - kein automatisches Balancing
 - höherer Speicherbedarf als Arrays
-



Merksatz für die Prüfung

Ein binärer Suchbaum speichert geordnete Daten, erlaubt effiziente Suche bei balancierter Struktur, kann aber im Worst Case linear werden.

7 Python-Implementierung

In [1]:

```
class Node:
    def __init__(self, value):
        self.value = value
        self.left = None
        self.right = None

class BinarySearchTree:
    def __init__(self):
        self.root = None

    def insert(self, value):
        if self.root is None:
            self.root = Node(value)
        else:
            self._insert_recursive(self.root, value)

    def _insert_recursive(self, node, value):
        if value < node.value:
            if node.left is None:
                node.left = Node(value)
            else:
                self._insert_recursive(node.left, value)
        else:
            if node.right is None:
                node.right = Node(value)
            else:
                self._insert_recursive(node.right, value)

    def search(self, value):
        return self._search_recursive(self.root, value)

    def _search_recursive(self, node, value):
        if node is None:
            return False
        if node.value == value:
            return True
        if value < node.value:
            return self._search_recursive(node.left, value)
        else:
            return self._search_recursive(node.right, value)

    def inorder(self):
        result = []
        self._inorder_recursive(self.root, result)
```

```

    return result

def _inorder_recursive(self, node, result):
    if node:
        self._inorder_recursive(node.left, result)
        result.append(node.value)
        self._inorder_recursive(node.right, result)

```

Baum-Traversierungen (Inorder, Preorder, Postorder)

1 Grundidee

Baum-Traversierungen legen fest, **in welcher Reihenfolge** die Knoten eines Baumes besucht werden. Bei binären Bäumen unterscheidet man drei klassische **Depth-First-Traversierungen (DFS)**.

- **Inorder:** links → Knoten → rechts
 - **Preorder:** Knoten → links → rechts
 - **Postorder:** links → rechts → Knoten
-

2 Voraussetzungen

- Es muss ein **Baum** vorhanden sein (z. B. binärer Suchbaum)
 - Jeder Knoten kann maximal **zwei Kinder** haben
-

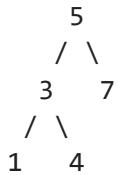
3 Laufzeiten & Eigenschaften

Eigenschaft	Wert
Laufzeit	$O(n)$
Speicher (rekursiv)	$O(h)$
In-place	ja
Stabil	–

Hinweis: n = Anzahl Knoten, h = Höhe des Baumes

4 Schritt-für-Schritt-Beispiel

Gegebener Baum:



Inorder (links → Knoten → rechts)

[1, 3, 4, 5, 7]

Preorder (Knoten → links → rechts)

[5, 3, 1, 4, 7]

Postorder (links → rechts → Knoten)

[1, 4, 3, 7, 5]

Binary Search Tree – Algorithmus in Worten (Grundidee)

Ein binärer Suchbaum ist ein binärer Baum mit einer Ordnungsregel.

Für jeden Knoten gilt:

Alle Werte im linken Teilbaum sind kleiner als der Knoten.

Alle Werte im rechten Teilbaum sind größer als der Knoten.

Diese Regel gilt rekursiv für alle Teilbäume.

Dadurch sind Suchen, Einfügen und Traversieren effizient möglich.\

Einfügen in einen Binary Search Tree – Algorithmus in Worten

Der Algorithmus beginnt bei der Wurzel des Baumes.

Der einzufügende Wert wird mit dem aktuellen Knoten verglichen.

Ist der Wert kleiner, wird in den linken Teilbaum gewechselt.

Ist der Wert größer, wird in den rechten Teilbaum gewechselt.

Dieser Vergleich wird rekursiv fortgesetzt, bis ein leerer Platz erreicht ist.

An dieser Stelle wird ein neuer Knoten mit dem Wert eingefügt.

Der Baum erfüllt danach wieder die Ordnungsregel eines binären Suchbaums.\

Suchen in einem Binary Search Tree – Algorithmus in Worten

Die Suche beginnt bei der Wurzel des Baumes.

Der gesuchte Wert wird mit dem aktuellen Knoten verglichen.

Ist der Wert gleich, ist die Suche erfolgreich beendet.

Ist der Wert kleiner, wird im linken Teilbaum weitergesucht.

Ist der Wert größer, wird im rechten Teilbaum weitergesucht.

Dieser Vorgang wird fortgesetzt, bis der Wert gefunden wird oder ein leerer Teilbaum erreicht ist.\

Inorder-Traversierung – Algorithmus in Worten (sehr prüfungsrelevant)

Der Algorithmus besucht zuerst den linken Teilbaum.

Anschließend wird der aktuelle Knoten verarbeitet.

Danach wird der rechte Teilbaum besucht.

Dieser Ablauf wird rekursiv auf alle Teilbäume angewendet.

Bei einem binären Suchbaum ergibt die Inorder-Traversierung eine sortierte Reihenfolge der gespeicherten Werte.\

5 Besonderheiten / Prüfungsrelevante Hinweise

Inorder

- Liefert bei **binären Suchbäumen** eine **sortierte Reihenfolge**
- Sehr häufige Prüfungsfrage

Preorder

- Geeignet zum **Kopieren / Serialisieren** von Bäumen
- Wurzel wird zuerst verarbeitet

Postorder

- Geeignet zum **Löschen von Bäumen**
 - Kinder werden vor dem Elternknoten verarbeitet
-

6 Vor- und Nachteile

Vorteile

- einfache Implementierung
- klare Struktur
- alle Knoten werden genau einmal besucht

Nachteile

- rekursiv → Stackverbrauch
- iterative Varianten komplexer



Merksätze für die Prüfung

- *Inorder liefert beim BST die sortierte Reihenfolge.*
- *Preorder besucht zuerst die Wurzel.*
- *Postorder besucht die Wurzel zuletzt.*

7

Python-Implementierung

In [2]:

```
class Node:  
    def __init__(self, value):  
        self.value = value  
        self.left = None  
        self.right = None  
  
    def inorder(node, result):  
        if node:  
            inorder(node.left, result)  
            result.append(node.value)  
            inorder(node.right, result)  
  
    def preorder(node, result):  
        if node:  
            result.append(node.value)  
            preorder(node.left, result)  
            preorder(node.right, result)  
  
    def postorder(node, result):  
        if node:  
            postorder(node.left, result)  
            postorder(node.right, result)  
            result.append(node.value)  
  
# Beispiel  
root = Node(5)  
root.left = Node(3)  
root.right = Node(7)  
root.left.left = Node(1)  
root.left.right = Node(4)  
  
res = []  
inorder(root, res)  
print("Inorder:", res)  
  
res = []  
preorder(root, res)  
print("Preorder:", res)
```

```
res = []
postorder(root, res)
print("Postorder:", res)
```

```
Inorder: [1, 3, 4, 5, 7]
Preorder: [5, 3, 1, 4, 7]
Postorder: [1, 4, 3, 7, 5]
```

■ Breitensuche (BFS / Level-Order-Traversierung)

1 Grundidee

Die **Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)** besucht die Knoten eines Baumes **levelweise von oben nach unten und von links nach rechts** innerhalb eines Levels.

Bei Bäumen wird BFS oft auch **Level-Order-Traversierung** genannt.

- Start bei der Wurzel
 - Nutzung einer **Queue (FIFO)**
 - Zuerst alle Knoten einer Ebene, dann die nächste Ebene
-

2 Voraussetzungen

- Eine **Baumstruktur** (z. B. binärer Baum oder BST)
 - Zugriff auf Kinderknoten
 - Eine **Queue** zur Speicherung der nächsten Knoten
-

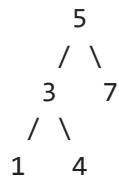
3 Laufzeiten & Eigenschaften

Eigenschaft	Wert
Laufzeit	$O(n)$
Speicherbedarf	$O(n)$
In-place	nein
Stabil	–

Hinweis: Im Worst Case (breiter Baum) befinden sich viele Knoten gleichzeitig in der Queue.

4 Schritt-für-Schritt-Beispiel

Gegebener Baum:



Ablauf der BFS

1. Starte bei 5 → Queue: [5]
2. Besuche 5, füge Kinder ein → Queue: [3, 7]
3. Besuche 3, füge Kinder ein → Queue: [7, 1, 4]
4. Besuche 7 → Queue: [1, 4]
5. Besuche 1 → Queue: [4]
6. Besuche 4 → Queue: []

Besuchsreihenfolge

[5, 3, 7, 1, 4]

5 Besonderheiten / Prüfungsrelevante Hinweise

- BFS nutzt immer eine **Queue**
 - Bei Bäumen: auch **Level-Order-Traversierung**
 - Bei Graphen: BFS liefert **kürzeste Wege in ungewichteten Graphen**
 - Gegensatz zu DFS (Stack / Rekursion)
-

6 Vor- und Nachteile

Vorteile

- intuitive Traversierung
- kürzeste Wege (bei Graphen)
- keine Rekursion nötig

Nachteile

- höherer Speicherbedarf als DFS
 - Queue kann groß werden
-

Merksatz für die Prüfung

Die Breitensuche besucht Knoten levelweise mithilfe einer Queue und wird bei Bäumen als Level-Order-Traversierung bezeichnet.

7 Python-Implementierung

```
In [3]: from collections import deque

class Node:
    def __init__(self, value):
        self.value = value
        self.left = None
        self.right = None

def bfs(root):
    if root is None:
        return []

    result = []
    queue = deque([root])

    while queue:
        node = queue.popleft()
        result.append(node.value)

        if node.left:
            queue.append(node.left)
        if node.right:
            queue.append(node.right)

    return result

# Beispiel
root = Node(5)
root.left = Node(3)
root.right = Node(7)
root.left.left = Node(1)
root.left.right = Node(4)

print(bfs(root)) # [5, 3, 7, 1, 4]
```

[5, 3, 7, 1, 4]

Beispiellösung für Übungsaufgabe

Aufgabenstellung:

Implementieren Sie eine Methode, die alle Knoten eines Binary Search Trees auf einem

bestimmten Level (Tiefe) von links nach rechts zurückgibt. Die Wurzel befindet sich auf Level 0.

Vorgegebener Code:

```
class Node:
    def __init__(self, key, val):
        self.key = key
        self.val = val
        self.left = None
        self.right = None

class BST:
    def __init__(self):
        self.root = None

    # Implementieren Sie diese Methode
    def get_keys_at_level(self, level):
        # Ihre Implementierung hier
        pass
```

Lösung als Python-Code:

```
In [4]: def get_keys_at_level(self, level):
    if self.root is None:
        return []

    result = []
    queue = [(self.root, 0)]

    while queue:
        node, current_level = queue.pop(0)

        if current_level == level:
            result.append(node.key)
        elif current_level < level:
            if node.left:
                queue.append((node.left, current_level + 1))
            if node.right:
                queue.append((node.right, current_level + 1))

    return result
```