Avaliação de Desempenho Modelagem e Simulação
Resolução da prova do dia 19/05/2014

Albert De La Fuente Vigliotti - NUSP: 8489827
Prof. Wilson Ruggiero

Entrega: 27/05/2014

1 Problema 01

[30%]. 1a Questão: Cadeia de Markov

Considere duas estacões conectadas a um canal de comunicação do tipo cabo coaxial ou canal de radio (figura ilustrativa abaixo). Assuma que o tempo e dividido em intervalos fixos, chamados "slots", As estacões recebem pacotes de dados para serem transmitidos nesse canal. O tamanho dos pacotes, o tamanho dos "slots"de tempo e a taxa de transmissão do canal são tais que um pacote possa ser transmitido no canal na exata duração de um "slot"de tempo.

Pacotes chegam as estacões durante um "slot"de tempo com probabilidade α. Considere desprezível a probabilidade de chegar dois ou mais pacotes numa mesma estacão. Cada estacão possui somente um "buffer"para armazenar pacotes. Uma vez que um pacote esteja na estacão, pacotes adicionais que chegam nessa estacão são descartados.

Se uma estacão possui um pacote, ela transmite o pacote durante um "slot"de tempo com probabilidade σ. Um pacote só pode ser transmitido com sucesso por uma estacão se a outra não transmitir no mesmo "slot"de tempo. Se pacotes são transmitidos pelas duas estacões num mesmo "slot"de tempo eles colidem e ambos os pacotes necessitam ser retransmitidos por ambas as estacões. Ambas as estacões detectam a situação de colisão.

Pergunta-se:

<u>Questão a:</u> Defina a variável de estado para esse sistema e faca o diagrama de estado da cadeia de Markov;

A variável de estado e a tupla formada por o numero de pacotes da estacão A e o numero de pacotes da estacão B. Os possíveis valores estão na Tabela 1

BufferA	BufferB
0	0
0	1
1	0
1	1

Tabela 1: Possíveis valores da variável de estado

Conforme a tabela 2 as estacões podem receber (com probabilidade $a = \alpha$) ou não receber (com probabilidade $1 - a$) e podem enviar (com probabilidade $s = \sigma$ ou não enviar (com probabilidades $1 - s$).

Evento	Probabilidade
recebe	a
não recebe	1-a
envia	s
não envia	1-s

Tabela 2: Possiveis estados das estacoes

Para entender melhor o problema representamos a relação dos valores atuais da variável de estado em relação aos valores futuros na tabela 3. **Assumi que não e possível receber e enviar no mesmo "slot"**, pois ai entraria uma questão de ordem que torna o problema muito mais complexo, inicialmente fiquei preso nessa modelagem e apos demorar muito descartei essa abordagem e comecei do zero novamente.

Atual A	Atual B	Futuro A	Futuro B		Evento	Expressão
0	0	0	0		A não recebe e B não recebe	(1-a)*(1-a)
0	0	0	1		A não recebe e B recebe	(1-a)*a
0	0	1	0		A recebe e B não recebe	a*(1-a)
0	0	1	1		A recebe e B recebe	a*a
0	1	0	0		A não recebe e B envia	(1-a)*s
0	1	0	1		A não recebe e B não envia	(1-a)*(1-s)
0	1	1	0		A recebe e B envia	a*s
0	1	1	1		A recebe e B não envia	a*(1-s)
1	0	0	0		A envia e B não recebe	s*(1-a)
1	0	0	1		A envia e B recebe	s*a
1	0	1	0		A não envia e B não recebe	(1-s)*(1-a)
1	0	1	1		A não envia e B recebe	(1-s)*a
1	1	0	0		A envia e B envia	0 (Estado impossível [s*s])
1	1	0	1		A envia e B não envia	s*(1-s)
1	1	1	0		A não envia e B envia	(1-s)*s
1	1	1	1		A não envia e B não envia ou ha colisão e retransmite	(1-s)*(1-s)+s*s

Tabela 3: Relacao de estados atuais e futuros

Dessa tabela se deriva o diagrama da cadeia de Markov ilustrado na figura 1.

Questão b: Calcule as probabilidades de estado em equilíbrio da cadeia de Markov desse sistema;

Achei interessante dar um jeito de aprender a resolver sistemas de Markov usando software. Aprendi a fazer isto com varios programas como *Sage*, *R* e *Octave*. Os scripts podem ser compartilhados se for necessário. Esse script e usado por exemplo com *Octave*[1]:

```
a = 0.2
s = 0.6
P = [
   (1-a)*(1-a),    (1-a)*a,        a*(1-a),        a*a;
   (1-a)*s,        (1-a)*(1-s),    a*s,            a*(1-s);
   s*(1-a),        s*a,            (1-s)*(1-a),    (1-s)*a;
   0,              s*(1-s),        (1-s)*s,        (1-s)*(1-s)+s*s;
]
```

[1]Pelo que li, e possível resolver cadeias de Markov de mais de 2000 estados em segundos. Octave e software livre

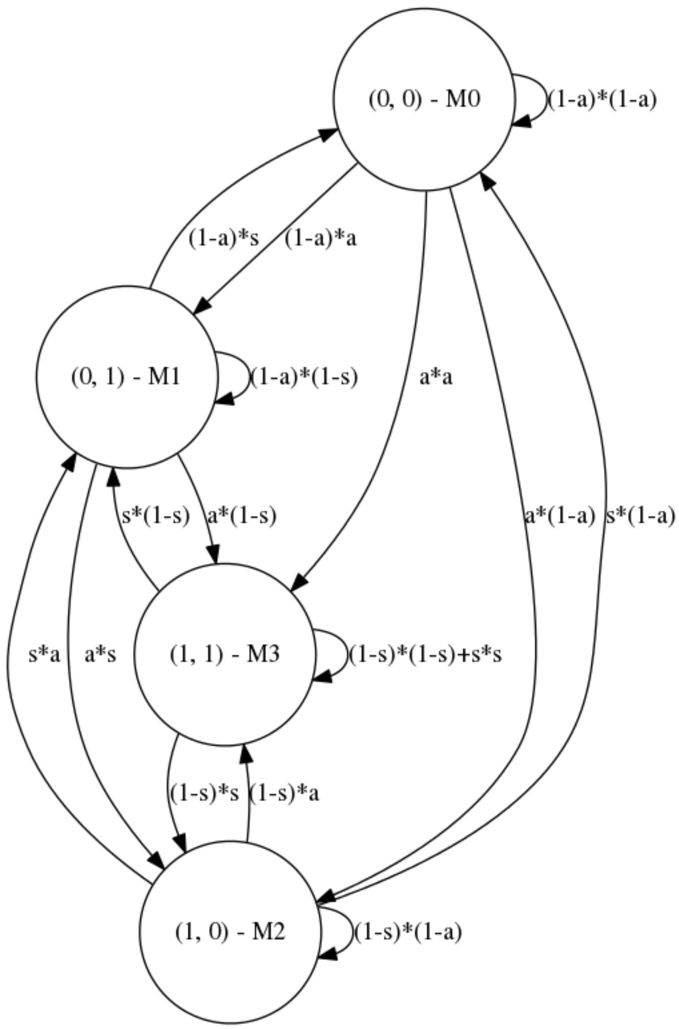

Figura 1: Cadeia de Markov do problema 01

```
pis = [P' - eye(size(P)); ones(1, length(P))] \ [zeros(length(P), 1); 1]
```

Dando como resultado o vetor $\pi = [0.51064, 0.19149, 0.19149, 0.10638]$.

<u>Questão c:</u> Calcule a vazão útil de pacote nesse canal;

A vazão útil seria a soma de:

- Estando no estado M_1 vou para M_0 com a condição $(1-a)*s$
- Estando no estado M_2 vou para M_0 com a condição $s*(1-a)$
- Estando no estado M_1 vou para M_2 com a condição $a*s$
- Estando no estado M_2 vou para M_1 com a condição $s*a$
- Estando no estado M_3 vou para M_1 com a condição $s*(1-s)$
- Estando no estado M_3 vou para M_2 com a condição $(1-s)*s$

Como $\pi_1 = \pi_2$, reduzimos a expressão a $2\pi_1(1-a)s + 2\pi_2 as + 2\pi_3 s(1-s) = 0.28085$

A vazão útil seria de 28.08%

Questão d: Calcule a vazão de pacotes colididos no canal;

Apos de calcular o vetor π, a vazão dos pacotes colididos seria a parte da multiplicação σ^2 (ou seja $s \times s$ da ultima célula da matriz, que expressado como equação seria: $\pi_3 = \pi_0 \times a^2 + \pi_1 \times a(1-s) + \pi_2 \times (1-s)a + \pi_3 \times ((1-s)^2 + vc)$, de onde calculamos $vc = 0.35998$.

Como isso só pode acontecer no estado M_3 então multiplicamos $\pi_3 \times 0.35998 = 0.03829$, ou seja 3.82%.

Outra forma de enxergar isso seria a probabilidade de estar em M_3 e acontecer o evento $s * s$, ou seja $0.10638 \times 0.6 \times 0.6$ que acaba sendo o mesmo valor anterior, ou seja 3.82%.

Supondo que ha uma vazão de 100 pacotes por segundo, a resposta seria 3.82 pacotes por segundo.

Questão e: Calcule o numero médio de pacotes esperando nos buffers das duas estacões;

O numero médio de pacotes seria $nmp = 0\pi_0 + 1\pi_1 + 1\pi_2 + 2\pi_3 = 0 \times 0.51064 + 1 \times 0.19149 + 1 \times 0.19149 + 2 \times 0.10638$, ou seja 0.59574 pacotes.

Questão f: Calcule o atraso médio de transmissão dos pacotes nesse canal;

O atraso médio dos pacotes e a divisão do numero médio de pacotes pela vazão, isto e: $amp = \frac{nmp}{vu} = \frac{0.59574}{0.28085} = 2.1212$.

Questão g: Calcule a probabilidade de bloqueio (descarte) de um pacote por uma das estacões.

A probabilidade de descarte seria a soma de:

- Estando no estado M_1 a primeira estacão recebe um pacote
- Estando no estado M_2 a segunda estacão recebe um pacote
- Estando no estado M_3 e primeira estacão recebe um pacote
- Estando no estado M_3 e segunda estacão recebe um pacote
- Estando no estado M_3 as duas estacões recebem um pacote

Como nos primeiros quatro itens a ordem das estacões importa, então dividimos a probabilidade de chegar um pacote entre as possíveis permutações que o evento pode acontecer, usamos a seguinte notação para ilustrar isso: ${}^2P_1$

Matematicamente seria: $pd = \pi_1 \times \frac{a}{{}^2P_1} + \pi_2 \times \frac{a}{{}^2P_1} + \pi_3 \times \frac{a}{{}^2P_1} + \pi_3 \times \frac{a}{{}^2P_1} + \pi_3 \times a \times a$,

$pd = \pi_1 \times a/2 + \pi_2 \times a/2 + \pi_3 \times a/2 + \pi_3 \times a/2 + \pi_3 \times a \times a = 0.063829$, ou seja 6.38%.

Supondo que ha uma vazão de 100 pacotes por segundo, a resposta seria 6.38 pacotes por segundo.

2 Problema 02

[30%]. 2a Questão: Rede de Petri - GSPN

Considere a Rede de Petri Temporal Estocástica Generalizada (GSPN) mostrada na figura 2

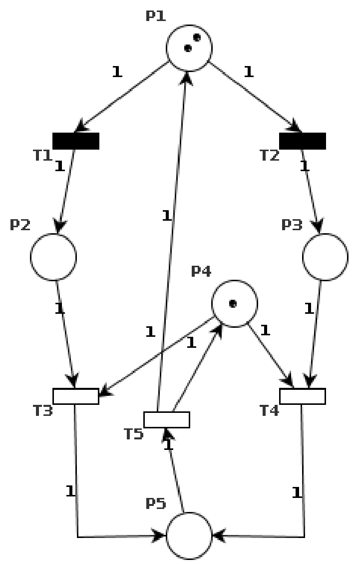

Figura 2: Problema 02

Responda as seguintes questões:

Questão a: Determine a arvore de alcançabilidade dessa Rede de Petri;

A arvore de alcançabilidade esta mostrada na figura 3

Questão b: Determine a cadeia de Markov associada a essa rede de Petri;

A cadeia de Markov esta mostrada na figura 3

Questão c: Determine a matriz de taxas de transição dessa cadeia de Markov;

A matriz de taxas de transição dessa cadeia e a seguinte:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_1\alpha & -\mu_1 & 0 & \mu_1\beta & 0 \\ \mu_1\beta & 0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1\alpha \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Ou seja:

$$Q = \begin{pmatrix} -25 & 10 & 15 & 0 & 0 \\ 8 & -20 & 0 & 12 & 0 \\ 12 & 0 & -20 & 0 & 8 \\ 0 & 15 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

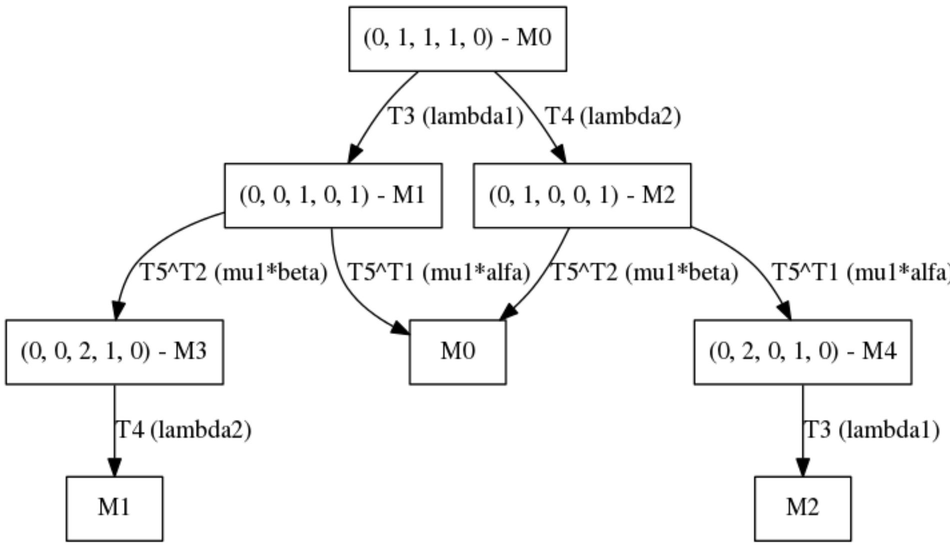

Figura 3: Arvore de alcançabilidade da Rede de Petri

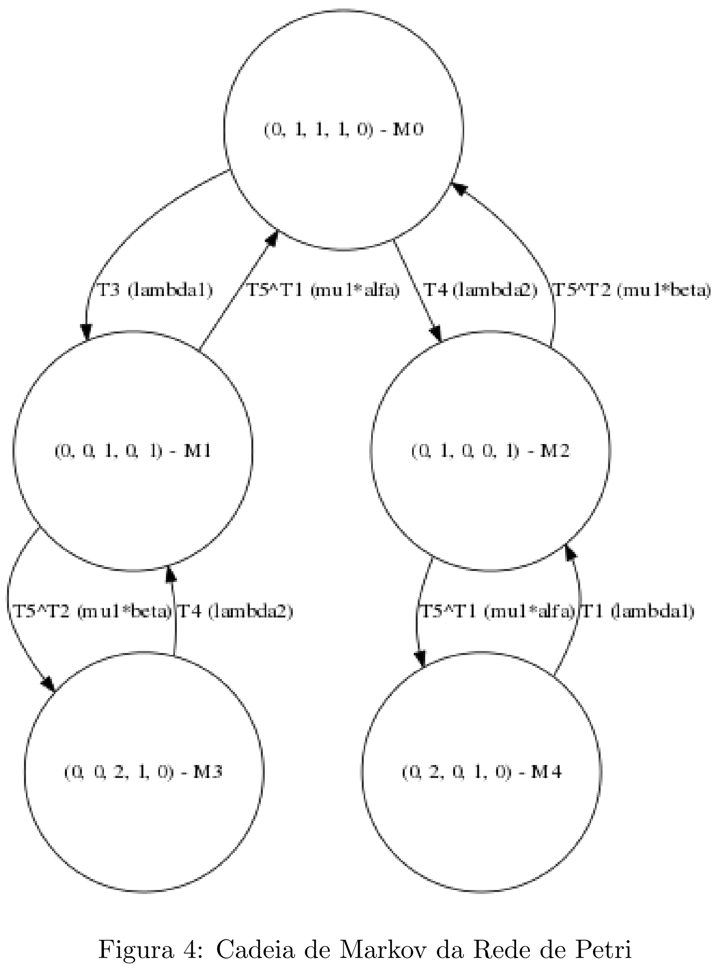

Figura 4: Cadeia de Markov da Rede de Petri

<u>Questão d:</u> Calcule as probabilidades de equilíbrio dos estados dessa cadeia;

Para obter as probabilidades em estado de equilíbrio devemos resolver o sistema de equações dado por $\pi Q = 0$. Para isso usamos o seguinte script em *Sage*:

```
a = 0.4
b = 0.6
l1 = 10
l2 = 15
m1 = 20
Q = matrix(RR, 5, [
   [-l1-l2,      l1,      l2,      0,      0],
   [  m1*a,     -m1,       0,   m1*b,      0],
   [  m1*b,       0,     -m1,      0,   m1*a],
   [     0,      l2,       0,    -l2,      0],
   [     0,       0,      l1,      0,    -l1]
   ])

I = matrix(5, 5, 1);
s0, s1, s2, s3, s4 = var('s0, s1, s2, s3, s4')
eqs = vector((s0, s1, s2, s3, s4)) * Q;
solve([
   eqs[0] == 0,
   eqs[1] == 0,
   eqs[2] == 0,
   eqs[3] == 0,
   eqs[4] == 0,
   s0+s1+s2+s3+s4==1], s0, s1, s2, s3, s4)
```

Dando os seguintes resultados:

$$\pi = [0.18182, 0.22727, 0.22727, 0.18182, 0.18182].$$

Os resultados foram verificados também com o *Pipe*.

Questão e: Anulada

Questão f: Calcule a probabilidade das duas transições temporais **t3** e **t4** disputarem o recurso compartilhado representado pelo lugar **t4**

Já calculado, seria o valor de π_0 que e o único lugar onde tem marcas em p2 e p3. O valor seria $\pi_0 = 0.18182$

Questão g: Como você classificaria na cadeia de Markov o estado correspondente a marcação {2, 0, 0, 1, 0} onde a marcação significa {#P1, #P2, #P3, #P4, #P5}

O estado {2, 0, 0, 1, 0} e intangível (transitório ou recorrente nulo) já que ambas transições são imediatas e por tanto não aparece na cadeia de Markov.