Klassische Feldtheorie

Zusammenfassung

Das Skript zur Vorlesung klassische Feldtheorie im Wintersemester 2013/14. Die Vorlesung wurde von Professor Spiesberger gehalten.

Inhaltsverzeichnis

1 Spezielle Relativitätstheorie

Einstein 1905:
Zur Elektrodynamik bewegter Körper

1.1 Postulate

1.1.1 1. Postulat

Die Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in der gleichen Weise.
Inertialsysteme: Bezugssysteme in denen ein sich kräftefrei bewegender Körper, konstante Geschwindigkeit besitzt. $\rightarrow$ verschiedene Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit.

1.1.2 2.Postulat

Prinzip der in jedem Inertialsystem konstanten Lichtgeschwindigkeit.
Prinzip: es gibt eine maximale Signalgeschwindigkeit
Wirkungsausbreitung = Lichtgeschwindigkeit $c = 2.99 * 10^8 \frac{m}{s}$
(Klassische Mechanik: Grenzfall: $c \rightarrow \infty$)
z.B. $\Pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
$\rightarrow$ Geschwindigkeiten können nicht trivial addiert werden
$\rightarrow$ Zeit muss in der Speziellen Relativitätstheorie mit transformiert werden
$\rightarrow$ 4-dimensionale Schreibweise einer vierdimensionalen Raumzeit.
Dazu spricht man in der speziellen Relativitätstheorie von einem Ereignis oder Weltpunkt $(t, \vec{x})$ (Raum-Zeit-Punkte). Die physikalische Dimension wird zu $x^0 = ct$ normiert.
$\rightarrow x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x})$
$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \leftarrow x^i$
Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Koordinatensystemen folgt das der 4-Abstand zweier Ereignisse a, b mit den Weltpunkten x_a^μ,x_b^μ, die durch ein Lichtsignal verbunden sind, konstant ist.

$$S_{ab}^2 = (x_a^0 - x_b^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(x_a^i - x_b^i)^2 \tag{1}$$

$$= c^2(t_a - t_b)^2 - (\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2 \tag{2}$$

S_{ab}^2 ist für beliebige Ereignisse invariant beim Wechsel zwischen Inertialsystemen.

1.1.3 Definition der Ko- und Kontravarianten Vektoren

Kontravariante Komponenten von 4er Vektoren: $x^{\mu\leftarrow}$
Kovariante Komponenten von 4er Vektoren :$x_{\mu\leftarrow} = g_{\mu\nu}x^\nu$
$g_{\mu\nu}$ = Metrischer Tensor (Tensor 2. Stufe) = diag(1,-1,-1,-1)
$g_{00} = 1$ $g_{ii} = -1$

Einsteinsche Summenkonvention: $\sum$ wird implizit über alle Indizepaare gebildet, bei denen ein Index oben und der andere unten steht. Diese summe geht bei griechischen Buchstaben von 0 bis 3 und bei lateinischen Buchstaben von 1 bis 3

$$x_{\mu\leftarrow} = g_{\mu\nu}x^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x^\nu \tag{3}$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \rightarrow x_\mu = (ct, -\vec{x}) \tag{4}$$

damit lässt sich der 4-Abstand schreiben als

$$S_{ab}^2 = g_{\mu\nu}(x_a - x_b)^\mu * (x_a - x_b)^\nu \tag{5}$$

$$= \sum_\mu (x_a - x_b)^\mu \left(\sum_\nu g_{\mu\nu}(x_a - x_b)^\nu\right) \tag{6}$$

$$= (x_a - x_b)^\mu * (x_a - x_b)_\mu \tag{7}$$

→ Invarianz des 4-Abstandes?
⇒ 4-Abstand (Metrik)
für differentielle Abstände $\mathrm{d}x^\mu = (c\mathrm{d}t, \mathrm{d}\vec{x})$ gilt:

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}x^2 = g_{\mu\nu} * \mathrm{d}x^\mu * \mathrm{d}x^\nu \tag{8}$$
$$= c^2 * \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{x}^2 \tag{9}$$

Hier ist die Metrik durch den metrischen Tensor gegeben.

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{10}$$

$g: \ x^\mu \mapsto x_\mu = g_{\mu\nu} * x^\nu$ ist damit eine Abbildung.

1.2 Geometrie

Eigenzeit: wähle ein Inertialsystem K in dem ein Körper in Ruhe ist $\mathrm{d}\vec{x} = 0$, $\mathrm{d}t \neq 0$, $\mathrm{d}x^0 = c * \mathrm{d}t$ mit der Schreibweise $\mathrm{d}\tau$.
Im Koordinatensystem $K^{'}$ des Beobachters in dem sich der Körper bewegt gelte nun $\mathrm{d}\vec{x}^{'} \neq 0$, $\mathrm{d}t^{'} \neq 0$

1.2.1 Invarianz des 4-Abstands

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 * \mathrm{d}\tau^2 = c^2 * (\mathrm{d}t^{'})^2 - (\mathrm{d}x^{1'})^2 - (\mathrm{d}x^{2'})^2 - (\mathrm{d}x^{3'})^2 \tag{11}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t^{'} * \sqrt{1 - \frac{(\mathrm{d}x^{1'})^2 + (\mathrm{d}x^{2'})^2 + (\mathrm{d}x^{3'})^2}{c^2(\mathrm{d}t')^2}} \tag{12}$$
$$= \mathrm{d}t^{'} * \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}|\vec{x}^{'}|}{\mathrm{d}t^{'}}\right)^2} \tag{13}$$
$$= \mathrm{d}t^{'} * \sqrt{1-\beta^2} \text{ mit } \beta = \frac{v}{c} \leq 1 \tag{14}$$
$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} \tag{15}$$

für beliebige Bewegungen:

$$\tau = \int \mathrm{d}t^{'} \sqrt{1-\beta^2} \tag{16}$$

1.3 Lorentz-Transformationen

Galilei-Trafo.: nicht-relativistische Kinematik

$$t^{'} = t, x^{'1} = x^1 + v * t, x^{'2} = x^2, x^{'2} = x^2 \tag{17}$$

für Inertialsysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit v in x^1-Richtung bewegen.
in der SRT muss die Zeit mit transformiert werden:

$$x^\mu \to x^{'\mu} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{18}$$

Λ^μ_ν aus der Forderung der Invarianz des 4er Abstandes (0. $x^\mu \to x^{'\mu} = x^\mu + a^\mu, a^\mu =$ konstant, Transformation in Raum-Zeit

1. eine Lösung: $x^{'\mu} = x^\mu$, d.h. $\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbb{R} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$\vec{x^{'}} = \mathbb{R} * \vec{x}$ wobei $\mathbb{R}$ eine räumliche Drehung darstellt also $\mathbb{R}^T\mathbb{R} = 1$)

z.B. Drehung um x^3-Achse

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\vec{x'} = \mathbb{R} * \vec{x}, \vec{x'}^2 = \vec{x}^2 \tag{20}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{21}$$

z.B. Versuche

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1 \tag{23}$$

Dies entspricht einer Drehung mit einem Imaginären Drehwinkel.
im K-System K: Komponenten x^μ
im K-System K': Komponenten x'^μ
K und K' bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit v, so dass $\beta = \frac{v}{c} = -\tanh\psi$
Ursprung von K':

$$x'^\mu = 0 = \sinh\psi * x^0 + \cosh\psi * x^1 \tag{24}$$

$$\Rightarrow \frac{x^1}{x^0} = \frac{x^1}{c*t} = -\frac{\sinh\psi}{\cosh\psi} = -\tanh\psi \tag{25}$$

$$\tanh\psi = -\beta \tag{26}$$

$$\sinh\psi = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \cosh\psi = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{27}$$

Abkürzung: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Diese spezielle Lorentz-Transformation wird "boost"genannt.
Sie ist hier jedoch ausschließlich in 1-Richtung. In 2-Richtung und 3-Richtung werden einfach die entsprechenden Zeilen vertauscht. Andere Richtungen lassen sich mit Drehungen realisieren. Beliebige Lorentz Transformationen der Form $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ können dargestellt werden als Produkt von jeweils eine Lorentzboost und einer Drehung

$$x'^1 = \frac{x^1 + vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, x'^2 = x^2, x'^3 = x^3, t' = \frac{t + \frac{\beta}{c} * x^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{29}$$

$\Rightarrow$ Längenkontraktion, Zeitdilatation
Ansatz: 4-Abstand ist invariant
differentiell: $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}s')^2$
aus Definition folgt: $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{x}^2$
Lichtsignal: $\mathrm{d}s^2 = 0$ Ansatz: $\mathrm{d}s' = a * \mathrm{d}s$
Aus der Homogenität und Isotropie des Raumes folgt,dass das a von keiner der Koordinaten abhängen kann.
$\Rightarrow a(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) = a(|\vec{v}|)$
Betrachte nun 3 Koordinatensysteme:

1. K_1-System: ds
2. K_2-System: relativ bewegt zu K_1 mit $\vec{v_{12}}$
3. K_3-System: relativ bewegt zu K_1 mit $\vec{v_{13}}$

$\Rightarrow K_2$ relativ zu K_3 bewegt mit $\vec{v_{23}}$

$$\mathrm{d}s \to \mathrm{d}s^{'} = a(|\vec{v}_{12}|) * \mathrm{d}s(K_1 \to K_2) \tag{30}$$
$$\mathrm{d}s^{''} = a(|\vec{v}_{13}|) * \mathrm{d}s(K_1 \to K_3) \tag{31}$$
$$\mathrm{d}s^{''} = a(|\vec{v}_{23}|) * \mathrm{d}s^{'}(K_2 \to K_3) \tag{32}$$
$$\Rightarrow a(|\vec{v}_{13}|) = a(|\vec{v}_{12}|) * a(|\vec{v}_{23}|) \tag{33}$$

Da gilt $\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}$ liegt eine Winkelabhängigkeit bei der obigen Gleichung vor und damit muss a eine Konstante sein, die wir per Konvention auf $a = 1$ setzen.

1.4 4-Vektoren

4-komponentige Größen $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ die sich bei einem Übergang von einem Inertialsystem zum anderen nach:

$$A^\mu \to A^{'\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \tag{34}$$

transformieren, heißen 4-Vektor $\to$ Kovariante 4-Vektor $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$
$\to$ Quadrat $A^2 = A_\mu A^\nu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - (\vec{A})^2$
$\Rightarrow A^2$ sind invariant unter Lorentztransformationen d.h. $A^{'2} = A^2$ und $\Lambda\Lambda g = g$

2 Allgemeine Feldtheorie

Skalarfelder $\Phi(x)$ mit x 4-Vektor Vektorfelder $V^\mu(x)$ Transformationsverhalten:

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \tag{35}$$
$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{36}$$
$$V^{\mu\prime}(x) = \Lambda^\mu{}_\nu V^\mu(x) \tag{37}$$

Beispiele:
für Φ: Potential, Ladungsdichte
für $V^\mu(x)$: Stromdichte $\frac{\mathrm{d}x^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$

2.1 Differentialoperatoren

(stillschweigend: Stetigkeit, Differenzierbarkeit ist implizit vorausgesetzt) Skalarfeld $\to$ Gradientenfeld

$$\partial_\mu \Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi(x) \tag{38}$$
$$= (\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \vec{\nabla}\Phi(x)) \tag{39}$$
$$\partial^\mu \Phi(x) = (\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, -\vec{\nabla}\Phi(x)) \tag{40}$$
$$\text{auch } (\vec{\nabla}\Phi(x))^i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial^i = (grad\Phi)^i \tag{41}$$

Wobei in der letzten Gleichung i eine Komponente selektiert.

$$\text{Bew.: } (\partial_\mu \Phi(x))' = \frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} \Phi'(x') \tag{42}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} \Phi(x(x')) \tag{43}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi(x) * \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}} \tag{44}$$
$$= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi(x) \tag{45}$$
$$= (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi(x) \tag{46}$$
$$\text{mit Ü} : \Lambda^T \Lambda = \mathbb{1} \tag{47}$$
$$\Rightarrow \Lambda^- 1 = \Lambda^T \tag{48}$$

4-Divergenz $\partial_\mu V^\mu(x)$ ist eine skalare Größe

$$\partial_\mu V^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} V^\mu(x) \tag{49}$$

$$= (\frac{1}{c}\frac{\partial V^0(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} * \vec{V}) \tag{50}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial V^0(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} * \vec{V} \tag{51}$$

(3 Divergenz $\vec{\nabla} * \vec{V} = \text{div}\vec{V}$)

d'Alembert Operator

$$\Box\Phi = \partial^\mu \partial_\mu \Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - (\vec{\nabla})^2\Phi \tag{52}$$

Antisymmetrische Ableitung eines 4-Vektors

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu V_\mu - \partial_\mu V_\nu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} \tag{53}$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{54}$$

$$z.B.: F_{0i} = \partial_0 V^i - \partial_i V^0 \tag{55}$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial V_i}{\partial t} - (\vec{\nabla} V_0)_i \tag{56}$$

und F_{ij} ist dual $rot\vec{V} = \vec{\nabla} x \vec{V}$

$$hoch F^k = \frac{1}{2}\epsilon^{klm} * F_{lm} = \epsilon^{klm} * \partial_l V_m = (\vec{\nabla} x \vec{V})^k \tag{57}$$

2.2 Integration in D=4

in D=3

2.2.1 Volumenintegral

$\int_V \mathrm{d}V \phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \int \mathrm{d}x_3 \phi(x_1, x_2, x_3)$
$\rightarrow inD4$
$\int_G \mathrm{d}\Omega \phi(x) = \int \mathrm{d}x^0 \int \mathrm{d}x^1 \int \mathrm{d}x^2 \int \mathrm{d}x^3 \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$
mit dem Gebiet G im 4-D Raum
Transformationsverhalten:
für $G =$ der gesamte Raum
$\Omega' = \mathrm{d}x^{0\prime}\mathrm{d}x^{1\prime}\mathrm{d}x^{2\prime}\mathrm{d}x^{3\prime} =^? \mathrm{d}\Omega$
$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$
Substitution: Jacobi Determinante:
$J = \left|\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu}\right| = |\Lambda^\mu{}_\nu| = 1$
$\Rightarrow \int \mathrm{d}\Omega' \ldots = \int J * \mathrm{d}\Omega \ldots = \int \mathrm{d}\Omega \ldots$

2.2.2 Flächenintegral

in D=3

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f} * \vec{V}(\vec{x}) = \int \mathrm{d}\sigma \vec{n} * V(\vec{x}) \tag{58}$$

$\mathrm{d}\vec{f} =$ inf. Flächenelement
$\mathrm{d}r =$Flächeninhalt
$\vec{n} =$Einheitsvektor$\perp$ auf $\vec{F}$
(Beispiel: Integral über Stromdichte $\rightarrow$ Fluss)
für Fläche: Parametrisierung $\vec{x}(s,t)$ Tangentenvektoren $\vec{e}_s = \frac{\partial \vec{x}}{\partial s}$
$\vec{e}_t = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$

Flächennormale in P: $\vec{n} = \vec{e}_s x \vec{e}_t$ Flächeninhalt $\propto \mathrm{d}s * \mathrm{d}t$
$\Rightarrow \mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}s * \mathrm{d}t * \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} x \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$
$\int \mathrm{d}\vec{f} * \vec{V} = \int \mathrm{d}f_i * V_i = \int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}t (\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} x \frac{\partial \vec{x}}{\partial t})_i * V_i$
$\mathrm{d}f_i = \mathrm{d}s\mathrm{d}t \epsilon^{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial s} x \frac{\partial x_k}{\partial t}$
$\mathrm{d}f_{jk} = \mathrm{d}s\mathrm{d}t \left(\frac{\partial x_j}{\partial s} x \frac{\partial x_k}{\partial t} - \frac{\partial x_k}{\partial s} x \frac{\partial x_j}{\partial t} \right)$
$\mathrm{d}f^i = \frac{1}{2} * \epsilon^{ijk} \mathrm{d}f_{jk}$
Integration über eine zweidimensionale Fläche in D=4
Flächenelement: $\mathrm{d}f^{\mu\nu} = \mathrm{d}s\mathrm{d}t \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial s} \frac{\partial x^\nu}{\partial t} - \frac{\partial x^\nu}{\partial s} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \right)$
dazu dual: $\mathrm{d}\tilde{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{d}f_{\rho\sigma}$
Flächenintegral:$\int_F \mathrm{d}\tilde{f_{\mu\nu}} * I * \ldots$
Das Verhalten der durch das Integral definierten Größe ergibt sich nach:
$\int_F \mathrm{d}\tilde{f}_{\mu\nu} * I^{\mu\nu} = [Pseudo]Skalar$ Falls I eine skalare Funktion ist bekommen wir einen Tensor 2.Stufe als Ergebnis des Integrals.

2.2.3 Integration über 3-Dimensionale Hyperflächen

benötigt Parametrisierung in (s, t, u) d.h. $x^\mu(s, t, u)$
Tangentenvektoren $e^\mu_s = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$, $e^\mu_t = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$, $e^\mu_u = \frac{\partial x^\mu}{\partial u}$
in D=3: $(\vec{e}_s x \vec{e}_t) * \vec{e}_u$
in D=4: $\mathrm{d}S^\mu \nu\rho = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x^\mu_s & \mathrm{d}x^\nu_s & \mathrm{d}x^\rho_s \\ \mathrm{d}x^\mu_t & \mathrm{d}x^\nu_t & \mathrm{d}x^\rho_t \\ \mathrm{d}x^\mu_u & \mathrm{d}x^\nu_u & \mathrm{d}x^\rho_u \end{pmatrix}$ z.B.: $\mathrm{d}x^\mu_s = \mathrm{d}s \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$ usw.
dual zu $\mathrm{d}S^{\mu\nu\rho}$: $\mathrm{d}S^\mu = \frac{1}{6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} * \mathrm{d}S_{\nu\rho\sigma}$
$\int_H \mathrm{d}S^\mu \; I_\mu$
$\mathrm{d}S^\mu$ ist 4-Vektor $\perp$ auf allen Richtungen in H z.B. Hyperfläche $\mathbb{R}^3$ Parametrisierung: $s = x^1, t = x^2, u = x^3$
$\mathrm{d}S^{\mu\nu\rho} \rightarrow \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3$ $\mathrm{d}S^0 = \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3$

2.2.4 Wegintegrale

- in $D = 3$

$$\int_C \mathrm{d}\vec{x} * \vec{V}(\vec{x}) \tag{59}$$

Parametrisierung von C:

$$\vec{x} = \vec{x}(\sigma) \tag{60}$$
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma} \tag{61}$$
$$\Rightarrow \int_C \mathrm{d}\sigma \tag{62}$$
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma} * \vec{V}(x(\vec{\sigma})) \tag{63}$$

- in $D = 4$

$$\int_C \mathrm{d}x^\mu * V_\mu(x) \tag{64}$$

Parametrisierung von C:

$$x^\mu = x^\mu(\sigma) \tag{65}$$
$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \tag{66}$$
$$\Rightarrow \int_C \mathrm{d}\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} * V^\mu(x(\sigma)) \tag{67}$$
$$\sigma \rightarrow s \rightarrow \tau \tag{68}$$

2.2.5 Integralsätze

- Gaußscher Satz

in 3-D

$$\int_V \mathrm{d}^3x \vec{\nabla}\vec{V} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\vec{V} \tag{69}$$

mit gegebenem Volumen V und dessen Rand ∂V
in 4-D

$$\int_G \mathrm{d}\Omega \partial_\mu V^\mu = \int_{\partial G} \mathrm{d}\tilde{S}_\mu V^\mu \tag{70}$$

- Satz von Stokes

in 3-D:

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla}x\vec{V}) = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{x}\vec{V}(x) \tag{71}$$

in 4-D

$$\int_F \mathrm{d}f^{\mu\nu}\partial_\mu V_\nu = \int_F \mathrm{d}f^{\mu\nu}\frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) = \int_{\partial F} \mathrm{d}x^\mu V_\mu \tag{72}$$

Verallgemeinerungen:

- Greensche Integralsätze
- Beziehung für Integrationen für D=2 und D=3

2.3 Relativistische Kinematik

Kräftefreie Bewegung eines (punktförmigen) Teilchens:

$\Rightarrow$ Impuls, Energiedefinition

2.3.1 Lagrangeformalismus

Prinzip der minimalen Wirkung:

1. generalisierte Koordinaten finden ($q_i(t)$) (Ziel ist es die Zeitabhängigkeit der Koordinaten zu bestimmen.)
2. verallgemeinerte Geschwindigkeiten ($\dot{q}_i(t) = \frac{\partial}{\partial t} q_i(t)$)
3. Lagrangefunktion L(q_i,$\dot{q}_i$,t) aufstellen
4. Wirkung aufstellen $S[q_i(t)]$ (Funktional)

$$S[q_i(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \tag{73}$$

   zu gegebenen Anfangs- und Endzeitpunkten t_b,t_a kann das Funktional für beliebige Wege, auch für die physikalisch nicht realisierten, berechnet werden.

5. Prinzip der kleinsten Wirkung besagt, dass die tatsächlich physikalisch realisierte Bewegung erfolgt auf Bahnkurve, für die $S[q_i(t)]$ minimal ist $\Rightarrow$ Variationsrechnung

$$q_i(t) \to q_i(t) + \delta q_i(t) \tag{74}$$
$$\dot{q}_i(t) \to \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t) \tag{75}$$
$$\Rightarrow \underline{\delta S = 0} \tag{76}$$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen

2.3.2 relativistische Kinematik

punktförmiges kräftefreies Teilchen
Bahnkurve: $x^\mu(\sigma)$ mit $\sigma \to s, \tau$, da die Zeit in den 4-Vektoren x^μ bereits enthalten ist und eine andere sinnvolle Parametrisierung nötig ist.
Wirkung ???
$S[x^\mu(\sigma)]$ Diese muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Lorentzinvarianz $S[x^\mu(\sigma)]$ ist Skalar im engeren Sinn bezüglich der Lorentzinvarianz, so dass es möglich wird die Bewegungsgleichungen vom Bezugssystem unabhängig her zu leiten.
2. EinfachheitAußerdem muss $S[x^\mu(\sigma)]$ einfach sein, so dass es auch möglich bleibt die Bewegungsgleichungen mit den nötigen Anfangsbedingen auch eindeutig zu lösen. $\to$ DGl. 2. Ordnung
3. Physikalische Erfahrung Die Bewegungsgleichungen sollten mit der Physikalischen Erfahrung (d.h. mit den Messwerten der Experimente) übereinstimmen

$\Rightarrow$ Ansatz: $S = -\alpha \int_a^b \mathrm{d}S$ mit $a, b \hat{=}$Anfangs- und Endpunkte
Einfachste Möglichkeit:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu} \tag{77}$$
$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2} \tag{78}$$
$$S = -\alpha c \int_a^b \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2} \tag{79}$$

$\Rightarrow$ Lagrangefunktion:

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\beta^2} \tag{80}$$
$$\text{mit } \beta = \frac{v}{c} \tag{81}$$
$$L \underset{v \ll c}{\overset{\substack{\text{klass.}\\ \text{Grenzfall}}}{\longrightarrow}} -\alpha c\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \dots\right) \Rightarrow L = -\alpha c + \frac{\alpha}{2c}v^2 + \dots \tag{82}$$

Wobei die Konstante $-\alpha c$ keine Relevanz für die Minimierung des Problems aufweist.

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2c} = \frac{m}{2} \quad \Rightarrow \alpha = mc \tag{83}$$
$$\Rightarrow S = -mc\int_a^b \mathrm{d}s \tag{84}$$
$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} \tag{85}$$

Impuls

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial v_i}, v_i = \dot{q}_i \tag{86}$$

relativistisch folgt

$$\frac{\partial L}{\partial v} = -mc^2 \frac{1}{2\sqrt{1-\beta^2}} * (-2\frac{v}{c^2}) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{87}$$
$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{v \ll c}{\longrightarrow} m\vec{v} + O(v^3) \tag{88}$$

Energie Herleitung aus der Aussage, dass die Energieerhaltung und auch die Energie als Größe von der Translationsinvarianz der Energie bezüglich der Zeit resultiert.

$$E = m\vec{v} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} * \dot{\vec{x}} - L \tag{89}$$
$$= \frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}(v^2 + c^2(1-\beta^2)) \tag{90}$$
$$\Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{91}$$

→ Ruheenergie:

$$E \underset{v=0}{\longrightarrow} E_0 = mc^2 \tag{92}$$

$$E \underset{v \ll c}{\longrightarrow} E_0 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \tag{93}$$

Womit sich der klassische Term $\frac{1}{2}mv^2$ für die kinetische Energie ergibt.
→ Hamiltonfunktion
E als Funktion des Impulses ergibt für die Hamiltonfunktion

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \tag{94}$$

$$\underset{\substack{v \ll c \\ p \ll mc}}{\longrightarrow} mc^2 + \frac{p^2}{2m} = mc^2 + E_{kin.,klass.} \tag{95}$$

Bemerkung:
Wenn das Teilchen masselos ist gilt die folgende Approximation $E = cp$, die aus dem Grenzwert der Hamiltonfunktion folgt (→ Photonen)

4-Impuls

$$p^\mu = mcu^\mu \tag{96}$$

$$p^0 = \frac{E}{c} \tag{97}$$

$$\Rightarrow p^2 = m^2c^2 \tag{98}$$

Energie-Impuls-Beziehung
Massenschalenbedingung

$$(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2c^2 \tag{99}$$

Drehimpuls

$$\text{nicht-relativistisch: } \vec{M} = \vec{r}x\vec{p} \tag{100}$$

$$\text{relativistisch: } M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(r^\mu p^\nu - r^\nu p^\mu) \tag{101}$$

$$\rightarrow M^{ij} \rightarrow \tilde{M}^k \tag{102}$$

$$\uparrow \text{ ist dual zu } \vec{M} \tag{103}$$

allgemeiner:

$$\text{Symmetrien} \leftrightarrow \text{Erhaltungsgröße} \tag{104}$$

$$\text{räumliche Translationsinvarianz} \leftrightarrow \text{Impuls } \vec{p} \tag{105}$$

$$\text{zeitliche Translationsinvarianz} \leftrightarrow \text{Energie } cE \tag{106}$$

$$\text{räumliche Drehungen} \leftrightarrow \text{Drehimpuls } \vec{M} \tag{107}$$

räumliche Drehungen: für infinitesimale Drehwinkel gilt:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta\Omega^{\mu\nu}x_\nu \tag{108}$$

$$\text{invarint } x^2 = (x')^2 \tag{109}$$

$$(x')^2 = (x)^2 + 2\delta\Omega^{\mu\nu}x_\mu x_\nu \tag{110}$$

$$\Rightarrow \delta\Omega^{\mu\nu} \text{ ist antisymmetrisch} \tag{111}$$

$$\text{d.h. } \delta\Omega^{\mu\nu} = -\delta\Omega^{\nu\mu} \tag{112}$$

$$\delta S = -p_\mu \delta x^\mu \tag{113}$$

$$= -p_\mu \delta\Omega^{\mu\nu}x_\nu \tag{114}$$

$$= -\delta\Omega^{\mu\nu}\frac{1}{2}(p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu) \tag{115}$$

$$= -\delta\Omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} \tag{116}$$

Interpretation: M^{0i} (System von Teilchen und deren Schwerpunkt)

2.4 Allgemeine Feldtheorie

In der nicht relativistischen Physik sind Felder nichts anderes als Hilfsgrößen die eine Kraftwirkung auf bestimmte Teilchen ausüben und zur Beschreibung dieser Kräfte dienen.
In der relativistischen Physik führt jede Bewegung von Teilchen zu einer Änderung des von ihm verursachten Feldes (analog zur klassischen Physik). Durch die endliche Signalgeschwindigkeit ist die zeitliche Änderung des Feldes an einem anderen Ort jedoch nicht trivial. → Bewegungsgleichungen für Felder (Feldgleichungen).
→ Felder: eigenständige, dynamische Größen

Wirkung

1. Die Wirkung muss einen Term enthalten der sich auf die Bewegung der Teilchen bezieht $(x^\mu, u^\mu, \ldots)$
2. Term für Wechselwirkung von Teilchen mit Feldern
3. Term für die "freie" Bewegung der Felder

Postulat: Es gibt ein 4-Vektorpotential $A^\mu(x)$
empirische Erfahrung:

- Teilchen sind durch eine Ladung gekennzeichnet mit der Elementarladung e ($e > 0$)
  Teilchen tragen (ganzzahlige) Vielfache q_i von e (Quarks sind ausgenommen, da sie sich nicht direkt beobachten lassen, bei ihrer Einbeziehung stellt sich die Frage warum sie gerade drittelzahlige Ladungen tragen)
- Zur Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung werden benötigt:

$$(\vec{E}, \vec{B} \underset{\substack{\text{Maxwell-}\\\text{gleichungen}}}{\leftarrow} \phi\vec{A}) \Rightarrow A^\mu \tag{117}$$

4-Potential

$$A^\mu(x) = A^\mu(t, \vec{x}) \tag{118}$$
$$= (\underbrace{\phi(t, \vec{x})}_{\text{Skalar}}, \underbrace{\vec{A}(t, \vec{x})}_{\substack{\text{Vektor (bez.}\\\text{räumlicher}\\\text{Drehungen)}}}) \tag{119}$$

Wirkung?
Zunächst für 1) und 2), Teilchen mit Wechselwirkung
"Koordinaten": x^μ, A^μ
Kriterien

1. Lorentzinvariant
2. einfach (aus $\delta S \Rightarrow$ einfache DGL.)
3. physikalische Realität

$$\Rightarrow S_{WW} = -\frac{e}{c}\int_a^b \mathrm{d}x_\mu A^\mu(x) \tag{120}$$
$$e = \text{Elementarladung} \tag{121}$$

(Für Teilchen der Ladung $+e$)
Die Wirkung für ein Teilchen der Ladung e im elektromagnetischen Feld ist:

$$S = \int_a^b \left(-mc\mathrm{d}s - \frac{e}{c}A^\mu \mathrm{d}x_\mu\right) \tag{122}$$

$$\Rightarrow S = \int_a^b \left(-mc\mathrm{d}s - e\phi\mathrm{d}t + \frac{e}{c}\vec{A}\mathrm{d}\vec{x}\right) \tag{123}$$

$$\Rightarrow S = \int_{t_a}^{t_b} \left(-mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\phi + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}\right)\mathrm{d}t \tag{124}$$

$\Rightarrow$ Lagrangefunktion:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - \underbrace{e\phi + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}}_{\text{Term für Wechselwirkung}} \tag{125}$$

$$\rightarrow \text{kanonischer Impuls: } \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \tag{126}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \underbrace{\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\text{kin. Impuls } \vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A} \tag{127}$$

Hamiltonfunktion:

$$H = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L \mid \text{in } \vec{P} \tag{128}$$

$$\Rightarrow H = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{e\phi}_{\text{potentielle Energie}} \tag{129}$$

Dies ermöglicht die folgenden Ersetzungsvorschriften:

$$H \rightarrow H - e\phi \tag{130}$$

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A} \tag{131}$$

$$\Rightarrow H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\phi \tag{132}$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \tag{133}$$

$$\text{berechne} \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{v}) \tag{134}$$

$$= -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\left((\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right) \tag{135}$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}) = -e\vec{\nabla}\phi\frac{e}{c}\left((\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right) \tag{136}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \tag{137}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + (\nabla * \nabla)\vec{A} \tag{138}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{139}$$

$$\text{Def.: } \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{140}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \text{ Lorentz Kraft} \tag{141}$$

Einsortieren:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \text{ Elektrisches Feld} \tag{142}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \text{ magn. Feld (magnetische Induktion)} \tag{143}$$

(Magnetfeldstärke für $\vec{H}$ in Materie dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ in Materie)
zunächst betrachten wir Teilchen im Vakuum:
$\vec{E} = \vec{D}$ und $\vec{B} = \vec{H}$ (Wahl des Gaußschen Einheitensystems)

2.4.1 Eichinvarianz

$\vec{E}$,$\vec{B}$ sind messbar
$A^\mu = (\phi, \vec{A})$ ist nicht eindeutig
4-Potentiale A_i^μ die zu gleichen $\vec{E} = \vec{D}$ und $\vec{B} = \vec{H}$ führen sind physikalisch äquivalent.
Eichtransformation $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu X$ mit einer fast beliebigen Funktion $X(x)$, d.h.:

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}X \tag{144}$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}X \tag{145}$$

$$\vec{E} \to \vec{E} + \vec{\nabla}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}X - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}X = \vec{E} \tag{146}$$

$$\vec{B} \to \vec{B} + \vec{\nabla}x(\vec{\nabla}X) = \vec{B} \tag{147}$$

2.4.2 noch mal Bewegungsgleichungen

aus $\delta S = 0$ bez. Variation $x^\mu(s) \to x^\mu(s) + \delta x^\mu(s)$

$$\delta S = \delta \int_a^b (-mc\mathrm{d}s - \frac{e}{c}A^\mu \mathrm{d}x_m u) = 0 \tag{148}$$

- 1.Term

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}\delta x^\mu \tag{149}$$

- 2.Term

$$x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu \tag{150}$$

$$\delta(A_\mu \mathrm{d}x^\mu) = A_\mu \mathrm{d}\delta x^\mu + \delta \underline{A_\mu} \mathrm{d}x^\mu \tag{151}$$

$$= a + b \tag{152}$$

$$\delta A_\mu(x) = A_\mu(x + \delta x) - A_\mu(x) = \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu \tag{153}$$

Variation $\delta \mathrm{d}x^\mu$ im Integral
a):

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu(x(s))\frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \tag{154}$$

$$=\frac{e}{c}\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A_\mu(x(s))\delta x^\mu(s)\mathrm{d}s + \text{Randterme} \tag{155}$$

$$=\frac{e}{c}\int_a^b \partial_\nu A_\mu \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\delta x^\mu \mathrm{d}s \tag{156}$$

$$=\frac{e}{c}\int_a^b \partial_\nu A_\mu u^\nu \delta x^\mu \mathrm{d}s \tag{157}$$

b):

$$-\frac{e}{c}\int_a^b \partial_\nu A_\mu u^\mu \delta x^\nu \mathrm{d}s \tag{158}$$

Daraus folgt:

$$\delta S = \int_a^b \mathrm{d}s\delta x^\mu \left(mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} + \frac{e}{c}\left[\partial_\nu A_\mu u^\nu - \partial_\mu A_\nu u^\nu\right]\right) \tag{159}$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}s\delta x^\mu \left(mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} - \frac{e}{c}\left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right] u^\nu\right) \tag{160}$$

Kovariante Form der Bewegungsgleichung:

$$mc\frac{\mathrm{d}u_\mu}{s} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu \tag{161}$$

Mit Feldstärketensor(antisym.)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{162}$$
$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(x) \tag{163}$$

Komponentenweise: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0 \tag{164}$$
$$F_{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} \to -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \vec{\nabla}\phi = \vec{E} \tag{165}$$
$$F_{i0} = -F0i = F^{0i}F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{166}$$
$$\to \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk} = (\vec{\nabla}x\vec{A})^i = B^i \tag{167}$$
$$\to F_{jk} = -\epsilon jkiB^i \tag{168}$$

Explizit heißt dies also:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{169}$$

Räumliche Komponenten der Bewegungsgleichung

$$p_\mu = mcu_\mu, \qquad \mathrm{d}s = c\mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2} \tag{170}$$
$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad u^k = \frac{v^k}{c\sqrt{1-\beta^2}} \tag{171}$$

$$-\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c}\left(-E^i\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \epsilon_{ijk}B^l\frac{v^k}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{172}$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(-\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}c\vec{B}\right) \tag{173}$$

Zeitliche Komponenten:

$$mc\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c}F_{0i}u^i \tag{174}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e\vec{E}\vec{v} \tag{175}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\xi) = e\vec{E}\vec{v} \tag{176}$$

Mit der Gesamtenergie ξ

Lorentzkraft Lorentzkraft + Gleichung für $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$ sind nicht unabhängig und damit aus $u^2 = 1$ folgen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u^2 = 0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u_\mu u^\mu = 2u_\mu\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{177}$$

2.5 Lorentztransformationen der Felder

2.5.1 Vektorpotential

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta x'\beta) \tag{178}$$
$$F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \tag{179}$$

ausgeschrieben ergibt dies z.B. für einen Lorentzboost entlang der x^1-Richtung:

$$E_2' = E_1, E_2' = \frac{E_2 - \beta B_3}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad E_3' = \frac{E_3 + \beta B_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{180}$$

$$B_2' = B_1, B_2' = \frac{B_2 + \beta E_3}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad B_3' = \frac{B_3 - \beta E_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{181}$$

- ein reines elektrisches Feld in einem Bezugssystem ($\vec{E} \neq 0, \vec{B} = 0$)
  $\rightarrow \vec{B}' = \frac{1}{c}\vec{v}x\vec{E}'$
  $\vec{B}' \perp \vec{E}'$, $\vec{B}' \perp \vec{v}$, $\vec{E}' \perp \vec{v}$
- genauso für $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$
- und umgekehrte Aussage gilt: falls in einem Bezugssystem $\vec{E}' \perp \vec{B}'$, dann existiert ein Bezugssystem in dem $\vec{E} = 0$ oder $\vec{B} = 0$
  (z.B. für $v = c\frac{B'}{E'} < c$,das heißt falls $B' < E' \rightarrow \vec{B} = 0$)

Bew.Gl Ladung e (Kopplungskonstante)
elektromagnetisches Feld A^μ
kovariant: $mc\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u^\nu$ (Lorentzkraft)
Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
$\rightarrow (\vec{E}, \vec{B})$
Eichinvarianz: $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$

2.5.2 Lorentz-Transformation

Invarianten des elektromagnetischen Feldes
(x^2,$A^\mu A_\mu durchstreichen$,$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$,usw.)

- $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ ist Lorentz-Skalar
- $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ ist Lorentz-Pseudoskalar

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -2\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2 = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \tag{182}$$

$$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = 4\vec{E}\vec{B} \tag{183}$$

$$\text{Invariante:}\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \text{ und } \vec{E}\vec{B} \tag{184}$$

folgende Aussagen sind Lorentzinvariant:

- Die Beträge sind gleich: $|\vec{E}| = |\vec{B}|$
- Orthogonalität: $\vec{E} \perp \vec{B}$
- $|\vec{E}| > |\vec{B}|$ bzw. $|\vec{E}| < |\vec{B}|$

Ergänzung Betrachte $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{B}$
$\rightarrow$ Lorentztransformationen sind dann nur Drehungen dieses Komplexen Vektors $\vec{F}$ mit komplexen Drehwinkeln
$\rightarrow$ Invarianten sind die Längen der Vektoren also $\vec{F}^2 = \vec{E} - \vec{B} + 2i\vec{E}\vec{B}$ und es wird einsichtig, dass dies die einzigen Invariante sind.

2.6 Bewegungsgleichungen der Felder

Ziel:Bestimmung der Bewegungsgleichungen der Felder
(Bewegungsgleichungen für Ladungen: $\vec{E}$,$\vec{B}$ sind 6 Komponenten, A^μ sind 4 Komponenten $\Rightarrow$ Es müssen weitere Gleichungen für $\vec{E}$,$\vec{B}$ gelten)

Erste Gruppe der Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}x(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\vec{A} \tag{185}$$
$$\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}x\vec{A} = 0 \tag{186}$$
$$\tag{187}$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{188}$$
$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{189}$$
$$\tag{190}$$

In integraler Form:

- aus $\vec{\nabla}x\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{\dot{B}}$ ergibt unter Anwendung des Satzes von Stokes
$$\int_F d\sigma(\vec{\nabla}\times\vec{E}) * \vec{n} = \oint_{\partial F} d\vec{x}\vec{E} = \frac{1}{c}\int_F d\sigma\vec{\dot{B}}\vec{n} \tag{191}$$
- aus $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ und dem Satz von Gauß folgt
$$\int_V \mathrm{d}^3x\vec{\nabla}\vec{B} = \oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\vec{B} = 0 \tag{192}$$
Was im Endeffekt aussagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt.

4-Schreibweise aus Definition von $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\to \partial_\delta F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\delta} + \partial_\nu F_{\delta\mu} = 0 \tag{193}$$

Ist ein total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe
$\Rightarrow$ nicht trivial nur für $\nu \neq \mu$,$\mu \neq \delta$,$\nu \neq \delta \to 4$ nicht triviale Gleichungen
oder mit Hilfe von $\tilde{F}_{\mu\nu}$

$$\to \partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{194}$$

Zweite Gruppe der Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \tag{195}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{\dot{E}} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{196}$$

- Zusätzliche Informationen:
Ladungsdichte $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ Stromdichte $\vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, t)$
- Quellend der Felder sind Ladungen und Ströme
- Ladungen und Ströme im Vakuum
- k̈ontinuierlicheV̈erteilungen aus dem Limes: Anzahl der geladenen Teilchen $\to \infty$
- Gaußsche Einheiten
- Integrale Form:
$$\int_V \vec{\nabla}\vec{E}\mathrm{d}^3x = \oint_{\partial V} \vec{E}\mathrm{d}\vec{f} \stackrel{!}{=} 4\pi\int_V \mathrm{d}^3x\rho = 4\pi Q \tag{197}$$
Gesamtladung in V: $Q = \int_V \mathrm{d}^3x\rho$
$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \oint_{\partial F} \mathrm{d}\vec{x}\vec{B} \stackrel{!}{=} \int_F \mathrm{d}\vec{f}(\frac{1}{c}\vec{\dot{E}} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}) \tag{198}$$
Was als Biot-Savait-Gesetz bekannt ist mit dem Verschiebungsstrom $\frac{1}{c}\vec{\dot{E}}$
$\to \vec{B}$ aus $\vec{j}$

4-Schreibweise der 2.Gruppe der Maxwellschen Gleichungen Zunächst: 4-Stromdichte: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ zur Begründung betrachte Verteilung von Punktladungen e_a für Teilchen $a = 1, \ldots, N(\to \infty)$ am Ort $\vec{x}_a$

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta^3(\vec{x} - \vec{x_a}(t)) \tag{199}$$

Annahme: $\rho(\vec{x}, t)$ gegeben, glatt und differenzierbar
Volumenelement d^3x enthält dann die Ladung $\mathrm{d}e = \rho \mathrm{d}^3x$ für bewegte Ladung betrachte dann: Verschiebung um $\mathrm{d}x^m u$

$$\to \mathrm{d}e\mathrm{d}x^\mu = \rho \mathrm{d}^3x\mathrm{d}x^\mu = \rho \underbrace{\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t}\mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\Omega\rho\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{200}$$

Transformationsverhalten

- linke Seite:
  - $\mathrm{d}e$ ist Lorentzskalar
  - $\mathrm{d}x^\mu$ ist 4-Vektor
- rechte Seite: $\mathrm{d}\Omega$ ist Lorentzinvariante

$$\Rightarrow j^\mu = \rho \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \text{ist 4-Vektor} \tag{201}$$

Komponentenweise:

$$j^0 = \rho \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} = c\rho \tag{202}$$

$$\vec{j} = \rho \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \rho\vec{v} = \vec{j} \tag{203}$$

$$\left(Q = \int_V \mathrm{d}^3x\rho = \frac{1}{c}\int_V \mathrm{d}^3x j^0(\vec{x}, t)\right) \tag{204}$$

schreibe Maxwellgleichung mit Hilfe von $F^{\mu\nu}$ und j^μ

$$F^{0i} = -E^i = -F_{0i} \tag{205}$$

$$\epsilon^{ijk}F_{jk} = B^i \tag{206}$$

1.

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x^i}E^i = -\partial_i F^{0i} \tag{207}$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \tag{208}$$

$$\Rightarrow \partial_i F^{i0} = \frac{4\pi}{c} j^0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c} j^0 \tag{209}$$

2.

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = \epsilon^{ijk}\partial_j B_k \tag{210}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_j \epsilon_{klm} F^{lm} \tag{211}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\delta^i{}_l \delta^j{}_m - \delta^i{}_m \delta^j{}_l\right)\partial_j F^{lm} \tag{212}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\partial_m F^{im} - \partial_l F^{li}\right) \tag{213}$$

$$= \partial_l F^{li} \tag{214}$$

$$\frac{1}{c}\ddot{E}^i = -\partial_0 F^{0i} \tag{215}$$

$$\Rightarrow \partial_j Fji = -\partial_0 F^{0i} + \frac{4\pi}{c} j^i \tag{216}$$

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i \tag{217}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{218}$$

kovariante Form der Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{219}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{220}$$

Aus der 2. Gleichung folgt, dass die Quellen des elektromagnetischen Feldes (bewegte) Ladungen sind. Für ein System von Ladungen gilt

$$\sum_{a=1}^{N} e_a \delta(x - x_a(t)) \rightarrow_{N\to\infty} \rho(x) \tag{221}$$

Wirkungsprinzip $\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$

Bisher gingen wir davon aus, dass S_{WW} für ein Teilchen

$$S_{WW} = -\frac{1}{c} \sum_a e_a \int \mathrm{d}x_a^\mu A_\mu(x_a) \tag{222}$$

$$\downarrow beliebigeLadungsverteilung \tag{223}$$

$$S_{WW} = -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3x \rho(x) \int \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} A_\mu(x) \tag{224}$$

$$= -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}t \mathrm{d}^3x \underbrace{\rho(x) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}}_{j^\mu(x)} A_\mu(x) \tag{225}$$

$$= -\frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}\Omega \quad \underbrace{j^\mu A_\mu}_{\text{Lagrangedichte}} \tag{226}$$

$$\tag{227}$$

Eichinvarianz Eichtransformation: $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \chi$ mit Eichfunktion χ
Zusatzterm in S_{WW}

$$\Delta S_{WW} = -\frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}\Omega j^\mu \partial_\mu \chi \text{ partielle Integration} \tag{228}$$

$$= \frac{1}{c^2} \underbrace{\int \mathrm{d}\Omega \partial_\mu (j^\mu \chi)}_{\text{nach Gauß} \oint \mathrm{d}S_\mu (j^\mu \chi)} - \frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}\Omega \chi \qquad \underbrace{\partial_\mu j^\mu}_{=0 \text{ wegen der Forderung nach Eichinvarianz}} \tag{229}$$

$$\oint \mathrm{d}S_\mu (j^\mu \chi) = 0 \text{ falls man die Oberfläche ins unendliche legt} \tag{230}$$

Stromerhaltung Forderung: $\partial_\mu j^\mu = 0$ SStromerhaltung"

$$\frac{\partial}{\partial x^0} j^0 + \frac{\partial}{\partial x^i} j^i = 0 \tag{231}$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{232}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \text{ Kontiniuitätsgleichung} \tag{233}$$

In integraler Form ergibt sich damit:

$$\int_V \mathrm{d}^3x \dot{\rho}(x) = -\int_V \mathrm{d}^3x \vec{\nabla} \vec{j} = \oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \vec{j} \tag{234}$$

$$\text{Gesamtladung im Volumen} \dot{Q}_V = -\oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \vec{j} \text{Ladungserhaltung} \tag{235}$$

Wirkung der elektromagnetischen Felder:

$$S = S_M + \underbrace{S_{WW} + \overbrace{S_F}^{\text{für freie Felder}}}_{\text{für wechselwirkende Felder}} \tag{236}$$

Konstruktionsprinzip:

- Lorentz-Invariante
- Superpositionsprinzip: lineare Differentialgleichungen $\Rightarrow S$ quadratisch in Koordinaten/Feldern
- Eichinvarianz

Integrand enthält A_μ,$F_{\mu\nu}$
Ansatz: $S_F = f\int \mathrm{d}\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

- Vorzeichen?

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2) \tag{237}$$
$$\uparrow \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 \text{ kann sehr groß werden} \tag{238}$$
$$\Rightarrow f < 0 \; (\Rightarrow S \text{ minimal}) \tag{239}$$

- Gaußsches Maßsystem $f = -\frac{1}{16\pi c}$

$\rightarrow$ Wirkung:

$$S_F = -\frac{1}{16\pi c}\int \mathrm{d}\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{240}$$
$$= \int \mathrm{d}t \underbrace{\int \mathrm{d}^3x \frac{E^2 - B^2}{8\pi}}_{Lagrangedichte} \tag{241}$$

Weiter mit Ansatz: $S_F = -\frac{1}{16\pi c}\int \mathrm{d}\Omega F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

- Keine Ableitungen von F in der Formel enthalten, da F bereits $\partial_m u A_n u$ enthält, worin auch Zeitableitungen enthalten sind
  $\Rightarrow$ unabhängige Variablen in S_F:A^μ
  Punktmechanik: q_i
  Feldtheorie $A^\mu(\vec{x},t) \leftrightarrow$ Koordinaten
  $\partial_0 A^\mu(\vec{x},t) \leftrightarrow$ Geschwindigkeit
  kovariant: $\partial^\mu A^\nu$
- $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$
  1. vollständige 4-Divergenz
     $\Rightarrow$ kein Beitrag zu den Bewegungsgleichungen
     (Annahme: $A^\mu \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$)
  2. Pseudoskalar
     $\Rightarrow$ Paritätsverletzung

Herleitung der Bewegungsgleichungen des Feldes (Feldgleichungen) Variation $A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu$

$$\to \delta S = \delta S_{WW} + \delta S_F \tag{242}$$

$$= -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{16\pi} \underbrace{\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}_{2(\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu}}\right] \tag{243}$$

$$= -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu}\left(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu\right)\right] \tag{244}$$

$$F^{\mu\nu}\partial_\mu \delta A_\nu = F^{\nu\mu}\partial_\nu \delta A_\mu \text{ 1: Umbenenennen der Indizes} \tag{245}$$

$$F^{\nu\mu}\partial_\nu \delta A_\mu = -F^{\mu\nu}\partial_\nu \delta A_\mu \text{ 2: Vertauschen der Indizes von } F \tag{246}$$

$$\Rightarrow \delta S = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}\partial_\nu \delta A_\mu\right] \tag{247}$$

$$= -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\mu\nu} \delta A_\mu\right] + 0 \text{ Die Randterme im Unendlichen sind wieder 0} \tag{248}$$

$$= -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}\Omega \underbrace{\left[\frac{1}{c} j^\mu - \frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\mu\nu}\right]}_{!=0 \text{ aus } \delta S=0} \underbrace{\delta A_\mu}_{\text{beliebig}} \tag{249}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \text{ Wieder die Maxwellgleichungen} \tag{250}$$

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \to \partial_\mu j^\mu = 0$

2.6.1 Energie und Impuls des Feldes

Feld trägt E,$\vec{p}$ ($\to p^\mu$)
Ausgangspunkt: Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \mid * \vec{E} \tag{251}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\ddot{\vec{B}} \mid * \vec{B} \tag{252}$$

Differenz dieser beiden Gleichungen liefert:

$$\vec{E} * \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) - \vec{B} * \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{c}(\vec{E}\ddot{\vec{E}} + \vec{B}\ddot{\vec{B}}) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E} \tag{253}$$

$$\vec{\nabla} * \left(\vec{B} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{4\pi}{c}\vec{E}\vec{j} \tag{254}$$

Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi}\right) = -\vec{\nabla}\vec{S} - \vec{E}\vec{j} \tag{255}$$

In integraler Form ergibt sich dann:

$$\int_V \mathrm{d}^3x \vec{\nabla}\vec{S} = \oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\vec{S} \tag{256}$$

$$\underbrace{\int_V \mathrm{d}^3x \vec{E}\vec{j}}_{\text{Zeitableitung der Gesamtengerie der Ladung}} = \int_V \underbrace{\mathrm{d}^3x\rho}_{e} \vec{v}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\epsilon \tag{257}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \mathrm{d}^3x \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} + \epsilon\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}(\dots)=0 \Rightarrow \text{Erhaltungssatz}} = \underbrace{-\oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\vec{S}}_{\text{für } V\to\infty \Rightarrow =0} \tag{258}$$

$\Rightarrow$ Def.: Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$W = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \tag{259}$$

Für endliche Volumen gilt: Energiefluss: $\oint \mathrm{d}\vec{f}\vec{S}$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} \tag{260}$$

2.6.2 Allgemeine Feldtheorie (Wdh.)

Wirkung des elektromagnetischen Feldes

$$S = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x \left(\underbrace{-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu A_\mu}_{\text{Lagrangedichte}}\right) + \text{Materie} \tag{261}$$

$$\delta S = 0 \text{ unter Variationen } A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu \tag{262}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu \tag{263}$$

Energie-Bilanz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \mathrm{d}^3x \frac{E^2+B^2}{8\pi} + \epsilon_V\right) = -\oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\vec{S} \tag{264}$$

Energiedichte des Feldes: $W = \frac{E^2+B^2}{8\pi}$
Energiestromdichte (Poynting-Vektor): $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$

2.6.3 Vergleich von klassischer Punktmechanik und Feldtheorie

klassische Punktmechanik	Feldtheorie
verallgemeinerte Koordinaten $q_i(t)$	"Koordinaten":Felder $q(x^\mu)$ (z.B $A^\mu(x)$)
$(i \in \{1,\dots,N\})$	$x^\mu \in \mathbb{R}^4$, kontinuierlich
verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$	"Geschwindigkeiten"$\dot{q}(x^\mu)$ bzw. $\partial_\mu q$ (z.B. $\partial^\mu A^\nu(x)$)
Lagrangefunktion $L(q_i,\dot{q}_i)$	Lagrangedichte $\Lambda(q,\partial_\mu q)$
Wirkung $S[q_i(t)]$ als Funktional	Wirkung $S = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\Lambda(q,\partial_\mu q) = S[q(x^\mu)]$
Bewegungsgleichung aus $\delta S = 0$	Bewegungsgleichung aus $\delta S = 0$

Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}\Omega \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q + \underbrace{\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu q)}\partial_\mu\delta q}_{\text{Lösung: part. Int.}}\right) \tag{265}$$

Forderung $\delta S = 0$ für beliebige δq

$$\Rightarrow \frac{\partial\Lambda}{\partial q} - \partial_\mu\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu q)} = 0 \tag{266}$$

2.6.4 Erhaltung von Größen

Energieerhaltung

1. Translation der Zeit
   Invarianz $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße

2. Abgeschlossenes System
   $\to$ L,Λ besitzen keine explizite Zeitabhängigkeit

Impulserhaltung Die Impulserhaltung lässt sich anlog herleiten:
$\Leftrightarrow$ Invarianz unter räumlichen Transformationen

allgemeine Feldtheorie Λ hängt nicht explizit von x^μ ab

$$\partial_\mu \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\partial_\mu q + \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\nu q)}\partial_\mu(\partial_\nu q) \tag{267}$$

$$= \partial_\nu \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\nu q)}\partial_\mu q + \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\nu q)}\partial_\nu(\partial_\mu q) \tag{268}$$

$$= \partial\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\nu q)}\partial_\mu q\right) \tag{269}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\partial_\nu\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\nu q)}\partial_\mu q - g_\mu{}^\nu \Lambda\right)}_{\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0} = 0 \tag{270}$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \to \dot{Q} = 0 \tag{271}$$

$$0 = \int_V \mathrm{d}\Omega \partial_\nu T_\mu{}^\nu = \oint_{\partial V} \mathrm{d}S_\nu T_\mu{}^\nu \tag{272}$$

bei fester Zeit t_1 und t_2 gilt

$$\mathrm{d}S^\nu \to \mathrm{d}S^0 = \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \tag{273}$$

t_1, t_2 beliebig

$$0 = \int \mathrm{d}^3 x T_\mu{}^0|_{x^0 = ct_2} - \int \mathrm{d}^3 x T_\mu{}^0|_{x^0 = ct_1} \Rightarrow \text{Erhaltungsgröße} \int \mathrm{d}^3 x T_\mu{}^0|_{x^0 = ct} \tag{274}$$

Diese Erhaltungsgröße folgen aus der Translationsinvarianz

$$\int \mathrm{d}^3 x T_\mu{}^0 = \text{const.} * P_\mu \tag{275}$$

zur Normierung

$$T_{00} = \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_0 q)}\partial_0 q - \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}}\dot{q} - \Lambda \tag{276}$$

$$H = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial v}}_{p} v - L \tag{277}$$

$$\text{Wirkung} = [\text{Energie} * \text{Zeit}] \tag{278}$$

$$= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}x^0 \underbrace{\int \mathrm{d}^3 x \Lambda}_{E} \tag{279}$$

$$\to P^\mu = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}S_\nu T^{\mu\nu} \tag{280}$$

Beschreibt dann den 4-Impuls des Feldes

Bemerkungen

- $T^{\mu\nu}$ ist nicht eindeutig
  ein beliebiger Tensor dritter Stufe $\Psi^{\mu\nu\rho} = -\Psi^{\mu\rho\nu}$
  $\to \partial_\mu \partial_\nu \Psi^{\mu\nu\rho} = 0$
  $\to \partial_\nu (T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Psi^{\mu\nu\rho}) = 0$
- $P^\mu = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}S_\nu \left(T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Psi^{\mu\nu\rho}\right) \to \oint \mathrm{d}f_{\nu\rho}\Psi^{\mu\nu\rho} = 0$
- Zusatzforderung: $T^{\mu\nu}$ soll symmetrisch sein aus: Drehimpuls und Impuls erfüllen die gewohnten Beziehung:
  $M^{\mu\nu} = \int \left(x^\mu \mathrm{d}P^\nu - x^\nu \mathrm{d}P^\mu\right)$
  $= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}S_\rho \left(x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho}\right)$
  Die Drehimpulserhaltung folgt dann aus der Invarianz unter Drehungen
  $\partial_\rho \left(x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho}\right) = 0$

$$g_\rho{}^\mu T^{\nu\rho} + x^\mu \underbrace{\partial_\rho T^{\nu\rho}}_{=0} - g_\rho{}^\nu T^{\mu\rho} + \underbrace{x^\nu \partial_\rho T^{\mu\rho}}_{=0} = 0 \tag{281}$$

$$\Rightarrow T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = 0 \tag{282}$$

d.h. man fordert dass $T^{\nu\mu}$ symmetrisch ist. Explizit: durch geeignete Wahl von $\psi^{\mu\nu\rho}$
$T^{\mu\nu}$ heißt Energie-Impuls-Tensor

Feldtheorie Wdh.

$$q \rightarrow \text{ elektromagn } A_\mu(x)\dot{q} \rightarrow \partial_\mu A_\nu(x)\text{Wirkung}S = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\Lambda(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)) \tag{283}$$

Lagrangedichte Wdh. Konstruktion: Lorentz-Invariante Eichinvarianz $\rightarrow$ Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen)

$$\partial_\mu \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} - \frac{\partial\Lambda}{\partial_\rho} = 0 \ (q \rightarrow A_\rho) \tag{284}$$

Translationsinvarianz $\Rightarrow$ Erhaltungssatz

$$\partial_\rho T_\mu{}^\nu = 0 \tag{285}$$

4-Impulserhaltung

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int_{\partial V} \mathrm{d}S_\nu T^{\mu\nu} \tag{286}$$

Wobei ∂V eine raumartige Hyperfläche darstellt mit $\mathrm{d}S_\nu$ dem Normalenvektor auf dieser Fläche, was dazu führt, das dieser Vektor nur eine nicht verschwindende Komponenten in zeitlicher Richtung besitzt.

$$\Rightarrow P^\mu = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x T^{\mu 0} \tag{287}$$

Zunächst

$$T_\mu{}^\nu = \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\nu q)}\partial_\mu q - g_\mu{}^\nu\Lambda \tag{288}$$

$$= \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\nu A_\rho)}\partial_\mu A_\rho - g_\mu{}^\nu\Lambda \tag{289}$$

lässt sich symmetrisieren. Interpretation der Komponenten von $T^{\mu\nu}$

1. $T^{00} \rightarrow$ Energiedichte
2. $T^{i0} \rightarrow$ Impulsdichte
3. aus $\partial_\rho T^{\mu\rho} \rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}T^{\mu 0} + \frac{\partial}{\partial x^i}T^{\mu i} = 0$
   Integralform über den Satz von Gauß für $\mu = 0$:
   $\frac{1}{c}\int_V \mathrm{d}^3x \frac{\partial}{\partial t}T^{00} = -\int_{\partial V} \mathrm{d}f_i T^{0i}$
   $\rightarrow$ zeitliche Änderung der Energie=Energie die durch die Oberfläche weg fließt
   $cT^{0i} = S^i$Energiestromdichte mit dem (Poynting-Vektor S^i)
4. für $\mu = i$ genauso
   $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}T^{j0} = -\frac{\partial}{\partial x^i}T^{ji}$
   $\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c}\int_V \mathrm{d}^3x T^{j0} = -\oint_{\partial V} \mathrm{d}f_i T^{ji}$
   $\rightarrow T^{ji}$ ist Impulsstromdichte
   zeitliche Änderung des Impulses=Impulsstrom durch Oberfläche
   T^{ji} heißt auch maxwellscher Spannungstensor

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & \frac{1}{c}\vec{S} \\ \frac{1}{c}\vec{S} & \sigma^{ij} \end{pmatrix}_{\text{sym.}} \tag{290}$$

für das elektromagnetische Feld

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta},\ F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \tag{291}$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\mu A_\rho F^{\nu\rho} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{292}$$

Rechenregel

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\rho)} \partial_\alpha A_\beta = \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta \tag{293}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\rho)} \partial^\alpha A^\beta = g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \tag{294}$$

$$\text{symmetrisiere} \Phi^{\mu\nu\rho} = A^\mu F^{\nu\rho} \text{ (Vorfaktor?)} \tag{295}$$

$$\to T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\rho} {F_\rho}^\nu \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \tag{296}$$

nachrechnen

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \tag{297}$$

$$c T^{0i} = S^i \tag{298}$$

maxwellscher Spannungstensor

$$\sigma_{11} = \frac{1}{8\pi} \left(E_2^2 + E_3^2 - E_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_1^2 \right) \tag{299}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{4\pi} \left(E_1 + E_2 + B_1 B_2 \right) \tag{300}$$

5. zusätzlich: Beitrag der Teilchen: Index a

- Massendichte $\mu(\vec{x}) = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a)$ (analog zur Lagrangedichte) mit den Bahnkurven der Teilchen $\vec{x}_a(t)$

- Geschwindigkeitsstromdichte $u^\mu(x) = \sum_a u^\mu_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a)$
- Massenstromdichte: $\to \frac{1}{c} \mu \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}t}$ (analog zur Ladungsstromdichte)

- Impulsdichte $T^{\rho 0} = c^2 \mu u^\rho$

$$\to T^{\rho\sigma} = \mu c u^\rho u^\sigma \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \tag{301}$$

für elektromagnetische Felder: ${T_\rho}^\rho = 0$ für Teilchen: ${T_\rho}^\rho = \mu c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$ allgemein gilt ${T_\rho}^\rho \geq 0$ Massenerhaltung: $\partial_\rho \left(\frac{1}{c} \mu \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}t} \right) = 0$

3 Elektrodynamik

3.1 Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 4\pi\rho \tag{302}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{303}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{304}$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0 \tag{305}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}} \tag{306}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{307}$$

$\Rightarrow$ Lorentzkraft

$$\dot{\vec{p}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \tag{308}$$

$$\Rightarrow mc\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}S} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \tag{309}$$

3.1.1 Klassifizierung von Problemstellungen

- Wie berechne ich das Feld einer gegebenen (möglicherweise bewegten) Ladungsverteilung
- Wie bewegen sich Ladungen in vorgegebenen Feldern

Betrachte die Spezialfälle

1. Statische Felder $\dot{\vec{E}} = 0$ und/oder $\dot{\vec{B}} = 0$
   Elektrostatik
   Magnetostatik
   (a) homogene Felder ✓
   (b) inhomogene Felder
   wichtiger Spezialfall: Coulombproblem (rel.)
   (c) Multipolfelder
2. Elektromagnetische Wellen
   $\dot{\vec{E}} \neq 0$ und $\dot{\vec{B}} \neq 0$
   (a) im ladungsfreien Raum, d.h. $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$
   (b) zeitabhängige Felder für bewegte Ladungen
   $\rightarrow$ Abstrahlung von Elektromagnetischen Wellen

3.2 Statische Felder

3.2.1 Zum Coulombproblem

suche statische Lösung zu unbewegten Ladungen

$$\rho \neq 0, \dot{\rho} = 0, \vec{j} = 0 \tag{310}$$

Maxwellgleichungen reduzieren sich auf

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \text{ und } \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}_{\text{Ansatz:}\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi} \tag{311}$$

$$\triangle\phi = -4\pi\rho \tag{312}$$

für eine im Ursprung befindliche Punktladung
Invarianz unter Drehungen $\rightarrow$ Ansatz: $\vec{E} = \vec{x}g(|\vec{x}|)$

$$\int \mathrm{d}^3x\vec{\nabla}\vec{E} = \oint \mathrm{d}\vec{f}\vec{E} \overset{!}{=} \int \mathrm{d}^3x 4\pi\rho = 4\pi e \tag{313}$$

wähle V =Kugel

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}^3x\vec{\nabla}\vec{E} \overset{!}{==} \int_{\text{Kugeloberfläche}} \mathrm{d}\cos(\theta)\mathrm{d}\rho\,\underbrace{|\vec{x}|^3 g(|\vec{x}|)} = 4\pi|\vec{x}|^3 g(|\vec{x}|) \Rightarrow \vec{E} = e\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \tag{314}$$

Wiederholung Elektrodynamik
Coulombproblem
Maxwell-Gleichungen:
$\oplus$ Annahme: $\dot{\rho} = 0 \rightarrow \dot{\vec{E}} = 0$ ist möglich
$\oplus$ Annahme: $\dot{j} = 0 \rightarrow \vec{B} = 0$ ist möglich
$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow$ Ansatz $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
$\rightarrow$ Poissongleichung $\triangle\phi = e\delta(\vec{x})$

$\rightarrow \vec{E} = e\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$, $\phi = \frac{e}{|\vec{x}|}$
Für ein System von Punktladungen gilt dann:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{x} - \vec{x}_a) \tag{315}$$

$$\rightarrow \phi = \sum_a e_a \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_a|} \tag{316}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen gilt demnach:

$$\phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{317}$$

$$\tag{318}$$

Dabei wird die folgende Relation verwendet:

$$\underbrace{\triangle \frac{1}{|\vec{x}|}}_{\text{Distribution}} = -4\pi\delta(\vec{x}) \tag{319}$$

Diese besagt im Endeffekt, dass man $\triangle\frac{1}{|\vec{x}|}$ auch als Distribution auffassen kann, die dann wie ein Vielfaches der Deltadistribution wirkt.
Feldtensor:
Elektrostatische Energie für ein System von Ladungen
Energiedichte $T^{00} = W = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$
Energie

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\vec{E}^2 \tag{320}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\vec{E}\vec{\nabla}\phi \tag{321}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3x \left(\underbrace{\vec{\nabla}\left(\vec{E}\phi\right)}_{=0} - \phi\vec{\nabla}\vec{E}\right) \tag{322}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\phi\rho \text{ für } \rho = e\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{323}$$

Für eine Punktladung gilt demnach

$$U = \frac{1}{2}e\phi(0) \text{ ist Divergent} \tag{324}$$

$\Rightarrow$ die Selbstenergie ist divergent.
$\rightarrow$ Elektrodynamik selbst zeigt, dass sie nur einen begrenzten Anwendungsbereich besitzt.
$\rightarrow$ Quantenelektrodynamik
$\rightarrow$ Modifikation der Physik bei kleinen Abständen
für Elektronen

$$\frac{e^2}{2r_0} = mc^2 \tag{325}$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{e^2}{2mc^2} = 3 * 10^{-15}m \text{ mit } r_0 \text{ als klassischem Elektronenradius} \tag{326}$$

$\rightarrow$ für ein System von Ladungen: Wechselwirkungsenergie

$$U = \frac{1}{3}\sum_a e_a \left(\sum_b \frac{e_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|}\right) \tag{327}$$

Selbstenergie streichen:

$$U' = \frac{1}{3}\sum_a e_a \left(\sum_{b\neq a} \frac{e_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|}\right) \tag{328}$$

Relativistisches Teilchen im Coulombpotential Coulombpotential $\phi = \frac{e'}{r}$ (Ladung e' im Ursprung) Testladung $e \ll e'$ die das oben angegebene Potential nicht stört. Koordinaten der Testladung $\vec{x} = (r\sin(\theta), r\cos(\theta))$ Durch Invarianz des Potentials unter Drehungen gilt die Drehimpulserhaltung und damit bewegt sich das Teilchen nur in einer Ebene.
(Lorentz-Kraft → Bew.-Gl.)
Impuls:

$$\vec{p} = \gamma m\dot{\vec{x}}\ ,\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \tag{329}$$

$$= \gamma m\left(\dot{r}\ \sin(\theta) + r\dot{\theta}\ \cos\theta, \dot{r}\ c\phi = \frac{e}{(R-\vec{R}\vec{\beta})}|_{t'=t-\frac{R}{c}} os\theta + r\dot{\theta}\ \sin\theta, 0\right) \tag{330}$$

$$p^2 = \gamma^2 m^2(\dot{r}^2 + r^2\theta^2) \tag{331}$$

Drehimpuls: $\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$
$M = |\vec{M}| = \gamma m r^2\dot{\theta}$
Energie (Gesamtenergie)

$$\epsilon = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r} \tag{332}$$

2 Erhaltungsgrößen

$$\epsilon = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r} \tag{333}$$

$$M = \gamma m r 2\dot{\theta} \text{ mit } p_r = \gamma m\dot{\vec{r}} \tag{334}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \tag{335}$$

Wobei $\dot{\vec{x}}^2$ die Größen $\dot{r}$ und $\dot{\theta}$ enthält.

$$\epsilon = \epsilon(\dot{r}, \dot{\theta}) \tag{336}$$

$$M = M(\dot{r}, \dot{\theta}) \tag{337}$$

$$\Rightarrow \text{ berechne } \dot{r}, \dot{\theta} \text{ als Funktionen von } \epsilon, M \tag{338}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{M^2c^4}{r^2(\epsilon r - \alpha)^2} \tag{339}$$

$$\dot{r}^2 = c^2\frac{(\epsilon r - \alpha)^2 - c^2(M^2 + m^2c^2r^2)}{(\epsilon r - \alpha)^2} \tag{340}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = f(r, \epsilon, M) \tag{341}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{342}$$

Bahnkurve $\theta = \theta(r)$ oder $r = r(\theta)$ oder $f(r, \theta) = const$

Fallunterscheidungen

1. $\alpha > 0$, $\alpha < 0$
2. $|\alpha| = cM$, $|\alpha| < cM$, $|\alpha| > cM$

Dies führt zu folgenden Folgerungen für den ersten Punkt:
$\alpha > 0$ abstoßende Ladungen
$\rightarrow \epsilon > 0 \forall r$
für $r \rightarrow 0 : \epsilon \rightarrow \infty$
→ "Hyperbel"(im Relativistischen nur näherungsweise für kleine γ) Bemerkungen: keine Lösung ist periodisch (für $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$):

$$\text{z.B. } |\alpha| < Mc \tag{343}$$

$$(c^2M^2 - \alpha^2)\frac{1}{r} = c\sqrt{(M\epsilon)^2 - m^2c^2(M^2c^2 - \alpha^2)}\cos\left(\theta\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{2M^2}}\right) - \epsilon\alpha \tag{344}$$

offene Rosetten

für $\alpha < 0$, $|\alpha| > Mc$ für $\theta \to \infty$ gilt $r \to 0$ Also stürzt das Teilchen ins Zentrum. Allerdings tut es das in endlicher Zeit.

3.2.2 Felder von vorgegebenen Ladungsverteilungen

Maxwell-Gleichungen für Statik:
$\to \rho, \vec{j}$ legen Divergen und Rotation mit der Annahme, dass das Feld im unendlichen verschwindet, also für $\vec{x} \to \infty$ gilt $\phi(\vec{x}) \to 0$

Satz: Ein Vektorfeld ist eindeutig festgelegt, wenn in allen Raumpunkten die Quellen $\vec{\nabla}\vec{V}$ und die Wirbel $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ bekannt sind und wenn es im unendlichen hinreichend schnell verschwindet.
Ergänzung: Satz von Helmholtz Ein Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$ das einschließlich seiner Ableitungen mit hinreichender Ordnung gegen 0 geht, wenn x gegen unendlich geht lässt sich dieses als

3.3 Multipolentwicklung

3.3.1 Dipolterm

Für $R >> |\vec{x}_a|$ lässt sich das Potential für Punktladungen e_a sinnvoll entwickeln:

$$\phi = \sum \frac{e_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a|} \text{Taylorentwicklung } \Rightarrow \phi = \frac{Q}{R} - \vec{D}\vec{\nabla}\frac{1}{R} + \dots \tag{345}$$

$$Q = \text{Gesamtladung} = \sum e_a \tag{346}$$

$$D = \text{Dipolmoment} = \sum e_a \vec{x}_a \to \int \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x})\vec{x} \text{ (Dipolpotential)} \tag{347}$$

Sortiert nach positiven und negativen Ladungen

$$\to \vec{D} = \sum_{pos} e_a^+ \vec{x}_a - \sum_{neg} e_a^- \vec{x}_a \tag{348}$$

$$\text{Mit dem Ladungsschwerpunkt} \tag{349}$$

$$\vec{X}^{\pm} = \frac{\sum e_a^{\pm} \vec{x}_a}{\sum e_a^{\pm}} \tag{350}$$

$$Q^{\pm} = \sum e_a^{\pm} \tag{351}$$

$$\vec{D} = Q^+ \vec{X}^+ - Q^- \vec{X}^- \tag{352}$$

$$\text{z.B.: } Q = Q^+ - Q^- = 0 \leftarrow \text{ Wichtiger Spezialfall} \tag{353}$$

$$\vec{D} = Q^+(\vec{X}^+ - \vec{X}^-) \tag{354}$$

für $Q = 0$

$$\phi(\vec{x}) = -\vec{D}\vec{\nabla}\frac{1}{R} \tag{355}$$

$$= \vec{D}\frac{\vec{x}}{R^3} = \vec{D}\frac{\vec{e}_x}{R^2} \tag{356}$$

$$\to \phi \propto \frac{1}{R^2} \tag{357}$$

Für die Feldstärke gilt dann

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{358}$$

$$= -\frac{\vec{D}}{R^3} + 3\frac{\vec{D}\vec{x}}{R^5}\vec{x} \propto \frac{1}{R^3} \tag{359}$$

besitzt eine axialsymmetrische Komponente gegeben durch $\frac{\vec{D}}{R^3}$

3.3.2 Quadrupolmoment

$$\phi^{(2)}(\vec{x})) = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_a e_a x_a^i x_a^j}_{\text{Eigenschaften der Ladungsverteilung}} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{R}}_{\text{Position des Beobachters}} \tag{360}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{x^i}{R^3} = \underbrace{-\frac{\delta^{ij}}{R^3} + 3\frac{x^i x^j}{R^5}}_{\text{Spur=0}} \tag{361}$$

$$\triangle\frac{1}{R} = 0 \tag{362}$$

Der Anteil $\propto \delta^{ij}$ in $\frac{1}{2}\sum e_a x_a^i x_a^j$ verschwindet wegen der verschwindenden Spur.
Definition: Quadrupolmoment

$$Q^{ij} = \sum e_a \left(3e x_a^i x_a^j - \delta^{ij}|\vec{x}_a|^2\right) \tag{363}$$

mit

$$\sum Q^{ii} = \sum_{i,j} Q^{ij}\delta_{ij} = 0 \tag{364}$$

Q^{ij} ist also Spurfrei und symmetrisch

$$\Rightarrow \phi^{(2)} = \frac{1}{6}Q^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{R} \propto \frac{1}{R^3} \tag{365}$$

3.3.3 Multipolentwicklung allgemein

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \phi^{(4)} + \ldots \tag{366}$$

$$\phi^{(n)} = \text{n-te Ableitung von } \frac{1}{R} \propto \frac{1}{R^{n+1}} \tag{367}$$

Charakteristische Eigenschaften der Ladungsverteilung

Multipole	$\phi^{(n)}$
Q =Gesamtladung=Monopol	$\sum \frac{e_a}{R} = \frac{Q}{R}$
$\vec{D}$ =Dipolmoment	$\frac{D}{R^2}\cos(\theta)$
Q_{ij} = Quadrupolmoment	$\frac{Q}{R^3}\frac{1}{4}\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)$

n-te Ableitung:
(2n)-Polmoment $Mi_1 \ldots i_n$
symmetrische, spurfreie Tensoren n-ter Stufe mit $2n + 1$ Komponenten

Ordnung	relevante Komponenten
Monopol	1
Dipol	1
Quadrupol	2 (Hauptwerte)
$\vdots$	$\vdots$
2n-Pol	2(n-1)

Multipolentwicklung entspricht der Entwicklung nach den Lösungen der Laplace/Poisson-Gleichung nach Kugelflächenfunktionen

Einschub Quantenmechanik Schrödingergleichung $\rightarrow \triangle$ für kin. Energie
für zentralsymmetrische Systeme $\rightarrow$ sphärische Koordinaten
Eigenzustände des Drehimpulses

Laplace in sphärischen Koordinaten

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\Phi^2} \tag{368}$$

Lösung durch Faktorisierung der Lösungsfunktion

$$\phi(r,\theta,\Phi) = R(r)P(\theta)f(\Phi) \tag{369}$$

$$\text{für R: Lösungen} \propto c^{(1)}r^{l+1} + c^{(2)}r^{-l} \tag{370}$$

$$\text{für P: } \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}P(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}P(\theta)\right) = 0 \tag{371}$$

$$\text{für f: } \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\Phi^2}f(\Phi) + m^2 f(\Phi) = 0 \tag{372}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung:} f = e^{im\Phi} \;,\; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{373}$$

$$\text{für } P(\theta)P_l^m(\theta) = (-1)^m(1-\cos^2(\theta))^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\cos(\theta)^m}P_l(\cos(\theta)) \tag{374}$$

$$l = 0,1,2\ldots \text{ und } m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l \tag{375}$$

$$\text{und } P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}z^l}(z^2-1)^l \tag{376}$$

$$\text{darraus folgen Kugelflächenfunktionen} \tag{377}$$

$$Y_{lm}(\theta,\Phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos(\theta))e^{im\Phi} \tag{378}$$

Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\Phi)Y^*_{lm}(\theta',\Phi') = \delta(\cos(\theta)-\cos(\theta'))\delta(\Phi-\Phi') \tag{379}$$

Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Phi Y_{lm}(\theta,\Phi)Y^*_{l'm'}(\theta,\Phi) = \delta_{mm'}\delta_{ll'} \tag{380}$$

$\rightarrow$ beliebige Funktion auf der Einheitskugel ist Linearkombination der Y_{lm} (Basis)

3.3.4 Multipolentwicklung (Wiederholung)

$$\phi(\vec{x}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{x}-\vec{x}_a|} \rightarrow_{|\vec{x}|=R>>|\vec{x}_a|} \sum_{l=0}^{\infty}\frac{M_{2l}}{R^{l+1}} \tag{381}$$

$$M_{2l} \rightarrow 2l - \text{Pole} \tag{382}$$

$$\triangle\phi(\vec{x}) = -4\pi\delta(\vec{x}) \tag{383}$$

Eigenfunktionen des Laplace-Operators
Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta,\Phi) \rightarrow P_l^m, P_l \tag{384}$$

Legendre Polynome
Vollständigkeit
Orthogonalität

Anwendung Kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$
axialsymmetrisch
Φ-Abhängigkeit nicht vorhanden
$\rightarrow$ nur $m=0$, nur P_l

explizit für Greensche Funktion

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x}\vec{x}' + \vec{x}'^2}} \tag{385}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{R\sqrt{1-2\frac{r'}{R}\cos\alpha + \frac{r'^2}{R^2}}} & R > r' \text{ mit } t = \frac{r'}{R} \text{ und } z = \cos\alpha \\ \frac{1}{r'\sqrt{1-2\frac{R}{r'}\cos\alpha + \frac{R^2}{r'^2}}} & r' > R \text{ mit } t = \frac{R}{r'} \text{ und } z = \cos\alpha \end{cases} \tag{386}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}}_{\text{erzeugende Funktion der Legende Polynome}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(z) \tag{387}$$

Spezialfall: $z = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \underbrace{P_l(1)}_{=1} \tag{388}$$

$$\rightarrow \phi(\vec{x}) = -4\pi \int \mathrm{d}^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{389}$$

$$= -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} \underbrace{\int \mathrm{d}r' r'^2 \int \mathrm{d}z 2\pi\rho(r',z) r'^l P_l(z)}_{M_{2l}} \tag{390}$$

Anwendung für allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ Greensche Funktion: $\triangle G(\vec{x},\vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$
Polarkoordinaten: $\vec{x} \rightarrow R, \theta, \Phi$
$\vec{x}' \rightarrow R', \theta', \Phi'$ (fest)
Vollständigkeit der $Y_{l,m}$:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{R^2}\delta(R-r')\delta(\Phi-\Phi')\delta(\theta-\theta') \tag{391}$$

$$= \frac{1}{R^2}\delta(R-r')\sum_{l,m} Y_{l,m}(\theta,\Phi) Y^*_{l,m}(\theta',\Phi') \tag{392}$$

$$\tag{393}$$

Somit folgt als Ansatz für $G(R,\theta,\Phi,r',\theta',\Phi')$

$$G(R,\theta,\Phi,r',\theta',\Phi') = \sum_{l,m} A_{l,m}(R,r',\theta',\Phi') Y_{l,m}(\theta,\Phi) \tag{394}$$

$$\rightarrow A_{l,m}(R,r',\theta',\Phi') \underset{\text{Ansatz}}{=} G_R(R,r') Y_{l,m}(\theta',\Phi') \tag{395}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial}{\partial R}\right) G_R - \frac{l(l+1)}{R^2} G_R = -\frac{1}{R^2}\delta(R-r') \tag{396}$$

Ansatz: Potenzen $G_R(R,r') = a(r')R^b$
$\rightarrow$ Lösungen: $b = l$, oder $-(l+1)$
$\rightarrow$ für $R > r'$ und $G_R \overset{R\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0$: $G_R = N_l \frac{r'^l}{R^{l+1}}$ Ergebnis für G:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = -\sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{R^{l+1}} Y_{l,m}(\theta,\Phi) Y^*_{l,m}(\theta',\Phi') \tag{397}$$

für das Potential gilt dann:

$$\phi(\vec{x}) = -4\pi \int \mathrm{d}^3x' G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}') \tag{398}$$

$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{R^{l+1}} Y_{l,m}(\theta,\Phi) M_{l,m} \tag{399}$$

$$\text{mit} M_{lm} = \int \mathrm{d}r'(r')^2 \int \mathrm{d}\cos\theta' \int \mathrm{d}\Phi'(r')^l Y^*_{l,m}(\theta',\Phi')\rho(\vec{x}') \tag{400}$$

$$= \text{sphärische Multipolmomente} \tag{401}$$

Somit können wir die Eigenschaften von ρ faktorisieren.

Anwendung: Wechselwirkungsenergie für Systeme von Ladungen in vorgegebenem Potential $\phi(\vec{x})$
Variation von $\phi(\vec{x})$ klein über Längen des Systems
$\rightarrow$ Entwicklung nach Potenzen von $\vec{x}'$

$$\phi(\vec{x}') = \phi(0) + \vec{x}'\vec{\nabla}\phi(0) + \frac{1}{2}x'_i x'_j \frac{\partial^2\phi}{\partial x'_j \partial x'_i}(0) + \dots \tag{402}$$

Wechselwirkungsenergie für ein System von Punktladungen

$$U = \sum_a e_a \phi(\vec{x_a}) \tag{403}$$

$$\text{Einsetzen:} U = Q\phi(0) + \underbrace{\vec{D}}_{\text{Orientierung Winkel} \cos\alpha} \overbrace{\underbrace{\vec{\nabla}\phi(0)}_{-\vec{E}}} + \frac{1}{6}Q_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial x'_j \partial x'_i}(0) + \dots \tag{404}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} \rightarrow \text{ Drehmoment} \tag{405}$$

$$U = Q\phi - \vec{D}\vec{E} + \dots \tag{406}$$

3.4 Magnetostatik

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B} \tag{407}$$

$$\rho \rightarrow \vec{j} \text{ Rotation} \tag{408}$$

$$\phi \rightarrow \vec{A} \tag{409}$$

Maxwell-Gleichungen:

$$\dot{\rho} = 0, \dot{\vec{j}} = 0, \qquad \vec{j} \neq 0 \tag{410}$$

$$\rightarrow \text{ese gibt Lösungen: } \dot{\vec{E}} = 0, \dot{\vec{B}} = 0, \qquad \vec{B} \neq 0 \tag{411}$$

physikalisch statische Stromverteilung = bewegte Ladungen
$\Rightarrow$ Zeitabhängigkeit $\Rightarrow \dot{\rho} \neq 0,\ \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{B}} \neq 0$
$\Rightarrow$ Magnetostatik ist Näherung
physikalische Näherung: zeitliche Mittelung!
Diese ist möglich falls:

$$\overline{\dot{\vec{E}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{groß, } T\rightarrow\infty} \left(\vec{E}(T) - \vec{E}(0)\right) \rightarrow 0 \tag{412}$$

Somit ist die Voraussetzung $\vec{E}(t)$ beschränkt.
$\rightarrow$bewegte Ladungen, die sich in einem endlichen räumlichen Gebiet mit endlichen Impulsen bewegen.

3.5 Magnetostatik

Ströme - bewegte Ladungen
Zeitmittelung

$$\overline{\dot{\vec{E}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{E}(0) - \vec{E}(0)}{T} \rightarrow 0 \text{ für } T \rightarrow \infty \text{ und } \vec{E}(t) \text{ ist begentzt} \tag{413}$$

Stationäre Bewegung

$$\rightarrow \bar{\dot{\rho}} = 0 \tag{414}$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung} \vec{\nabla}\bar{\vec{j}} = 0 \tag{415}$$

$$0 = \int \mathrm{d}^3x \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bar{j}^i\right) x^k = -\int \mathrm{d}^3x \bar{j}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}x^k\right) = -\int \mathrm{d}^3x \bar{j}^k \tag{416}$$

Voraussetzung für Anwendbarkeit der Magnetostatik

- Ladungen zu allen Zeiten in endlichem Raumgebiet
- endliche Impulse
- ausreichend lange Messzeit (schnelle Anpassung der Ladungen an geänderte äußere Bedingungen)
- schwache Magnetfelder

Grundgleichungen der Magnetostatik

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \rightarrow \text{Ansatz: } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{417}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{418}$$

Eichbedingung: Coulombeichung $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \triangle\vec{A} = -\triangle\vec{A} \tag{419}$$

$$\rightarrow \triangle\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \text{ Siehe Elektrostatik} \tag{420}$$

Als Lösung folgt also:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \text{ für} \vec{A}, \vec{B} \rightarrow 0 \text{ im Unendlichen} \tag{421}$$

Multipolentwicklung (Feld in große Abständen))

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{R} - \vec{x}'\vec{\nabla}\frac{1}{R} + \dots \tag{422}$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{R} - \frac{\vec{x}'\vec{x}}{R^3} + \dots \tag{423}$$

$$\text{in } \vec{A}\text{eingesetzt1. Term:} \int \mathrm{d}^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{R} = 0 (\text{d.h. keine Monopole}) \tag{424}$$

$$\text{2. Term:} \frac{1}{cR^3}\int \mathrm{d}^3x' \vec{j}(\vec{x}')(\vec{x}'\vec{x}) \tag{425}$$

$$\tag{426}$$

für Punktladungen gilt also

$$\vec{j}(\vec{x}') = \sum_a e_a\vec{v}_a \text{ , } \vec{v}_a = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_a}{\mathrm{d}t} \text{ auszurechnen} \tag{427}$$

$$\overline{\sum_a e_a\vec{v}_a(\vec{x}_a\vec{x})} = \overline{\sum_a e_a\frac{\mathrm{d}\vec{x}_a}{\mathrm{d}t}(\vec{x}_a\vec{x})} \tag{428}$$

$$= \underbrace{\overline{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a e_a\vec{x}_a(\vec{x}_a\vec{x})}}_{\substack{=0 \text{ falls Ladungen in einem} \\ \text{räumlich begrentzten Bereich bleiben}}} + \frac{1}{2}\overline{\sum_a e_a\frac{\mathrm{d}\vec{x}_a}{\mathrm{d}t}(\vec{x}_a\vec{x})} - \frac{1}{2}\overline{\sum_a e_a\vec{x}_a(\vec{v}_a\vec{x})} \tag{429}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{\sum_a e_a\left(\vec{v}_a(\vec{x}_a\vec{x}) - \vec{x}_a(\vec{v}_a\vec{x})\right)} = \frac{1}{2}\sum_a e_a\overline{(\vec{x}_a \times \vec{v}_a) \times \vec{x}} \tag{430}$$

$\rightarrow$ Definition: magnetisches Moment: $\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a e_a\overline{(\vec{x}_a \times \vec{v}_a)}$
$\Rightarrow$ 2.Term in der Multipolentwicklung für $\vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{1}{R^3}\vec{m} \times \vec{x} \tag{431}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{R^3}\vec{m} \times \vec{x}\right) \tag{432}$$

$$= \frac{3\vec{n}(\vec{m}\vec{n}) - \vec{m}}{R^3} \text{ , } \vec{n} = \frac{\vec{x}}{R} \tag{433}$$

Drehimpuls: $\vec{L} = \sum_a m_a \vec{x}_a \times \vec{v}_a$ falls Verhältnis $\frac{e_a}{m_a}$ für alle Teichen gleich ist gilt:

$$\vec{m} = \frac{e}{2cm}\vec{L} \tag{434}$$

magnetisches Dipolmoment ← mechanischer Drehimpuls.
Lorentz-Kraft: $\bar{\vec{F}} = \sum \frac{e}{c}\overline{\vec{v} \times \vec{B}} = \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ldots)} = 0$
Drehmoment:

$$\bar{\vec{K}} = \sum \frac{e}{c}\underbrace{\overline{\vec{x} \times (\vec{v} \times \vec{B})}}_{\vec{v}(\vec{x}\vec{B} - \vec{B}(\vec{v}\vec{x})} \neq 0 \tag{435}$$

$$= \overline{\vec{v}(\vec{x}\vec{B}} - \cancel{\frac{1}{2}\left(\overline{\vec{B}\frac{\mathrm{d}\vec{x}^2}{\mathrm{d}t}}\right)} \tag{436}$$

$$\tag{437}$$

Larmor Präzession

$$\vec{m} \times \bar{\vec{B}} = \frac{2mc}{e}\dot{\vec{m}} \tag{438}$$

$$\dot{\vec{m}} = -\vec{\Omega} \times \vec{m} \tag{439}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2mc}\vec{B} \tag{440}$$

$$\vec{K} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \tag{441}$$

$$\Delta t \text{groß} \;>>\text{Zeitmittelung} \tag{442}$$

Vorsicht, alle Mittelungen hier sind nur über die Mikroskopischen Skalen gedacht und kein Zeitmittel über den gesamten betrachteten Zeitraum.

Magnetischer Dipol in äußerem Feld $\vec{B}$ sei zeitlich konstant
Herleitung über den Lagrangeformalismus. (in Magnetostatik, also $\phi = 0$)
(allgemein: $S = -\frac{1}{c^2}\int d^4x j^\mu A_\mu \to \frac{1}{c}\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x \vec{j}\vec{A}$)

$$L = \sum_a \frac{e_a}{c}\vec{v}_a\vec{A} \text{ für eine Punktladung} \tag{443}$$

$$|\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x} \tag{444}$$

$$|\text{ für ein konstantes und Ortsunabhängiges } B\text{-Feld} \quad = \sum_a \frac{e_a}{2c}\vec{v}_a(\vec{B} \times \vec{x}) = \sum_a \frac{e_a}{2c}\vec{B}(\vec{x} \times \vec{v}_a) = \vec{m}\vec{B} \tag{445}$$

In der Elektrostatik galt:

$$L_E = \vec{D}\vec{E} \text{ Dipol-Energie} \tag{446}$$

→Kraftwirkungen

3.6 Elektrodynamik im Kontinua

mikroskopisch:

- punktförmige Ladungen im Vakuum
- teilweise gebunden, halten sich in begrenzten Raumgebieten auf
- ortsfeste Ladungen deren Bewegung man vernachlässigt (Atomkerne)
- mehr oder weniger frei bewegliche Elektronen
- magnetische Momente und Spins treten auf

⇒ Quantenmechanik oder Quantenfeldtheorie müssen zur Beschreibung verwendet werden.

Ziel: makroskopische Eigenschaften räumliche Mittelung (groß/klein) Wirft Fragen auf:

- Wie groß darf man die Volumina dieser Mittelung wählen
- Ab wann beginnt die Näherung eines Kontinuums zu nicht vernachlässigbaren Fehlern zu führen

Diese Mittelung wird hier nicht weiter notiert sondern für alle Größen implizit angenommen.

Überblick (keine mikroskopischen Eigenschaften betrachtet, dies ist Thema der Statistischen Physik)

- Leiter und Nichtleiter (Dielektrika)
- frei bewegliche Ladungen - verschiebbare Ladungen
- Magnetismus
  - Paramagnetismus
  - Diamagnetismus
  - Ferromagnetsimus

3.6.1 Elektrostatik von Leitern

Frei bewegliche Ladungen
$\Rightarrow$ jedes elektrische Feld führt dazu, dass die Ladungen ihre Positionen ändern, d.h. eine Bewegung dieser Ladungsträger findet statt
$\Rightarrow$ ein elektrisches Feld erzeugt Ströme
Die Ladungsträger sind jedoch nicht völlig frei beweglich, durch Streuung an anderen Elektronen und Atomrümpfen verlieren sie Energie und werden Abgebremst.
$\Rightarrow$ Ströme dissiosieren Energie
$\rightarrow$ keine stationären Ströme
$\Rightarrow$ $\vec{E}$ im Inneren von Leitern verschwindet schnell
$\Rightarrow$ frei bewegliche Ladungen: an der Oberfläche
$\rightarrow$ Problemstellung für Elektrostatik

- Feld im Außenraum
- Ladungsverteilung auf den Oberflächen der Leiter

Im Außenraum:

- $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

Ansatz: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ mit $\triangle\phi = 0$
und an der Oberfläche E_z in der Nähe der Oberfläche: $\neq 0$ für homogene Oberflächen (wir nehmen an, dass die betrachtete Auflösung der Oberfläche so groß ist, dass Atome und Elektronenverteilung quasikontinuierlich sind):
$\rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_z}{\partial y}$ bleiben endlich.
Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow$ auch $\frac{\partial E_x}{\partial z}$ und $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ sind endlich
$\Rightarrow E_x$,E_y sind stetig in z-Richtung
$\Rightarrow \vec{E}_{\text{tangential}} = 0$ auf der Oberfläche
$\Rightarrow$ wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ sind somit alle Leiteroberflächen in der Elektrostatik Äquipotentialflächen.

Maxwellgleichungen mit Randbedingungen

- $\vec{E}_{\text{tangential}} = 0$ auf Oberflächen
- $E_{\text{normal}} = 4\pi\sigma$ (Herleitung unten)

Ladungsverteilung auf Oberflächen
Flächenladungsdichte $\sigma = \rho \mathrm{d}z$ $(\rho = \frac{Q}{\mathrm{d}V} = \frac{Q}{\mathrm{d}F\mathrm{d}z} = \sigma\frac{1}{\mathrm{d}z})$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \tag{447}$$

$$\underset{\text{Volumenintegral}}{\Rightarrow} \int \mathrm{d}^3x\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi \int \mathrm{d}^3x\rho \tag{448}$$

$$\underset{\text{Satz von Gauß}}{\Rightarrow} \oint \mathrm{d}\vec{f}\vec{E} = 4\pi \oint \mathrm{d}\vec{f}\vec{n}\sigma \tag{449}$$

$$\Rightarrow E_{\text{normal}} = 4\pi\sigma \tag{450}$$

Elektrostatik von Nichtleitern Keine frei beweglichen Ladungsträger
$\rightarrow \vec{E} \neq 0$ im Inneren möglich
Bezeichnungen:

- mikroskopisch $\vec{e}$
- makroskopisch $\vec{E} = \frac{1}{V}\int_V \mathrm{d}^3x\vec{e}(\vec{x})$

Maxwellgleichungen nach räumlicher Mittelung

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \tag{451}$$

wichtiger Fall: keine zusätzlichen Ladungen auf dem Nichtleiter

$$\rightarrow \int \mathrm{d}^3x\rho = 0 \tag{452}$$

für beliebig geformtes Volumen $\Rightarrow$

$$\rho = -\vec{\nabla}\vec{P} \tag{453}$$

Betrachte Oberfläche, die den Körper ganz einschließt

$$0 = \int \mathrm{d}^3x\rho = -\int \mathrm{d}^3x\vec{\nabla}\vec{P} \underset{\text{Gauß}}{=} -\oint \mathrm{d}\vec{f} \tag{454}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = 0 \text{ im Außenraum} \tag{455}$$

Bemerkung: $\vec{P}$ ist damit nicht eindeutig bestimmt

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} + \vec{\nabla}\times\vec{f} \tag{456}$$

Führt für beliebige Vektorfunktion f zu keiner Änderung der physikalischen Aussage.
$\vec{P}$ wird dielektrische Polarisation genannt
$\vec{P} \neq 0$ in polarisierbaren Medien
betrachte nun das Volumenelement an der Oberfläche

$$\Rightarrow \underline{P_{\text{Normal}} = \sigma} \tag{457}$$

$\vec{P}$ ist die Dichte des elektrischen Dipolmoments

$$\int \mathrm{d}^3x\vec{x}\rho(\vec{x}) = -\int \mathrm{d}^3x\vec{x}(\vec{\nabla}\vec{P}) \tag{458}$$

$$\rightarrow \int \mathrm{d}^3x x_k\rho(\vec{x}) = -\int \mathrm{d}^3x \left(\partial_i(x_kP_i) - P_i\underbrace{(\partial x_k)}_{\delta_{ik}}\right) \tag{459}$$

$$= \underbrace{\int \mathrm{d}^3x\,(\partial_i(x_kP_i))}_{\text{Satz von Gauß+Randterme=0}} \quad \int \mathrm{d}^3xP_k \tag{460}$$

$$= \int \mathrm{d}^3xP_k \tag{461}$$

zusammen ergibt sich

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \rho = -\vec{\nabla}\vec{P} \tag{462}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{D} = 0 \qquad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{463}$$

bei zusätzlichen Ladungen $\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{extern}}$
$\vec{D}$ heißt dielektrische Induktion oder (di)elektrische Verschiebung
Feld $\vec{E}$ verschiebt im mikroskopischen Ladungen und erzeugt damit eine Dipoldichte, die von den Materialeigenschaften abhängt.
Zusätzliche Informationen: Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$
allgemein $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$
Potenzreihenentwicklung (für schwache Felder):

$$D_i = D_{i,0} + \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ik}E_k + \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ikl}E_kE_l \ldots \tag{464}$$

- $\vec{D}_0 \neq 0$ z.B. in Kristallen möglich (Permanenz)
- i.a. ist ϵ ein Tensor
- einfachste Situation: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

allgemein gilt $\epsilon > 1$.

3.7 Wiederholung

3.7.1 Magnetostatik

Zeitmittelung (ßchnelle"Bewegungen)
$\bar{\dot{\vec{E}}} = 0$
Multipolentwicklung, magnetisches Moment

3.7.2 Elektrostatik für Leiter (Randwertprobleme)

3.7.3 Elektrostatik von Materie

räumliche Mittelung
mikroskopisches elektrisches Feld $\vec{e}(\vec{x})$
makroskopisches elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x})$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{V(\vec{x})} \int_{V(\vec{x})} \mathrm{d}^3x' \vec{e}(\vec{x}') \tag{465}$$

3.8 Magnetostatik in Materie

mikroskopisch $\vec{b}(\vec{x})$

$$\vec{\nabla}\vec{b}(\vec{x}) = 0 \vec{\nabla} \times \vec{b}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\dot{\vec{e}}(\vec{x}) + \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} \tag{466}$$

gemitteltes Feld
(Zeitmittelung: $\bar{\dot{\vec{e}}} = 0$
räumliche Mittelung $\vec{b} \to \vec{B}$

$$\vec{\nabla}\vec{b} = 0 \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\vec{v}} \tag{467}$$

Materie:

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\,\overline{\rho\vec{v}} = 0 \tag{468}$$

Ansatz

$$\overline{\rho\vec{v}} = c\vec{\nabla} \times \vec{M} \tag{469}$$

im Allgemeinen gilt in Materie $\vec{M} \neq 0$, denn

$$c \int_F \mathrm{d}\vec{f}\vec{\nabla} \times \vec{M} = c \oint_{\partial F} \mathrm{d}\vec{x}\vec{M} = 0 \tag{470}$$

(Analogie: Polarisation $\int_V \mathrm{d}^3x\rho = \int \mathrm{d}^3x \vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$
$\overline{\rho\vec{v}}$ einsetzen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{\nabla} \times \vec{M} \tag{471}$$

$$\text{Def.:} \vec{B} - 4\pi\vec{M} = \vec{H} \tag{472}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \tag{473}$$

- $\vec{M}$ ist nicht eindeutig:

$$\vec{M} \to \vec{M} + \vec{\nabla} f \tag{474}$$
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \tag{475}$$

festlegen: mikroskopische Eigenschaften

$\vec{M}$ =Dichte des magnetischen Moments

$$\frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3x\vec{x} \times \overline{\rho\vec{v}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\vec{x} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \tag{476}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\partial V} \vec{x} \times (\mathrm{d}\vec{f} \times \vec{M})}_{=0} - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\underbrace{(\vec{M} \times \vec{\nabla}) \times \vec{x}}_{=-2\vec{M}} \tag{477}$$
$$= \int \mathrm{d}^3x\vec{M} \tag{478}$$

Bemerkungen zu $\vec{M}$

- $\vec{M} = 0$ in magnetischen Materialien
- einfache Situation(häufig!): $\vec{B} = \mu\vec{H}$
  $\mu =$ magnetische Permiabilität
  $\vec{M} = \chi\vec{H}$
  χ =magnetische Suzeptibilität $\chi = \frac{\mu-1}{4\pi}$
- Aus der Thermodynamik lässt sich folgern $\Rightarrow \mu > 0$
- $\mu \ll 1$, relativistischer Effekt $\propto \frac{v^2}{c^2}$
- Dies lässt sich vor allem in Kristallstrukturen erreichen
- Anisotrope Materialien $\to B_i = \mu_{ik}H^k$
- im Allgemeinen (vor allem bei starken Feldern): $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$

3.9 Elektromagnetische Wellen

Bisher: $\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{B}} = 0$ Jetzt: $\dot{\vec{E}} \neq 0$, $\dot{\vec{B}} \neq 0$ im Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \tag{479}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{E}}\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{480}$$

Für dieses Problem gibt es nicht triviale Lösungen!
für 4-Potentiale: Coulomb-Eichung

$$A^0 = \phi = 0\vec{\nabla}\vec{A} = 0 \tag{481}$$
$$\to \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}},\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{482}$$
$$\text{z.B.}\vec{\nabla} \times \vec{B} = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}}_{-\triangle\vec{A}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})} \overset{=}{!} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} \tag{483}$$

$\to$ Wellengleichung

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = 0 \tag{484}$$

in 4-Schreibweise Maxwellgleichungen: $\partial_\mu F^{\mu 0} = 0$ (für $j^\nu = 0$) Einsetzen:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{485}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu \tag{486}$$

$$) = 0 \tag{487}$$

Mit der Lorentzeichung ($\partial_\mu A^\mu = 0$) ergibt sich:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0\text{,d'Alembert-Operator} \tag{488}$$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle \tag{489}$$

Dies gilt auch für jede Komponente von A^μ,$\vec{E}$,$\vec{B}$ (lineare Operatoren) im folgenden $f = A^\mu$,$\vec{E}$,$\vec{B}$

$$\Box f = 0 \tag{490}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right) f = 0 \tag{491}$$

Lösung der Wellengleichung zunächst 1-dimensional $f(x,t)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = 0 \tag{492}$$

neue Variable: $\xi = t - \frac{x}{c}$, $\eta = t + \frac{x}{c}$
invertiert: $t = \frac{\xi+\eta}{2}$, $x = c\frac{\eta-\xi}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{493}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f = 0 \tag{494}$$

allgemeinen Lösung: $f(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$
beziehungsweise $f(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$
(f_1,f_2 sind unbestimmt)
(Randwerte!)
z.B.: $f_2 = 0$, also $\vec{E} = \vec{E}(x-ct)$
Feldkomponenten haben gleiche Werte für alle

$$x = ct + \text{Konstanten} \tag{495}$$

→ Feldkonfiguration bewegt sich in x-Richtung mit Lichtgeschwindigkeit (analog für $f_1 = 0$)

Monochromatische Wellen Lösung mit Zeitabhängigkeit $\propto \cos(\omega t + \alpha)$
Einsetzen in die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = -\omega^2 f \tag{496}$$

$$\triangle f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \tag{497}$$

$$\Rightarrow f \propto \cos(\omega(t \pm \frac{x}{c}) + \alpha_0) \tag{498}$$

Idee komplexe Funktionen

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha), Re(e^{i\alpha}) = \cos(\alpha) \tag{499}$$

$$\text{Regel: } e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \tag{500}$$

$$\text{Für monochromatische Wellen: } \vec{A} = Re(\vec{A}_0 * e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}) \tag{501}$$

3.9.1 Wiederholung

Wellengleichung im Vakuum

$$\Box A^{\mu} = 0 \tag{502}$$

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = 0 \tag{503}$$

(innerhalb der Lorentz-, Coulomb-Eichung)
Allgemeine Lösung für A^i,E^i,$B^i \to f(x,t)$

$$f = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \tag{504}$$

Basislösungen
Monochromatische Wellen $f_1 \propto \cos(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right))$
oder $\vec{A} = Re(\underbrace{\vec{A}_0}_{constant} * e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}$
für beliebige Richtungen lässt sich dies verallgemeinern:
Einheitsvektor $\vec{n}$

$$\vec{A} = Re(\underbrace{\vec{A}_0}_{constant} * e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \tag{505}$$

$$\text{mit } \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \tag{506}$$

$$\text{und } \vec{A}_0 = \text{konstant, komplex} \tag{507}$$

$$\vec{k}\vec{x} - \omega t = \text{ Phase, Phasenwinkel, } \phi \tag{508}$$

$$\tag{509}$$

Eine Phasendifferenz $2\pi \to$ in$x$
Wellenlänge: $\frac{\omega}{c}\lambda = 2\pi$
$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$
$\Rightarrow$ für $\vec{E}$,$\vec{B}$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = i\frac{\omega}{c}\vec{A} \tag{510}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\frac{\omega}{c}\vec{n} \times \vec{A} \tag{511}$$

$$= i\vec{k} \times \frac{c}{i\omega}\vec{E} = i\frac{\omega}{c}\vec{n} \times \frac{c}{\omega}\vec{E} \tag{512}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = i\vec{n} \times \vec{A} \tag{513}$$

$$\text{Eichbedingung :}\vec{\nabla}\vec{A} = 0 \tag{514}$$

$$\Rightarrow \vec{n}\vec{A} = 0 \tag{515}$$

$\Rightarrow$ elektromagnetische Wellen sind transversal.
$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n} \perp \vec{E}$
und $|\vec{E}| = |\vec{B}|$

in 4-Schreibweise

$$\vec{k}, \omega \to k^{\mu} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k}) \tag{516}$$

$$\text{Phase: } k_{\mu}x^{\mu} = kx = \omega t - \vec{k}\vec{x} \tag{517}$$

$$\vec{A}^{\mu} = \vec{A}_0^{\mu} e^{ikx} \tag{518}$$

$$\text{Wellengleichung: } \Box A^{\mu} = 0 \tag{519}$$

$$(-ik)^2 A^{\mu} = 0 \tag{520}$$

$$\Rightarrow k^2 = 0, \text{ d.h. } \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0 \tag{521}$$

Welcher Energie und Impulstransport durch das Feld gegeben?

$$\text{Poynting-Vektor: } \vec{S} = \frac{4\pi}{c}\vec{E} \times \vec{B} \tag{522}$$
$$= \frac{4\pi}{c}\vec{E} \times \left(\vec{n} \times \vec{E}\right) \tag{523}$$
$$= \frac{4\pi}{c}\vec{n}\vec{E}^2 = \frac{4\pi}{c}\vec{n}\vec{B}^2 \tag{524}$$
$$\text{Energiedichte:} \tag{525}$$
$$W = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \tag{526}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\vec{E}^2 \tag{527}$$
$$\Rightarrow \vec{S} = \vec{n}cW \tag{528}$$
$$\text{Impulsdichte:} \tag{529}$$
$$\vec{P} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \vec{n}\frac{W}{c} \tag{530}$$
$$\text{in der relativistschen Mechanik:} \tag{531}$$
$$p = \frac{1}{c}E \text{ wir für } m = 0 \rightarrow \text{Photon} \tag{532}$$

3.9.2 Polarisation

Richtung der Felder: z.B. $\vec{E}$ ($\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$)

$$\vec{E} = Re(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)})) \tag{533}$$
$$\vec{E}_0 = \text{konstant und komplex} \tag{534}$$

globale Phase: $\vec{E}_0^2 = |\vec{E}_0^2|e^{-2i\alpha}$
Ansatz: $\vec{E}_0 = \vec{b}e^{-i\alpha}$
$\vec{b}^2$ ist reell, aber Komponenten von $\vec{b}$ sind komplex.
Ansatz: $\vec{b} = \vec{b}_1 + i\vec{b}_2$ ($\vec{b}_1$,$\vec{b}_2$ reell)

$$\vec{b}^2 = \vec{b}_1^2 + 2i\vec{b}_1\vec{b}_2 - \vec{b}_2^2 \tag{535}$$
$$\Rightarrow \vec{b}_1\vec{b}_2 = 0 \ , \ \vec{b}_1 \perp \vec{b}_2 \tag{536}$$

Wähle Koordinatensystem mit Achsen parallel zu $\vec{n}$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ $\Rightarrow$ x-Achse $\parallel \vec{n}$
$\Rightarrow$ y-Achse $\parallel \vec{b}_1$
$\Rightarrow$ z-Achse $\parallel \vec{b}_2$

$$\vec{E} = Re(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}) \tag{537}$$
$$E_x = 0 \tag{538}$$
$$E_y = b_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \alpha) \tag{539}$$
$$E_z = \pm b_2 \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \alpha) \tag{540}$$
$$\tag{541}$$

i.A. $b_1 \neq b_2$

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1 \tag{542}$$

Was eine Ellipsendarstellung ist. allgemein elliptische Polarisation

- $|b_1| = |b_2|$
  zirkulare Polarisation
  2 Umlaufrichtungen ($b_1 = \pm b_2$)
  $|\vec{E}| = $ konstant

- Sonderfall $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$
  lineare Polarisation
  (2 Freiheitsgrade)

Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen → elliptische Polarisation.
Basislösungen ✓
Fourier-Zerlegung ($\cos(\omega t)$, $e^{i\omega t}$ →vollständig)

- für periodische Lösungen: $f(t+T) = f(t)$
  Fourierreihe:
  - Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt} \tag{543}$$

$$\text{mit } f_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathrm{d}t f(t) e^{i\omega_0 t} \tag{544}$$

$$\text{für} f^*(t) = f(t) \Rightarrow f_n^* = f_{-n} \tag{545}$$

- allgemein: Fourier-Integrale
  (diskretes Spektrum von 'Grund'frequenzen + kontinuierliches Spektrum)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega f(\omega) e^{-i\omega t} \text{mit} f(\omega) \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t f(t) e^{+i\omega t} \tag{546}$$

$$\text{für reelle } f(t) \Rightarrow f^*(\omega) = f(-\omega) \tag{547}$$

Wiederholung Ebene, monochromatische Welle

- Eben → $\vec{k}$ ist Konstante
- monochromatisch → ω ist Konstante

$$\vec{A} = Re(\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}) \tag{548}$$

$$\Box\vec{A} = \left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = 0 \tag{549}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \qquad (k_\mu k^\mu = 0) \tag{550}$$

$$\vec{n}\vec{E} = 0, \qquad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}((transversal)) \tag{551}$$

$$\vec{S} = cW\vec{n} \tag{552}$$

$$\left(\text{QM}\vec{p} = \hbar\vec{k},\ E = \hbar\omega, \text{ wie Teichen mit } m = 0\right) \tag{553}$$

Basislösungen
Fourierentwicklung
Ebene Wellen=Basislösungen
Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t e^{i(\omega-\omega')t} = 2\pi\delta(\omega-\omega') \tag{554}$$

speziell: für periodische Lösungen gilt:
→ diskretes Spektrum

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt} \tag{555}$$

Periode T: $\omega_0 T = 2\pi$
für kontinuierliches Spektrum

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega_0 nt} \tag{556}$$

Intensität ?
Energieinhalt $\propto E^2$, B^2, d.h. $f^2(t)$
Zeitmittelung
für diskretes Spektrum, $\omega_0 T = 2\pi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt} \text{ (}f\text{ ist reel:}f_n^* = f_{-n} \tag{557}$$

$$f^2(t) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_n f_m e^{-i\omega_0(n+m)t} \tag{558}$$

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\mathrm{d}t \tag{559}$$

$$= \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_n f_m \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0(n+m)t}\mathrm{d}t}_{\text{=0 außer für n+m=0}} \tag{560}$$

$$= \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_n f_m \delta_{n,-m} \tag{561}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n f_{-n} \tag{562}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|^2 \text{ (}f_0 = f_0^* = 0\text{, da kein Wellenterm)} \tag{563}$$

analog für kontinuierliche Spektren

$$\overline{f^2(t)} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega |f(\omega)|^2 \tag{564}$$

$$\text{Bedingungen:} \tag{565}$$

$$f(\omega) \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{566}$$

$$f(\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} \text{ endlich} \tag{567}$$

Auch statische Felder lassen sich nach Fourierkomponenten zerlegen: Basistransformation $e^{i\vec{k}\vec{x}}$

$$\phi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{k}) \tag{568}$$

$$\phi(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3 x e^{i\vec{k}\vec{x}} \phi(\vec{x}) \tag{569}$$

3.9.3 Feld einer Punktladung

Poissongleichung: $\triangle\phi = -4\pi e \delta^{(3)}(\vec{x})$

$$\triangle\phi = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3 k e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{k})(i\vec{k})^2 \tag{570}$$

$$\Rightarrow \tilde{\triangle\phi}(\vec{k}) = -\vec{k}^2 \tilde{\phi}(\vec{k}) \tag{571}$$

$$\tilde{\triangle\phi}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3 x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \underbrace{(\triangle\phi(\vec{k})}_{-4\pi e\delta^{(3)}(\vec{x})} \tag{572}$$

$$= -4\pi e \tag{573}$$

Poissongleichung für Fouriertransformation von ϕ: $\tilde{\phi}$

$$\vec{k}^2\tilde{\phi}(\vec{k}) = 4\pi e \tag{574}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung:}\tilde{\phi} = \frac{4\pi e}{\vec{k}^2} \tag{575}$$

$$\phi(\vec{x}) \text{ inverse Fouriertransformation} \tag{576}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{4\pi e}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\vec{k}^2} \tag{577}$$

Fouriertransformierte des Elektrischen Feldes

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = -i\frac{4\pi e}{\vec{k}^2}\vec{k} \tag{578}$$

3.10 Einführung in die Quantenfeldtheorie

3.10.1 Eigenschwingungen des Feldes

Wenn man die Eigenschwingungen des harmonischen Oszillators aus der Quantenmechanik als Grundschwingungen des Feldes postuliert gelangt man zur Quantenfeldtheorie.
Motivation: Quantenmechanik, d.h. Quantenfeldtheorie:
Hamiltondichte $\rightarrow$ Verallgemeinerter Hamiltonoperator
Coulombeichung $\phi = 0$, $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ (Vakuum)
$\vec{A}$ in endlichen Volumina $\rightarrow$ Fourierreihen

$$V = L_xL_yL_z(\text{Quader}) \tag{579}$$

$$\rightarrow \text{Ansatz: } \vec{A} = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tag{580}$$

$$\text{mit } k_x = \frac{2\pi}{L_x}n_x,\ k_y = \frac{2\pi}{L_y}n_y,\ k_z = \frac{2\pi}{L_z}n_z,\ n_{x,y,z} \in \mathbb{N} \tag{581}$$

$\vec{A}$ ist reell: $\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{A}^*_{-\vec{k}}$
Coulombeichung: $\vec{k}\vec{A}_{\vec{k}} = 0$
Wellengleichung: $\ddot{\vec{A}}_{\vec{k}} + c^2\vec{k}^2\vec{A}_{\vec{k}} = 0$
Feldkonfiguration: $\vec{A}(\vec{x},t) \longrightarrow \vec{A}_{\vec{k}}(t)$
Berechne Energie der Felder

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \tag{582}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c}\sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tag{583}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i\sum_{\vec{k}} \vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tag{584}$$

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi c^2}\left(\int \mathrm{d}^3x \left(\sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}\right)\left(\sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}}\right) + \vec{B}^2\right) \tag{585}$$

$$= \frac{1}{8\pi c^2}\sum_{\vec{k}\vec{k}'} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}}\dot{\vec{A}}_{\vec{k}'}\int_V e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}} + \ldots \tag{586}$$

$$\text{enthält } \int_0^{L_x} \mathrm{d}x e^{i\frac{2\pi}{L_x}n_x x} = \begin{cases} L_x \text{ für } n_x = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{587}$$

$$\Rightarrow V\delta_{n_x+n'_x,0}\delta_{n_y+n'_y,0}\delta_{n_z+n'_z,0} \Rightarrow \epsilon = \frac{V}{8\pi c^2}\sum_{\vec{k}}\left(\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}\dot{\vec{A}}_{-\vec{k}} + \left(\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}}\right)\left(\vec{k}\times\vec{A}_{-\vec{k}}\right)\right) \tag{588}$$

$$= \frac{V}{8\pi c^2}\sum_{\vec{k}} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}|^2 + c^2\vec{k}^2|\vec{A}_{\vec{k}}|^2 \tag{589}$$

$$ \tag{590}$$

3.11 Ausstrahlung Elektromagnetischer Wellen

(Mannteufel Dozierender)
Feldgleichungen in Gegenwart von Strömen ($\vec{j} \neq 0$) und Ladungen ($\rho \neq 0$)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{591}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{592}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \text{ (Lorentzeichung)} \tag{593}$$

$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{\Box} A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \text{ (Wellengleichung)} \tag{594}$$

$$\tag{595}$$

Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns hier auf das skalare Potential.

$$\triangle\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = -4\pi\rho \tag{596}$$

$$\rho = \underline{\mathrm{d}e}(t')\delta(\vec{x}') \text{ Ladung in einem infinietisemalen Volumenelement} \tag{597}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = 0 \text{ für } R \neq 0 \tag{598}$$

$$R = \vec{x} \tag{599}$$

$$\chi = R\phi \;\Rightarrow \phi = \frac{\chi}{R} \tag{600}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \tag{601}$$

$$\underbrace{\chi = \chi_1(t - \frac{R}{c})}_{\text{retardiert}}\underbrace{\chi = \chi_2(t + \frac{R}{c})}_{\text{avanciert}} \tag{602}$$

Physikalisch relevant sind nur die retardierten Lösungen

$$\phi = \frac{\chi_1(t - \frac{R}{c})}{R} \tag{603}$$

Verlange für $R \to 0$ in das Coulombpotential übergehen muss

$$\Rightarrow \phi = \frac{\mathrm{d}e\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \tag{604}$$

dies gilt für eine infinitesimale Ladung. Für beliebige Ladungsverteilungen gilt die Superposition der de-Lösungen.

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{R}\rho\left(\vec{x}', t - \frac{R}{c}\right) + \phi_0 \tag{605}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{R}\vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{R}{c}\right) + \vec{A}_0 \tag{606}$$

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}' \tag{607}$$

die sind die Retardierten Potentiale. Hier sind ϕ_0 und $\vec{A}_0$ die Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Auch zeigt sich die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen als zentraler Effekt der speziellen Relativitätstheorie in den Argumenten $t - \frac{R}{c}$ als eine Signalverzögerung.

3.11.1 Spezialfall: Lienard-Wiechert-Potentiale

Quelle:Punktladung an den Koordinaten $\vec{x}' = \vec{x}_0(t')$
Aufpunkt: $\vec{x}$, Zeit t
Abstand zur Quelle $\vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{x}_0(t')$
Signallaufzeit: $t - t' = \frac{R(t')}{c}$ mit $R(t') = |\vec{R}(t')|$ Wähle Koordinatensystem in dem die Ladung zur Zeit t' ruht

$$\phi = \frac{e}{R(t')}, \qquad \vec{A} = 0 \text{ Coulombpotential} \tag{608}$$

$$= \frac{e}{c(t - t')} \tag{609}$$

Versuche nun diese Gleichung in eine Form zu bringen, bei der klar erkennbar ist, das sie Lorentzinvariant ist. In einem beliebigem Koordinatensystem: suche A^μ so, dass für $v = 0$ gilt $A^0 = \phi_{\text{Coulomb}}$

$$R^\mu = (c(t - t'), \vec{x} - \vec{x}') \text{ wofür gelten muss } R^\mu R_\mu = 0 \tag{610}$$

$$u^\mu \text{ Vierergeschwindigkeit} \tag{611}$$

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(c, \vec{v}), \ , \beta = \frac{\vec{v}}{c} \tag{612}$$

$$\Rightarrow A^\mu = e\frac{u^\mu}{R_\nu u^\nu} \text{ Lösung im allgemeinen Koordiantensystem} \tag{613}$$

$$R_\nu u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(R - \vec{R}\vec{\beta}) \tag{614}$$

Komponentenweise

$$\phi = \frac{e}{(R - \vec{R}\vec{\beta})}|_{t'=t-\frac{R}{c}} \tag{615}$$

$$\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{(R - \vec{R}\vec{\beta})}|_{t'=t-\frac{R}{c}} \tag{616}$$

Alternative Herleitung

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{R} \underbrace{\rho(\vec{x}', t - \frac{R}{c})}_{=e\delta(\vec{x}'-\vec{x}_0(t')\ ,\ t'=t-\frac{R}{c}} \quad , R = |\vec{x} - \vec{x}'| \tag{617}$$

Problem: Der x'-Integrand ist nicht direkt WS-Abhängig via t' Trick:

$$\phi = \int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)\frac{\rho(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{618}$$

$$\tag{619}$$

Nun lassen sich $\vec{x}'$ und t' unabhängig voneinander integrieren

$$\phi = \int \mathrm{d}t'\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0(t')|}{c}\right)\frac{e}{|\vec{x} - \vec{x}_0(t')|} \tag{620}$$

$$\tag{621}$$

Nun muss δ umgeschrieben werden

$$\delta(g(x)) = \sum_{x_0=\text{Nulstellen von } g(x)} \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|} \tag{622}$$

$$\hat{t} = t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0(t')|}{c} \tag{623}$$

$$\Rightarrow \delta(t - \hat{t}) \tag{624}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t'} = \ldots = -\frac{\vec{\beta}\vec{R}}{R} \tag{625}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{e}{R - \vec{R}\vec{\beta}} \tag{626}$$

Für die resultierenden Felder ergibt sich nun:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\phi \tag{627}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{628}$$

Problem: Man benötigt Ableitungen nach $\vec{x}$ und t, aber ϕ und $\vec{A}$ sind über t' definiert.
Abhängigkeiten:

$$\phi = \phi(\vec{R}, \vec{\beta}) \tag{629}$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{R}, \vec{\beta}) \tag{630}$$

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{x}, t') \tag{631}$$

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}(t') \tag{632}$$

$$t' = t'(\vec{x}, t) \tag{633}$$

Damit folgt:

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial R_j}\left(\frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial \beta_j}\frac{\partial \beta_j}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i} \tag{634}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial R_j} = -\frac{e}{(R - \vec{R}\vec{\beta})^2}(\frac{R_j}{R} - \beta_j) \tag{635}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial R_j} = -\frac{e}{(R - \vec{R}\vec{\beta})^2}(-R_j) \tag{636}$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \tag{637}$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial t'} = -c\beta_j \tag{638}$$

$$\tag{639}$$

Hilfsgrößen

$$\frac{\partial t'}{\partial t}, \frac{\partial t'}{\partial x_i}\text{: via } R^2 \tag{640}$$

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}_0(t'(x, t)) \tag{641}$$

$$|\vec{R}| = c * (t - t'(x, t)) \tag{642}$$

$$\tag{643}$$

Für $\frac{\partial t'}{\partial t}$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} = 2\vec{R}\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = 2\vec{R}\left(-c\vec{\beta}\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \tag{644}$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} = 2R\frac{\partial R}{\partial t} = 2\vec{R}c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) \tag{645}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t}\left(R - \vec{\beta}\vec{R}\right) = R \tag{646}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \vec{\beta}\vec{R}} \tag{647}$$

$$\tag{648}$$

Für $\frac{\partial t'}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial R^2}{\partial x_i} = 2\left(R_i - \vec{R}c\vec{\beta}\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right) \tag{649}$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial x_i} = 2R\left(-c\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right) \tag{650}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial x_j}\left(-\vec{\beta}\vec{R}c + c\right) = -R_i \tag{651}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial x_i} = -\frac{R_i}{c(R - \vec{\beta}\vec{R})} \tag{652}$$

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial t'} = \dot{\beta}_j \tag{653}$$

$$\tag{654}$$

Als Endergebnis erhält man nun:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\frac{e}{(R-\vec{\beta}\vec{R})^2}\left[\left(\frac{R_j}{R}-\beta_j\right)\left(\delta_{ij}-c\beta_j\frac{(-R_i)}{(R-\vec{\beta}\vec{R})c}\right)+(R_j)\dot{\beta}_j\left(\frac{-R_i}{(R-\vec{\beta}\vec{R})c}\right)\right] \tag{655}$$

$$= -\frac{e}{(R-\vec{\beta}\vec{R})^3}\left(R_i(1-\beta^2+\vec{R}\dot{\vec{\beta}}c)-\beta_i(R-\vec{\beta}\vec{R})\right) \tag{656}$$

$$\dots \tag{657}$$

$$\vec{E} = e(1-\beta^2)\underbrace{\frac{\vec{R}-\vec{\beta}R}{(R-\vec{\beta}\vec{R})^3}}_{\text{Geschwindigkeitsabhängig}} + e\underbrace{\frac{\vec{R}[(R-\vec{\beta}\vec{R})\dot{\vec{\beta}}]}{c(R-\vec{\beta}\vec{R})^3}}_{\text{Beschleunigungsabhängig}} \tag{658}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{R}\vec{R}\times\vec{E}, \vec{B}\perp\vec{E} \tag{659}$$

Anmerkung:
erster Term (gleichförmig bewegte Punktladung) erhält man auch über Coulombfeld im Ruhesystem und Lorentztransformationen.

3.11.2 Wiederholung Ausstrahlung von elektromagnetischen Wellen

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu \tag{660}$$

Zeit und Raumkoordinaten $t \pm \frac{R}{c}$
für Coulombfeld $\phi \propto \frac{\chi(t-\frac{R}{c})}{R}$
allgemeine Lösung: retardierte Potentiale:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{R}\phi(\vec{x}', t-\frac{R}{c}) + \phi_0 \tag{661}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{R}\vec{j}(\vec{x}', t-\frac{R}{c}) + \vec{A}_0 \tag{662}$$

$$\text{mit Signalgeschwindigeit } t = \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c} \text{ und } R = |\vec{x}-\vec{x}'| \tag{663}$$

Spezialfall der bewegten Punktladungen:
Lienard-Wiechert:

$$\vec{R} = \vec{x}-\vec{x}' \text{ , } R = |\vec{R}| \tag{664}$$

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{e}{R-\frac{\vec{v}\vec{R}}{c}}|_{t'=t-\frac{R}{c}} \tag{665}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{e\vec{v}}{c(R-\frac{\vec{v}\vec{R}}{c})}|_{t'=t-\frac{R}{c}} \tag{666}$$

3.11.3 Strahlungsfeld in großem Abstand

Ladungen und Ströme in begrenztem Raumgebiet
Ladungselement $\mathrm{d}e = \rho \mathrm{d}^3x'$
am Ort $\vec{x}'$
Abstand $R = |\vec{x}-\vec{x}'|$ sei groß ($R >> |\vec{x}'|$, $|\vec{x}'| \lessapprox a$) Entwicklung nach Potenzen von $\frac{|\vec{x}'|}{R}$

$$R = |\vec{R}| = |\vec{x}-\vec{x}'| \approx |\vec{x}| - \frac{\vec{x}\vec{x}'}{|\vec{x}|} + O({x_i'}^2) \tag{667}$$

$$R = r - \vec{v}\vec{x}' \text{ , } \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \tag{668}$$

Ersetze $R \to r$ im Nenner
n in Zeitargument von $\rho,\vec{j}$ ist nicht „kontrolliert“

$$\Rightarrow \phi(\vec{x},t) = \frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3x'\rho(\vec{x}',t-\frac{r-\vec{n}\vec{x}'}{c}) \tag{669}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{rc}\int \mathrm{d}^3x'\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) \tag{670}$$

Frage: Zeitabhängigkeit von ρ

$$\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) = \rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c}) + \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t'}|_{t'=t-\frac{r}{c}}}_{\approx\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\propto\frac{\rho}{T}}\frac{\vec{n}\vec{x}'}{c} + \dots \tag{671}$$

Definition T: Zeit in der sich die Ladungsverteilung merklich ändert (charakteristische Zeitskala)

$$\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c}) \approx \rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})\left(1+\underbrace{\frac{\vec{n}\vec{x}'}{cT}}_{\underset{<}{\approx}\frac{a}{cT}}+\dots\right) \tag{672}$$

Zusätzliche Forderung:

$$a \ll cT \tag{673}$$

$$\frac{a}{T} \ll c \tag{674}$$

Fourierzerlegung $\to$ spektrale Verteilung des abgestrahlten Feldes
Fouriertransformation von $\vec{j}$: $\to \vec{j}(\vec{x},\omega) = \int \mathrm{d}te^{i\omega t}\vec{j}(\vec{x},t)$

$$\vec{j}(\vec{x},t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) = \int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}e^{-i\omega(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{x}'}{c})}\vec{j}(\vec{x}',\omega) \tag{675}$$

$$\text{daraus}\vec{A}(\vec{x},\omega) = \int \mathrm{d}te^{i\omega t}\vec{A}(\vec{x},t) \tag{676}$$

$$= \int \mathrm{d}te^{i\omega t}\frac{1}{cr}\int\mathrm{d}^3x'\int\frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi}e^{-i\omega(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\vec{x}'}{c})}\vec{j}(\vec{x}',\omega') \tag{677}$$

$$\text{mit} \int \mathrm{d}te^{it(\omega-\omega')} = 2\pi\delta(\omega-\omega') \tag{678}$$

$$\vec{A}(\vec{x},\omega) = \frac{1}{cr}\int\mathrm{d}^3x'e^{i\omega(\frac{r}{c}-\frac{\vec{n}\vec{x}'}{c})}\vec{j}(\vec{x}',\omega') \tag{679}$$

$$= \frac{e^{ikr}}{cr}\underbrace{\int\mathrm{d}^3x'e^{-i\vec{k}\vec{x}'}}_{\text{Foriertransformation bezüglich }\vec{x}'} \tag{680}$$

(681)

Diese Gleichung stellt eine Kugelwelle dar.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = ik\frac{e^{ikr}}{r} - \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r^2}}_{\text{vernachlässigbar}} \tag{682}$$

$$= ik\frac{e^{ikr}}{r}\left(1+i\underbrace{\frac{1}{kr}}_{\ll 1}\right) \tag{683}$$

Der Term mit $\frac{1}{kr}$ wird vernachlässigt weil wir annehmen, dass $kr >> 1$ beziehungsweise $\frac{\omega}{c}r >> 1$, was wir als zusätzliche Näherung annehmen.
Wellengleichung: $e^{i(kx-\omega t)}$ Zu der Zeitskala T gehört zwangsläufig eine Längenskala ($cT \approx \lambda$), die eine typische

Wellenlänge festlegt, die zu dem von uns betrachtetem System gehört. Mit $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ergibt sich die Annahme $\frac{r}{\lambda} >> 1$ was aussagt, dass die typische Wellenlänge klein ist bezüglich des Abstandes des Beobachters von dem Ladungssystem ($\lambda \ll r$), diesen Bereich nennt man Wellenzone.
In großem Abstand und für $\lambda \ll r$ (d.h. in der Wellenzone) sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ näherungsweise ebene Wellen.

- charakteristische Eigenschaft:

$$\vec{E}, \vec{B} \propto \frac{1}{r} \tag{684}$$

Beispiel Strahlungsfeld eine bewegten Punktladung

$$\vec{A} = \frac{e}{cr} * \frac{\vec{v}(t')}{1 - \frac{\vec{n}\vec{v}(t')}{c}} \tag{685}$$

$$\text{mit } R = r - \vec{n}\vec{x}'t' = \frac{\vec{x}_0(t')\vec{n}}{c} = t - \frac{r}{c} \tag{686}$$

$$\text{Punktladung: } \vec{j} = e\vec{v}(t')\delta(\vec{x}' - \vec{x}_0(t')) \tag{687}$$

$$\vec{j}(\omega) = \int \mathrm{d}t' \vec{j} e^{i\omega t'} \tag{688}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\omega) = e * \frac{e^{ikr}}{cr} \int \mathrm{d}t' \vec{v}(t') e^{i\left(\omega t' - \vec{k}\vec{x}_0(t')\right)}, \ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_0}{\mathrm{d}t'} \tag{689}$$

$$= e * \frac{e^{ikr}}{cr} \int_{\text{Bahnkurve}} \mathrm{d}\vec{x}_0 e^{i\left(\omega t'(\vec{x}_0) - \vec{k}\vec{x}_0\right)} \tag{690}$$

3.11.4 Intensität des Strahlungsfeldes

Die Intensität ist die Energie pro Zeit pro Fläche, $r^2 \mathrm{d}\Omega$
Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} B^2 \vec{n} \tag{691}$$

$$\mathrm{d}I = \frac{c}{4\pi} \overline{B^2} r^2 \mathrm{d}\Omega \tag{692}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \text{unabhängig von } r \tag{693}$$

$$\Rightarrow \text{spektrale Intensitätsvertielung} \tag{694}$$

$$\mathrm{d}I(\vec{n}, \omega) = \frac{c}{2\pi} |\vec{B}(\omega)|^2 r^2 \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{695}$$

3.11.5 Wiederholung Strahlung

Wellengleichung
Retardierung

$$\phi(\vec{x}, t) \longleftarrow \rho(\vec{x}', t - \frac{R}{c}) \qquad \text{mit } R = |\vec{x} - \vec{x}'| \tag{696}$$

Bewegte Punktladung→Lienard-Wiechert für Strahlungsfeld in großem Abstand.
Charakterisierung der Quelle

- typische Zeitskala T und typische Wellenlänge $\lambda = cT$
- typische Längenskala a ($\vec{x}'\vec{n} \lesssim a$)

retardierte Potentiale

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \underbrace{\frac{1}{cr} \int \mathrm{d}^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c})}_{\text{großer Abstand } r \gg a} \tag{697}$$

Fourierzerlegung $\vec{A}(\vec{x}', \omega) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int \mathrm{d}^3x' e^{i\vec{k}\vec{x}} \vec{j}(\vec{x}', \omega)$
Systematische Entwicklung von $e^{i\vec{k}\vec{x}}$

Forderung:

$$\vec{k}\vec{x}' \ll 1 \tag{698}$$

$$\frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{x}' \lesssim \frac{\omega}{c}a = \frac{a}{\lambda} \ll 1 \tag{699}$$

$$\tag{700}$$

Dies bedeutet, dass die Wellenlänge gegen a groß ist.
typische Zeit:

$$T \simeq \frac{a}{V}\ , \qquad \lambda \simeq c\frac{a}{V} \tag{701}$$

$$\frac{a}{\lambda} \simeq \frac{v}{c} \ll 1 \tag{702}$$

Daraus folgern wir, dass für die Geschwindigkeit gelten muss $v \ll c$, das System darf also nicht relativistisch sein.
Im folgenden nehmen wir an $r \gg \lambda \gg a$, was als Wellenzone oder Fernzone bezeichnet wird. Außerdem gibt es noch $\lambda \gg r \gg a$ was zur Statik führt, da auch die Retardierung vernachlässigbar wird. Als letztes gibt es noch $\lambda \gg a \simeq r$ was die komplexer zu beschreibende Nahzone charakterisiert.

erster Term der Näherung

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{cr}\int \mathrm{d}^3x'\vec{j}(\vec{x}',t-\frac{r}{c}) \tag{703}$$

$$r = |\vec{x}| \text{ unabhängig von } \vec{x}' \tag{704}$$

z.B. bewegte Punktladungen $\vec{j} = \sum e\vec{v}\delta(\vec{x'} - \vec{x}_0(t'))$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{cr}\sum e\vec{v}(t') \tag{705}$$

$$= \frac{1}{cr}\frac{\partial}{\partial t'}\underbrace{\sum e\vec{x}(t')}_{\vec{D}\text{ Dipolmoment}} \tag{706}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{rc}\dot{\vec{D}} \tag{707}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c^2r}\ddot{\vec{D}} \times \vec{n} \tag{708}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2r}\left(\ddot{\vec{D}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n} \tag{709}$$

$$\tag{710}$$

Diese Gleichungen beschreiben die sogenannte Dipolstrahlung.

Bemerkungen

- $\vec{D} \propto \vec{x}' \Rightarrow \vec{E},\vec{B} \propto \ddot{\vec{x}}'$,
  nur beschleunigte Ladungen strahlen. Gleichförmig bewegte Ladungen strahlen nicht. Dies lässt sich ebenfalls einfach aus dem Relativitätsprinzip herleiten.
- für ein System von Ladungen mit $\frac{e}{m}$ konstant gilt:
  $\vec{D} = \sum e_i\vec{x}_i' = \frac{e_j}{m_j}\sum m_i\vec{x}_i' = \frac{e}{m}\vec{X}M$
  falls ein solches System nach außen kräftefrei ist kann es ebenfalls nicht strahlen, auch wenn die Teilchen sich gegenseitig beschleunigen.

Intensität

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{4\pi c^3}\Big(\underbrace{\ddot{\vec{D}} \times \vec{n}}_{\angle(\ddot{\vec{D}},\vec{n})=\theta}\Big)^2\mathrm{d}\Omega \tag{711}$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3}|\ddot{\vec{D}}|^2\underbrace{\sin^2(\theta)}_{=0 \text{ für } \theta=0}\mathrm{d}\Omega \tag{712}$$

$$\tag{713}$$

Also gibt es keine Abstrahlung in Richtung $\ddot{\vec{D}}$ und die Abstrahlungsleistung ist maximal in Richtung $\perp \ddot{\vec{D}}$ Für die Gesamtintensität ergibt sich:

$$I = \int \mathrm{d}I = \frac{1}{4\pi c^3} \underbrace{|\ddot{\vec{D}}|^2}_{\substack{\text{falls } \ddot{\vec{D}} \\ \text{unabhängig von } \Theta}} \underbrace{\int \mathrm{d}\Omega \sin(\theta)}_{=8\pi/3} \tag{714}$$

$$= \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{D}}|^2 \tag{715}$$

Spektrum

$$\mathrm{d}I_\omega = \frac{4}{3c^3} |\ddot{\vec{D}}_\omega|^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{716}$$

Hertzscher Dipol

$$\vec{D}(t) = \vec{D}_0 e^{i\omega t} \tag{717}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{D}}(t) = -\omega^2 \vec{D}_0 e^{i\omega t} \tag{718}$$

$$\mathrm{d}I_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\ddot{\vec{D}}_0|^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{719}$$

Eigenschaften des Hertzschen Dipols:

- $\mathrm{d}I \propto \omega^4$
- $\mathrm{d}I \propto \sin^2\theta$

Höhere Terme der Entwicklung

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{cr} \int \mathrm{d}^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) \tag{720}$$

$$= \frac{1}{cr} \int \mathrm{d}^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t'} \int \mathrm{d}^3x' \vec{n}\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}', \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{=t'}) \tag{721}$$

für bewegte Punktladungen $\vec{j} = \sum e\vec{v}\delta(\vec{x}' - \vec{x}_0(t'))$ ergibt sich eine weiterer Beitrag:

$$\frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \sum e\vec{v}(\vec{n} \underbrace{\vec{x}'}_{\text{Bahnkurven } \vec{x}_0(t')}) \tag{722}$$

$$= \frac{1}{c^2 r} \sum e \left[\frac{1}{2}\vec{v}(\vec{n}\vec{x}') + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\vec{x}'(\vec{n}\vec{x}') - \frac{1}{2}\vec{x}'(\vec{n}\vec{v}) \right) \right] \tag{723}$$

$$= \frac{1}{c^2 r} \sum e \Big[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} (\vec{x}'(\vec{n}\vec{x}')) + \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{x}' \times \vec{v})}_{\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e\vec{x}' \times \vec{v}} \times \vec{n} \Big] \tag{724}$$

Damit folgt:

$$\vec{A} = \frac{1}{cr} \dot{\vec{D}} + \frac{1}{cr} \dot{\vec{m}} \times \vec{n} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial^2} \sum e\vec{x}'(\vec{n}\vec{x}') + \dots \tag{725}$$

$$\Rightarrow ||\vec{A} = \underset{\text{el. Dipol}}{\frac{1}{cr} \dot{\vec{D}}} + \underset{\text{magn. Dipol}}{\frac{1}{cr} \dot{\vec{m}} \times \vec{n}} + \underset{\text{Quadrupol}}{\frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}}} + \dots \tag{726}$$

Auffallend ist, dass alle Terme nur eine explizite Abhängigkeit von $\frac{1}{r}$ enthalten. Es stellt sich also die Frage ob diese Entwicklung tatsächlich immer kleiner werdende Korrekturen anbringt.

$$\dot{\vec{D}} \propto \sum e\vec{x}' \propto a \tag{727}$$

$$\dot{\vec{m}} \propto \sum e\vec{x}' \times \vec{v} \frac{1}{c} \propto a \frac{v}{c} \ll a \tag{728}$$

$$\ddot{\vec{Q}} \propto \frac{\partial}{\partial t} \sum e\vec{x}'(\vec{n}\vec{x}') \propto a \frac{v}{x} \ll a \tag{729}$$

Somit ist die Entwicklung gerechtfertigt, da eine implizite Unterdrückung in den Größen $\dot{\vec{D}}, \dot{\vec{m}}, \ddot{\vec{Q}}$ enthalten ist.

Beispiel
Streuung an einer freien Ladung (z.b. Elektron, Ladung e, Masse m) einlaufende Ebene monochromatische Welle.
Frage effektiver Streuquerschnitt:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\overline{S}} \text{ zeitlich gemittelt} \tag{730}$$

mit dI =abgestrahlte Energie pro Raumwinkel in gegebener Richtung und dσ =abgestrahlte Energie pro Raumwinkel in gegebener Richtung pro einfallende Energiefluss.
einlaufende Strahlung

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{r}\vec{k} - \omega t - \alpha) \;\Rightarrow\; \vec{B} \dots \tag{731}$$

Damit folgt für die Lorentzkraft:

$$\left|\frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right| \ll e\vec{E} \tag{732}$$

Das bedeutet für schwache Felder gilt:
⇒ Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E} = e\vec{E}_0 \cos(\omega t - \alpha) \tag{733}$$

$$\ddot{\vec{D}} = \frac{e^2}{m}\vec{E} \tag{734}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}I = \frac{1}{4\pi c^3}\left|\ddot{\vec{D}} \times \vec{n}'\right|^2 \Omega \tag{735}$$

einlaufende Welle normiert auf $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}|\vec{E}|^2\vec{n}$
⇒ Streuquerschnitt

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2(\theta)\mathrm{d}\Omega \tag{736}$$

mit dem Streuwinkel $\theta = \angle(\vec{E}, \vec{n}')$ folgt der
totaler Streuquerschnitt

$$\sigma = \int \mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin^2(\theta) \tag{737}$$

Thomson-Streuquerschnitt

$$\sigma_{\mathrm{Th}} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right) \tag{738}$$

$$\tag{739}$$

Das interessante an dieser Beobachtung ist, dass dieses Ergebnis sich für die entsprechenden Annahmen auch aus der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie herleiten lässt.
klassischer Elektronenradius:

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 3 * 10^{-15}\mathrm{m} \tag{740}$$

Voraussetzung: lineare Polarisation $\vec{E}$ fest, $\vec{E} = \vec{e}E$ mit Einheitsvektor $\vec{e}$
Praktische Bedeutung: unpolarisiert
$\longrightarrow$ $\vec{e}$ beliebig/zufällig orientiert mit Nebenbedingung $\vec{e} \perp \vec{n}$
$\longrightarrow$ Mittelung über $\vec{e}$ von $\left(|\vec{e} \times \vec{n}'|^2\right)$

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \tag{741}$$

$$= 1 - (\vec{e}\vec{n}') \tag{742}$$

$$= 1 - e_i {n_i}' e_j {n_j}' \tag{743}$$

$$= 1 - e_i e_j {n_i}' {n_j}' \tag{744}$$

mit der Mittelung über die Polarisation ergibt sich

$$\overline{\sin^2(\theta)} = 1 - {n_i}'{n_j}'\overline{e_i e_j} \tag{745}$$

1. $e_i e_j$ ist ein symmetrischer Tensor
   $\Rightarrow \overline{e_i e_j}$

2. $\overline{e_i e_j}$ hängt nur von n_i ab

$$\overline{e_i e_j} = a\delta_{ij} + bn_i n_j \tag{746}$$

3. $\text{Sp}e_i e_j = \vec{e}^2 = 1 \Rightarrow \overline{\text{Sp}e_i e_j} = 3a + b = 1$

4. $\vec{e} \perp \vec{n}$
   $\Rightarrow \overline{n_i e_i e_j} = 0 = n_i(a\delta_{ij} + bn_i n_j) = an_j + bn_j$
   $\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b = \frac{1}{2}$

$$\overline{e_i e_j} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - n_i n_j\right) \tag{747}$$

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - {n_i}'{n_j}'\frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - n_i n_j\right) \tag{748}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{(\vec{n}\vec{n}')}_{\cos\theta}{}^2 \tag{749}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\sigma \sim 1 + \cos^2\theta \tag{750}$$

Was eine der Kugelflächenfunktionen ist.

Beispiel einer Ladung auf einer Kreisbahn
Teilchenbeschleuniger
Synchrotronstrahlung
Ladung e, Masse m, Magnetfeld B
Damit lässt sich der Bahnradius errechnen: $r = \frac{mcv}{eB}\gamma$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$
Kreisfrequenz $\omega_B = \frac{v}{r} = \frac{eB}{mc}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{E}{mc^2}$
Nach langer und gewissenhafter Rechnung lässt sich erhalten:
Gesamtintensität: $I = \frac{2}{3}\frac{e^4B^2}{(mc^2)^2}\frac{1}{c}\left(v\gamma\right)^2$
Winkelverteilung: $\frac{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega\ (\|)}{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega\ (\perp)} = \frac{4+3\beta^2}{8(1-\beta^2)^{5/2}}$
Damit gilt für $\beta \to 0$ gilt $\frac{\mathrm{d}I\ (\|)}{\mathrm{d}I\ (\perp)} = \frac{1}{2}$
und für $\beta \to 1$ gilt $\frac{\mathrm{d}I\ (\|)}{\mathrm{d}I\ (\perp)}\infty$ und damit ist die Gesamtintensität in der Beschleunigerebene

$$\vec{A}(\omega) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int_{\text{Bahnkurve}} \mathrm{d}\vec{x}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x}_0)} \tag{751}$$

$$\to \text{Integrale vom Typ} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi * \sin(\phi) e^{ik(\phi - \beta\cos(\theta)\sin(\theta))} \tag{752}$$

$$\text{(Besselfunktionen)} \tag{753}$$

4 Feldtheorie der Gravitation - Allgemeine Relativitätstheorie

Lehrbücher

- Theoretische Physik 5 Scheck (3. Ausgabe)
- Landau Lipschitz T.II

4.1 Phänomenologie Newtonsche Gravitation

$$F_G = -G\frac{m_1 * m_2}{r^2} \tag{754}$$

$$F_C = \pm\kappa\frac{e_1 * e_2}{r^2} \quad \left(\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \tag{755}$$

$$G = \text{Graavitationskonstante} \qquad = 6,67 * 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2} \tag{756}$$

vergleiche beide Kräfte für ein Proton: $\frac{F_G}{F_C} \approx 10^{-36}$
Potential $\phi_G = \frac{GM}{r}$
für Quelle der Masse M
Die Bewegungsgleichungen würde man dann aus den entsprechenden Lagrangefunktionen gewinnen.

$$L = T - V \tag{757}$$

$$= \frac{1}{2} m_T v^2 - m_S \phi_G \tag{758}$$

Im Vergleich zur elektrostatischen Wechselwirkung wirkt dies naiv. Aus der Elektrostatik ergibt sich.

$$L_{EM} = \frac{1}{2} m_T v^2 - e\phi_{EM} \tag{759}$$

Wobei m_S und e hier als Kopplungskonstanten fungieren. Man muss beachten, dass auch der Geschwindigkeitsterm ein m_T enthält, deren Gleichheit mit dem m_S der Kopplung mit dem Feld nicht trivial ist. Das m_T des Geschwindigkeitsterms besagt wie stark eine wirkende Kraft in der Lage ist ein Teilchen zu beschleunigen, es trifft eine Aussage über die Trägheit der Masse. Das m_S der Kopplung wiederum besagt wie stark das Teilchen in der Lage ist das Feld zu sehen. Damit nennen wir m_T die träge Masse und m_S die schwere Masse.
Aus experimentellen Beobachtungen wurde gefolgert $m_T = m_S$. Eine wichtige Folgerung daraus ergibt sich, wenn man die aus der Lagrangegleichung folgende Bewegungsgleichung aufschreibt.

$$m_T \dot{\vec{v}} = -m_S \vec{\nabla} \phi_G \Rightarrow \dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla} \phi_G \tag{760}$$

Dies ist eine nicht triviale Folgerung, da in dieser Bewegungsgleichung die Masse des bewegten Teilchens keine Rolle spielt. Dies wird als Äquivalenzprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnet. Diese erste Formulierung stellt das schwache Äquivalenzprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie dar:

nun ein Beispiel:
Betrachte ein System von Massen in einem homogenem Gravitationsfeld. Wenn man massen in ein homogenes Gravitationsfeld setzt so werden diese durch das anliegende Gravitationsfeld und Wechselwirkungskräfte aufeinander $\vec{F}_{ij}$

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = -m_i \vec{\nabla} \phi + \sum_{j=1, i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij} \tag{761}$$

$$m_i (\dot{\vec{v}}_i + \vec{\nabla} \phi) = \sum_{j=1, i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij} \tag{762}$$

$$\tag{763}$$

Führt man nun eine Koordinatentransformation durch, so dass

$$\dot{\vec{v}}' = \dot{\vec{v}}_i + \vec{\nabla} \phi \tag{764}$$

$$\vec{x}_i{}' = \vec{x}_i + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi t^2 \tag{765}$$

$$\Rightarrow m_i \vec{v}_i{}' = \sum_{j=1, i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij} \tag{766}$$

$$\tag{767}$$

d.h. Bewegungsgleichungen enthalten das Gravitationsfeld nicht. Das neue Koordinatensystem ist jedoch kein Inertialsystem, das durch eine Lorentz- oder Galileo-Transformation erreichbar wäre, da dieses Koordinatensystem beschleunigt ist.
Daraus folgt das sogenannte starke Äquivalenzprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie.
Ein Gravitationsfeld ist äquivalent zu einer Transformation in ein Nicht- Inertialsystem.
"lokal": in einem räumlich eingeschränkten Gebiet, das klein genug sein sollte, so dass das Gravitationsfeld homogen erscheint (Frage der Genauigkeit). Solche Gravitationsfelder, die durch eine Transformation überall beseitigt werden können bezeichnet man als scheinbare Gravitationsfelder. Während sogenannte wahre Gravitationsfelder sich nur lokal durch eine Transformation beseitigen lassen.
Die Allgemeine Relativitätstheorie ist damit eine Theorie der allgemeinen Koordinatentransformationen und

damit eine Ausformulierung der Geometrie von Raum und Zeit.
Ein Beispiel dafür wäre ein rotierendes Koordinatensystem:

$$x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \tag{768}$$
$$y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \tag{769}$$
$$z = z' \tag{770}$$

Innerhalb der Speziellen Relativitätstheorie müsste man den 4-Abstand aufschreiben.

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{771}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 + 2\omega y'\mathrm{d}x'\mathrm{d}t - 2\omega x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}t \tag{772}$$

Im Allgemeinen gilt damit:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{773}$$

Was wir zu beginn ja bereits gesamt haben, allerdings kann bei allgemeinen Transformationen der Metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ eine vollbesetzte Matrix sein deren Komponenten Orts oder Zeitabhängig sein können. Es gilt also:

- $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ also orts- und zeitabhängig
- $g_{\mu\nu}$ ist nicht diagonal
- $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

→ 10 unabhängige Funktionen, die zusammen $g_{\mu\nu}$ definieren.
→ Gravitationsfeld wird also durch den Metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ beschrieben.
→ Gravitation ist Geometrie der Raum-Zeit für Inertialsystem
Normalkoordinaten ξ^μ mit $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\xi^\mu\mathrm{d}\xi^\nu$ mit der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$
Äquivalenzprinzip (präzise Formulierung)
In jedem Punkt der Raum-Zeit x_0 kann man ein Bezugssystem konstruieren, so dass

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}, \quad \left.\frac{\partial g_{\mu\nu}(x_0)}{\partial x^\alpha}\right|_{x_0} = 0 \tag{774}$$

mit $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$
Das mathematische Konstrukt das eine Herleitung dieser Aussage ermöglicht ist die Differentialgeometrie.
Eine Metrik (eine Raum-Zeit) heißt flach, wenn man eine Koordinatentransformation finden kann, so dass $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ überall gilt.
Eine Metrik (eine Raum-Zeit) heißt gekrümmt, falls keine Koordinatentransformation existiert, so dass $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ überall gilt.
Betrachte nun ein rotierendes Bezugssystem innerhalb der SRT.
Lorentz-Kontraktion. Umfang U
Radius R

$$\frac{U}{R} \neq 2\pi \tag{775}$$

→ nicht-euklidische Geometrie
Damit ist das Ziel der allgemeinen Relativitätstheorie allgemeine Koordinatentransformationen zu finden, die in der Lage sind einen allgemeinen Satz von Gleichungen zu liefern, die in jedem der Koordinatensysteme Gültigkeit besitzen, also formgleich in allen physikalische relevanten Koordinatensystemen sind.
Dies bezeichnete eine Kovariante Formulierung der Physikalischen Gesetze.

4.2 Allgemeine Koordinatentransformationen

- Normalkoordinaten ξ^μ mit $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\xi^\mu\mathrm{d}\xi^\nu$
- allgemeine Koordinaten $\xi^\mu \to x^\mu = x^\mu(\eta)$ die beliebige in allen Komponenten differenzierbare und umkehrbare Funktionen darstellen sollen.

Differenzierbar: $\mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu}\mathrm{d}\xi^\nu$
Analog: SRT Lorentz-Transformation linear

$$\mathrm{d}x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\mathrm{d}\xi^\nu \tag{776}$$

4.2.1 Wiederholung

lokale Normalkoordinaten: ξ^μ und $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$
Transformation zu allgemeinen Koordinaten:

$$x^\mu(\xi) \quad (\mathrm{bzw.}\eta^\mu(x)) \tag{777}$$

$$\mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu}\mathrm{d}\xi^\nu \tag{778}$$

Wobei $\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu}$ Funktionen von ξ sind und damit die Transformationsmatrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ definieren.
Transformation zischen allgemeinen Koordinaten

$$x^\mu \to x^{\mu\prime}(x) \quad (\text{umkehrbar}) \tag{779}$$

$$\mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu\prime}}\mathrm{d}x^{\nu\prime} \tag{780}$$

Definition kontravarianter Vektor A^μ:

$$A \to A', \quad A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu\prime}}A^{\nu\prime} \tag{781}$$

über den Gradienten: Definition kovarianter Vektor A_μ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu\prime}}\frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\mu} \tag{782}$$

$$A \to A', \quad A_\mu{}' = \frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\mu}A_\nu \tag{783}$$

$\Rightarrow$ Tensoren und Skalarprodukte
Metrik

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\xi^\mu\mathrm{d}\xi^\nu & (784)\\ &= \left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma}\right)\mathrm{d}x^\rho\mathrm{d}x^\sigma & (785)\\ &= g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu & (786)\\ g_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} & (787) \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen für Kräftefreie Teilchen im Inertialsystem:

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\mu}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{788}$$

Zu allgemeinen Koordinaten transformiert ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\right) & (789)\\ &= \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}^2x^\nu}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial - x^\rho\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s} & (790)\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2} + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\mu\partial x^\rho}}_{\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s} & (791)\\ \Gamma^\lambda_{\nu\rho} &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2\xi^\mu}{\partial x^\mu\partial x^\rho} \quad \begin{array}{l}\text{Christoffel-Symbole}\leftarrow \text{ aus } g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}\\ \text{affine connection}\end{array} & (792) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Bewegungsgleichung in allgemeinen Koordinaten

$$\frac{\mathrm{d}u^\lambda}{\mathrm{d}s} = -\Gamma^\lambda_{\nu\rho}u^\nu u^\rho \tag{793}$$

$$\tag{794}$$

Damit lässt sich Γ physikalisch als Gravitationsfeld interpretieren oder als Ausformung der Gravitationskraft benennen. Damit würde $g_{\mu\nu}$ das Gravitationspotential beschreiben.

$\Gamma = 0$ in jedem Inertialsystem
${\Gamma^\lambda}_{\nu\rho}$ ist kein Tensor
Bewegungsgleichung $\partial u^\mu = 0 \longrightarrow$ kovariante Ableitung: $\mathrm{D}_\nu u_\rho$
Vektor U^μ in Normalkoordinaten $\xrightarrow{\text{Ableitung}} {Q^\mu}_\nu = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} U^\mu$
$\downarrow$ Transformation zu allgemeinen Koordinaten$\downarrow$ zu allgemeinen Koordinaten
Vektor $V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} U^\sigma \underset{\text{Ableitung}}{\xrightarrow{?}} {T^\mu}_\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\lambda} {Q^\sigma}_\tau$
nachrechnen:

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial U^\sigma}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} \right) U^\sigma \tag{795}$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial U^\sigma}{\partial \xi^\tau} + \dots \tag{796}$$

$$= {T^\mu}_\lambda - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\nu \tag{797}$$

gewöhnliche Ableitung $\rightarrow$ kovariante Ableitung

$$\frac{\mathrm{D} V^\mu}{\mathrm{D} x^\lambda} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\nu \tag{798}$$

Diese ist wieder ein Tensor (Prinzip der Kovarianz)
kräftefreies Teilchen:
Ableitung entlang einer Kurve $x^\mu(\tau)$
Vektor $A^\mu(\tau)$
Transformationsverhalten $A^{\mu\prime}(\tau) = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu}(\tau) A^\nu(\tau)$ (für die Transformation $x \rightarrow x'$)
Ableitung

$$\frac{\mathrm{d} A^{\mu\prime}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu} \frac{\mathrm{d} A^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial^2 x^{\mu\prime}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} A^\nu \tag{799}$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{D} A^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d} A^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{\mathrm{d} x^\mu}{\mathrm{d}\tau} A^\lambda \tag{800}$$

Damit ergibt sich als Form der Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{D} A^\mu}{\mathrm{D}\tau} = 0 \tag{801}$$

Die in jedem Koordinatensystem gültig ist.

Beispiel für einen zweidimensionalen gekrümmten Raum Wir nehmen als Beispiel eine Kugeloberfläche: Wenn man annimmt, dass der Vektor bei einer kräftefreien Bewegung seine Richtung nicht ändert. Dann kann man abhängig vom Weg mit verschiedenen Richtungen der Vektoren am Nordpol enden. Die ist Paralleltransport entlang von Kurven auf der Kugeloberfläche.

Paralleltransport Transport von Vektoren entlang eines geschlossenen Weges führt zur Änderung des Vektors bei Bewegung durch einen gekrümmten Raum

$$\mathrm{d} A^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu \mathrm{d} x^\lambda \tag{802}$$

$$\Delta A^\mu = \oint \mathrm{d} A^\mu \underset{Krümmung}{\neq} 0 \tag{803}$$

$\rightarrow \Delta A^\mu$ ist proportional zur Fläche $\sim \mathrm{d} f^{\rho\sigma}$.

$$\mathrm{d} A^\mu = -\frac{1}{2} {R^\mu}_{\rho\nu\sigma} A^\nu f^{\rho\sigma} \tag{804}$$

mit dem Krümmungstensor ${R^\mu}_{\rho\nu\sigma}$ (der auch die Tensoreigenschaften besitzt). Man kann dies aus den Größen $(\Gamma)^2$ und $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)$ oder aus $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}$ und $g\Gamma\Gamma$ herleiten, was allerdings hässlich wird.
Ricci-Tensor $R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma}$, der den Vorteil hat symmetrisch zu sein ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$)
Und das Krümmungsskalar $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
Suche kovariante Differentialgleichungen für $g_{\mu\nu}$ oder davon abgeleitete Größen, die ausreichend einfach sind um lösbar zu sein.
Als Quelle des Feldes fungiert hier die Masse, die jedoch alleine nicht kovariant ist. Diese muss erweitert werden

wobei man zum Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ gelangt.
(zusätzlich müssen für kleine Geschwindigkeiten und schwache Felder das Newtonsche Gravitationsgesetz als Grenzfall heraus kommen.)
Es ergeben sich die Einsteingleichungen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{805}$$