

# Klassische Feldtheorie

## **Zusammenfassung**

Das Skript zur Vorlesung klassische Feldtheorie im Wintersemester 2013/14. Die Vorlesung wurde von Professor Spiesberger gehalten.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>4</b>
1.1	Postulate . . . . .	4
1.1.1	1. Postulat . . . . .	4
1.1.2	2. Postulat . . . . .	4
1.1.3	Definition der Ko- und Kontravarianten Vektoren . . . . .	4
1.2	Geometrie . . . . .	5
1.2.1	Invarianz des 4-Abstands . . . . .	5
1.3	Lorentz-Transformationen . . . . .	5
1.4	4-Vektoren . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Allgemeine Feldtheorie</b>	<b>7</b>
2.1	Differentialoperatoren . . . . .	7
2.2	Integration in D=4 . . . . .	8
2.2.1	Volumenintegral . . . . .	8
2.2.2	Flächenintegral . . . . .	8
2.2.3	Integration über 3-Dimensionale Hyperflächen . . . . .	9
2.2.4	Wegintegrale . . . . .	9
2.2.5	Integralsätze . . . . .	10
2.3	Relativistische Kinematik . . . . .	10
2.3.1	Lagrangeformalismus . . . . .	10
2.3.2	relativistische Kinematik . . . . .	11
2.4	Allgemeine Feldtheorie . . . . .	13
2.4.1	Eichinvarianz . . . . .	15
2.4.2	noch mal Bewegungsgleichungen . . . . .	15
2.5	Lorentztransformationen der Felder . . . . .	16
2.5.1	Vektorpotential . . . . .	16
2.5.2	Lorentz-Transformation . . . . .	17
2.6	Bewegungsgleichungen der Felder . . . . .	17
2.6.1	Energie und Impuls des Feldes . . . . .	22
2.6.2	Allgemeine Feldtheorie (Wdh.) . . . . .	23
2.6.3	Vergleich von klassischer Punktmechanik und Feldtheorie . . . . .	23
2.6.4	Erhaltung von Größen . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>26</b>
3.1	Maxwell-Gleichungen . . . . .	26
3.1.1	Klassifizierung von Problemstellungen . . . . .	27
3.2	Statische Felder . . . . .	27
3.2.1	Zum Coulombproblem . . . . .	27
3.2.2	Felder von vorgegebenen Ladungsverteilungen . . . . .	30
3.3	Multipolentwicklung . . . . .	30
3.3.1	Dipolterm . . . . .	30
3.3.2	Quadrupolmoment . . . . .	31
3.3.3	Multipolentwicklung allgemein . . . . .	31
3.3.4	Multipolentwicklung (Wiederholung) . . . . .	32
3.4	Magnetostatik . . . . .	34
3.5	Magnetostatik . . . . .	34
3.6	Elektrodynamik im Kontinua . . . . .	36
3.6.1	Elektrostatik von Leitern . . . . .	37
3.7	Wiederholung . . . . .	39
3.7.1	Magnetostatik . . . . .	39
3.7.2	Elektrostatik für Leiter (Randwertprobleme) . . . . .	39
3.7.3	Elektrostatik von Materie . . . . .	39
3.8	Magnetostatik in Materie . . . . .	39
3.9	Elektromagnetische Wellen . . . . .	40
3.9.1	Wiederholung . . . . .	42
3.9.2	Polarisation . . . . .	43
3.9.3	Feld einer Punktladung . . . . .	45
3.10	Einführung in die Quantenfeldtheorie . . . . .	46
3.10.1	Eigenschwingungen des Feldes . . . . .	46

3.11	Ausstrahlung Elektromagnetischer Wellen . . . . .	47
3.11.1	Spezialfall: Lienard-Wiechert-Potentiale . . . . .	47
3.11.2	Wiederholung Ausstrahlung von elektromagnetischen Wellen . . . . .	50
3.11.3	Strahlungsfeld in großem Abstand . . . . .	50
3.11.4	Intensität des Strahlungsfeldes . . . . .	52
3.11.5	Wiederholung Strahlung . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Feldtheorie der Gravitation - Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>56</b>
4.1	Phänomenologie Newtonsche Gravitation . . . . .	56
4.2	Allgemeine Koordinatentransformationen . . . . .	58
4.2.1	Wiederholung . . . . .	59

# 1 Spezielle Relativitätstheorie

Einstein 1905:

Zur Elektrodynamik bewegter Körper

## 1.1 Postulate

### 1.1.1 1. Postulat

Die Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in der gleichen Weise.

Inertialsysteme: Bezugssysteme in denen ein sich kräftefrei bewegender Körper, konstante Geschwindigkeit besitzt. → verschiedene Inertialsysteme bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit.

### 1.1.2 2. Postulat

Prinzip der in jedem Inertialsystem konstanten Lichtgeschwindigkeit.

Prinzip: es gibt eine maximale Signalgeschwindigkeit

Wirkungsausbreitung = Lichtgeschwindigkeit  $c = 2.99 * 10^8 \frac{m}{s}$

(Klassische Mechanik: Grenzfall:  $c \rightarrow \infty$ )

z.B.  $\Pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

→ Geschwindigkeiten können nicht trivial addiert werden

→ Zeit muss in der Speziellen Relativitätstheorie mit transformiert werden

→ 4-dimensionale Schreibweise einer vierdimensionalen Raumzeit.

Dazu spricht man in der speziellen Relativitätstheorie von einem Ereignis oder Weltpunkt  $(t, \vec{x})$  (Raum-Zeit-Punkte). Die physikalische Dimension wird zu  $x^0 = ct$  normiert.

→  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x})$

$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \leftarrow x^i$

Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Koordinatensystemen folgt das der 4-Abstand zweier Ereignisse a, b mit den Weltpunkten  $x_a^\mu, x_b^\mu$ , die durch ein Lichtsignal verbunden sind, konstant ist.

$$S_{ab}^2 = (x_a^0 - x_b^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x_a^i - x_b^i)^2 \quad (1)$$

$$= c^2(t_a - t_b)^2 - (\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2 \quad (2)$$

$S_{ab}^2$  ist für beliebige Ereignisse invariant beim Wechsel zwischen Inertialsystemen.

### 1.1.3 Definition der Ko- und Kontravarianten Vektoren

Kontravariante Komponenten von 4er Vektoren:  $x^{\mu \leftarrow}$

Kovariante Komponenten von 4er Vektoren:  $x_{\mu \leftarrow} = g_{\mu\nu} x^\nu$

$g_{\mu\nu}$  = Metrischer Tensor (Tensor 2. Stufe) =  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$

$g_{00} = 1$   $g_{ii} = -1$

**Einsteinsche Summenkonvention:**  $\sum$  wird implizit über alle Indizepaare gebildet, bei denen ein Index oben und der andere unten steht. Diese summe geht bei griechischen Buchstaben von 0 bis 3 und bei lateinischen Buchstaben von 1 bis 3

$$x_{\mu \leftarrow} = g_{\mu\nu} x^\nu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \quad (3)$$

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \rightarrow x_\mu = (ct, -\vec{x}) \quad (4)$$

damit lässt sich der 4-Abstand schreiben als

$$S_{ab}^2 = g_{\mu\nu} (x_a - x_b)^\mu * (x_a - x_b)^\nu \quad (5)$$

$$= \sum_{\mu} (x_a - x_b)^\mu \left( \sum_{\nu} g_{\mu\nu} (x_a - x_b)^\nu \right) \quad (6)$$

$$= (x_a - x_b)^\mu * (x_a - x_b)_\mu \quad (7)$$

→ Invarianz des 4-Abstandes?

⇒ 4-Abstand (Metrik)

für differentielle Abstände  $dx^\mu = (cdt, d\vec{x})$  gilt:

$$dS^2 = dx^2 = g_{\mu\nu} * dx^\mu * dx^\nu \quad (8)$$

$$= c^2 * dt^2 - d\vec{x}^2 \quad (9)$$

Hier ist die Metrik durch den metrischen Tensor gegeben.

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (10)$$

$g: x^\mu \mapsto x_\mu = g_{\mu\nu} * x^\nu$  ist damit eine Abbildung.

## 1.2 Geometrie

Eigenzeit: wähle ein Inertialsystem K in dem ein Körper in Ruhe ist  $d\vec{x} = 0$ ,  $dt \neq 0$ ,  $dx^0 = c * dt$  mit der Schreibweise  $d\tau$ .

Im Koordinatensystem  $K'$  des Beobachters in dem sich der Körper bewegt gelte nun  $d\vec{x}' \neq 0$ ,  $dt' \neq 0$

### 1.2.1 Invarianz des 4-Abstands

$$ds^2 = c^2 * d\tau^2 = c^2 * (dt')^2 - (dx^{1'})^2 - (dx^{2'})^2 - (dx^{3'})^2 \quad (11)$$

$$\Rightarrow d\tau = dt' * \sqrt{1 - \frac{(dx^{1'})^2 + (dx^{2'})^2 + (dx^{3'})^2}{c^2(dt')^2}} \quad (12)$$

$$= dt' * \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d|\vec{x}'|}{dt'} \right)^2} \quad (13)$$

$$= dt' * \sqrt{1 - \beta^2} \text{ mit } \beta = \frac{v}{c} \leq 1 \quad (14)$$

$$d\tau = \frac{ds}{c} \quad (15)$$

für beliebige Bewegungen:

$$\tau = \int dt' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (16)$$

## 1.3 Lorentz-Transformationen

Galilei-Trafo.: nicht-relativistische Kinematik

$$t' = t, x'^1 = x^1 + v * t, x'^2 = x^2, x'^3 = x^3 \quad (17)$$

für Inertialsysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  in  $x^1$ -Richtung bewegen.  
in der SRT muss die Zeit mit transformiert werden:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (18)$$

$\Lambda_\nu^\mu$  aus der Forderung der Invarianz des 4er Abstandes (0.  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ ,  $a^\mu = \text{konstant}$ , Transformation in Raum-Zeit

$$1. \text{ eine Lösung: } x'^\mu = x^\mu, \text{ d.h. } \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \mathbb{R} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\vec{x}' = \mathbb{R} * \vec{x}$  wobei  $\mathbb{R}$  eine räumliche Drehung darstellt also  $\mathbb{R}^T \mathbb{R} = 1$ )

z.B. Drehung um  $x^3$ -Achse

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\vec{x}' = \mathbb{R} * \vec{x}, \vec{x}'^2 = \vec{x}^2 \quad (20)$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (21)$$

z.B. Versuche

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1 \quad (23)$$

Dies entspricht einer Drehung mit einem Imaginären Drehwinkel.

im K-System  $K$ : Komponenten  $x^\mu$

im K-System  $K'$ : Komponenten  $x'^\mu$

$K$  und  $K'$  bewegen sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit  $v$ , so dass  $\beta = \frac{v}{c} = -\tanh \psi$

Ursprung von  $K'$ :

$$x'^\mu = 0 = \sinh \psi * x^0 + \cosh \psi * x^1 \quad (24)$$

$$\Rightarrow \frac{x^1}{x^0} = \frac{x^1}{c * t} = -\frac{\sinh \psi}{\cosh \psi} = -\tanh \psi \quad (25)$$

$$\tanh \psi = -\beta \quad (26)$$

$$\sinh \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (27)$$

Abkürzung:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Diese spezielle Lorentz-Transformation wird "boost" genannt.

Sie ist hier jedoch ausschließlich in 1-Richtung. In 2-Richtung und 3-Richtung werden einfach die entsprechenden Zeilen vertauscht. Andere Richtungen lassen sich mit Drehungen realisieren. Beliebige Lorentz Transformationen der Form  $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$  können dargestellt werden als Produkt von jeweils eine Lorentzboost und einer Drehung

$$x'^1 = \frac{x^1 + vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, x'^2 = x^2, x'^3 = x^3, t' = \frac{t + \frac{\beta}{c} * x^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (29)$$

$\Rightarrow$  Längenkontraktion, Zeitdilatation

Ansatz: 4-Abstand ist invariant

differentiell:  $ds^2 = (ds')^2$

aus Definition folgt:  $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$

Lichtsignal:  $ds^2 = 0$  Ansatz:  $ds' = a * ds$

Aus der Homogenität und Isotropie des Raumes folgt, dass das  $a$  von keiner der Koordinaten abhängen kann.

$\Rightarrow a(x, \frac{dx}{dt}) = a(|\vec{v}|)$

Betrachte nun 3 Koordinatensysteme:

1.  $K_1$ -System:  $ds$
2.  $K_2$ -System: relativ bewegt zu  $K_1$  mit  $v_{12}$
3.  $K_3$ -System: relativ bewegt zu  $K_1$  mit  $v_{13}$

$\Rightarrow K_2$  relativ zu  $K_3$  bewegt mit  $\vec{v}_{23}$

$$ds \rightarrow ds' = a(|\vec{v}_{12}|) * ds(K_1 \rightarrow K_2) \quad (30)$$

$$ds'' = a(|\vec{v}_{13}|) * ds(K_1 \rightarrow K_3) \quad (31)$$

$$ds'' = a(|\vec{v}_{23}|) * ds'(K_2 \rightarrow K_3) \quad (32)$$

$$\Rightarrow a(|\vec{v}_{13}|) = a(|\vec{v}_{12}|) * a(|\vec{v}_{23}|) \quad (33)$$

Da gilt  $\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}$  liegt eine Winkelabhängigkeit bei der obigen Gleichung vor und damit muss  $a$  eine Konstante sein, die wir per Konvention auf  $a = 1$  setzen.

## 1.4 4-Vektoren

4-komponentige Größen  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$  die sich bei einem Übergang von einem Inertialsystem zum anderen nach:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \quad (34)$$

transformieren, heißen 4-Vektor  $\rightarrow$  Kovariante 4-Vektor  $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$

$\rightarrow$  Quadrat  $A^2 = A_\mu A^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - (\vec{A})^2$

$\Rightarrow A^2$  sind invariant unter Lorentztransformationen d.h.  $A'^2 = A^2$  und  $\Lambda \Lambda g = g$

## 2 Allgemeine Feldtheorie

Skalarfelder  $\Phi(x)$  mit  $x$  4-Vektor Vektorfelder  $V^\mu(x)$  Transformationsverhalten:

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \quad (35)$$

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu'} x^\nu \quad (36)$$

$$V^{\mu'}(x) = \Lambda^\mu_{\nu'} V^\nu(x) \quad (37)$$

Beispiele:

für  $\Phi$ : Potential, Ladungsdichte

für  $V^\mu(x)$ : Stromdichte  $\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$

### 2.1 Differentialoperatoren

(stillschweigend: Stetigkeit, Differenzierbarkeit ist implizit vorausgesetzt) Skalarfeld  $\rightarrow$  Gradientenfeld

$$\partial_\mu \Phi(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi(x) \quad (38)$$

$$= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \vec{\nabla} \Phi(x) \right) \quad (39)$$

$$\partial^\mu \Phi(x) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, -\vec{\nabla} \Phi(x) \right) \quad (40)$$

$$\text{auch } (\vec{\nabla} \Phi(x))^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Phi(x) = \partial^i \Phi(x) = (grad \Phi)^i \quad (41)$$

Wobei in der letzten Gleichung  $i$  eine Komponente selektiert.

$$\text{Bew.: } (\partial_\mu \Phi(x))' = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \Phi'(x') \quad (42)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \Phi(x(x')) \quad (43)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi(x) * \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \quad (44)$$

$$= (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi(x) \quad (45)$$

$$= (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi(x) \quad (46)$$

$$\text{mit } \ddot{U} : \Lambda^T \Lambda = \mathbb{1} \quad (47)$$

$$\Rightarrow \Lambda^{-1} = \Lambda^T \quad (48)$$

4-Divergenz  $\partial_\mu V^\mu(x)$  ist eine skalare Größe

$$\partial_\mu V^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} V^\mu(x) \quad (49)$$

$$= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial V^0(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} * \vec{V} \right) \quad (50)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial V^0(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} * \vec{V} \quad (51)$$

(3 Divergenz  $\vec{\nabla} * \vec{V} = \text{div} \vec{V}$ )

### d'Alembert Operator

$$\square \Phi = \partial^\mu \partial_\mu \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - (\vec{\nabla})^2 \Phi \quad (52)$$

Antisymmetrische Ableitung eines 4-Vektors

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu V_\mu - \partial_\mu V_\nu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} \quad (53)$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (54)$$

$$\text{z.B. : } F_{0i} = \partial_0 V^i - \partial_i V^0 \quad (55)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial V_i}{\partial t} - (\vec{\nabla} V_0)_i \quad (56)$$

und  $F_{ij}$  ist dual  $\text{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} x \vec{V}$

$$\text{hoch} F^k = \frac{1}{2} \epsilon^{klm} * F_{lm} = \epsilon^{klm} * \partial_l V_m = (\vec{\nabla} x \vec{V})^k \quad (57)$$

## 2.2 Integration in D=4

in D=3

### 2.2.1 Volumenintegral

$$\int_V dV \phi(\vec{x}) = \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 \phi(x_1, x_2, x_3)$$

$\rightarrow \text{in } D4$

$$\int_G d\Omega \phi(x) = \int dx^0 \int dx^1 \int dx^2 \int dx^3 \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

mit dem Gebiet  $G$  im 4-D Raum

Transformationsverhalten:

für  $G$  = der gesamte Raum

$$\Omega' = dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} = ? d\Omega$$

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Substitution: Jacobi Determinante:

$$J = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right| = |\Lambda^\mu{}_\nu| = 1$$

$$\Rightarrow \int d\Omega' \dots = \int J * d\Omega \dots = \int d\Omega \dots$$

### 2.2.2 Flächenintegral

in D=3

$$\int_F d\vec{f} * \vec{V}(\vec{x}) = \int d\sigma \vec{n} * V(\vec{x}) \quad (58)$$

$d\vec{f}$  = inf. Flächenelement

$d\sigma$  = Flächeninhalt

$\vec{n}$  = Einheitsvektor  $\perp$  auf  $F$

(Beispiel: Integral über Stromdichte  $\rightarrow$  Fluss)

für Fläche: Parametrisierung  $\vec{x}(s, t)$  Tangentenvektoren  $\vec{e}_s = \frac{\partial \vec{x}}{\partial s}$

$$\vec{e}_t = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$



Flächennormale in P:  $\vec{n} = \vec{e}_s x \vec{e}_t$  Flächeninhalt  $\propto ds * dt$

$$\Rightarrow d\vec{f} = ds * dt * \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} x \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

$$\int d\vec{f} * \vec{V} = \int df_i * V_i = \int ds \int dt \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} x \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right)_i * V_i$$

$$df_i = ds dt \epsilon^{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial s} x \frac{\partial x_k}{\partial t}$$

$$df_{jk} = ds dt \left( \frac{\partial x_j}{\partial s} x \frac{\partial x_k}{\partial t} - \frac{\partial x_k}{\partial s} x \frac{\partial x_j}{\partial t} \right)$$

$$df^i = \frac{1}{2} * \epsilon^{ijk} df_{jk}$$

Integration über eine zweidimensionale Fläche in D=4

$$\text{Flächenelement: } df^{\mu\nu} = ds dt \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \frac{\partial x^\nu}{\partial t} - \frac{\partial x^\nu}{\partial s} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \right)$$

$$\text{dazu dual: } d\tilde{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} df_{\rho\sigma}$$

$$\text{Flächenintegral: } \int_F d\tilde{f}_{\mu\nu} * I * \dots$$

Das Verhalten der durch das Integral definierten Größe ergibt sich nach:

$\int_F d\tilde{f}_{\mu\nu} * I^{\mu\nu} = [Pseudo]Skalar$  Falls  $I$  eine skalare Funktion ist bekommen wir einen Tensor 2.Stufe als Ergebnis des Integrals.

### 2.2.3 Integration über 3-Dimensionale Hyperflächen

benötigt Parametrisierung in  $(s, t, u)$  d.h.  $x^\mu(s, t, u)$

$$\text{Tangentenvektoren } e_s^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}, e_t^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}, e_u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u}$$

in D=3:  $(\vec{e}_s x \vec{e}_t) * \vec{e}_u$

$$\text{in D=4: } dS^{\mu\nu\rho} = \begin{pmatrix} dx_s^\mu & dx_s^\nu & dx_s^\rho \\ dx_t^\mu & dx_t^\nu & dx_t^\rho \\ dx_u^\mu & dx_u^\nu & dx_u^\rho \end{pmatrix} \text{ z.B.: } dx_s^\mu = ds \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \text{ usw.}$$

$$\text{dual zu } dS^{\mu\nu\rho} : dS^\mu = \frac{1}{6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} * dS_{\nu\rho\sigma}$$

$$\int_H dS^\mu I_\mu$$

$dS^\mu$  ist 4-Vektor  $\perp$  auf allen Richtungen in H z.B. Hyperfläche  $\mathbb{R}^3$  Parametrisierung:  $s = x^1, t = x^2, u = x^3$

$$dS^{\mu\nu\rho} \rightarrow dx^1 dx^2 dx^3 \quad dS^0 = dx^1 dx^2 dx^3$$

### 2.2.4 Wegintegrale

- in  $D = 3$

$$\int_C d\vec{x} * \vec{V}(\vec{x}) \quad (59)$$

Parametrisierung von C:

$$\vec{x} = \vec{x}(\sigma) \quad (60)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma} \quad (61)$$

$$\Rightarrow \int_C d\sigma \quad (62)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma} * \vec{V}(x(\sigma)) \quad (63)$$

- in  $D = 4$

$$\int_C dx^\mu * V_\mu(x) \quad (64)$$

Parametrisierung von C:

$$x^\mu = x^\mu(\sigma) \quad (65)$$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \quad (66)$$

$$\Rightarrow \int_C d\sigma \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} * V^\mu(x(\sigma)) \quad (67)$$

$$\sigma \rightarrow s \rightarrow \tau \quad (68)$$

### 2.2.5 Integralsätze

- Gaußscher Satz

in 3-D

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \vec{V} = \int_{\partial V} d\vec{f} \vec{V} \quad (69)$$

mit gegebenem Volumen  $V$  und dessen Rand  $\partial V$

in 4-D

$$\int_G d\Omega \partial_\mu V^\mu = \int_{\partial G} d\tilde{S}_\mu V^\mu \quad (70)$$

- Satz von Stokes

in 3-D:

$$\int_F d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \int_{\partial F} d\vec{x} \vec{V}(x) \quad (71)$$

in 4-D

$$\int_F df^{\mu\nu} \partial_\mu V_\nu = \int_F df^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) = \int_{\partial F} dx^\mu V_\mu \quad (72)$$

Verallgemeinerungen:

- Greensche Integralsätze
- Beziehung für Integrationen für  $D=2$  und  $D=3$

## 2.3 Relativistische Kinematik

Kräftefreie Bewegung eines (punktförmigen) Teilchens:

$\Rightarrow$  Impuls, Energiedefinition

### 2.3.1 Lagrangeformalismus

Prinzip der minimalen Wirkung:

1. generalisierte Koordinaten finden ( $q_i(t)$ ) (Ziel ist es die Zeitabhängigkeit der Koordinaten zu bestimmen.)
2. verallgemeinerte Geschwindigkeiten ( $\dot{q}_i(t) = \frac{\partial}{\partial t} q_i(t)$ )
3. Lagrangefunktion  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  aufstellen
4. Wirkung aufstellen  $S[q_i(t)]$  (Funktional)

$$S[q_i(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \quad (73)$$

zu gegebenen Anfangs- und Endzeitpunkten  $t_b, t_a$  kann das Funktional für beliebige Wege, auch für die physikalisch nicht realisierten, berechnet werden.

5. Prinzip der kleinsten Wirkung besagt, dass die tatsächlich physikalisch realisierte Bewegung erfolgt auf Bahnkurve, für die  $S[q_i(t)]$  minimal ist  $\Rightarrow$  Variationsrechnung

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t) \quad (74)$$

$$\dot{q}_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t) \quad (75)$$

$$\Rightarrow \underline{\delta S = 0} \quad (76)$$

$\Rightarrow$  Euler-Lagrange-Gleichungen

### 2.3.2 relativistische Kinematik

punktförmiges kräftefreies Teilchen

Bahnkurve:  $x^\mu(\sigma)$  mit  $\sigma \rightarrow s, \tau$ , da die Zeit in den 4-Vektoren  $x^\mu$  bereits enthalten ist und eine andere sinnvolle Parametrisierung nötig ist.

Wirkung ???

$S[x^\mu(\sigma)]$  Diese muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Lorentzinvarianz  $S[x^\mu(\sigma)]$  ist Skalar im engeren Sinn bezüglich der Lorentzinvarianz, so dass es möglich wird die Bewegungsgleichungen vom Bezugssystem unabhängig her zu leiten.
2. Einfachheit Außerdem muss  $S[x^\mu(\sigma)]$  einfach sein, so dass es auch möglich bleibt die Bewegungsgleichungen mit den nötigen Anfangsbedingungen auch eindeutig zu lösen.  $\rightarrow$  DGL. 2. Ordnung
3. Physikalische Erfahrung Die Bewegungsgleichungen sollten mit der Physikalischen Erfahrung (d.h. mit den Messwerten der Experimente) übereinstimmen

$\Rightarrow$  Ansatz:  $S = -\alpha \int_a^b ds$  mit  $a, b \hat{=}$  Anfangs- und Endpunkte

Einfachste Möglichkeit:

$$ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu} \quad (77)$$

$$ds = c dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (78)$$

$$S = -\alpha c \int_a^b dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (79)$$

$\Rightarrow$  Lagrangefunktion:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \beta^2} \quad (80)$$

$$\text{mit } \beta = \frac{v}{c} \quad (81)$$

$$L \stackrel{\text{klass. Grenzfall}}{v \ll c} -\alpha c \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 + \dots\right) \Rightarrow L = -\alpha c + \frac{\alpha}{2c} v^2 + \dots \quad (82)$$

Wobei die Konstante  $-\alpha c$  keine Relevanz für die Minimierung des Problems aufweist.

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2c} = \frac{m}{2} \Rightarrow \alpha = mc \quad (83)$$

$$\Rightarrow S = -mc \int_a^b ds \quad (84)$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (85)$$

### Impuls

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial v_i}, v_i = \dot{q}_i \quad (86)$$

relativistisch folgt

$$\frac{\partial L}{\partial v} = -mc^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - \beta^2}} * \left(-2 \frac{v}{c^2}\right) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (87)$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \xrightarrow{v \ll c} m\vec{v} + O(v^3) \quad (88)$$

**Energie** Herleitung aus der Aussage, dass die Energieerhaltung und auch die Energie als Größe von der Translationsinvarianz der Energie bezüglich der Zeit resultiert.

$$E = m\vec{v} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} * \dot{\vec{x}} - L \quad (89)$$

$$= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} (v^2 + c^2(1 - \beta^2)) \quad (90)$$

$$\Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (91)$$

→ Ruheenergie:

$$E \xrightarrow{v=0} E_0 = mc^2 \quad (92)$$

$$E \xrightarrow{v \ll c} E_0 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (93)$$

Womit sich der klassische Term  $\frac{1}{2}mv^2$  für die kinetische Energie ergibt.

→ Hamiltonfunktion

$E$  als Funktion des Impulses ergibt für die Hamiltonfunktion

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad (94)$$

$$\xrightarrow[p \ll mc]{v \ll c} mc^2 + \frac{p^2}{2m} = mc^2 + E_{kin.,klass.} \quad (95)$$

Bemerkung:

Wenn das Teilchen masselos ist gilt die folgende Approximation  $E = cp$ , die aus dem Grenzwert der Hamiltonfunktion folgt (→ Photonen)

#### 4-Impuls

$$p^\mu = mcu^\mu \quad (96)$$

$$p^0 = \frac{E}{c} \quad (97)$$

$$\Rightarrow p^2 = m^2c^2 \quad (98)$$

Energie-Impuls-Beziehung

Massenschalenbedingung

$$(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2c^2 \quad (99)$$

#### Drehimpuls

$$\text{nicht-relativistisch: } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (100)$$

$$\text{relativistisch: } M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(r^\mu p^\nu - r^\nu p^\mu) \quad (101)$$

$$\rightarrow M^{ij} \rightarrow \tilde{M}^k \quad (102)$$

$$\uparrow \text{ ist dual zu } \vec{M} \quad (103)$$

allgemeiner:

$$\text{Symmetrien} \leftrightarrow \text{Erhaltungsgröße} \quad (104)$$

$$\text{räumliche Translationsinvarianz} \leftrightarrow \text{Impuls } \vec{p} \quad (105)$$

$$\text{zeitliche Translationsinvarianz} \leftrightarrow \text{Energie } cE \quad (106)$$

$$\text{räumliche Drehungen} \leftrightarrow \text{Drehimpuls } \vec{M} \quad (107)$$

räumliche Drehungen: für infinitesimale Drehwinkel gilt:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta\Omega^{\mu\nu}x_\nu \quad (108)$$

$$\text{invariant } x^2 = (x')^2 \quad (109)$$

$$(x')^2 = (x)^2 + 2\delta\Omega^{\mu\nu}x_\mu x_\nu \quad (110)$$

$$\Rightarrow \delta\Omega^{\mu\nu} \text{ ist antisymmetrisch} \quad (111)$$

$$\text{d.h. } \delta\Omega^{\mu\nu} = -\delta\Omega^{\nu\mu} \quad (112)$$

$$\delta S = -p_\mu \delta x^\mu \quad (113)$$

$$= -p_\mu \delta\Omega^{\mu\nu}x_\nu \quad (114)$$

$$= -\delta\Omega^{\mu\nu} \frac{1}{2}(p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu) \quad (115)$$

$$= -\delta\Omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \quad (116)$$

Interpretation:  $M^{0i}$  (System von Teilchen und deren Schwerpunkt)

## 2.4 Allgemeine Feldtheorie

In der nicht relativistischen Physik sind Felder nichts anderes als Hilfsgrößen die eine Kraftwirkung auf bestimmte Teilchen ausüben und zur Beschreibung dieser Kräfte dienen.

In der relativistischen Physik führt jede Bewegung von Teilchen zu einer Änderung des von ihm verursachten Feldes (analog zur klassischen Physik). Durch die endliche Signalgeschwindigkeit ist die zeitliche Änderung des Feldes an einem anderen Ort jedoch nicht trivial. → Bewegungsgleichungen für Felder (Feldgleichungen).

→ Felder: eigenständige, dynamische Größen

### Wirkung

1. Die Wirkung muss einen Term enthalten der sich auf die Bewegung der Teilchen bezieht ( $x^\mu, u^\mu, \dots$ )
2. Term für Wechselwirkung von Teilchen mit Feldern
3. Term für die "freie" Bewegung der Felder

Postulat: Es gibt ein 4-Vektorpotential  $A^\mu(x)$

empirische Erfahrung:

- Teilchen sind durch eine Ladung gekennzeichnet mit der Elementarladung  $e$  ( $e > 0$ )  
Teilchen tragen (ganzzahlige) Vielfache  $q_i$  von  $e$  (Quarks sind ausgenommen, da sie sich nicht direkt beobachten lassen, bei ihrer Einbeziehung stellt sich die Frage warum sie gerade drittelzahlige Ladungen tragen)
- Zur Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung werden benötigt:

$$(\vec{E}, \vec{B}) \xleftarrow{\text{Maxwellgleichungen}} \phi \vec{A} \Rightarrow A^\mu \quad (117)$$

### 4-Potential

$$A^\mu(x) = A^\mu(t, \vec{x}) \quad (118)$$

$$= (\underbrace{\phi(t, \vec{x})}_{\text{Skalar}}, \underbrace{\vec{A}(t, \vec{x})}_{\text{Vektor (bez. räumlicher Drehungen)}}) \quad (119)$$

### Wirkung?

Zunächst für 1) und 2), Teilchen mit Wechselwirkung

"Koordinaten":  $x^\mu, A^\mu$

Kriterien

1. Lorentzinvariant
2. einfach (aus  $\delta S \Rightarrow$  einfache DGL.)
3. physikalische Realität

$$\Rightarrow S_{WW} = -\frac{e}{c} \int_a^b dx_\mu A^\mu(x) \quad (120)$$

$$e = \text{Elementarladung} \quad (121)$$

(Für Teilchen der Ladung  $+e$ )

Die Wirkung für ein Teilchen der Ladung  $e$  im elektromagnetischen Feld ist:

$$S = \int_a^b \left( -mc ds - \frac{e}{c} A^\mu dx_\mu \right) \quad (122)$$

$$\Rightarrow S = \int_a^b \left( -mc ds - e\phi dt + \frac{e}{c} \vec{A} d\vec{x} \right) \quad (123)$$

$$\Rightarrow S = \int_{t_a}^{t_b} \left( -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e\phi + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} \right) dt \quad (124)$$

$\Rightarrow$  Lagrangefunktion:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - \underbrace{e\phi + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v}}_{\text{Term für Wechselwirkung}} \quad (125)$$

$$\rightarrow \text{kanonischer Impuls: } \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \quad (126)$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \underbrace{\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}}_{\text{kin. Impuls } \vec{p}} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad (127)$$

Hamiltonfunktion:

$$H = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L \mid \text{ in } \vec{P} \quad (128)$$

$$\Rightarrow H = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{e\phi}_{\text{potentielle Energie}} \quad (129)$$

Dies ermöglicht die folgenden Ersetzungsvorschriften:

$$H \rightarrow H - e\phi \quad (130)$$

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \quad (131)$$

$$\Rightarrow H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\phi \quad (132)$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \quad (133)$$

$$\text{berechne} \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c} \vec{\nabla}(\vec{A}\vec{v}) \quad (134)$$

$$= -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c} \left( (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right) \quad (135)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c} \left( (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right) \quad (136)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \quad (137)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + (\nabla * \nabla) \vec{A} \quad (138)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p} = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad (139)$$

$$\text{Def.: } \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad (140)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \text{ Lorentz Kraft} \quad (141)$$

Einsortieren:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \text{ Elektrisches Feld} \quad (142)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \text{ magn. Feld (magnetische Induktion)} \quad (143)$$

(Magnetfeldstärke für  $\vec{H}$  in Materie dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  in Materie)

zunächst betrachten wir Teilchen im Vakuum:

$\vec{E} = \vec{D}$  und  $\vec{B} = \vec{H}$  (Wahl des Gaußschen Einheitensystems)

### 2.4.1 Eichinvarianz

$\vec{E}, \vec{B}$  sind messbar

$A^\mu = (\phi, \vec{A})$  ist nicht eindeutig

4-Potentiale  $A_i^\mu$  die zu gleichen  $\vec{E} = \vec{D}$  und  $\vec{B} = \vec{H}$  führen sind physikalisch äquivalent.

Eichtransformation  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu X$  mit einer fast beliebigen Funktion  $X(x)$ , d.h.:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} X \quad (144)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} X \quad (145)$$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E} + \vec{\nabla} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} X - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} X = \vec{E} \quad (146)$$

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B} + \vec{\nabla} x (\vec{\nabla} X) = \vec{B} \quad (147)$$

### 2.4.2 noch mal Bewegungsgleichungen

aus  $\delta S = 0$  bez. Variation  $x^\mu(s) \rightarrow x^\mu(s) + \delta x^\mu(s)$

$$\delta S = \delta \int_a^b (-mc ds - \frac{e}{c} A^\mu dx_\mu) = 0 \quad (148)$$

- 1.Term

$$ds = \frac{dx^\mu}{ds} dx^\mu \quad (149)$$

- 2.Term

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu \quad (150)$$

$$\delta(A_\mu dx^\mu) = A_\mu d\delta x^\mu + \delta A_\mu dx^\mu \quad (151)$$

$$= a + b \quad (152)$$

$$\delta A_\mu(x) = A_\mu(x + \delta x) - A_\mu(x) = \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu \quad (153)$$

Variation  $\delta dx^\mu$  im Integral

a):

$$- \frac{e}{c} \int_a^b A_\mu(x(s)) \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds \quad (154)$$

$$= \frac{e}{c} \int_a^b \frac{d}{ds} A_\mu(x(s)) \delta x^\mu(s) ds + \text{Randterme} \quad (155)$$

$$= \frac{e}{c} \int_a^b \partial_\nu A_\mu \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\mu ds \quad (156)$$

$$= \frac{e}{c} \int_a^b \partial_\nu A_\mu u^\nu \delta x^\mu ds \quad (157)$$

b):

$$- \frac{e}{c} \int_a^b \partial_\nu A_\mu u^\mu \delta x^\nu ds \quad (158)$$

Daraus folgt:

$$\delta S = \int_a^b ds \delta x^\mu \left( mc \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} [\partial_\nu A_\mu u^\nu - \partial_\mu A_\nu u^\nu] \right) \quad (159)$$

$$= \int_a^b ds \delta x^\mu \left( mc \frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] u^\nu \right) \quad (160)$$

Kovariante Form der Bewegungsgleichung:

$$mc \frac{du_\mu}{s} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \quad (161)$$

Mit Feldstärketensor (antisym.)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (162)$$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(x) \quad (163)$$

Komponentenweise:  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0 \quad (164)$$

$$F_{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} \rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \vec{\nabla} \phi = \vec{E} \quad (165)$$

$$F_{i0} = -F_{0i} = F^{0i} F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (166)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^i = B^i \quad (167)$$

$$\rightarrow F_{jk} = -\epsilon_{jki} B^i \quad (168)$$

Explizit heißt dies also:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (169)$$

Räumliche Komponenten der Bewegungsgleichung

$$p_\mu = mc u_\mu, \quad ds = c dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (170)$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u^k = \frac{v^k}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (171)$$

$$-\frac{1}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} \left( -E^i \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \epsilon_{ijk} B^l \frac{v^k}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (172)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left( -\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (173)$$

Zeitliche Komponenten:

$$mc \frac{du_0}{ds} = \frac{e}{c} F_{0i} u^i \quad (174)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = e \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (175)$$

$$\frac{d}{dt} (\xi) = e \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (176)$$

Mit der Gesamtenergie  $\xi$

**Lorentzkraft** Lorentzkraft + Gleichung für  $\frac{d\xi}{dt}$  sind nicht unabhängig und damit aus  $u^2 = 1$  folgen

$$\frac{d}{ds} u^2 = 0, \frac{d}{ds} u_\mu u^\mu = 2u_\mu \frac{du^\mu}{ds} = 0 \quad (177)$$

## 2.5 Lorentztransformationen der Felder

### 2.5.1 Vektorpotential

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) = (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta x'^\beta \quad (178)$$

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (179)$$



ausgeschrieben ergibt dies z.B. für einen Lorentzboost entlang der  $x^1$ -Richtung:

$$E'_2 = E_1, E'_2 = \frac{E_2 - \beta B_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E'_3 = \frac{E_3 + \beta B_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (180)$$

$$B'_2 = B_1, B'_2 = \frac{B_2 + \beta E_3}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B'_3 = \frac{B_3 - \beta E_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (181)$$

- ein reines elektrisches Feld in einem Bezugssystem ( $\vec{E} \neq 0, \vec{B} = 0$ )  
 $\rightarrow \vec{B}' = \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}'$   
 $\vec{B}' \perp \vec{E}', \vec{B}' \perp \vec{v}, \vec{E}' \perp \vec{v}$
- genauso für  $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$
- und umgekehrte Aussage gilt: falls in einem Bezugssystem  $\vec{E}' \perp \vec{B}'$ , dann existiert ein Bezugssystem in dem  $\vec{E} = 0$  oder  $\vec{B} = 0$   
(z.B. für  $v = c \frac{B'}{E'} < c$ , das heißt falls  $B' < E' \rightarrow \vec{B} = 0$ )

Bew. Gl Ladung  $e$  (Kopplungskonstante)

elektromagnetisches Feld  $A^\mu$

kovariant:  $mc \frac{d\vec{u}^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$  (Lorentzkraft)

Feldstärketensor  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

$\rightarrow (\vec{E}, \vec{B})$

Eichinvarianz:  $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$

### 2.5.2 Lorentz-Transformation

Invarianten des elektromagnetischen Feldes

( $x^2, A^\mu A_\mu$  durchstreichen,  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , usw.)

- $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  ist Lorentz-Skalar
- $F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$  ist Lorentz-Pseudoskalar

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2 = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad (182)$$

$$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 4\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (183)$$

$$\text{Invariante: } \vec{E}^2 - \vec{B}^2 \text{ und } \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (184)$$

folgende Aussagen sind Lorentzinvariant:

- Die Beträge sind gleich:  $|\vec{E}| = |\vec{B}|$
- Orthogonalität:  $\vec{E} \perp \vec{B}$
- $|\vec{E}| > |\vec{B}|$  bzw.  $|\vec{E}| < |\vec{B}|$

**Ergänzung** Betrachte  $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{B}$

$\rightarrow$  Lorentztransformationen sind dann nur Drehungen dieses komplexen Vektors  $\vec{F}$  mit komplexen Drehwinkeln

$\rightarrow$  Invarianten sind die Längen der Vektoren also  $\vec{F}^2 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2 + 2i\vec{E} \cdot \vec{B}$  und es wird einsichtig, dass dies die einzigen Invarianten sind.

## 2.6 Bewegungsgleichungen der Felder

Ziel: Bestimmung der Bewegungsgleichungen der Felder

(Bewegungsgleichungen für Ladungen:  $\vec{E}, \vec{B}$  sind 6 Komponenten,  $A^\mu$  sind 4 Komponenten  $\Rightarrow$  Es müssen weitere Gleichungen für  $\vec{E}, \vec{B}$  gelten)

**Erste Gruppe der Maxwellgleichungen**

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \vec{\nabla} x (-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{A} \quad (185)$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} x \vec{A} = 0 \quad (186)$$

$$(187)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (188)$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0 \quad (189)$$

$$(190)$$

In integraler Form:

- aus  $\vec{\nabla} x \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{\vec{B}}$  ergibt unter Anwendung des Satzes von Stokes

$$\int_F d\sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E}) * \vec{n} = \oint_{\partial F} d\vec{x} \vec{E} = \frac{1}{c} \int_F d\sigma \vec{\vec{B}} \vec{n} \quad (191)$$

- aus  $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$  und dem Satz von Gauß folgt

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \vec{B} = \oint_{\partial V} d\vec{f} \vec{B} = 0 \quad (192)$$

Was im Endeffekt aussagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt.

**4-Schreibweise** aus Definition von  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\rightarrow \partial_\delta F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\delta} + \partial_\nu F_{\delta\mu} = 0 \quad (193)$$

Ist ein total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe

$\Rightarrow$  nicht trivial nur für  $\nu \neq \mu, \mu \neq \delta, \nu \neq \delta \rightarrow 4$  nicht triviale Gleichungen  
oder mit Hilfe von  $\tilde{F}_{\mu\nu}$

$$\rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (194)$$

**Zweite Gruppe der Maxwellgleichungen**

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (195)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (196)$$

- Zusätzliche Informationen:  
Ladungsdichte  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  Stromdichte  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, t)$
- Quellend der Felder sind Ladungen und Ströme
- Ladungen und Ströme im Vakuum
- kontinuierliche Verteilungen aus dem Limes: Anzahl der geladenen Teilchen  $\rightarrow \infty$
- Gaußsche Einheiten
- Integrale Form:

$$\int_V \vec{\nabla} \vec{E} d^3x = \oint_{\partial V} \vec{E} d\vec{f} \stackrel{!}{=} 4\pi \int_V d^3x \rho = 4\pi Q \quad (197)$$

Gesamtladung in  $V$ :  $Q = \int_V d^3x \rho$

$$\int_F d\vec{f} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \oint_{\partial F} d\vec{x} \vec{B} \stackrel{!}{=} \int_F d\vec{f} \left( \frac{1}{c} \vec{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) \quad (198)$$

Was als Biot-Savart-Gesetz bekannt ist mit dem Verschiebungsstrom  $\frac{1}{c} \vec{\vec{E}}$   
 $\rightarrow \vec{B}$  aus  $\vec{j}$

**4-Schreibweise der 2.Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen** Zunächst: 4-Stromdichte:  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$   
zur Begründung betrachte Verteilung von Punktladungen  $e_a$  für Teilchen  $a = 1, \dots, N (\rightarrow \infty)$  am Ort  $\vec{x}_a$

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{a=1}^N e_a \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_a(t)) \quad (199)$$

Annahme:  $\rho(\vec{x}, t)$  gegeben, glatt und differenzierbar

Volumenelement  $d^3x$  enthält dann die Ladung  $de = \rho d^3x$  für bewegte Ladung betrachte dann: Verschiebung um  $dx^\mu$

$$\rightarrow de dx^\mu = \rho d^3x dx^\mu = \rho \underbrace{d^3x dt}_{d\Omega} \frac{dx^\mu}{dt} = d\Omega \rho \frac{dx^\mu}{dt} \quad (200)$$

Transformationsverhalten

- linke Seite:
  - $de$  ist Lorentzskalar
  - $dx^\mu$  ist 4-Vektor
- rechte Seite:  $d\Omega$  ist Lorentzinvariante

$$\Rightarrow j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \text{ ist 4-Vektor} \quad (201)$$

Komponentenweise:

$$j^0 = \rho \frac{dx^0}{dt} = c\rho \quad (202)$$

$$\vec{j} = \rho \frac{d\vec{x}}{dt} = \rho \vec{v} = \vec{j} \quad (203)$$

$$\left( Q = \int_V d^3x \rho = \frac{1}{c} \int_V d^3x j^0(\vec{x}, t) \right) \quad (204)$$

schreibe Maxwellgleichung mit Hilfe von  $F^{\mu\nu}$  und  $j^\mu$

$$F^{0i} = -E^i = -F_{0i} \quad (205)$$

$$\epsilon^{ijk} F_{jk} = B^i \quad (206)$$

1.

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x^i} E^i = -\partial_i F^{0i} \quad (207)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (208)$$

$$\Rightarrow \partial_i F^{i0} = \frac{4\pi}{c} j^0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c} j^0 \quad (209)$$

2.

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j B_k \quad (210)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} F^{lm} \quad (211)$$

$$= -\frac{1}{2} (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l) \partial_j F^{lm} \quad (212)$$

$$= -\frac{1}{2} (\partial_m F^{im} - \partial_l F^{li}) \quad (213)$$

$$= \partial_l F^{li} \quad (214)$$

$$\frac{1}{c} \ddot{E}^i = -\partial_0 F^{0i} \quad (215)$$

$$\Rightarrow \partial_j F^{ji} = -\partial_0 F^{0i} + \frac{4\pi}{c} j^i \quad (216)$$

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i \quad (217)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (218)$$

**kovariante Form der Maxwellgleichungen**

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (219)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (220)$$

Aus der 2. Gleichung folgt, dass die Quellen des elektromagnetischen Feldes (bewegte) Ladungen sind. Für ein System von Ladungen gilt

$$\sum_{a=1}^N e_a \delta(x - x_a(t)) \rightarrow_{N \rightarrow \infty} \rho(x) \quad (221)$$

$$\text{Wirkungsprinzip} \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Bisher gingen wir davon aus, dass  $S_{WW}$  für ein Teilchen

$$S_{WW} = -\frac{1}{c} \sum_a e_a \int dx_a^\mu A_\mu(x_a) \quad (222)$$

$$\downarrow \text{beliebige Ladungsverteilung} \quad (223)$$

$$S_{WW} = -\frac{1}{c} \int d^3x \rho(x) \int dt \frac{dx^\mu}{dt} A_\mu(x) \quad (224)$$

$$= -\frac{1}{c} \int dt d^3x \underbrace{\rho(x) \frac{dx^\mu}{dt}}_{j^\mu(x)} A_\mu(x) \quad (225)$$

$$= -\frac{1}{c^2} \int d\Omega \underbrace{j^\mu A_\mu}_{\text{Lagrangedichte}} \quad (226)$$

$$(227)$$

**Eichinvarianz** Eichtransformation:  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi$  mit Eichfunktion  $\chi$   
Zusatzterm in  $S_{WW}$

$$\Delta S_{WW} = -\frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu \partial_\mu \chi \text{ partielle Integration} \quad (228)$$

$$= \frac{1}{c^2} \underbrace{\int d\Omega \partial_\mu (j^\mu \chi)}_{\text{nach Gauß } \oint dS_\mu (j^\mu \chi)} - \frac{1}{c^2} \int d\Omega \chi \underbrace{\partial_\mu j^\mu}_{=0 \text{ wegen der Forderung nach Eichinvarianz}} \quad (229)$$

$$\oint dS_\mu (j^\mu \chi) = 0 \text{ falls man die Oberfläche ins unendliche legt} \quad (230)$$

**Stromerhaltung** Forderung:  $\partial_\mu j^\mu = 0$  "Stromerhaltung"

$$\frac{\partial}{\partial x^0} j^0 + \frac{\partial}{\partial x^i} j^i = 0 \quad (231)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (232)$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \text{ Kontinuitätsgleichung} \quad (233)$$

In integraler Form ergibt sich damit:

$$\int_V d^3x \ddot{\rho}(x) = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j} \quad (234)$$

$$\text{Gesamtladung im Volumen } \ddot{Q}_V = - \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j} \text{ Ladungserhaltung} \quad (235)$$

Wirkung der elektromagnetischen Felder:

$$S = S_M + \underbrace{S_{WW} + \overbrace{S_F}^{\text{für freie Felder}}}_{\text{für wechselwirkende Felder}} \quad (236)$$

Konstruktionsprinzip:

- Lorentz-Invariante
- Superpositionsprinzip: lineare Differentialgleichungen  $\Rightarrow S$  quadratisch in Koordinaten/Feldern
- Eichinvarianz

Integrand enthält  $A_\mu, F_{\mu\nu}$

Ansatz:  $S_F = f \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

- Vorzeichen?

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2) \quad (237)$$

$$\uparrow \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 \text{ kann sehr groß werden} \quad (238)$$

$$\Rightarrow f < 0 \quad (\Rightarrow S \text{ minimal}) \quad (239)$$

- Gaußsches Maßsystem  $f = -\frac{1}{16\pi c}$

$\rightarrow$  Wirkung:

$$S_F = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (240)$$

$$= \int dt \underbrace{\int d^3x \frac{E^2 - B^2}{8\pi}}_{\text{Lagrangedichte}} \quad (241)$$

Weiter mit Ansatz:  $S_F = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

- Keine Ableitungen von  $F$  in der Formel enthalten, da  $F$  bereits  $\partial_m u A_n u$  enthält, worin auch Zeitableitungen enthalten sind  
 $\Rightarrow$  unabhängige Variablen in  $S_F: A^\mu$   
 Punktmechanik:  $q_i$   
 Feldtheorie  $A^\mu(\vec{x}, t) \leftrightarrow$  Koordinaten  
 $\partial_0 A^\mu(\vec{x}, t) \leftrightarrow$  Geschwindigkeit  
 kovariant:  $\partial^\mu A^\nu$
- $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ 
  1. vollständige 4-Divergenz  
 $\Rightarrow$  kein Beitrag zu den Bewegungsgleichungen  
 (Annahme:  $A^\mu \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ )
  2. Pseudoskalar  
 $\Rightarrow$  Paritätsverletzung

**Herleitung der Bewegungsgleichungen des Feldes (Feldgleichungen)** Variation  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$

$$\rightarrow \delta S = \delta S_{WW} + \delta S_F \quad (242)$$

$$= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{16\pi} \underbrace{\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}_{2(\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu}} \right] \quad (243)$$

$$= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \right] \quad (244)$$

$$F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu \quad 1: \text{Umbenennen der Indizes} \quad (245)$$

$$F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu = -F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \quad 2: \text{Vertauschen der Indizes von } F \quad (246)$$

$$\Rightarrow \delta S = -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \right] \quad (247)$$

$$= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[ \frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\mu\nu} \delta A_\mu \right] + 0 \quad \text{Die Randterme im Unendlichen sind wieder 0} \quad (248)$$

$$= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[ \underbrace{\frac{1}{c} j^\mu - \frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\mu\nu}}_{\substack{!=0 \text{ aus } \delta S=0 \\ \text{beliebig}}} \right] \delta A_\mu \quad (249)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \text{Wieder die Maxwellgleichungen} \quad (250)$$

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus  $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$

### 2.6.1 Energie und Impuls des Feldes

Feld trägt  $E, \vec{p}$  ( $\rightarrow p^\mu$ )

Ausgangspunkt: Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \mid * \vec{E} \quad (251)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \ddot{\vec{B}} \mid * \vec{B} \quad (252)$$

Differenz dieser beiden Gleichungen liefert:

$$\vec{E} * (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} * (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{c} (\vec{E} \ddot{\vec{E}} + \vec{B} \ddot{\vec{B}}) + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} \quad (253)$$

$$\vec{\nabla} * (\vec{B} \times \vec{E}) = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{4\pi}{c} \vec{E} \vec{j} \quad (254)$$

Poynting-Vektor  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \right) = -\vec{\nabla} \vec{S} - \vec{E} \vec{j} \quad (255)$$

In integraler Form ergibt sich dann:

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \vec{S} = \oint_{\partial V} d\vec{f} \vec{S} \quad (256)$$

$$\underbrace{\int_V d^3x \vec{E} \vec{j}}_{\substack{\text{Zeitableitung der Gesamtenergie der Ladung} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\dots)=0 \Rightarrow \text{Erhaltungssatz}}} = \underbrace{\int_V d^3x \rho \vec{v} \vec{E}}_{\substack{\text{für } V \rightarrow \infty \Rightarrow =0}} = \frac{d}{dt} \epsilon \quad (257)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V d^3x \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} + \epsilon \right)}_{\substack{\text{Zeitableitung der Gesamtenergie der Ladung} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\dots)=0 \Rightarrow \text{Erhaltungssatz}}} = - \underbrace{\oint_{\partial V} d\vec{f} \vec{S}}_{\substack{\text{für } V \rightarrow \infty \Rightarrow =0}} \quad (258)$$

$\Rightarrow$  Def.: Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (259)$$

Für endliche Volumen gilt: Energiefluss:  $\oint d\vec{f} \vec{S}$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (260)$$

### 2.6.2 Allgemeine Feldtheorie (Wdh.)

Wirkung des elektromagnetischen Feldes

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \left( \underbrace{-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu}_{\text{Lagrangedichte}} \right) + \text{Materie} \quad (261)$$

$$\delta S = 0 \text{ unter Variationen } A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu \quad (262)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (263)$$

Energie-Bilanz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V d^3x \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \epsilon_V \right) = - \oint_{\partial V} d\vec{f} \vec{S} \quad (264)$$

Energiedichte des Feldes:  $W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$

Energiestromdichte (Poynting-Vektor):  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$

### 2.6.3 Vergleich von klassischer Punktmechanik und Feldtheorie

klassische Punktmechanik	Feldtheorie
verallgemeinerte Koordinaten $q_i(t)$ ( $i \in \{1, \dots, N\}$ )	"Koordinaten": Felder $q(x^\mu)$ (z.B. $A^\mu(x)$ ) $x^\mu \in \mathbb{R}^4$ , kontinuierlich
verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$	"Geschwindigkeiten" $\dot{q}(x^\mu)$ bzw. $\partial_\mu q$ (z.B. $\partial^\mu A^\nu(x)$ )
Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i)$	Lagrangedichte $\Lambda(q, \partial_\mu q)$
Wirkung $S[q_i(t)]$ als Funktional	Wirkung $S = \int dt d^3x \Lambda(q, \partial_\mu q) = S[q(x^\mu)]$
Bewegungsgleichung aus $\delta S = 0$	Bewegungsgleichung aus $\delta S = 0$
Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip	

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d\Omega \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \underbrace{\frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\mu q)} \partial_\mu \delta q}_{\text{Lösung: part. Int.}} \right) \quad (265)$$

Forderung  $\delta S = 0$  für beliebige  $\delta q$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \partial_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\mu q)} = 0 \quad (266)$$

### 2.6.4 Erhaltung von Größen

#### Energieerhaltung

1. Translation der Zeit  
Invarianz  $\Rightarrow$  Erhaltungsgröße
2. Abgeschlossenes System  
 $\rightarrow L, \Lambda$  besitzen keine explizite Zeitabhängigkeit

**Impulserhaltung** Die Impulserhaltung lässt sich analog herleiten:

$\Leftrightarrow$  Invarianz unter räumlichen Transformationen

**allgemeine Feldtheorie**  $\Lambda$  hängt nicht explizit von  $x^\mu$  ab

$$\partial_\mu \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \partial_\mu q + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\mu (\partial_\nu q) \quad (267)$$

$$= \partial_\nu \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\mu q + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\nu (\partial_\mu q) \quad (268)$$

$$= \partial \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\mu q \right) \quad (269)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\partial_\nu \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\mu q - g_\mu^\nu \Lambda \right)}_{\partial_\nu T_\mu^\nu = 0} = 0 \quad (270)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \rightarrow \dot{Q} = 0 \quad (271)$$

$$0 = \int_V d\Omega \partial_\nu T_\mu^\nu = \oint_{\partial V} dS_\nu T_\mu^\nu \quad (272)$$

bei fester Zeit  $t_1$  und  $t_2$  gilt

$$dS^\nu \rightarrow dS^0 = dx^1 dx^2 dx^3 \quad (273)$$

$t_1, t_2$  beliebig

$$0 = \int d^3 x T_\mu^0|_{x^0=ct_2} - \int d^3 x T_\mu^0|_{x^0=ct_1} \Rightarrow \text{Erhaltungsgröße} \int d^3 x T_\mu^0|_{x^0=ct} \quad (274)$$

Diese Erhaltungsgröße folgen aus der Translationsinvarianz

$$\int d^3 x T_\mu^0 = \text{const.} * P_\mu \quad (275)$$

zur Normierung

$$T_{00} = \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_0 q)} \partial_0 q - \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \Lambda \quad (276)$$

$$H = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial v}}_p v - L \quad (277)$$

$$\text{Wirkung} = [\text{Energie} * \text{Zeit}] \quad (278)$$

$$= \frac{1}{c} \int dx^0 \underbrace{\int d^3 x \Lambda}_E \quad (279)$$

$$\rightarrow P^\mu = \frac{1}{c} \int dS_\nu T^{\mu\nu} \quad (280)$$

Beschreibt dann den 4-Impuls des Feldes

### Bemerkungen

- $T^{\mu\nu}$  ist nicht eindeutig  
ein beliebiger Tensor dritter Stufe  $\Psi^{\mu\nu\rho} = -\Psi^{\mu\rho\nu}$   
 $\rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \Psi^{\mu\nu\rho} = 0$   
 $\rightarrow \partial_\nu (T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Psi^{\mu\nu\rho}) = 0$
- $P^\mu = \frac{1}{c} \int dS_\nu (T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Psi^{\mu\nu\rho}) \rightarrow \oint df_{\nu\rho} \Psi^{\mu\nu\rho} = 0$
- Zusatzforderung:  $T^{\mu\nu}$  soll symmetrisch sein aus: Drehimpuls und Impuls erfüllen die gewohnten Beziehung:  
 $M^{\mu\nu} = \int (x^\mu dP^\nu - x^\nu dP^\mu)$   
 $= \frac{1}{c} \int dS_\rho (x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho})$   
Die Drehimpulserhaltung folgt dann aus der Invarianz unter Drehungen  
 $\partial_\rho (x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho}) = 0$



$$g_{\rho}^{\mu} T^{\nu\rho} + x^{\mu} \underbrace{\partial_{\rho} T^{\nu\rho}}_{=0} - g_{\rho}^{\nu} T^{\mu\rho} + x^{\nu} \underbrace{\partial_{\rho} T^{\mu\rho}}_{=0} = 0 \quad (281)$$

$$\Rightarrow T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = 0 \quad (282)$$

d.h. man fordert dass  $T^{\nu\mu}$  symmetrisch ist. Explizit: durch geeignete Wahl von  $\psi^{\mu\nu\rho}$   
 $T^{\mu\nu}$  heißt Energie-Impuls-Tensor

### Feldtheorie Wdh.

$$q \rightarrow \text{elektromagn } A_{\mu}(x) \dot{q} \rightarrow \partial_{\mu} A_{\nu}(x) \text{ Wirkung } S = \frac{1}{c} \int d^4x \Lambda(A_{\mu}(x), \partial_{\mu} A_{\nu}(x)) \quad (283)$$

**Lagrangedichte Wdh.** Konstruktion: Lorentz-Invariante Eichinvarianz  $\rightarrow$  Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen)

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_{\mu} A_{\rho})} - \frac{\partial \Lambda}{\partial A_{\rho}} = 0 \quad (q \rightarrow A_{\rho}) \quad (284)$$

Translationsinvarianz  $\Rightarrow$  Erhaltungssatz

$$\partial_{\rho} T_{\mu}^{\nu} = 0 \quad (285)$$

4-Impulserhaltung

$$P^{\mu} = \frac{1}{c} \int_{\partial V} dS_{\nu} T^{\mu\nu} \quad (286)$$

Wobei  $\partial V$  eine raumartige Hyperfläche darstellt mit  $dS_{\nu}$  dem Normalenvektor auf dieser Fläche, was dazu führt, dass dieser Vektor nur eine nicht verschwindende Komponenten in zeitlicher Richtung besitzt.

$$\Rightarrow P^{\mu} = \frac{1}{c} \int d^3x T^{\mu 0} \quad (287)$$

Zunächst

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_{\nu} q)} \partial_{\mu} q - g_{\mu}^{\nu} \Lambda \quad (288)$$

$$= \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_{\nu} A_{\rho})} \partial_{\mu} A_{\rho} - g_{\mu}^{\nu} \Lambda \quad (289)$$

lässt sich symmetrisieren. Interpretation der Komponenten von  $T^{\mu\nu}$

1.  $T^{00} \rightarrow$  Energiedichte
2.  $T^{i0} \rightarrow$  Impulsdichte
3. aus  $\partial_{\rho} T^{\mu\rho} \rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{\mu 0} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\mu i} = 0$   
 Integralform über den Satz von Gauß für  $\mu = 0$ :  
 $\frac{1}{c} \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} T^{00} = - \int_{\partial V} df_i T^{0i}$   
 $\rightarrow$  zeitliche Änderung der Energie=Energie die durch die Oberfläche weg fließt  
 $cT^{0i} = S^i$  Energiestromdichte mit dem (Poynting-Vektor  $S^i$ )
4. für  $\mu = i$  genauso  
 $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{j0} = - \frac{\partial}{\partial x^i} T^{ji}$   
 $\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} \int_V d^3x T^{j0} = - \oint_{\partial V} df_i T^{ji}$   
 $\rightarrow T^{ji}$  ist Impulsstromdichte  
 zeitliche Änderung des Impulses=Impulsstrom durch Oberfläche  
 $T^{ji}$  heißt auch maxwellscher Spannungstensor

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & \frac{1}{c} \vec{S} \\ \frac{1}{c} \vec{S} & \sigma^{ij} \end{pmatrix}_{\text{sym.}} \quad (290)$$

für das elektromagnetische Feld

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (291)$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\mu A_\rho F^{\nu\rho} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (292)$$

Rechenregel

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\rho)} \partial_\alpha A_\beta = \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu \quad (293)$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\rho)} \partial^\alpha A^\beta = g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \quad (294)$$

$$\text{symmetrisiere } \Phi^{\mu\nu\rho} = A^\mu F^{\nu\rho} \text{ (Vorfaktor?)} \quad (295)$$

$$\rightarrow T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\rho} F_\rho^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (296)$$

nachrechnen

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (297)$$

$$cT^{0i} = S^i \quad (298)$$

maxwellscher Spannungstensor

$$\sigma_{11} = \frac{1}{8\pi} (E_2^2 + E_3^2 - E_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_1^2) \quad (299)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{4\pi} (E_1 + E_2 + B_1 B_2) \quad (300)$$

5. zusätzlich: Beitrag der Teilchen: Index  $a$

- Massendichte  $\mu(\vec{x}) = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a)$  (analog zur Lagrangedichte) mit den Bahnkurven der Teilchen  $\vec{x}_a(t)$
- Geschwindigkeitsstromdichte  $u^\mu(x) = \sum_a u_a^\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a)$
- Massenstromdichte:  $\rightarrow \frac{1}{c} \mu \frac{dx^\rho}{dt}$  (analog zur Ladungsstromdichte)
- Impulsdichte  $T^{\rho 0} = c^2 \mu u^\rho$

$$\rightarrow T^{\rho\sigma} = \mu c u^\rho u^\sigma \frac{dS}{dt} \quad (301)$$

für elektromagnetische Felder:  $T_\rho^\rho = 0$  für Teilchen:  $T_\rho^\rho = \mu c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$  allgemein gilt  $T_\rho^\rho \geq 0$  Massenerhaltung:  $\partial_\rho \left( \frac{1}{c} \mu \frac{dx^\rho}{dt} \right) = 0$

## 3 Elektrodynamik

### 3.1 Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (302)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (303)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (304)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (305)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}} \quad (306)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (307)$$

⇒ Lorentzkraft

$$\dot{\vec{p}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \quad (308)$$

$$\Rightarrow mc \frac{du^\mu}{dS} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (309)$$

### 3.1.1 Klassifizierung von Problemstellungen

- Wie berechne ich das Feld einer gegebenen (möglicherweise bewegten) Ladungsverteilung
- Wie bewegen sich Ladungen in vorgegebenen Feldern

Betrachte die Spezialfälle

1. Statische Felder  $\dot{\vec{E}} = 0$  und/oder  $\dot{\vec{B}} = 0$   
 Elektrostatik  
 Magnetostatik
  - (a) homogene Felder ✓
  - (b) inhomogene Felder  
 wichtiger Spezialfall: Coulombproblem (rel.)
  - (c) Multipolfelder
2. Elektromagnetische Wellen  
 $\dot{\vec{E}} \neq 0$  und  $\dot{\vec{B}} \neq 0$ 
  - (a) im ladungsfreien Raum, d.h.  $\rho = 0, \vec{j} = 0$
  - (b) zeitabhängige Felder für bewegte Ladungen  
 → Abstrahlung von Elektromagnetischen Wellen

## 3.2 Statische Felder

### 3.2.1 Zum Coulombproblem

suche statische Lösung zu unbewegten Ladungen

$$\rho \neq 0, \dot{\rho} = 0, \vec{j} = 0 \quad (310)$$

Maxwellgleichungen reduzieren sich auf

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 4\pi\rho \text{ und } \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}_{\text{Ansatz: } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi} \quad (311)$$

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \quad (312)$$

für eine im Ursprung befindliche Punktladung

Invarianz unter Drehungen → Ansatz:  $\vec{E} = \vec{x}g(|\vec{x}|)$

$$\int d^3x \vec{\nabla} \vec{E} = \oint d\vec{f} \vec{E} \stackrel{!}{=} \int d^3x 4\pi\rho = 4\pi e \quad (313)$$

wähle  $V = \text{Kugel}$

$$\Rightarrow \int d^3x \vec{\nabla} \vec{E} \stackrel{!}{=} \int_{\text{Kugeloberfläche}} d\cos(\theta) d\rho \underbrace{|\vec{x}|^3 g(|\vec{x}|)} = 4\pi |\vec{x}|^3 g(|\vec{x}|) \Rightarrow \vec{E} = e \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (314)$$

**Wiederholung** Elektrodynamik

Coulombproblem

Maxwell-Gleichungen:

⊕ Annahme:  $\dot{\rho} = 0 \rightarrow \dot{\vec{E}} = 0$  ist möglich

⊕ Annahme:  $\vec{j} = 0 \rightarrow \dot{\vec{B}} = 0$  ist möglich

→  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow \text{Ansatz } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

→ Poissongleichung  $\Delta\phi = e\delta(\vec{x})$

$$\rightarrow \vec{E} = e \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \phi = \frac{e}{|\vec{x}|}$$

Für ein System von Punktladungen gilt dann:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{x} - \vec{x}_a) \quad (315)$$

$$\rightarrow \phi = \sum_a e_a \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_a|} \quad (316)$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen gilt demnach:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (317)$$

$$(318)$$

Dabei wird die folgende Relation verwendet:

$$\underbrace{\Delta \frac{1}{|\vec{x}|}}_{\text{Distribution}} = -4\pi\delta(\vec{x}) \quad (319)$$

Diese besagt im Endeffekt, dass man  $\Delta \frac{1}{|\vec{x}|}$  auch als Distribution auffassen kann, die dann wie ein Vielfaches der Deltadistribution wirkt.

Feldtensor:

Elektrostatistische Energie für ein System von Ladungen

$$\text{Energiedichte } T^{00} = W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

Energie

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E}^2 \quad (320)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{E} \vec{\nabla} \phi \quad (321)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \left( \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{E} \phi)}_{=0} - \phi \vec{\nabla} \vec{E} \right) \quad (322)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x \phi \rho \text{ für } \rho = e\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (323)$$

Für eine Punktladung gilt demnach

$$U = \frac{1}{2} e\phi(0) \text{ ist Divergent} \quad (324)$$

$\Rightarrow$  die Selbstenergie ist divergent.

$\rightarrow$  Elektrodynamik selbst zeigt, dass sie nur einen begrenzten Anwendungsbereich besitzt.

$\rightarrow$  Quantenelektrodynamik

$\rightarrow$  Modifikation der Physik bei kleinen Abständen

für Elektronen

$$\frac{e^2}{2r_0} = mc^2 \quad (325)$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{e^2}{2mc^2} = 3 * 10^{-15} m \text{ mit } r_0 \text{ als klassischem Elektronenradius} \quad (326)$$

$\rightarrow$  für ein System von Ladungen: Wechselwirkungsenergie

$$U = \frac{1}{3} \sum_a e_a \left( \sum_b \frac{e_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \right) \quad (327)$$

Selbstenergie streichen:

$$U' = \frac{1}{3} \sum_a e_a \left( \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \right) \quad (328)$$

**Relativistisches Teilchen im Coulombpotential** Coulombpotential  $\phi = \frac{e'}{r}$  (Ladung  $e'$  im Ursprung)  
 Testladung  $e \ll e'$  die das oben angegebene Potential nicht stört. Koordinaten der Testladung  $\vec{x} = (r \sin(\theta), r \cos(\theta))$   
 Durch Invarianz des Potentials unter Drehungen gilt die Drehimpulserhaltung und damit bewegt sich das Teilchen nur in einer Ebene.  
 (Lorentz-Kraft  $\rightarrow$  Bew.-Gl.)  
 Impuls:

$$\vec{p} = \gamma m \dot{\vec{x}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \quad (329)$$

$$= \gamma m \left( \dot{r} \sin(\theta) + r \dot{\theta} \cos \theta, \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \right) = \frac{e}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})} \Big|_{t'=t-\frac{R}{c}} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta, 0 \quad (330)$$

$$p^2 = \gamma^2 m^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (331)$$

Drehimpuls:  $\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$

$M = |\vec{M}| = \gamma m r^2 \dot{\theta}$

Energie (Gesamtenergie)

$$\epsilon = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \frac{\alpha}{r} \quad (332)$$

2 Erhaltungsgrößen

$$\epsilon = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \frac{\alpha}{r} \quad (333)$$

$$M = \gamma m r^2 \dot{\theta} \text{ mit } p_r = \gamma m \dot{r} \quad (334)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \quad (335)$$

Wobei  $\dot{\vec{x}}^2$  die Größen  $\dot{r}$  und  $\dot{\theta}$  enthält.

$$\epsilon = \epsilon(\dot{r}, \dot{\theta}) \quad (336)$$

$$M = M(\dot{r}, \dot{\theta}) \quad (337)$$

$$\Rightarrow \text{berechne } \dot{r}, \dot{\theta} \text{ als Funktionen von } \epsilon, M \quad (338)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{M^2 c^4}{r^2 (\epsilon r - \alpha)^2} \quad (339)$$

$$\dot{r}^2 = c^2 \frac{(\epsilon r - \alpha)^2 - c^2 (M^2 + m^2 c^2 r^2)}{(\epsilon r - \alpha)^2} \quad (340)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = f(r, \epsilon, M) \quad (341)$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad (342)$$

Bahnkurve  $\theta = \theta(r)$  oder  $r = r(\theta)$  oder  $f(r, \theta) = \text{const}$

### Fallunterscheidungen

1.  $\alpha > 0, \alpha < 0$

2.  $|\alpha| = cM, |\alpha| < cM, |\alpha| > cM$

Dies führt zu folgenden Folgerungen für den ersten Punkt:

$\alpha > 0$  abstoßende Ladungen

$\rightarrow \epsilon > 0 \forall r$

für  $r \rightarrow 0 : \epsilon \rightarrow \infty$

$\rightarrow$  "Hyperbel" (im Relativistischen nur näherungsweise für kleine  $\gamma$ ) Bemerkungen: keine Lösung ist periodisch (für  $\alpha > 0$  und  $\alpha < 0$ ):

$$\text{z.B. } |\alpha| < cM \quad (343)$$

$$(c^2 M^2 - \alpha^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M\epsilon)^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - \alpha^2)} \cos \left( \theta \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2M^2}} \right) - \epsilon \alpha \quad (344)$$

offene Rosetten

für  $\alpha < 0$ ,  $|\alpha| > Mc$  für  $\theta \rightarrow \infty$  gilt  $r \rightarrow 0$  Also stürzt das Teilchen ins Zentrum. Allerdings tut es das in endlicher Zeit.

### 3.2.2 Felder von vorgegebenen Ladungsverteilungen

Maxwell-Gleichungen für Statik:

$\rightarrow \rho, \vec{j}$  legen Divergen und Rotation mit der Annahme, dass das Feld im unendlichen verschwindet, also für  $\vec{x} \rightarrow \infty$  gilt  $\phi(\vec{x}) \rightarrow 0$

**Satz:** Ein Vektorfeld ist eindeutig festgelegt, wenn in allen Raumpunkten die Quellen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  und die Wirbel  $\vec{\nabla} \times \vec{V}$  bekannt sind und wenn es im unendlichen hinreichend schnell verschwindet.

Ergänzung: Satz von Helmholtz Ein Vektorfeld  $\vec{V}(\vec{x})$  das einschließlich seiner Ableitungen mit hinreichender Ordnung gegen 0 geht, wenn  $x$  gegen unendlich geht lässt sich dieses als

## 3.3 Multipolentwicklung

### 3.3.1 Dipolterm

Für  $R \gg |\vec{x}_a|$  lässt sich das Potential für Punktladungen  $e_a$  sinnvoll entwickeln:

$$\phi = \sum \frac{e_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a|} \text{ Taylorentwicklung } \Rightarrow \phi = \frac{Q}{R} - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} + \dots \quad (345)$$

$$Q = \text{Gesamtladung} = \sum e_a \quad (346)$$

$$D = \text{Dipolmoment} = \sum e_a \vec{x}_a \rightarrow \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x} \text{ (Dipolpotential)} \quad (347)$$

Sortiert nach positiven und negativen Ladungen

$$\rightarrow \vec{D} = \sum_{pos} e_a^+ \vec{x}_a - \sum_{neg} e_a^- \vec{x}_a \quad (348)$$

$$\text{Mit dem Ladungsschwerpunkt} \quad (349)$$

$$\vec{X}^\pm = \frac{\sum e_a^\pm \vec{x}_a}{\sum e_a^\pm} \quad (350)$$

$$Q^\pm = \sum e_a^\pm \quad (351)$$

$$\vec{D} = Q^+ \vec{X}^+ - Q^- \vec{X}^- \quad (352)$$

$$\text{z.B.: } Q = Q^+ - Q^- = 0 \leftarrow \text{Wichtiger Spezialfall} \quad (353)$$

$$\vec{D} = Q^+ (\vec{X}^+ - \vec{X}^-) \quad (354)$$

für  $Q = 0$

$$\phi(\vec{x}) = -\vec{D} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{R} \quad (355)$$

$$= \vec{D} \frac{\vec{x}}{R^3} = \vec{D} \frac{\vec{e}_x}{R^2} \quad (356)$$

$$\rightarrow \phi \propto \frac{1}{R^2} \quad (357)$$

Für die Feldstärke gilt dann

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (358)$$

$$= -\frac{\vec{D}}{R^3} + 3 \frac{\vec{D} \vec{x}}{R^5} \vec{x} \propto \frac{1}{R^3} \quad (359)$$

besitzt eine axialsymmetrische Komponente gegeben durch  $\frac{\vec{D}}{R^3}$

### 3.3.2 Quadrupolmoment

$$\phi^{(2)}(\vec{x}) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_a e_a x_a^i x_a^j}_{\text{Eigenschaften der Ladungsverteilung}} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{R}}_{\text{Position des Beobachters}} \quad (360)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{x^i}{R^3} = -\underbrace{\frac{\delta^{ij}}{R^3} + 3 \frac{x^i x^j}{R^5}}_{\text{Spur}=0} \quad (361)$$

$$\Delta \frac{1}{R} = 0 \quad (362)$$

Der Anteil  $\propto \delta^{ij}$  in  $\frac{1}{2} \sum e_a x_a^i x_a^j$  verschwindet wegen der verschwindenden Spur.

Definition: Quadrupolmoment

$$Q^{ij} = \sum e_a (3e x_a^i x_a^j - \delta^{ij} |\vec{x}_a|^2) \quad (363)$$

mit

$$\sum Q^{ii} = \sum_{i,j} Q^{ij} \delta_{ij} = 0 \quad (364)$$

$Q^{ij}$  ist also spurfrei und symmetrisch

$$\Rightarrow \phi^{(2)} = \frac{1}{6} Q^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{R} \propto \frac{1}{R^3} \quad (365)$$

### 3.3.3 Multipolentwicklung allgemein

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \phi^{(4)} + \dots \quad (366)$$

$$\phi^{(n)} = \text{n-te Ableitung von } \frac{1}{R} \propto \frac{1}{R^{n+1}} \quad (367)$$

Charakteristische Eigenschaften der Ladungsverteilung

Multipole	$\phi^{(n)}$	
$Q = \text{Gesamtladung} = \text{Monopol}$	$\sum \frac{e_a}{R} = \frac{Q}{R}$	n-te Ableitung:
$\vec{D} = \text{Dipolmoment}$	$\frac{D}{R^2} \cos(\theta)$	
$Q_{ij} = \text{Quadrupolmoment}$	$\frac{Q}{R^3} \frac{1}{4} (3 \cos^2(\theta) - 1)$	

(2n)-Polmoment  $M_{i_1 \dots i_n}$

symmetrische, spurfreie Tensoren n-ter Stufe mit  $2n + 1$  Komponenten

Ordnung	relevante Komponenten
Monopol	1
Dipol	1
Quadrupol	2 (Hauptwerte)
$\vdots$	$\vdots$
2n-Pol	2(n-1)

Multipolentwicklung entspricht der Entwicklung nach den Lösungen der Laplace/Poisson-Gleichung nach Kugelflächenfunktionen

**Einschub Quantenmechanik** Schrödingergleichung  $\rightarrow \Delta$  für kin. Energie

für zentralsymmetrische Systeme  $\rightarrow$  sphärische Koordinaten

Eigenzustände des Drehimpulses

### Laplace in sphärischen Koordinaten

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Phi^2} \quad (368)$$

Lösung durch Faktorisierung der Lösungsfunktion

$$\phi(r, \theta, \Phi) = R(r)P(\theta)f(\Phi) \quad (369)$$

$$\text{für R: Lösungen } \propto c^{(1)}r^{l+1} + c^{(2)}r^{-l} \quad (370)$$

$$\text{für P: } \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} P(\theta) \right) = 0 \quad (371)$$

$$\text{für f: } \frac{d^2}{d\Phi^2} f(\Phi) + m^2 f(\Phi) = 0 \quad (372)$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } f = e^{im\Phi}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (373)$$

$$\text{für } P(\theta)P_l^m(\theta) = (-1)^m (1 - \cos^2(\theta))^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d \cos(\theta)^m} P_l(\cos(\theta)) \quad (374)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots \text{ und } m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (375)$$

$$\text{und } P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \quad (376)$$

$$\text{darraus folgen Kugelflächenfunktionen} \quad (377)$$

$$Y_{lm}(\theta, \Phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\Phi} \quad (378)$$

Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \Phi) Y_{lm}^*(\theta', \Phi') = \delta(\cos(\theta) - \cos(\theta')) \delta(\Phi - \Phi') \quad (379)$$

Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{+1} d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\Phi Y_{lm}(\theta, \Phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \Phi) = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (380)$$

→ beliebige Funktion auf der Einheitskugel ist Linearkombination der  $Y_{lm}$  (Basis)

### 3.3.4 Multipolentwicklung (Wiederholung)

$$\phi(\vec{x}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a|} \rightarrow_{|\vec{x}|=R > |\vec{x}_a|} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M_{2l}}{R^{l+1}} \quad (381)$$

$$M_{2l} \rightarrow 2l - \text{Pole} \quad (382)$$

$$\Delta \phi(\vec{x}) = -4\pi \delta(\vec{x}) \quad (383)$$

Eigenfunktionen des Laplace-Operators

Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \Phi) \rightarrow P_l^m, P_l \quad (384)$$

Legendre Polynome

Vollständigkeit

Orthogonalität

**Anwendung** Kontinuierliche Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$

axialsymmetrisch

$\Phi$ -Abhängigkeit nicht vorhanden

→ nur  $m = 0$ , nur  $P_l$



explizit für Greensche Funktion

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x}\vec{x}' + \vec{x}'^2}} \quad (385)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{R\sqrt{1-2\frac{r'}{R}\cos\alpha+\frac{r'^2}{R^2}}} & R > r' \text{ mit } t = \frac{r'}{R} \text{ und } z = \cos\alpha \\ \frac{1}{r'\sqrt{1-2\frac{R}{r'}\cos\alpha+\frac{R^2}{r'^2}}} & r' > R \text{ mit } t = \frac{R}{r'} \text{ und } z = \cos\alpha \end{cases} \quad (386)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}}_{\text{erzeugende Funktion der Legende Polynome}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(z) \quad (387)$$

Spezialfall:  $z = 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \underbrace{P_l(1)}_{=1} \quad (388)$$

$$\rightarrow \phi(\vec{x}) = -4\pi \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (389)$$

$$= -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} \underbrace{\int dr' r'^2 \int dz 2\pi \rho(r', z) r'^l P_l(z)}_{M_{2l}} \quad (390)$$

**Anwendung für allgemeine Ladungsverteilung**  $\rho(\vec{x})$  Greensche Funktion:  $\triangle G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$

Polarkoordinaten:  $\vec{x} \rightarrow R, \theta, \Phi$

$\vec{x}' \rightarrow R', \theta', \Phi'$  (fest)

Vollständigkeit der  $Y_{l,m}$ :

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{R^2} \delta(R - r') \delta(\Phi - \Phi') \delta(\theta - \theta') \quad (391)$$

$$= \frac{1}{R^2} \delta(R - r') \sum_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \Phi) Y_{l,m}^*(\theta', \Phi') \quad (392)$$

$$(393)$$

Somit folgt als Ansatz für  $G(R, \theta, \Phi, r', \theta', \Phi')$

$$G(R, \theta, \Phi, r', \theta', \Phi') = \sum_{l,m} A_{l,m}(R, r', \theta', \Phi') Y_{l,m}(\theta, \Phi) \quad (394)$$

$$\rightarrow A_{l,m}(R, r', \theta', \Phi') \underset{\text{Ansatz}}{=} G_R(R, r') Y_{l,m}(\theta', \Phi') \quad (395)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) G_R - \frac{l(l+1)}{R^2} G_R = -\frac{1}{R^2} \delta(R - r') \quad (396)$$

Ansatz: Potenzen  $G_R(R, r') = a(r') R^b$

$\rightarrow$  Lösungen:  $b = l$ , oder  $-(l+1)$

$\rightarrow$  für  $R > r'$  und  $G_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ :  $G_R = N_l \frac{r'^l}{R^{l+1}}$  Ergebnis für  $G$ :

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = - \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{R^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \Phi) Y_{l,m}^*(\theta', \Phi') \quad (397)$$

für das Potential gilt dann:

$$\phi(\vec{x}) = -4\pi \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') \quad (398)$$

$$= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{R^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \Phi) M_{l,m} \quad (399)$$

$$\text{mit } M_{lm} = \int dr' (r')^2 \int d\cos\theta' \int d\Phi' (r')^l Y_{l,m}^*(\theta', \Phi') \rho(\vec{x}') \quad (400)$$

$$= \text{sphärische Multipolmomente} \quad (401)$$

Somit können wir die Eigenschaften von  $\rho$  faktorisieren.

**Anwendung: Wechselwirkungsenergie** für Systeme von Ladungen in vorgegebenem Potential  $\phi(\vec{x})$   
 Variation von  $\phi(\vec{x})$  klein über Längen des Systems  
 → Entwicklung nach Potenzen von  $\vec{x}'$

$$\phi(\vec{x}') = \phi(0) + \vec{x}' \vec{\nabla} \phi(0) + \frac{1}{2} x'_i x'_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'_j \partial x'_i}(0) + \dots \quad (402)$$

Wechselwirkungsenergie für ein System von Punktladungen

$$U = \sum_a e_a \phi(\vec{x}_a) \quad (403)$$

$$\text{Einsetzen: } U = Q\phi(0) + \underbrace{\vec{D}}_{\text{Orientierung Winkel } \cos \alpha} \overbrace{\vec{\nabla} \phi(0)}^{-\vec{E}} + \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'_j \partial x'_i}(0) + \dots \quad (404)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} \rightarrow \text{Drehmoment} \quad (405)$$

$$U = Q\phi - \vec{D}\vec{E} + \dots \quad (406)$$

### 3.4 Magnetostatik

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B} \quad (407)$$

$$\rho \rightarrow \vec{j} \text{ Rotation} \quad (408)$$

$$\phi \rightarrow \vec{A} \quad (409)$$

Maxwell-Gleichungen:

$$\dot{\rho} = 0, \dot{\vec{j}} = 0, \quad \vec{j} \neq 0 \quad (410)$$

$$\rightarrow \text{es gibt Lösungen: } \dot{\vec{E}} = 0, \dot{\vec{B}} = 0, \quad \vec{B} \neq 0 \quad (411)$$

physikalisch statische Stromverteilung = bewegte Ladungen

⇒ Zeitabhängigkeit ⇒  $\dot{\rho} \neq 0, \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{B}} \neq 0$

⇒ Magnetostatik ist Näherung

physikalische Näherung: zeitliche Mittelung!

Diese ist möglich falls:

$$\bar{\vec{E}} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d\vec{E}}{dt} = \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{groß, } T \rightarrow \infty} (\vec{E}(T) - \vec{E}(0)) \rightarrow 0 \quad (412)$$

Somit ist die Voraussetzung  $\vec{E}(t)$  beschränkt.

→ bewegte Ladungen, die sich in einem endlichen räumlichen Gebiet mit endlichen Impulsen bewegen.

### 3.5 Magnetostatik

Ströme - bewegte Ladungen

Zeitmittelung

$$\bar{\vec{E}} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\vec{E}(0) - \vec{E}(T)}{T} \rightarrow 0 \text{ für } T \rightarrow \infty \text{ und } \vec{E}(t) \text{ ist begrenzt} \quad (413)$$

Stationäre Bewegung

$$\rightarrow \bar{\rho} = 0 \quad (414)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung } \vec{\nabla} \cdot \bar{\vec{j}} = 0 \quad (415)$$

$$0 = \int d^3x \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \bar{j}^i \right) x^k = - \int d^3x \bar{j}^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} x^k \right) = - \int d^3x \bar{j}^k \quad (416)$$

Voraussetzung für Anwendbarkeit der Magnetostatik

- Ladungen zu allen Zeiten in endlichem Raumgebiet
- endliche Impulse
- ausreichend lange Messzeit (schnelle Anpassung der Ladungen an geänderte äußere Bedingungen)
- schwache Magnetfelder

### Grundgleichungen der Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0 \rightarrow \text{Ansatz: } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (417)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (418)$$

Eichbedingung: Coulombeichung  $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \quad (419)$$

$$\rightarrow \Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \text{ Siehe Elektrostatik} \quad (420)$$

Als Lösung folgt also:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rightarrow \vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \text{ für } \vec{A}, \vec{B} \rightarrow 0 \text{ im Unendlichen} \quad (421)$$

### Multipolentwicklung (Feld in große Abständen)

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{R} - \vec{x}' \vec{\nabla} \frac{1}{R} + \dots \quad (422)$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{R} - \frac{\vec{x}' \vec{x}}{R^3} + \dots \quad (423)$$

$$\text{in } \vec{A} \text{ eingesetzt 1. Term: } \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{R} = 0 \text{ (d.h. keine Monopole)} \quad (424)$$

$$2. \text{ Term: } \frac{1}{cR^3} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') (\vec{x}' \vec{x}) \quad (425)$$

$$(426)$$

für Punktladungen gilt also

$$\vec{j}(\vec{x}') = \sum_a e_a \vec{v}_a, \vec{v}_a = \frac{d\vec{x}_a}{dt} \text{ auszurechnen} \quad (427)$$

$$\sum_a \overline{e_a \vec{v}_a (\vec{x}_a \vec{x})} = \sum_a \overline{e_a \frac{d\vec{x}_a}{dt} (\vec{x}_a \vec{x})} \quad (428)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_a \overline{e_a \vec{x}_a (\vec{x}_a \vec{x})}}_{=0 \text{ falls Ladungen in einem räumlich begrenzten Bereich bleiben}} + \frac{1}{2} \sum_a \overline{e_a \frac{d\vec{x}_a}{dt} (\vec{x}_a \vec{x})} - \frac{1}{2} \sum_a \overline{e_a \vec{x}_a (\vec{v}_a \vec{x})} \quad (429)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_a \overline{e_a (\vec{v}_a (\vec{x}_a \vec{x}) - \vec{x}_a (\vec{v}_a \vec{x}))} = \frac{1}{2} \sum_a \overline{e_a (\vec{x}_a \times \vec{v}_a) \times \vec{x}} \quad (430)$$

$\rightarrow$  Definition: magnetisches Moment:  $\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_a \overline{e_a (\vec{x}_a \times \vec{v}_a)}$

$\Rightarrow$  2. Term in der Multipolentwicklung für  $\vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{1}{R^3} \vec{m} \times \vec{x} \quad (431)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{R^3} \vec{m} \times \vec{x} \right) \quad (432)$$

$$= \frac{3\vec{n}(\vec{m}\vec{n}) - \vec{m}}{R^3}, \vec{n} = \frac{\vec{x}}{R} \quad (433)$$

Drehimpuls:  $\vec{L} = \sum_a m_a \vec{x}_a \times \vec{v}_a$  falls Verhältnis  $\frac{e_a}{m_a}$  für alle Teilchen gleich ist gilt:

$$\vec{m} = \frac{e}{2cm} \vec{L} \quad (434)$$

magnetisches Dipolmoment  $\leftarrow$  mechanischer Drehimpuls.

Lorentz-Kraft:  $\vec{F} = \sum_c \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{d}{dt}(\dots) = 0$

Drehmoment:

$$\vec{K} = \sum_c \frac{e}{c} \underbrace{\vec{x} \times (\vec{v} \times \vec{B})}_{\vec{v}(\vec{x}\vec{B} - \vec{B}(\vec{v}\vec{x}))} \neq 0 \quad (435)$$

$$= \vec{v}(\vec{x}\vec{B} - \frac{1}{2} \left( \overline{\vec{B} \frac{d\vec{x}^2}{dt}} \right)) \quad (436)$$

$$(437)$$

### Larmor Präzession

$$\vec{m} \times \vec{B} = \frac{2mc}{e} \dot{\vec{m}} \quad (438)$$

$$\dot{\vec{m}} = -\vec{\Omega} \times \vec{m} \quad (439)$$

$$\vec{\Omega} = \frac{e}{2mc} \vec{B} \quad (440)$$

$$\vec{K} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \quad (441)$$

$$\Delta t_{\text{groß}} \gg \text{Zeitmittelung} \quad (442)$$

Vorsicht, alle Mittelungen hier sind nur über die Mikroskopischen Skalen gedacht und kein Zeitmittel über den gesamten betrachteten Zeitraum.

**Magnetischer Dipol in äußerem Feld**  $\vec{B}$  sei zeitlich konstant

Herleitung über den Lagrangeformalismus. (in Magnetostatik, also  $\phi = 0$ )

(allgemein:  $S = -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu A_\mu \rightarrow \frac{1}{c} \int dt \int d^3x \vec{j} \vec{A}$ )

$$L = \sum_a \frac{e_a}{c} \vec{v}_a \vec{A} \text{ für eine Punktladung} \quad (443)$$

$$|\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \quad (444)$$

$$| \text{ für ein konstantes und Ortsunabhängiges } B\text{-Feld} = \sum_a \frac{e_a}{2c} \vec{v}_a (\vec{B} \times \vec{x}) = \sum_a \frac{e_a}{2c} \vec{B} (\vec{x} \times \vec{v}_a) = \vec{m} \vec{B} \quad (445)$$

In der Elektrostatik galt:

$$L_E = \vec{D} \vec{E} \text{ Dipol-Energie} \quad (446)$$

$\rightarrow$  Kraftwirkungen

## 3.6 Elektrodynamik im Kontinuum

mikroskopisch:

- punktförmige Ladungen im Vakuum
- teilweise gebunden, halten sich in begrenzten Raumgebieten auf
- ortsfeste Ladungen deren Bewegung man vernachlässigt (Atomkerne)
- mehr oder weniger frei bewegliche Elektronen
- magnetische Momente und Spins treten auf

$\Rightarrow$  Quantenmechanik oder Quantenfeldtheorie müssen zur Beschreibung verwendet werden.

**Ziel: makroskopische Eigenschaften** räumliche Mittelung (groß/klein) Wirft Fragen auf:

- Wie groß darf man die Volumina dieser Mittelung wählen
- Ab wann beginnt die Näherung eines Kontinuums zu nicht vernachlässigbaren Fehlern zu führen

Diese Mittelung wird hier nicht weiter notiert sondern für alle Größen implizit angenommen.

**Überblick** (keine mikroskopischen Eigenschaften betrachtet, dies ist Thema der Statistischen Physik)

- Leiter und Nichtleiter (Dielektrika)
- frei bewegliche Ladungen - verschiebbare Ladungen
- Magnetismus
  - Paramagnetismus
  - Diamagnetismus
  - Ferromagnetismus

### 3.6.1 Elektrostatik von Leitern

Frei bewegliche Ladungen

⇒ jedes elektrische Feld führt dazu, dass die Ladungen ihre Positionen ändern, d.h. eine Bewegung dieser Ladungsträger findet statt

⇒ ein elektrisches Feld erzeugt Ströme

Die Ladungsträger sind jedoch nicht völlig frei beweglich, durch Streuung an anderen Elektronen und Atomrümpfen verlieren sie Energie und werden Abgebremst.

⇒ Ströme dissipieren Energie

→ keine stationären Ströme

⇒  $\vec{E}$  im Inneren von Leitern verschwindet schnell

⇒ frei bewegliche Ladungen: an der Oberfläche

→ Problemstellung für Elektrostatik

- Feld im Außenraum
- Ladungsverteilung auf den Oberflächen der Leiter

Im Außenraum:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

Ansatz:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  mit  $\Delta\phi = 0$

und an der Oberfläche  $E_z$  in der Nähe der Oberfläche:  $\neq 0$  für homogene Oberflächen (wir nehmen an, dass die betrachtete Auflösung der Oberfläche so groß ist, dass Atome und Elektronenverteilung quasikontinuierlich sind):

→  $\frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_z}{\partial y}$  bleiben endlich.

Wegen  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow$  auch  $\frac{\partial E_x}{\partial z}$  und  $\frac{\partial E_y}{\partial z}$  sind endlich

⇒  $E_x, E_y$  sind stetig in  $z$ -Richtung

⇒  $\vec{E}_{\text{tangential}} = 0$  auf der Oberfläche

⇒ wegen  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  sind somit alle Leiteroberflächen in der Elektrostatik Äquipotentialflächen.

Maxwellgleichungen mit Randbedingungen

- $\vec{E}_{\text{tangential}} = 0$  auf Oberflächen
- $E_{\text{normal}} = 4\pi\sigma$  (Herleitung unten)

Ladungsverteilung auf Oberflächen

Flächenladungsdichte  $\sigma = \rho dz$  ( $\rho = \frac{Q}{dV} = \frac{Q}{dF dz} = \sigma \frac{1}{dz}$ )

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (447)$$

$$\Rightarrow \int_{\text{Volumenintegral}} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \int d^3x \rho \quad (448)$$

$$\Rightarrow \int_{\text{Satz von Gauß}} d\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi \int d\vec{f} \cdot \vec{n} \sigma \quad (449)$$

$$\Rightarrow E_{\text{normal}} = 4\pi\sigma \quad (450)$$

**Elektrostatik von Nichtleitern** Keine frei beweglichen Ladungsträger

→  $\vec{E} \neq 0$  im Inneren möglich

Bezeichnungen:

- mikroskopisch  $\vec{e}$
- makroskopisch  $\vec{E} = \frac{1}{V} \int_V d^3x \vec{e}(\vec{x})$

Maxwellgleichungen nach räumlicher Mittelung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (451)$$

wichtiger Fall: keine zusätzlichen Ladungen auf dem Nichtleiter

$$\rightarrow \int d^3x \rho = 0 \quad (452)$$

für beliebig geformtes Volumen  $\Rightarrow$

$$\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (453)$$

Betrachte Oberfläche, die den Körper ganz einschließt

$$0 = \int d^3x \rho = - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \oint d\vec{f} \quad (454)$$

$$\Rightarrow \vec{P} = 0 \text{ im Außenraum} \quad (455)$$

Bemerkung:  $\vec{P}$  ist damit nicht eindeutig bestimmt

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{f} \quad (456)$$

Führt für beliebige Vektorfunktion  $f$  zu keiner Änderung der physikalischen Aussage.

$\vec{P}$  wird dielektrische Polarisierung genannt

$\vec{P} \neq 0$  in polarisierbaren Medien

betrachte nun das Volumenelement an der Oberfläche

$$\Rightarrow \underline{P_{\text{Normal}}} = \sigma \quad (457)$$

$\vec{P}$  ist die Dichte des elektrischen Dipolmoments

$$\int d^3x \vec{x} \rho(\vec{x}) = - \int d^3x \vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \quad (458)$$

$$\rightarrow \int d^3x x_k \rho(\vec{x}) = - \int d^3x \left( \partial_i (x_k P_i) - P_i \underbrace{(\partial x_k)}_{\delta_{ik}} \right) \quad (459)$$

$$= \underbrace{\int d^3x (\partial_i (x_k P_i))}_{\text{Satz von Gauß+Randterme}=0} - \int d^3x P_k \quad (460)$$

$$= \int d^3x P_k \quad (461)$$

zusammen ergibt sich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (462)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (463)$$

bei zusätzlichen Ladungen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{extern}}$

$\vec{D}$  heißt dielektrische Induktion oder (di)elektrische Verschiebung

Feld  $\vec{E}$  verschiebt im mikroskopischen Ladungen und erzeugt damit eine Dipoldichte, die von den Materialeigenschaften abhängt.

Zusätzliche Informationen: Zusammenhang zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$

allgemein  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$

Potenzreihenentwicklung (für schwache Felder):

$$D_i = D_{i,0} + \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k + \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ikl} E_k E_l \dots \quad (464)$$

- $\vec{D}_0 \neq 0$  z.B. in Kristallen möglich (Permanenz)
  - i.a. ist  $\epsilon$  ein Tensor
  - einfachste Situation:  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
- allgemein gilt  $\epsilon > 1$ .

### 3.7 Wiederholung

#### 3.7.1 Magnetostatik

Zeitmittelung (ßchnelle" Bewegungen)

$$\vec{E} = 0$$

Multipolentwicklung, magnetisches Moment

#### 3.7.2 Elektrostatik für Leiter (Randwertprobleme)

#### 3.7.3 Elektrostatik von Materie

räumliche Mittelung

mikroskopisches elektrisches Feld  $\vec{e}(\vec{x})$

makroskopisches elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{x})$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{V(\vec{x})} \int_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{e}(\vec{x}') \quad (465)$$

### 3.8 Magnetostatik in Materie

mikroskopisch  $\vec{b}(\vec{x})$

$$\vec{\nabla} \vec{b}(\vec{x}) = 0 \vec{\nabla} \times \vec{b}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \dot{\vec{e}}(\vec{x}) + \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v} \quad (466)$$

gemittelttes Feld

(Zeitmittelung:  $\vec{e} = 0$ )

räumliche Mittelung  $\vec{b} \rightarrow \vec{B}$

$$\vec{\nabla} \vec{b} = 0 \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v} \quad (467)$$

Materie:

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \vec{\rho} \vec{v} = 0 \quad (468)$$

Ansatz

$$\vec{\rho} \vec{v} = c \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (469)$$

im Allgemeinen gilt in Materie  $\vec{M} \neq 0$ , denn

$$c \int_F d\vec{f} \vec{\nabla} \times \vec{M} = c \oint_{\partial F} d\vec{x} \vec{M} = 0 \quad (470)$$

(Analogie: Polarisation  $\int_V d^3x \rho = \int d^3x \vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$ )

$\vec{\rho} \vec{v}$  einsetzen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (471)$$

$$\text{Def.: } \vec{B} - 4\pi \vec{M} = \vec{H} \quad (472)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad (473)$$

- $\vec{M}$  ist nicht eindeutig:

$$\vec{M} \rightarrow \vec{M} + \vec{\nabla} f \quad (474)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \quad (475)$$

festlegen: mikroskopische Eigenschaften

$\vec{M}$  = Dichte des magnetischen Moments

$$\frac{1}{2c} \int d^3x \vec{x} \times \overline{\rho \vec{v}} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \quad (476)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\partial V} \vec{x} \times (d\vec{f} \times \vec{M})}_{=0} - \frac{1}{2} \int d^3x \underbrace{(\vec{M} \times \vec{\nabla}) \times \vec{x}}_{=-2\vec{M}} \quad (477)$$

$$= \int d^3x \vec{M} \quad (478)$$

### Bemerkungen zu $\vec{M}$

- $\vec{M} = 0$  in magnetischen Materialien
- einfache Situation (häufig!):  $\vec{B} = \mu \vec{H}$   
 $\mu$  = magnetische Permeabilität  
 $\vec{M} = \chi \vec{H}$   
 $\chi$  = magnetische Suszeptibilität  $\chi = \frac{\mu-1}{4\pi}$
- Aus der Thermodynamik lässt sich folgern  $\Rightarrow \mu > 0$
- $\mu \ll 1$ , relativistischer Effekt  $\propto \frac{v^2}{c^2}$
- Dies lässt sich vor allem in Kristallstrukturen erreichen
- Anisotrope Materialien  $\rightarrow B_i = \mu_{ik} H^k$
- im Allgemeinen (vor allem bei starken Feldern):  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$

## 3.9 Elektromagnetische Wellen

Bisher:  $\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{B}} = 0$  Jetzt:  $\dot{\vec{E}} \neq 0$ ,  $\dot{\vec{B}} \neq 0$  im Vakuum:  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}} \vec{\nabla} \vec{E} = 0 \quad (479)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{E}} \vec{\nabla} \vec{B} = 0 \quad (480)$$

Für dieses Problem gibt es nicht triviale Lösungen!

für 4-Potentiale: Coulomb-Eichung

$$A^0 = \phi = 0 \vec{\nabla} \vec{A} = 0 \quad (481)$$

$$\rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}}, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (482)$$

$$\text{z.B. } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}}_{-\Delta \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} \quad (483)$$

$\rightarrow$  Wellengleichung

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0 \quad (484)$$



**in 4-Schreibweise** Maxwellgleichungen:  $\partial_\mu F^{\mu 0} = 0$  (für  $j^\nu = 0$ ) Einsetzen:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (485)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) \quad (486)$$

$$) = 0 \quad (487)$$

Mit der Lorentzzeichnung ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) ergibt sich:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0, \text{ d'Alembert-Operator} \quad (488)$$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (489)$$

Dies gilt auch für jede Komponente von  $A^\mu, \vec{E}, \vec{B}$  (lineare Operatoren) im folgenden  $f = A^\mu, \vec{E}, \vec{B}$

$$\square f = 0 \quad (490)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) f = 0 \quad (491)$$

**Lösung der Wellengleichung** zunächst 1-dimensional  $f(x, t)$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f = 0 \quad (492)$$

neue Variable:  $\xi = t - \frac{x}{c}, \eta = t + \frac{x}{c}$

invertiert:  $t = \frac{\xi + \eta}{2}, x = c \frac{\eta - \xi}{2}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (493)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f = 0 \quad (494)$$

allgemeinen Lösung:  $f(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$

beziehungsweise  $f(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$

( $f_1, f_2$  sind unbestimmt)

(Randwerte!)

z.B.:  $f_2 = 0$ , also  $\vec{E} = \vec{E}(x - ct)$

Feldkomponenten haben gleiche Werte für alle

$$x = ct + \text{Konstanten} \quad (495)$$

→ Feldkonfiguration bewegt sich in x-Richtung mit Lichtgeschwindigkeit (analog für  $f_1 = 0$ )

**Monochromatische Wellen** Lösung mit Zeitabhängigkeit  $\propto \cos(\omega t + \alpha)$

Einsetzen in die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = -\omega^2 f \quad (496)$$

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \quad (497)$$

$$\Rightarrow f \propto \cos\left(\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right) + \alpha_0\right) \quad (498)$$

Idee komplexe Funktionen

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha), \operatorname{Re}(e^{i\alpha}) = \cos(\alpha) \quad (499)$$

$$\text{Regel: } e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (500)$$

$$\text{Für monochromatische Wellen: } \vec{A} = \operatorname{Re}(\vec{A}_0 * e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}) \quad (501)$$

### 3.9.1 Wiederholung

Wellengleichung im Vakuum

$$\square A^\mu = 0 \quad (502)$$

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0 \quad (503)$$

(innerhalb der Lorentz-, Coulomb-Eichung)

Allgemeine Lösung für  $A^i, E^i, B^i \rightarrow f(x, t)$

$$f = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (504)$$

Basislösungen

Monochromatische Wellen  $f_1 \propto \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$

oder  $\vec{A} = \text{Re}(\underbrace{\vec{A}_0}_{\text{constant}} * e^{i\omega(t - \frac{x}{c})})$

für beliebige Richtungen lässt sich dies verallgemeinern:

Einheitsvektor  $\vec{n}$

$$\vec{A} = \text{Re}(\underbrace{\vec{A}_0}_{\text{constant}} * e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}) \quad (505)$$

$$\text{mit } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (506)$$

$$\text{und } \vec{A}_0 = \text{konstant, komplex} \quad (507)$$

$$\vec{k}\vec{x} - \omega t = \text{Phase, Phasenwinkel, } \phi \quad (508)$$

$$(509)$$

Eine Phasendifferenz  $2\pi \rightarrow \text{in } x$

Wellenlänge:  $\frac{\omega}{c} \lambda = 2\pi$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$\Rightarrow$  für  $\vec{E}, \vec{B}$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} = i \frac{\omega}{c} \vec{A} \quad (510)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i \vec{k} \times \vec{A} = i \frac{\omega}{c} \vec{n} \times \vec{A} \quad (511)$$

$$= i \vec{k} \times \frac{c}{i\omega} \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \vec{n} \times \frac{c}{\omega} \vec{E} \quad (512)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = i \vec{n} \times \vec{A} \quad (513)$$

$$\text{Eichbedingung: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (514)$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{A} = 0 \quad (515)$$

$\Rightarrow$  elektromagnetische Wellen sind transversal.

$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n} \perp \vec{E}$

und  $|\vec{E}| = |\vec{B}|$

in 4-Schreibweise

$$\vec{k}, \omega \rightarrow k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k}) \quad (516)$$

$$\text{Phase: } k_\mu x^\mu = kx = \omega t - \vec{k}\vec{x} \quad (517)$$

$$\vec{A}^\mu = \vec{A}_0^\mu e^{ikx} \quad (518)$$

$$\text{Wellengleichung: } \square A^\mu = 0 \quad (519)$$

$$(-ik)^2 A^\mu = 0 \quad (520)$$

$$\Rightarrow k^2 = 0, \text{ d.h. } \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0 \quad (521)$$

Welcher Energie und Impulstransport durch das Feld gegeben?

$$\text{Poynting-Vektor: } \vec{S} = \frac{4\pi}{c} \vec{E} \times \vec{B} \quad (522)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) \quad (523)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \vec{n} \vec{E}^2 = \frac{4\pi}{c} \vec{n} \vec{B}^2 \quad (524)$$

$$\text{Energiedichte:} \quad (525)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (526)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2 \quad (527)$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \vec{n} c W \quad (528)$$

$$\text{Impulsdichte:} \quad (529)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \vec{n} \frac{W}{c} \quad (530)$$

$$\text{in der relativistischen Mechanik:} \quad (531)$$

$$p = \frac{1}{c} E \text{ wir für } m = 0 \rightarrow \text{Photon} \quad (532)$$

### 3.9.2 Polarisation

Richtung der Felder: z.B.  $\vec{E}$  ( $\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$ )

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}) \quad (533)$$

$$\vec{E}_0 = \text{konstant und komplex} \quad (534)$$

globale Phase:  $\vec{E}_0^2 = |\vec{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$

Ansatz:  $\vec{E}_0 = \vec{b} e^{-i\alpha}$

$\vec{b}^2$  ist reell, aber Komponenten von  $\vec{b}$  sind komplex.

Ansatz:  $\vec{b} = \vec{b}_1 + i\vec{b}_2$  ( $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  reell)

$$\vec{b}^2 = \vec{b}_1^2 + 2i\vec{b}_1\vec{b}_2 - \vec{b}_2^2 \quad (535)$$

$$\Rightarrow \vec{b}_1\vec{b}_2 = 0, \vec{b}_1 \perp \vec{b}_2 \quad (536)$$

Wähle Koordinatensystem mit Achsen parallel zu  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2 \Rightarrow$  x-Achse  $\parallel \vec{n}$

$\Rightarrow$  y-Achse  $\parallel \vec{b}_1$

$\Rightarrow$  z-Achse  $\parallel \vec{b}_2$

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}) \quad (537)$$

$$E_x = 0 \quad (538)$$

$$E_y = b_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \alpha) \quad (539)$$

$$E_z = \pm b_2 \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \alpha) \quad (540)$$

$$(541)$$

i.A.  $b_1 \neq b_2$

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1 \quad (542)$$

Was eine Ellipsendarstellung ist. allgemein elliptische Polarisation

- $|b_1| = |b_2|$   
zirkuläre Polarisation
- 2 Umlaufrichtungen ( $b_1 = \pm b_2$ )
- $|\vec{E}| = \text{konstant}$

- Sonderfall  $b_1 = 0$  oder  $b_2 = 0$   
lineare Polarisation  
(2 Freiheitsgrade)

Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen  $\rightarrow$  elliptische Polarisation.

Basislösungen  $\checkmark$

Fourier-Zerlegung  $(\cos(\omega t), e^{i\omega t} \rightarrow \text{vollständig})$

- für periodische Lösungen:  $f(t+T) = f(t)$   
Fourierreihe:  
– Grundfrequenz  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \quad (543)$$

$$\text{mit } f_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt f(t) e^{i\omega_0 n t} \quad (544)$$

$$\text{für } f^*(t) = f(t) \Rightarrow f_n^* = f_{-n} \quad (545)$$

- allgemein: Fourier-Integrale  
(diskretes Spektrum von 'Grund'frequenzen + kontinuierliches Spektrum)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) e^{-i\omega t} \text{ mit } f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{+i\omega t} \quad (546)$$

$$\text{für reelle } f(t) \Rightarrow f^*(\omega) = f(-\omega) \quad (547)$$

### Wiederholung Ebene, monochromatische Welle

- Eben  $\rightarrow \vec{k}$  ist Konstante
- monochromatisch  $\rightarrow \omega$  ist Konstante

$$\vec{A} = \text{Re}(\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}) \quad (548)$$

$$\square \vec{A} = \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0 \quad (549)$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (k_\mu k^\mu = 0) \quad (550)$$

$$\vec{n} \vec{E} = 0, \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} \text{ ((transversal))} \quad (551)$$

$$\vec{S} = cW \vec{n} \quad (552)$$

$$\left( \text{QM } \vec{p} = \hbar \vec{k}, E = \hbar \omega, \text{ wie Teilchen mit } m = 0 \right) \quad (553)$$

Basislösungen

Fourierentwicklung

Ebene Wellen=Basislösungen

Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (554)$$

speziell: für periodische Lösungen gilt:

$\rightarrow$  diskretes Spektrum

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \quad (555)$$

Periode  $T$ :  $\omega_0 T = 2\pi$

für kontinuierliches Spektrum

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega_0 n t} \quad (556)$$

Intensität ?

Energieinhalt  $\propto E^2, B^2$ , d.h.  $f^2(t)$

Zeitmittelung

für diskretes Spektrum,  $\omega_0 T = 2\pi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t} \quad (f \text{ ist reel: } f_n^* = f_{-n}) \quad (557)$$

$$f^2(t) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_n f_m e^{-i\omega_0(n+m)t} \quad (558)$$

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \quad (559)$$

$$= \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_n f_m \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_0(n+m)t} dt}_{=0 \text{ außer für } n+m=0} \quad (560)$$

$$= \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_n f_m \delta_{n,-m} \quad (561)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n f_{-n} \quad (562)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|^2 \quad (f_0 = f_0^* = 0, \text{ da kein Wellenterm}) \quad (563)$$

analog für kontinuierliche Spektren

$$\overline{f^2(t)} = \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty d\omega |f(\omega)|^2 \quad (564)$$

$$\text{Bedingungen:} \quad (565)$$

$$f(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \quad (566)$$

$$f(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \text{endlich} \quad (567)$$

Auch statische Felder lassen sich nach Fourierkomponenten zerlegen: Basistransformation  $e^{i\vec{k}\vec{x}}$

$$\phi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{k}) \quad (568)$$

$$\phi(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 x e^{i\vec{k}\vec{x}} \phi(\vec{x}) \quad (569)$$

### 3.9.3 Feld einer Punktladung

Poissonsgleichung:  $\Delta\phi = -4\pi e\delta^{(3)}(\vec{x})$

$$\Delta\phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 k e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{k}) (i\vec{k})^2 \quad (570)$$

$$\Rightarrow \tilde{\Delta}\phi(\vec{k}) = -\vec{k}^2 \tilde{\phi}(\vec{k}) \quad (571)$$

$$\tilde{\Delta}\phi(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \underbrace{(\Delta\phi(\vec{x}))}_{-4\pi e\delta^{(3)}(\vec{x})} \quad (572)$$

$$= -4\pi e \quad (573)$$

Poissongleichung für Fouriertransformation von  $\phi$ :  $\tilde{\phi}$

$$\vec{k}^2 \tilde{\phi}(\vec{k}) = 4\pi e \quad (574)$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \tilde{\phi} = \frac{4\pi e}{\vec{k}^2} \quad (575)$$

$$\phi(\vec{x}) \text{ inverse Fouriertransformation} \quad (576)$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{4\pi e}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\vec{k}^2} \quad (577)$$

### Fouriertransformierte des Elektrischen Feldes

$$\vec{E}(\vec{k}) = -i \frac{4\pi e}{\vec{k}^2} \vec{k} \quad (578)$$

## 3.10 Einführung in die Quantenfeldtheorie

### 3.10.1 Eigenschwingungen des Feldes

Wenn man die Eigenschwingungen des harmonischen Oszillators aus der Quantenmechanik als Grundschnwingungen des Feldes postuliert gelangt man zur Quantenfeldtheorie.

Motivation: Quantenmechanik, d.h. Quantenfeldtheorie:

Hamiltondichte  $\rightarrow$  Verallgemeinerter Hamiltonoperator

Coulombbeziehung  $\phi = 0, \vec{\nabla} \vec{A} = 0$  (Vakuum)

$\vec{A}$  in endlichen Volumina  $\rightarrow$  Fourierreihen

$$V = L_x L_y L_z (\text{Quader}) \quad (579)$$

$$\rightarrow \text{Ansatz: } \vec{A} = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (580)$$

$$\text{mit } k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y, k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z, n_{x,y,z} \in \mathbb{N} \quad (581)$$

$\vec{A}$  ist reell:  $\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{A}_{-\vec{k}}^*$

Coulombbeziehung:  $\vec{k} \vec{A}_{\vec{k}} = 0$

Wellengleichung:  $\ddot{\vec{A}}_{\vec{k}} + c^2 \vec{k}^2 \vec{A}_{\vec{k}} = 0$

Feldkonfiguration:  $\vec{A}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{A}_{\vec{k}}(t)$

Berechne Energie der Felder

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (582)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (583)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i \sum_{\vec{k}} \vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (584)$$

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi c^2} \left( \int d^3x \left( \sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \right) \left( \sum_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \right) + \vec{B}^2 \right) \quad (585)$$

$$= \frac{1}{8\pi c^2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{\vec{k}'} \int_V e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}} + \dots \quad (586)$$

$$\text{enthält } \int_0^{L_x} dx e^{i \frac{2\pi}{L_x} n_x x} = \begin{cases} L_x & \text{für } n_x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (587)$$

$$\Rightarrow V \delta_{n_x+n'_x,0} \delta_{n_y+n'_y,0} \delta_{n_z+n'_z,0} \Rightarrow \epsilon = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\vec{k}} \left( \dot{\vec{A}}_{\vec{k}} \dot{\vec{A}}_{-\vec{k}} + (\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}}) (\vec{k} \times \vec{A}_{-\vec{k}}) \right) \quad (588)$$

$$= \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\vec{k}} |\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}|^2 + c^2 \vec{k}^2 |\vec{A}_{\vec{k}}|^2 \quad (589)$$

$$(590)$$

### 3.11 Ausstrahlung Elektromagnetischer Wellen

(Mannteufel Dozierender)

Feldgleichungen in Gegenwart von Strömen ( $\vec{j} \neq 0$ ) und Ladungen ( $\rho \neq 0$ )

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (591)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (592)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \text{ (Lorentzzeichnung)} \quad (593)$$

$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{\square} A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \text{ (Wellengleichung)} \quad (594)$$

$$(595)$$

Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns hier auf das skalare Potential.

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} = -4\pi\rho \quad (596)$$

$$\rho = \underline{de}(t')\delta(\vec{x}') \text{ Ladung in einem infinitesimalen Volumenelement} \quad (597)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = 0 \text{ für } R \neq 0 \quad (598)$$

$$R = \vec{x} \quad (599)$$

$$\chi = R\phi \Rightarrow \phi = \frac{\chi}{R} \quad (600)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (601)$$

$$\chi = \underbrace{\chi_1\left(t - \frac{R}{c}\right)}_{\text{retardiert}} \underbrace{\chi_2\left(t + \frac{R}{c}\right)}_{\text{avanciert}} \quad (602)$$

Physikalisch relevant sind nur die retardierten Lösungen

$$\phi = \frac{\chi_1\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \quad (603)$$

Verlange für  $R \rightarrow 0$  in das Coulombpotential übergehen muss

$$\Rightarrow \phi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \quad (604)$$

dies gilt für eine infinitesimale Ladung. Für beliebige Ladungsverteilungen gilt die Superposition der de-Lösungen.

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{1}{R} \rho\left(\vec{x}', t - \frac{R}{c}\right) + \phi_0 \quad (605)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{1}{R} \vec{j}\left(\vec{x}', t - \frac{R}{c}\right) + \vec{A}_0 \quad (606)$$

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}' \quad (607)$$

die sind die Retardierte Potentiale. Hier sind  $\phi_0$  und  $\vec{A}_0$  die Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Auch zeigt sich die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen als zentraler Effekt der speziellen Relativitätstheorie in den Argumenten  $t - \frac{R}{c}$  als eine Signalverzögerung.

#### 3.11.1 Spezialfall: Lienard-Wiechert-Potentiale

Quelle: Punktladung an den Koordinaten  $\vec{x}' = \vec{x}_0(t')$

Aufpunkt:  $\vec{x}$ , Zeit  $t$

Abstand zur Quelle  $\vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{x}_0(t')$

Signallaufzeit:  $t - t' = \frac{R(t')}{c}$  mit  $R(t') = |\vec{R}(t')|$  Wähle Koordinatensystem in dem die Ladung zur Zeit  $t'$  ruht

$$\phi = \frac{e}{R(t')}, \quad \vec{A} = 0 \text{ Coulombpotential} \quad (608)$$

$$= \frac{e}{c(t - t')} \quad (609)$$

Versuche nun diese Gleichung in eine Form zu bringen, bei der klar erkennbar ist, dass sie Lorentzinvariant ist. In einem beliebigem Koordinatensystem: suche  $A^\mu$  so, dass für  $v = 0$  gilt  $A^0 = \phi_{\text{Coulomb}}$

$$R^\mu = (c(t - t'), \vec{x} - \vec{x}') \text{ wofür gelten muss } R^\mu R_\mu = 0 \quad (610)$$

$$u^\mu \text{ Vierergeschwindigkeit} \quad (611)$$

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(c, \vec{v}), \quad \beta = \frac{\vec{v}}{c} \quad (612)$$

$$\Rightarrow A^\mu = e \frac{u^\mu}{R_\nu u^\nu} \text{ Lösung im allgemeinen Koordinatensystem} \quad (613)$$

$$R_\nu u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(R - \vec{R}\vec{\beta}) \quad (614)$$

Komponentenweise

$$\phi = \frac{e}{(R - \vec{R}\vec{\beta})} \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} \quad (615)$$

$$\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{(R - \vec{R}\vec{\beta})} \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} \quad (616)$$

### Alternative Herleitung

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{1}{R} \underbrace{\rho(\vec{x}', t - \frac{R}{c})}_{= e\delta(\vec{x}' - \vec{x}_0(t')), t' = t - \frac{R}{c}}, \quad R = |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (617)$$

Problem: Der  $x'$ -Integrand ist nicht direkt WS-Abhängig via  $t'$  Trick:

$$\phi = \int d^3x' dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) \frac{\rho(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (618)$$

$$(619)$$

Nun lassen sich  $\vec{x}'$  und  $t'$  unabhängig voneinander integrieren

$$\phi = \int dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0(t')|}{c}\right) \frac{e}{|\vec{x} - \vec{x}_0(t')|} \quad (620)$$

$$(621)$$

Nun muss  $\delta$  umgeschrieben werden

$$\delta(g(x)) = \sum_{x_0 = \text{Nulstellen von } g(x)} \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|} \quad (622)$$

$$\hat{t} = t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0(t')|}{c} \quad (623)$$

$$\Rightarrow \delta(t - \hat{t}) \quad (624)$$

$$\frac{d\hat{t}}{dt'} = \dots = -\frac{\vec{\beta}\vec{R}}{R} \quad (625)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{e}{R - \vec{R}\vec{\beta}} \quad (626)$$

Für die resultierenden Felder ergibt sich nun:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\phi \quad (627)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (628)$$



Problem: Man benötigt Ableitungen nach  $\vec{x}$  und  $t$ , aber  $\phi$  und  $\vec{A}$  sind über  $t'$  definiert.  
Abhängigkeiten:

$$\phi = \phi(\vec{R}, \vec{\beta}) \quad (629)$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{R}, \vec{\beta}) \quad (630)$$

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{x}, t') \quad (631)$$

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}(t') \quad (632)$$

$$t' = t'(\vec{x}, t) \quad (633)$$

Damit folgt:

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial R_j} \left( \frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \beta_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_i} \quad (634)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial R_j} = -\frac{e}{(R - \vec{R}\vec{\beta})^2} \left( \frac{R_j}{R} - \beta_j \right) \quad (635)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial R_j} = -\frac{e}{(R - \vec{R}\vec{\beta})^2} (-R_j) \quad (636)$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad (637)$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial t'} = -c\beta_j \quad (638)$$

$$(639)$$

Hilfsgrößen

$$\frac{\partial t'}{\partial t}, \frac{\partial t'}{\partial x_i}: \text{via } R^2 \quad (640)$$

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}_0(t'(x, t)) \quad (641)$$

$$|\vec{R}| = c * (t - t'(x, t)) \quad (642)$$

$$(643)$$

Für  $\frac{\partial t'}{\partial t}$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} = 2\vec{R} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = 2\vec{R} \left( -c\vec{\beta} \frac{\partial t'}{\partial t} \right) \quad (644)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} = 2R \frac{\partial R}{\partial t} = 2\vec{R}c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) \quad (645)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} (R - \vec{\beta}\vec{R}) = R \quad (646)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \vec{\beta}\vec{R}} \quad (647)$$

$$(648)$$

Für  $\frac{\partial t'}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial R^2}{\partial x_i} = 2 \left( R_i - \vec{R}c\vec{\beta} \frac{\partial t'}{\partial x_i} \right) \quad (649)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial x_i} = 2R \left( -c \frac{\partial t'}{\partial x_i} \right) \quad (650)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial x_j} (-\vec{\beta}\vec{R}c + c) = -R_i \quad (651)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial x_i} = -\frac{R_i}{c(R - \vec{\beta}\vec{R})} \quad (652)$$

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial t'} = \dot{\beta}_j \quad (653)$$

$$(654)$$

Als Endergebnis erhält man nun:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\frac{e}{(R - \vec{\beta} \vec{R})^2} \left[ \left( \frac{R_j}{R} - \beta_j \right) \left( \delta_{ij} - c \beta_j \frac{(-R_i)}{(R - \vec{\beta} \vec{R})_c} \right) + (R_j) \dot{\beta}_j \left( \frac{-R_i}{(R - \vec{\beta} \vec{R})_c} \right) \right] \quad (655)$$

$$= -\frac{e}{(R - \vec{\beta} \vec{R})^3} \left( R_i (1 - \beta^2 + \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \beta_i (R - \vec{\beta} \vec{R}) \right) \quad (656)$$

$$\dots \quad (657)$$

$$\vec{E} = e(1 - \beta^2) \underbrace{\frac{\vec{R} - \vec{\beta} R}{(R - \vec{\beta} \vec{R})^3}}_{\text{Geschwindigkeitsabhängig}} + e \underbrace{\frac{\vec{R}[(R - \vec{\beta} \vec{R}) \dot{\vec{\beta}}]}{c(R - \vec{\beta} \vec{R})^3}}_{\text{Beschleunigungsabhängig}} \quad (658)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{R} \vec{R} \times \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{E} \quad (659)$$

Anmerkung:

erster Term (gleichförmig bewegte Punktladung) erhält man auch über Coulombfeld im Ruhesystem und Lorentztransformationen.

### 3.11.2 Wiederholung Ausstrahlung von elektromagnetischen Wellen

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (660)$$

Zeit und Raumkoordinaten  $t \pm \frac{R}{c}$

für Coulombfeld  $\phi \propto \frac{\chi(t - \frac{R}{c})}{R}$

allgemeine Lösung: retardierte Potentiale:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{1}{R} \phi(\vec{x}', t - \frac{R}{c}) + \phi_0 \quad (661)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{1}{R} \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{R}{c}) + \vec{A}_0 \quad (662)$$

$$\text{mit Signalgeschwindigkeit } t = \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \text{ und } R = |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (663)$$

Spezialfall der bewegten Punktladungen:

Lienard-Wiechert:

$$\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}', \quad R = |\vec{R}| \quad (664)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{e}{R - \frac{\vec{v} \vec{R}}{c}} \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} \quad (665)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e \vec{v}}{c(R - \frac{\vec{v} \vec{R}}{c})} \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}} \quad (666)$$

### 3.11.3 Strahlungsfeld in großem Abstand

Ladungen und Ströme in begrenztem Raumgebiet

Ladungselement  $de = \rho d^3x'$

am Ort  $\vec{x}'$

Abstand  $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$  sei groß ( $R \gg |\vec{x}'|, |\vec{x}'| \approx a$ ) Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{|\vec{x}'|}{R}$

$$R = |\vec{R}| = |\vec{x} - \vec{x}'| \approx |\vec{x}| - \frac{\vec{x} \vec{x}'}{|\vec{x}|} + O(x_i'^2) \quad (667)$$

$$R = r - \vec{v} \vec{x}', \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (668)$$

Ersetze  $R \rightarrow r$  im Nenner

$n$  in Zeitargument von  $\rho, \vec{j}$  ist nicht „kontrolliert“

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} \int d^3x' \rho(\vec{x}', t - \frac{r - \vec{n}\vec{x}'}{c}) \quad (669)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{rc} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) \quad (670)$$

Frage: Zeitabhängigkeit von  $\rho$

$$\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) = \rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t'} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}}_{\approx \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \propto \frac{\rho}{T}} \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c} + \dots \quad (671)$$

Definition  $T$ : Zeit in der sich die Ladungsverteilung merklich ändert (charakteristische Zeitskala)

$$\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) \approx \rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) \left( 1 + \underbrace{\frac{\vec{n}\vec{x}'}{cT}}_{\approx \frac{a}{cT}} + \dots \right) \quad (672)$$

Zusätzliche Forderung:

$$a \ll cT \quad (673)$$

$$\frac{a}{T} \ll c \quad (674)$$

Fourierzerlegung  $\rightarrow$  spektrale Verteilung des abgestrahlten Feldes

Fouriertransformation von  $\vec{j}$ :  $\rightarrow \vec{j}(\vec{x}, \omega) = \int dt e^{i\omega t} \vec{j}(\vec{x}, t)$

$$\vec{j}(\vec{x}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c})} \vec{j}(\vec{x}', \omega) \quad (675)$$

$$\text{daraus } \vec{A}(\vec{x}, \omega) = \int dt e^{i\omega t} \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (676)$$

$$= \int dt e^{i\omega t} \frac{1}{cr} \int d^3x' \int \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c})} \vec{j}(\vec{x}', \omega') \quad (677)$$

$$\text{mit } \int dt e^{it(\omega - \omega')} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (678)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{cr} \int d^3x' e^{i\omega(\frac{r}{c} - \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c})} \vec{j}(\vec{x}', \omega') \quad (679)$$

$$= \frac{e^{ikr}}{cr} \underbrace{\int d^3x' e^{-i\vec{k}\vec{x}'}}_{\text{Fouriertransformation bezüglich } \vec{x}'} \quad (680)$$

$$\quad (681)$$

Diese Gleichung stellt eine Kugelwelle dar.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = ik \frac{e^{ikr}}{r} - \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r^2}}_{\text{vernachlässigbar}} \quad (682)$$

$$= ik \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 + \underbrace{i \frac{1}{kr}}_{\ll 1} \right) \quad (683)$$

Der Term mit  $\frac{1}{kr}$  wird vernachlässigt weil wir annehmen, dass  $kr \gg 1$  beziehungsweise  $\frac{\omega}{c}r \gg 1$ , was wir als zusätzliche Näherung annehmen.

Wellengleichung:  $e^{i(kx - \omega t)}$  Zu der Zeitskala  $T$  gehört zwangsläufig eine Längenskala ( $cT \approx \lambda$ ), die eine typische

Wellenlänge festlegt, die zu dem von uns betrachteten System gehört. Mit  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  ergibt sich die Annahme  $\frac{r}{\lambda} \gg 1$  was aussagt, dass die typische Wellenlänge klein ist bezüglich des Abstandes des Beobachters von dem Ladungssystem ( $\lambda \ll r$ ), diesen Bereich nennt man Wellenzone.

In großem Abstand und für  $\lambda \ll r$  (d.h. in der Wellenzone) sind  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  näherungsweise ebene Wellen.

- charakteristische Eigenschaft:

$$\vec{E}, \vec{B} \propto \frac{1}{r} \quad (684)$$

**Beispiel** Strahlungsfeld einer bewegten Punktladung

$$\vec{A} = \frac{e}{cr} * \frac{\vec{v}(t')}{1 - \frac{\vec{n}\vec{v}(t')}{c}} \quad (685)$$

$$\text{mit } R = r - \vec{n}\vec{x}'t' = \frac{\vec{x}_0(t')\vec{n}}{c} = t - \frac{r}{c} \quad (686)$$

$$\text{Punktladung: } \vec{j} = e\vec{v}(t')\delta(\vec{x}' - \vec{x}_0(t')) \quad (687)$$

$$\vec{j}(\omega) = \int dt' \vec{j} e^{i\omega t'} \quad (688)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\omega) = e * \frac{e^{ikr}}{cr} \int dt' \vec{v}(t') e^{i(\omega t' - \vec{k}\vec{x}_0(t'))}, \vec{v} = \frac{d\vec{x}_0}{dt'} \quad (689)$$

$$= e * \frac{e^{ikr}}{cr} \int_{\text{Bahnkurve}} d\vec{x}_0 e^{i(\omega t'(\vec{x}_0) - \vec{k}\vec{x}_0)} \quad (690)$$

### 3.11.4 Intensität des Strahlungsfeldes

Die Intensität ist die Energie pro Zeit pro Fläche,  $r^2 d\Omega$   
Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} B^2 \vec{n} \quad (691)$$

$$dI = \frac{c}{4\pi} \overline{B^2} r^2 d\Omega \quad (692)$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{d\Omega} = \text{unabhängig von } r \quad (693)$$

$$\Rightarrow \text{spektrale Intensitätsverteilung} \quad (694)$$

$$dI(\vec{n}, \omega) = \frac{c}{2\pi} |\vec{B}(\omega)|^2 r^2 d\Omega \frac{d\omega}{2\pi} \quad (695)$$

### 3.11.5 Wiederholung Strahlung

Wellengleichung  
Retardierung

$$\phi(\vec{x}, t) \leftarrow \rho(\vec{x}', t - \frac{R}{c}) \quad \text{mit } R = |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (696)$$

Bewegte Punktladung  $\rightarrow$  Lienard-Wiechert für Strahlungsfeld in großem Abstand.  
Charakterisierung der Quelle

- typische Zeitskala  $T$  und typische Wellenlänge  $\lambda = cT$
- typische Längenskala  $a$  ( $\vec{x}'\vec{n} \lesssim a$ )

retardierte Potentiale

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{cr} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) \quad (697)$$

großer Abstand  $r \gg a$

$$\text{Fourierzerlegung } \vec{A}(\vec{x}', \omega) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' e^{i\vec{k}\vec{x}} \vec{j}(\vec{x}', \omega)$$

Systematische Entwicklung von  $e^{i\vec{k}\vec{x}}$

Forderung:

$$\vec{k}\vec{x}' \ll 1 \quad (698)$$

$$\frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{x}' \lesssim \frac{\omega}{c}a = \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad (699)$$

$$(700)$$

Dies bedeutet, dass die Wellenlänge gegen  $a$  groß ist.  
typische Zeit:

$$T \simeq \frac{a}{V}, \quad \lambda \simeq c \frac{a}{V} \quad (701)$$

$$\frac{a}{\lambda} \simeq \frac{v}{c} \ll 1 \quad (702)$$

Daraus folgern wir, dass für die Geschwindigkeit gelten muss  $v \ll c$ , das System darf also nicht relativistisch sein.

Im folgenden nehmen wir an  $r \gg \lambda \gg a$ , was als Wellenzone oder Fernzone bezeichnet wird. Außerdem gibt es noch  $\lambda \gg r \gg a$  was zur Statik führt, da auch die Retardierung vernachlässigbar wird. Als letztes gibt es noch  $\lambda \gg a \simeq r$  was die komplexer zu beschreibende Nahzone charakterisiert.

### erster Term der Näherung

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{cr} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) \quad (703)$$

$$r = |\vec{x}| \text{ unabhängig von } \vec{x}' \quad (704)$$

z.B. bewegte Punktladungen  $\vec{j} = \sum e\vec{v}\delta(\vec{x}' - \vec{x}_0(t'))$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{cr} \sum e\vec{v}(t') \quad (705)$$

$$= \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t'} \underbrace{\sum e\vec{x}(t')}_{\vec{D} \text{ Dipolmoment}} \quad (706)$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{rc} \dot{\vec{D}} \quad (707)$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{D}} \times \vec{n} \quad (708)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{D}} \times \vec{n}) \times \vec{n} \quad (709)$$

$$(710)$$

Diese Gleichungen beschreiben die sogenannte Dipolstrahlung.

### Bemerkungen

- $\vec{D} \propto \vec{x}' \Rightarrow \vec{E}, \vec{B} \propto \ddot{\vec{x}}'$ ,  
nur beschleunigte Ladungen strahlen. Gleichförmig bewegte Ladungen strahlen nicht. Dies lässt sich ebenfalls einfach aus dem Relativitätsprinzip herleiten.
- für ein System von Ladungen mit  $\frac{e}{m}$  konstant gilt:  
 $\vec{D} = \sum e_i \vec{x}'_i = \frac{e_i}{m_i} \sum m_i \vec{x}'_i = \frac{e}{m} \vec{X} M$   
falls ein solches System nach außen kräftefrei ist kann es ebenfalls nicht strahlen, auch wenn die Teilchen sich gegenseitig beschleunigen.

### Intensität

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} \left( \underbrace{\ddot{\vec{D}} \times \vec{n}}_{\angle(\ddot{\vec{D}}, \vec{n}) = \theta} \right)^2 d\Omega \quad (711)$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{D}}|^2 \underbrace{\sin^2(\theta)}_{=0 \text{ für } \theta=0} d\Omega \quad (712)$$

$$(713)$$

Also gibt es keine Abstrahlung in Richtung  $\ddot{\vec{D}}$  und die Abstrahlungsleistung ist maximal in Richtung  $\perp \ddot{\vec{D}}$ . Für die Gesamtintensität ergibt sich:

$$I = \int dI = \frac{1}{4\pi c^3} \underbrace{|\ddot{\vec{D}}|^2}_{\substack{\text{falls } \ddot{\vec{D}} \\ \text{unabhängig von } \Theta}} \underbrace{\int d\Omega \sin(\theta)}_{=8\pi/3} \quad (714)$$

$$= \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{D}}|^2 \quad (715)$$

### Spektrum

$$dI_\omega = \frac{4}{3c^3} |\ddot{\vec{D}}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (716)$$

Hertzscher Dipol

$$\vec{D}(t) = \vec{D}_0 e^{i\omega t} \quad (717)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{D}}(t) = -\omega^2 \vec{D}_0 e^{i\omega t} \quad (718)$$

$$dI_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\vec{D}_0|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (719)$$

Eigenschaften des Hertschen Dipols:

- $dI \propto \omega^4$
- $dI \propto \sin^2 \theta$

### Höhere Terme der Entwicklung

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{cr} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{x}'}{c}) \quad (720)$$

$$= \frac{1}{cr} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t'} \int d^3x' \vec{n}\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}', t - \underbrace{\frac{r}{c}}_{=t'}) \quad (721)$$

für bewegte Punktladungen  $\vec{j} = \sum e \vec{v} \delta(\vec{x}' - \vec{x}_0(t'))$  ergibt sich ein weiterer Beitrag:

$$\frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \sum e \vec{v} (\vec{n} \cdot \underbrace{\vec{x}'}_{\substack{\text{Bahnkurven } \vec{x}_0(t')}}) \quad (722)$$

$$= \frac{1}{c^2 r} \sum e \left[ \frac{1}{2} \vec{v}(\vec{n}\vec{x}') + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \vec{x}'(\vec{n}\vec{x}') - \frac{1}{2} \vec{x}'(\vec{n}\vec{v}) \right) \right] \quad (723)$$

$$= \frac{1}{c^2 r} \sum e \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t'} (\vec{x}'(\vec{n}\vec{x}')) + \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{x}' \times \vec{v})}_{\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum e \vec{x}' \times \vec{v}} \times \vec{n} \right] \quad (724)$$

Damit folgt:

$$\vec{A} = \frac{1}{cr} \dot{\vec{D}} + \frac{1}{cr} \dot{\vec{m}} \times \vec{n} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \vec{x}'(\vec{n}\vec{x}') + \dots \quad (725)$$

$$\Rightarrow \|\vec{A}\| = \underbrace{\frac{1}{cr} \dot{\vec{D}}}_{\text{el. Dipol}} + \underbrace{\frac{1}{cr} \dot{\vec{m}} \times \vec{n}}_{\text{magn. Dipol}} + \underbrace{\frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}}}_{\text{Quadrupol}} + \dots \quad (726)$$

Auffallend ist, dass alle Terme nur eine explizite Abhängigkeit von  $\frac{1}{r}$  enthalten. Es stellt sich also die Frage ob diese Entwicklung tatsächlich immer kleiner werdende Korrekturen anbringt.

$$\dot{\vec{D}} \propto \sum e \vec{x}' \propto a \quad (727)$$

$$\dot{\vec{m}} \propto \sum e \vec{x}' \times \vec{v} \frac{1}{c} \propto a \frac{v}{c} \ll a \quad (728)$$

$$\ddot{\vec{Q}} \propto \frac{\partial}{\partial t} \sum e \vec{x}'(\vec{n}\vec{x}') \propto a \frac{v}{x} \ll a \quad (729)$$

Somit ist die Entwicklung gerechtfertigt, da eine implizite Unterdrückung in den Größen  $\dot{\vec{D}}, \dot{\vec{m}}, \ddot{\vec{Q}}$  enthalten ist.

**Beispiel**

Streuung an einer freien Ladung (z.b. Elektron, Ladung  $e$ , Masse  $m$ ) einlaufende Ebene monochromatische Welle.

Frage effektiver Streuquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{dI}{S} \text{ zeitlich gemittelt} \quad (730)$$

mit  $dI$  = abgestrahlte Energie pro Raumwinkel in gegebener Richtung und  $d\sigma$  = abgestrahlte Energie pro Raumwinkel in gegebener Richtung pro einfallende Energiefluss.  
einlaufende Strahlung

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{r}\vec{k} - \omega t - \alpha) \Rightarrow \vec{B} \dots \quad (731)$$

Damit folgt für die Lorentzkraft:

$$\left| \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right| \ll e\vec{E} \quad (732)$$

Das bedeutet für schwache Felder gilt:

$\Rightarrow$  Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E} = e\vec{E}_0 \cos(\omega t - \alpha) \quad (733)$$

$$\ddot{\vec{D}} = \frac{e^2}{m} \vec{E} \quad (734)$$

$$\Rightarrow dI = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \ddot{\vec{D}} \times \vec{n}' \right|^2 \Omega \quad (735)$$

einlaufende Welle normiert auf  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \vec{n}$

$\Rightarrow$  Streuquerschnitt

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2(\theta) d\Omega \quad (736)$$

mit dem Streuwinkel  $\theta = \angle(\vec{E}, \vec{n}')$  folgt der  
totaler Streuquerschnitt

$$\sigma = \int d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2(\theta) \quad (737)$$

Thomson-Streuquerschnitt

$$\sigma_{\text{Th}} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad (738)$$

$$(739)$$

Das interessante an dieser Beobachtung ist, dass dieses Ergebnis sich für die entsprechenden Annahmen auch aus der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie herleiten lässt.  
klassischer Elektronenradius:

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 3 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (740)$$

Voraussetzung: lineare Polarisation  $\vec{E}$  fest,  $\vec{E} = \vec{e}E$  mit Einheitsvektor  $\vec{e}$

Praktische Bedeutung: unpolarisiert

$\longrightarrow \vec{e}$  beliebig/zufällig orientiert mit Nebenbedingung  $\vec{e} \perp \vec{n}$

$\longrightarrow$  Mittelung über  $\vec{e}$  von  $(|\vec{e} \times \vec{n}'|^2)$

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \quad (741)$$

$$= 1 - (\vec{e}\vec{n}') \quad (742)$$

$$= 1 - e_i n_i' e_j n_j' \quad (743)$$

$$= 1 - e_i e_j n_i' n_j' \quad (744)$$

mit der Mittelung über die Polarisation ergibt sich

$$\overline{\sin^2(\theta)} = 1 - n_i' n_j' \overline{e_i e_j} \quad (745)$$

1.  $e_i e_j$  ist ein symmetrischer Tensor  
 $\Rightarrow \overline{e_i e_j}$

2.  $\overline{e_i e_j}$  hängt nur von  $n_i$  ab

$$\overline{e_i e_j} = a \delta_{ij} + b n_i n_j \quad (746)$$

3.  $\text{Sp} e_i e_j = \overline{e^2} = 1 \Rightarrow \overline{\text{Sp} e_i e_j} = 3a + b = 1$

4.  $\vec{e} \perp \vec{n}$   
 $\Rightarrow \overline{n_i e_i e_j} = 0 = n_i (a \delta_{ij} + b n_i n_j) = a n_j + b n_j$   
 $\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b = \frac{1}{2}$

$$\overline{e_i e_j} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j) \quad (747)$$

$$\overline{\sin^2 \theta} = 1 - n_i' n_j' \frac{1}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j) \quad (748)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{(\vec{n} \vec{n}')^2}_{\cos^2 \theta} \quad (749)$$

$$\Rightarrow d\sigma \sim 1 + \cos^2 \theta \quad (750)$$

Was eine der Kugelflächenfunktionen ist.

### Beispiel einer Ladung auf einer Kreisbahn

Teilchenbeschleuniger

Synchrotronstrahlung

Ladung  $e$ , Masse  $m$ , Magnetfeld  $B$

Damit lässt sich der Bahnradius errechnen:  $r = \frac{mc v}{e B} \gamma$  mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Kreisfrequenz  $\omega_B = \frac{v}{r} = \frac{e B}{m c} \sqrt{1-\beta^2} = \frac{E}{m c^2}$

Nach langer und gewissenhafter Rechnung lässt sich erhalten:

Gesamtintensität:  $I = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2}{(m c^2)^2} \frac{1}{c} (v \gamma)^2$

Winkelverteilung:  $\frac{dI/d\Omega(\parallel)}{dI/d\Omega(\perp)} = \frac{4+3\beta^2}{8(1-\beta^2)^{5/2}}$

Damit gilt für  $\beta \rightarrow 0$  gilt  $\frac{dI}{d\Omega}(\parallel) = \frac{1}{2}$

und für  $\beta \rightarrow 1$  gilt  $\frac{dI}{d\Omega}(\parallel) \propto$  und damit ist die Gesamtintensität in der Beschleunigerebene

$$\vec{A}(\omega) = \frac{e^{i k r}}{c r} \int_{\text{Bahnkurve}} d\vec{x}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}_0)} \quad (751)$$

$$\rightarrow \text{Integrale vom Typ } \int_0^{2\pi} d\phi * \sin(\phi) e^{i k(\phi - \beta \cos(\theta) \sin(\theta))} \quad (752)$$

$$(\text{Besselfunktionen}) \quad (753)$$

## 4 Feldtheorie der Gravitation - Allgemeine Relativitätstheorie

Lehrbücher

- Theoretische Physik 5 Scheck (3. Ausgabe)
- Landau Lipschitz T.II

### 4.1 Phänomenologie Newtonsche Gravitation

$$F_G = -G \frac{m_1 * m_2}{r^2} \quad (754)$$

$$F_C = \pm \kappa \frac{e_1 * e_2}{r^2} \quad \left( \kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \quad (755)$$

$$G = \text{Graavitationskonstante} \quad = 6,67 * 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \quad (756)$$



vergleiche beide Kräfte für ein Proton:  $\frac{F_G}{F_C} \approx 10^{-36}$

Potential  $\phi_G = \frac{GM}{r}$

für Quelle der Masse  $M$

Die Bewegungsgleichungen würde man dann aus den entsprechenden Lagrangefunktionen gewinnen.

$$L = T - V \quad (757)$$

$$= \frac{1}{2} m_T v^2 - m_S \phi_G \quad (758)$$

Im Vergleich zur elektrostatischen Wechselwirkung wirkt dies naiv. Aus der Elektrostatik ergibt sich.

$$L_{EM} = \frac{1}{2} m_T v^2 - e \phi_{EM} \quad (759)$$

Wobei  $m_S$  und  $e$  hier als Kopplungskonstanten fungieren. Man muss beachten, dass auch der Geschwindigkeitsterm ein  $m_T$  enthält, deren Gleichheit mit dem  $m_S$  der Kopplung mit dem Feld nicht trivial ist. Das  $m_T$  des Geschwindigkeitsterms besagt wie stark eine wirkende Kraft in der Lage ist ein Teilchen zu beschleunigen, es trifft eine Aussage über die Trägheit der Masse. Das  $m_S$  der Kopplung wiederum besagt wie stark das Teilchen in der Lage ist das Feld zu sehen. Damit nennen wir  $m_T$  die träge Masse und  $m_S$  die schwere Masse.

Aus experimentellen Beobachtungen wurde gefolgert  $m_T = m_S$ . Eine wichtige Folgerung daraus ergibt sich, wenn man die aus der Lagrangegleichung folgende Bewegungsgleichung aufschreibt.

$$m_T \dot{\vec{v}} = -m_S \vec{\nabla} \phi_G \Rightarrow \dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla} \phi_G \quad (760)$$

Dies ist eine nicht triviale Folgerung, da in dieser Bewegungsgleichung die Masse des bewegten Teilchens keine Rolle spielt. Dies wird als Äquivalenzprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnet. Diese erste Formulierung stellt das schwache Äquivalenzprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie dar:

#### nun ein Beispiel:

Betrachte ein System von Massen in einem homogenem Gravitationsfeld. Wenn man Massen in ein homogenes Gravitationsfeld setzt so werden diese durch das anliegende Gravitationsfeld und Wechselwirkungskräfte aufeinander  $\vec{F}_{ij}$

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = -m_i \vec{\nabla} \phi + \sum_{j=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij} \quad (761)$$

$$m_i (\dot{\vec{v}}_i + \vec{\nabla} \phi) = \sum_{j=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij} \quad (762)$$

$$(763)$$

Führt man nun eine Koordinatentransformation durch, so dass

$$\dot{\vec{v}}' = \dot{\vec{v}}_i + \vec{\nabla} \phi \quad (764)$$

$$\vec{x}_i' = \vec{x}_i + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi t^2 \quad (765)$$

$$\Rightarrow m_i \vec{v}_i' = \sum_{j=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij} \quad (766)$$

$$(767)$$

d.h. Bewegungsgleichungen enthalten das Gravitationsfeld nicht. Das neue Koordinatensystem ist jedoch kein Inertialsystem, das durch eine Lorentz- oder Galileo-Transformation erreichbar wäre, da dieses Koordinatensystem beschleunigt ist.

Daraus folgt das sogenannte starke Äquivalenzprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie.

Ein Gravitationsfeld ist äquivalent zu einer Transformation in ein Nicht- Inertialsystem.

"lokal": in einem räumlich eingeschränkten Gebiet, das klein genug sein sollte, so dass das Gravitationsfeld homogen erscheint (Frage der Genauigkeit). Solche Gravitationsfelder, die durch eine Transformation überall beseitigt werden können bezeichnet man als scheinbare Gravitationsfelder. Während sogenannte wahre Gravitationsfelder sich nur lokal durch eine Transformation beseitigen lassen.

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist damit eine Theorie der allgemeinen Koordinatentransformationen und

damit eine Ausformulierung der Geometrie von Raum und Zeit.

Ein Beispiel dafür wäre ein rotierendes Koordinatensystem:

$$x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \quad (768)$$

$$y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \quad (769)$$

$$z = z' \quad (770)$$

Innerhalb der Speziellen Relativitätstheorie müsste man den 4-Abstand aufschreiben.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (771)$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt \quad (772)$$

Im Allgemeinen gilt damit:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (773)$$

Was wir zu Beginn ja bereits gesagt haben, allerdings kann bei allgemeinen Transformationen der Metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$  eine vollbesetzte Matrix sein deren Komponenten Orts oder Zeitabhängig sein können. Es gilt also:

- $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$  also orts- und zeitabhängig
- $g_{\mu\nu}$  ist nicht diagonal
- $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

→ 10 unabhängige Funktionen, die zusammen  $g_{\mu\nu}$  definieren.

→ Gravitationsfeld wird also durch den Metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  beschrieben.

→ Gravitation ist Geometrie der Raum-Zeit für Inertialsystem

Normalkoordinaten  $\xi^\mu$  mit  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu$  mit der Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Äquivalenzprinzip (präzise Formulierung)

In jedem Punkt der Raum-Zeit  $x_0$  kann man ein Bezugssystem konstruieren, so dass

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}, \quad \left. \frac{\partial g_{\mu\nu}(x_0)}{\partial x^\alpha} \right|_{x_0} = 0 \quad (774)$$

mit  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Das mathematische Konstrukt das eine Herleitung dieser Aussage ermöglicht ist die Differentialgeometrie.

Eine Metrik (eine Raum-Zeit) heißt flach, wenn man eine Koordinatentransformation finden kann, so dass  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  überall gilt.

Eine Metrik (eine Raum-Zeit) heißt gekrümmt, falls keine Koordinatentransformation existiert, so dass  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  überall gilt.

Betrachte nun ein rotierendes Bezugssystem innerhalb der SRT.

Lorentz-Kontraktion. Umfang  $U$

Radius  $R$

$$\frac{U}{R} \neq 2\pi \quad (775)$$

→ nicht-euklidische Geometrie

Damit ist das Ziel der allgemeinen Relativitätstheorie allgemeine Koordinatentransformationen zu finden, die in der Lage sind einen allgemeinen Satz von Gleichungen zu liefern, die in jedem der Koordinatensysteme Gültigkeit besitzen, also formgleich in allen physikalischen relevanten Koordinatensystemen sind.

Dies bezeichnet eine Kovariante Formulierung der Physikalischen Gesetze.

## 4.2 Allgemeine Koordinatentransformationen

- Normalkoordinaten  $\xi^\mu$  mit  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu$
- allgemeine Koordinaten  $\xi^\mu \rightarrow x^\mu = x^\mu(\eta)$  die beliebige in allen Komponenten differenzierbare und umkehrbare Funktionen darstellen sollen.

Differenzierbar:  $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu} d\xi^\nu$

Analog: SRT Lorentz-Transformation linear

$$dx^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu d\xi^\nu \quad (776)$$

### 4.2.1 Wiederholung

lokale Normalkoordinaten:  $\xi^\mu$  und  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Transformation zu allgemeinen Koordinaten:

$$x^\mu(\xi) \quad (\text{bzw. } \eta^\mu(x)) \quad (777)$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu} d\xi^\nu \quad (778)$$

Wobei  $\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\nu}$  Funktionen von  $\xi$  sind und damit die Transformationsmatrix  $\Lambda^\mu{}_\nu$  definieren.  
Transformation zwischen allgemeinen Koordinaten

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x) \quad (\text{umkehrbar}) \quad (779)$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'} \quad (780)$$

Definition kontravarianter Vektor  $A^\mu$ :

$$A \rightarrow A', \quad A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} A^{\nu'} \quad (781)$$

über den Gradienten: Definition kovarianter Vektor  $A_\mu$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \quad (782)$$

$$A \rightarrow A', \quad A_\mu{}' = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} A_\nu \quad (783)$$

$\Rightarrow$  Tensoren und Skalarprodukte  
Metrik

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \quad (784)$$

$$= \left( \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \right) dx^\rho dx^\sigma \quad (785)$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (786)$$

$$g_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \quad (787)$$

Bewegungsgleichungen für Kräftefreie Teilchen im Inertialsystem:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{ds^2} = 0 \quad (788)$$

Zu allgemeinen Koordinaten transformiert ergibt sich:

$$\frac{d}{ds} \frac{d\xi^\mu}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{d\xi^\mu}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \quad (789)$$

$$= \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} \quad (790)$$

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\mu \partial x^\rho}}_{\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} \quad (791)$$

$$\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \quad \begin{array}{l} \text{Christoffel-Symbole} \leftarrow \text{aus } g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu} \\ \text{affine connection} \end{array} \quad (792)$$

$\rightarrow$  Bewegungsgleichung in allgemeinen Koordinaten

$$\frac{du^\lambda}{ds} = -\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} u^\nu u^\rho \quad (793)$$

$$(794)$$

Damit lässt sich  $\Gamma$  physikalisch als Gravitationsfeld interpretieren oder als Ausformung der Gravitationskraft benennen. Damit würde  $g_{\mu\nu}$  das Gravitationspotential beschreiben.

$\Gamma = 0$  in jedem Inertialsystem

$\Gamma^\lambda_{\nu\rho}$  ist kein Tensor

Bewegungsgleichung  $\partial u^\mu = 0 \longrightarrow$  kovariante Ableitung:  $D_\nu u_\rho$

Vektor  $U^\mu$  in Normalkoordinaten  $\xrightarrow{\text{Ableitung}} Q^\mu_{\nu} = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} U^\mu$

↓ Transformation zu allgemeinen Koordinaten ↓ zu allgemeinen Koordinaten

Vektor  $V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} U^\sigma \xrightarrow[\text{Ableitung}]{?} T^\mu_{\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\lambda} Q^\sigma_{\tau}$

nachrechnen:

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial U^\sigma}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} \right) U^\sigma \quad (795)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial U^\sigma}{\partial \xi^\tau} + \dots \quad (796)$$

$$= T^\mu_{\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\nu \quad (797)$$

gewöhnliche Ableitung  $\rightarrow$  kovariante Ableitung

$$\frac{DV^\mu}{Dx^\lambda} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\nu \quad (798)$$

Diese ist wieder ein Tensor (Prinzip der Kovarianz)

kräftefreies Teilchen:

Ableitung entlang einer Kurve  $x^\mu(\tau)$

Vektor  $A^\mu(\tau)$

Transformationsverhalten  $A^{\mu'}(\tau) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}(\tau) A^\nu(\tau)$  (für die Transformation  $x \rightarrow x'$ )

Ableitung

$$\frac{dA^{\mu'}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{dA^\mu}{d\tau} + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} A^\nu \quad (799)$$

$$\rightarrow \frac{DA^\mu}{d\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} A^\lambda \quad (800)$$

Damit ergibt sich als Form der Bewegungsgleichung:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0 \quad (801)$$

Die in jedem Koordinatensystem gültig ist.

**Beispiel für einen zweidimensionalen gekrümmten Raum** Wir nehmen als Beispiel eine Kugeloberfläche: Wenn man annimmt, dass der Vektor bei einer kräftefreien Bewegung seine Richtung nicht ändert. Dann kann man abhängig vom Weg mit verschiedenen Richtungen der Vektoren am Nordpol enden. Die ist Paralleltransport entlang von Kurven auf der Kugeloberfläche.

**Paralleltransport** Transport von Vektoren entlang eines geschlossenen Weges führt zur Änderung des Vektors bei Bewegung durch einen gekrümmten Raum

$$dA^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda \quad (802)$$

$$\Delta A^\mu = \oint_{\text{Krümmung}} dA^\mu \neq 0 \quad (803)$$

$\rightarrow \Delta A^\mu$  ist proportional zur Fläche  $\sim df^{\rho\sigma}$ .

$$dA^\mu = -\frac{1}{2} R^\mu_{\rho\nu\sigma} A^\nu f^{\rho\sigma} \quad (804)$$

mit dem Krümmungstensor  $R^\mu_{\rho\nu\sigma}$  (der auch die Tensoreigenschaften besitzt). Man kann dies aus den Größen  $(\Gamma)^2$  und  $(\frac{\partial \Gamma}{\partial x})$  oder aus  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}$  und  $g\Gamma\Gamma$  herleiten, was allerdings hässlich wird.

Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma}$ , der den Vorteil hat symmetrisch zu sein ( $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ )

Und das Krümmungsskalar  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$

Suche kovariante Differentialgleichungen für  $g_{\mu\nu}$  oder davon abgeleitete Größen, die ausreichend einfach sind um lösbar zu sein.

Als Quelle des Feldes fungiert hier die Masse, die jedoch alleine nicht kovariant ist. Diese muss erweitert werden

wobei man zum Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$  gelangt.

(zusätzlich müssen für kleine Geschwindigkeiten und schwache Felder das Newtonsche Gravitationsgesetz als Grenzfall heraus kommen.)

Es ergeben sich die Einsteingleichungen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (805)$$