Grenzkosten und Stückkosten

Aufgabennummer: B-C6_13

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als Grenzkostenfunktion K' bezeichnet man die 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion K.
Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts während zweier aufeinanderfolgender Herstellungsperioden können die Grenzkosten durch eine lineare Grenzkostenfunktion K_1' (Abb. 1) und eine quadratische Grenzkostenfunktion K_2' (Abb. 2) beschrieben werden.

x … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K_1'(x)$, $K_2'(x)$ … Grenzkosten in Euro pro Stück (€/Stk.) bei x erzeugten Stk.

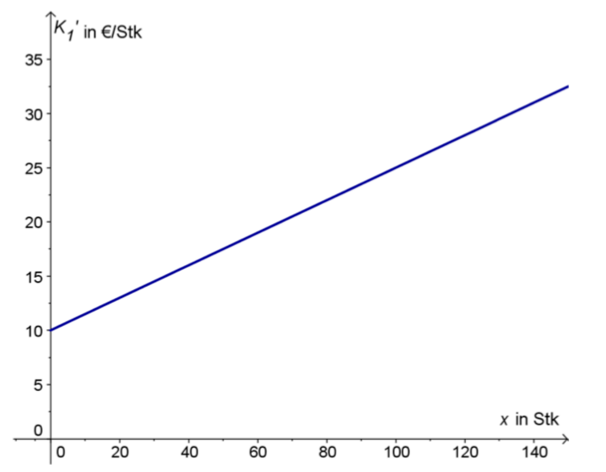


Abb. 1

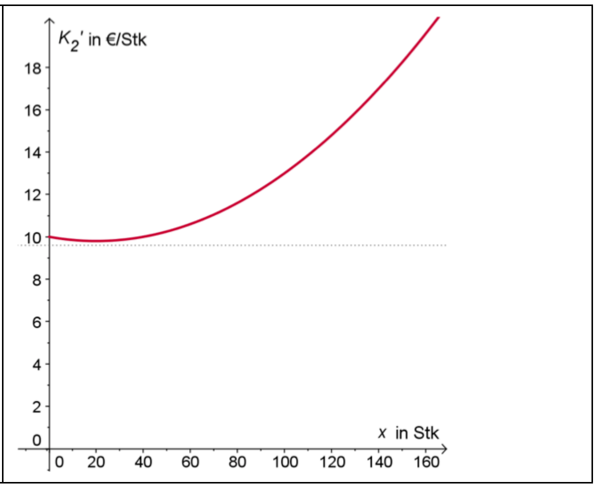


Abb. 2

a) – Ermitteln Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion K_1' aus dem Graphen der Abb. 1.
– Berechnen Sie mithilfe der Grenzkostenfunktion K_1' die Gesamtkostenfunktion K_1, wenn die Fixkosten € 260 betragen.

b) Die Kostenkehre ist die Herstellungsmenge, bei der der Graph der Kostenfunktion ihren Wendepunkt hat.

– Erklären Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Grenzkostenfunktion die Kostenkehre ablesen können.
– Begründen Sie, warum der Verlauf von einer der beiden Grenzkostenfunktionen (Abb. 1 oder Abb. 2) auf eine Kostenkehre schließen lässt und dies für die andere nicht gilt.

c) Die Kostenfunktion für die Herstellung eines anderen Produkts lautet:

$$K(x) = 0{,}0006x^3 + 0{,}02x^2 + 10x + 250$$

x … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K(x)$ … Gesamtkosten in Euro (€) bei Erzeugung von x Stk.

- Ermitteln Sie die Gleichungen der Grenzkostenfunktion K' und der Stückkostenfunktion $\overline{K} = \frac{K}{x}$.
- Zeichnen Sie im Definitionsbereich [0;250] die Graphen der beiden Funktionen K' und $\overline{K}$ in ein Koordinatensystem.
- Interpretieren Sie den Schnittpunkt der beiden Kurven im Zusammenhang mit dem Betriebsoptimum und den minimalen Stückkosten.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $k = \frac{\Delta K'}{\Delta x} = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $d = 10$

Falls die Ablesung falsch war, so ist der Folgefehler nicht zu berücksichtigen.
Eine ungenaue Ablesung ist zu tolerieren.

$K_1'(x) = 0{,}15x + 10$

$K_1(x) = \int (0{,}15x + 10)\mathrm{d}x$

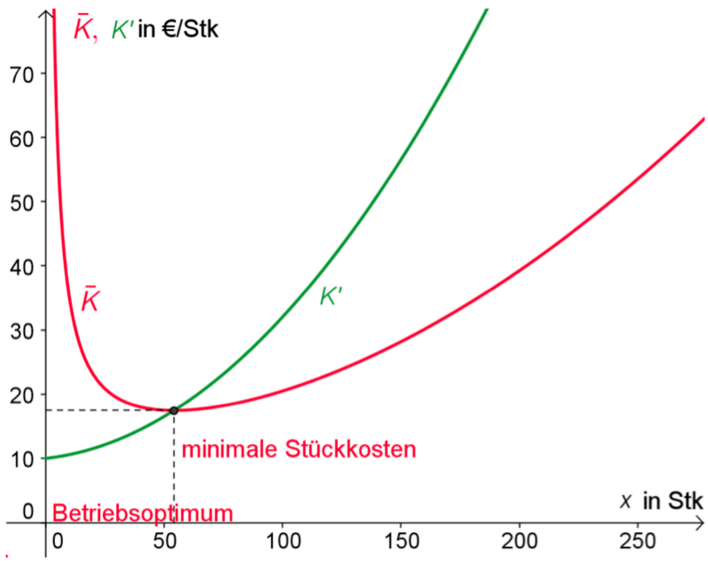
$K_1(x) = 0{,}075x^2 + 10x + 260$

b) Die Grenzkostenfunktion bildet die 1. Ableitung der Kostenfunktion. An der Kostenkehre hätte die 2. Ableitung den Wert null. Man erkennt sie daher an einem Extremwert der Grenzkostenfunktion.

Abb. 1 stellt eine lineare Grenzkostenfunktion dar. Sie hat keinen Extremwert, daher liegt auch kein Wendepunkt vor.

Abb. 2 stellt eine quadratische Funktion dar, bei der der x-Wert des Minimums der Kostenkehre entspricht.

c) $K'(x) = 0{,}0018\,x^2 + 0{,}04x + 10$
$\overline{K}(x) = 0{,}0006x^2 + 0{,}02x + 10 + \frac{250}{x}$



Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ergibt das Betriebsoptimum und dessen y-Koordinate ergibt die minimalen Stückkosten.

Die Grenzkosten im Betriebsoptimum entsprechen den minimalen Stückkosten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) –
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren; B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –