应用庞特里亚金极小值原理求解控制有约束变分问题过程：
针对一般目标函数：

$$J=\varphi(\boldsymbol{s}(T),T)+\int_0^T L(\boldsymbol{s},\boldsymbol{u},t)dt \tag{0.1}$$

求解步骤一般需要使用(参考自动控制原理第十章（胡寿松））：

- 正则方程
- 边界条件与横截条件
- 极小值条件
- H 变化率

本题的 OBVP 问题描述(**假设末端位置固定，速度和加速度自由**):

$$\begin{cases}\min\limits_{u(t)\in\Omega}\ J_{sum}=\sum\limits_{k=1}^{3}J_k,\ J_k=\dfrac{1}{T}\int_0^T j_k(t)^2dt\\ s.t.\quad \dot{s}_k=f(s_k,u_k)=(v_k,a_k,j_k)\\ \qquad s_k(0)=(p_k^0,v_k^0,a_k^0)\\ \qquad s_k(T)=(p_k^T,free,free)\end{cases} \tag{0.2}$$

本题目标函数中：$\varphi(\boldsymbol{s}(T),T)=0$，$L(\boldsymbol{s},\boldsymbol{u},t)=\dfrac{1}{T}j^2(t)$

假设协态 $\boldsymbol{\lambda}^T=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，则哈密尔顿函数为:

$$\begin{aligned}H&=L(\boldsymbol{s},\boldsymbol{u},t)+\boldsymbol{\lambda}^T f(\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})\\&=\frac{1}{T}j^2+\lambda_1 v+\lambda_2 a+\lambda_3 j\end{aligned} \tag{0.3}$$

通过正则方程 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{s}}$ 得:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\begin{bmatrix}0\\-\lambda_1\\-\lambda_2\end{bmatrix} \tag{0.4}$$

通过边界条件得:

$$\begin{bmatrix}\lambda_2(T)\\\lambda_3(T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{0.5}$$

联立公式(1.4)到公式(1.6)得协态：

$$\lambda(t)=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}-2\alpha\\2\alpha(t-T)\\-\alpha(t-T)^2\end{bmatrix} \tag{0.6}$$

应用极小值原理 $\boldsymbol{j}^*(t)=\boldsymbol{u}^*(t)=\arg\min\limits_{u\in\Omega}H(\boldsymbol{s}^*(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\lambda}(t))$ 得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}^*(t)=\boldsymbol{u}^*(t)&=\arg\min_{j\in\Omega}[\frac{1}{T}j^2+\lambda_1 v+\lambda_2 a+\lambda_3 j]\\&=-\frac{\lambda_3 T}{2}=\frac{1}{2}\alpha(t-T)^2\end{aligned} \tag{0.7}$$

根据最优控制输入 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 和初始状态 $s(0)=(p_0,v_0,a_0)$ 可积分得最优状态：

$$\boldsymbol{s}^*(t)=\begin{bmatrix}\frac{\alpha}{120}(t-T)^5+\frac{1}{2}(a_0+\frac{\alpha}{6}T^3)t^2+(v_0-\frac{\alpha}{24}T^4)t+(p_0+\frac{\alpha}{120}T^5)\\\frac{\alpha}{24}(t-T)^4+(a_0+\frac{\alpha}{6}T^3)t+(v_0-\frac{\alpha}{24}T^4)\\\frac{\alpha}{6}(t-T)^3+(a_0+\frac{\alpha}{6}T^3)\end{bmatrix} \tag{0.8}$$

最后根据终点状态 $p(T)=p_f=\frac{1}{2}(a_0+\frac{\alpha}{6}T^3)T^2+(v_0-\frac{\alpha}{24}T^4)T+(p_0+\frac{\alpha}{120}T^5)$，可以求解变量 α 为：

$$\alpha=\frac{20\Delta p}{T^5},\Delta p=p_f-p_0-\frac{1}{2}a_0T^2-v_0T \tag{0.9}$$

综上，可得优化目标函数：

$$J=\int_0^T\frac{1}{T}j^*(t)^2dt=\int_0^T\frac{1}{T}(\frac{10\Delta p}{T^5}(t-T))^2dt \tag{0.10}$$