Analiz 4 : Ödev 1

Teslim tarihi : Salı, 23 Temmüz, 2019.

1. $p > 0$ olsun. $B_p^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_1|^p + \ldots + |x_n|^p \leq 1\}$ kümesinin Jordan bölge olduğunu gösteriniz.

2. Her sonlu kümesinin Jordan bölge olduğunu gösteriniz. Sayılabilir kümeler Jordan bölgeler olmak zorunda. Neden?

3. $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer A ve B Jordan bölgeler ise, $B \setminus A$ nın Jordan bölge olduğunu gösteriniz.

4. $K \subset \mathbb{R}^n$ bir açık konveks bölge olsun. O zaman K kümesinin Jordan bölge olduğunu kanıtlayınız.

5. $\int_{\Delta_n} |x|^2$ hesaplayınız. Burada $\Delta_n := \{a \in \mathbb{R}^n \mid a_i > 0, \, i \in [n], \, a_1 + \ldots + a_n < 1\}$ sımpleks'tır.

6. $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} e^{x^2} y \, dx \, dy$ hesaplayınız.

7. Ders'te Gamma fonksiyon hakkında konuştuk. $x \geq 1$ için $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dx$ olarak tanımlanır.
   (a) $x \geq 1$ ise $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olduğunu gösteriniz.
   (b) Doğal sayı n için $\Gamma(n+1) = n!$ olduğunu gösteriniz.
   (c) $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$ kullanarak bunu $mathbbC \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ e uzatınız. Bunu iyi tanımlı olduğu gösteriniz.
   (d) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ olduğunu gösteriniz.

8. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, eğer her $a, b \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in [0,1]$ için
$$f\left[ta + (1-t)b\right] \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$
   şartı sağlıyorsa, konveks denir. $f \in C^2(\mathbb{R})$ için bunlar birbirine denk olduğunu gösteriniz
   (a) f konvekstir.
   (b) $\nabla^2 f := \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ matrisin tüm özdeğerler pozitifdir. (Ipücü : Bunu ilk önce tek değişkenli fonksiyonler için ispatlayınız ve sonra bunu kullanınız.)