Analiz 3 : Ödev 1

Teslim tarihi : Salı, 23 Temmüz, 2019.

1. Aşağıdaki kümelerin açık veya kapalı ya da hem açık hem kapalı olmadığını kanıtlayınız.
   (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
   (b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1,\ -1 < y < 1\}$.
   (c) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(x)\}$.
   (d) $E = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid -1 < x, y < 1\}$.
   (e) $\Delta_n := \{a \in \mathbb{R}^n \mid a_i > 0,\ i \in [n],\ a_1 + \ldots + a_n < 1\}$.
2. $\mathbb{R}^n$ uazayının açık ve boş-olmayan alt-kümelerin müteşekkil bir $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi I içindeki her $\alpha \neq \beta$ elemanı için $V_\alpha \cap V_\beta$ olması koşulunu sağlıyorsa, I kümesinin sayılabılır olduğunu ispatlayınız. Açık olmaları koşulu kaldırıldığında, bu hala geçerli mi?
3. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ise
   (a) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ ve $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,
   (b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ve $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,
   (c) $\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$ ve $\partial(A \cap B) \subset (A \cap \partial B) \cup (B \cap \partial A) \cup (\partial B \cap \partial A)$,

   olduğunu gösteriniz.
4. (Büyük O ve küçük O notasyon) Aşağıdakileri kanıtlayınız
   (a) $\sin(x) = O(x)$, eğer $x \to 0$.
   (b) $\tan(x) - x = o(x)$, eğer $x \to 0$.
   (c) $x^{1/x} - 1 = o(1/x)$ eğer $x \to \infty$.
5. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ sürekli ise, $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ fonksiyonun sürekli olduğunu gösteriniz.
6. Çok eğişkenli analiz de ortalama değer teoremi şu diyor : U bir konveks ve açık küme olmak üzere, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olsun ve $a, b \in U$ olsun. $c \in \mathbb{R}^m$ bir vektör olsun. O zaman, oyle bir $t \in [0, 1]$ vardır ki
$$f\,[ta + (1 - t)b] \cdot c = [f(b) - f(a)] \cdot c.$$
7. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyon a noktada sürekli ise, onun a noktada türevlenebilir olduğunu gösteriniz.
8. Bir örnek vererek gösteriniz : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ türevlenebilir ise, onun kısmı türevler sürekli olmak zorunda değil.
9. Biz derste şunu gördük : f sürekli ancak ve ancak her açık kümsinin ters görüntüsü $f^{-1}(U)$ açıktır. Bir örnek vererek bunu gösterniz : f sürekli ise, her açık küme U'nın görüntüsü $f(U)$ açık olmak zorunda değil.