Analiz III – Vize Çözüm

(1) $$f(x,y) = \begin{cases} x(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

a) Bu fonksiyon $(0,0)$ noktada süreklidir.
Sebep

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|(x^2+y^2) = 0$$

çünkü $\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$

Dolayısıyla, f $(0,0)$ noktada süreklidir.

b) Bu fonksiyon $(0,0)$ noktada türevlenebilirdir.
Sebep $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$.

Aynen, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

f türevlenebilir $(0,0)$ noktada $\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

Ama, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|x\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x\sqrt{x^2+y^2}|$

$= 0$.

Dolayısıyla türevlenebilirdir.

c) f'nin türevi hesaplayalım

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} (3x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{y=0 \\ x\to 0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{x\to 0} \underbrace{3x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0} - \underbrace{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{Limit yok}}$$

Dolayısıyla, $\frac{\partial f}{\partial x}$ $(0,0)$ noktada sürekli değil.

(2) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ iki kez türevlenebilir.

ve $\nabla^2 f(a) > 0 \quad \forall \ a \in \mathbb{R}^n$.

Bunu göstereceğiz: $\forall \ a, b \in \mathbb{R}^n$,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Ortalama değer theorem:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \langle f''(a+th)h, h \rangle$$

sağlayan $0 \leq t \leq 1$ vardır.

a için $\frac{a+b}{2}$ ve h için $\frac{a-b}{2}$ kullansak

$$f(a) > f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad (1)$$

çünkü $A = f''\left(\frac{a+b}{2} + t\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) > 0 \Rightarrow$ her vektör v için $\langle Av, v \rangle > 0$.

a için $\frac{a+b}{2}$ ve h için $\frac{b-a}{2}$ kullansak

$$f(b) > f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) \qquad (2)$$

$\frac{(1)+(2)}{2}$ yapsak,

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} > f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \triangledown$$

3) $f(x,y) = (2x^2+y^2)\, e^{-x^2-y^2}$

Yerel Max / Min : Bunlar için $\nabla f(a,b) = 0$ olmalı

$$\nabla f(x,y) = \left[(4x - 4x^3 - 2xy^2) e^{-x^2-y^2} ,\ (2y - 2y^3 - 4x^2 y) e^{-x^2-y^2} \right]$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff 4x - 4x^3 - 2xy^2 = 0 \text{ ve}$$
$$2y - 2y^3 - 4x^2 y = 0 .$$

$$\Rightarrow \quad 2x(2 - 2x^2 - 2y^2) = 0 \quad \text{ve} \quad 2y(1 - y^2 - 2x^2) = 0 .$$

a) $2x = 0$ ve $2y = 0$ $\quad (x,y) = (0,0)$

b) $2x = 0$ ve $1 - y^2 - 2x^2 = 0$ $\quad (x,y) = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

c) $2y = 0$ ve $2 - 2x^2 - 2y^2 = 0$ $\quad (x,y) = (\pm 1, 0)$

d) $1 - y^2 - 2x^2 = 0$ ve $2 - 2x^2 - 2y^2 = 0$ $\iff$

$2x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 = 1$ $\Rightarrow x^2 = 0$

$\Rightarrow$ b) olacak.

Olabilen Maxima / Minima

- $(0,0) \longrightarrow f(x,y) = 0$
- $(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) \longrightarrow f(x,y) = \frac{1}{2} e^{-1/2}$
- $(\pm 1, 0) \longrightarrow f(x,y) = 2e^{-1}$

Hessian hesaplama:

$$\nabla^2 f(x,y) = \left[\begin{array}{c|c} 4 - 12x^2 - 2y^2 - 8x^2 + 8x^4 + 4x^2y^2 & -4xy - 8xy + 8x^3 y + 4xy^3 \\ \hline -4xy - 8xy + 8x^3 y + 4xy^3 & 2 - 6y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 4y^4 + 8x^2y^2 \end{array} \right]$$

$$\times\, e^{-2x^2-y^2}$$

- $\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Yerel Minima
- $\nabla^2 f(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Yerel Max
- $\nabla^2 f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Yerel Max / Min değil.
- $(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \geq 0$ olduğundan, $(0,0)$ Mutlak minimadır.
- $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = 0$ olduğu için Mutlak Maxima vardır. Bunlar $(\pm 1, 0)$ noktada olmak zorunda.

(4) $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$

a) $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y,\ 3x - 3y^2)$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff x^2 = -y$ ve $x = y^2$

$\iff y^4 = -y \Rightarrow y \in \{0, -1\}$

Yerel Maksima/Minima $\subset \{(0,0), (\pm 1, -1)\}$

$[-1,1] \times [-1,1]$'nın içinde olan adaylar : $(0,0)$

$f(0,0) = 0$.

b) Sınırlar üzerinde

$x = -1$ $\quad f(-1,y) = -1 - 3y - y^3$

$\quad \frac{\partial}{\partial y} f(-1,y) = -3 - 3y^2$ kritik nokta yok

$x = 1$ $\quad f(1,y) = 1 + 3y - y^3$

$\quad \frac{\partial}{\partial y} f(1,y) = 3 - 3y^2$ kritik noktalar ; $\{(1, \pm 1)\}$

$y = -1$ $\quad f(x,-1) = x^3 - 3x + 1$

$\quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,-1) = 3x^2 - 3$ kritik noktalar $\{(\pm 1, -1)\}$

$y = 1$ $\quad f(x,1) = x^3 + 3x - 1$ kritik nokta yok.

Adaylar : $\{(1,\pm 1), (\pm 1, -1)\}$
Ayrıca, köşe noktaları $\{(\pm 1, \pm 1)\}$ da max / min olabilir.

Toplam Adaylar : 5 nokta
$(0,0)$, $(\pm 1, \pm 1)$

$f(0,0) = 0$

$f(1,1) = 2$ $\quad f(-1,1) = -5$

$f(1,-1) = -1$ $\quad f(-1,-1) = 3$

Sonuç : Sürekli fonksiyon, kapalı sınırlı küme
$\Rightarrow$ Mutlak Max / Min vardır.

Mutlak max : $(-1,-1)$ Değer $\rightarrow 3$

Mutlak min : $(-1,1)$ Değer $\rightarrow -5$

⑤ $x^2+2y^2+z^2 = 1$ ve $x+y+2z = 1$ şartları
$f(x,y,z) = xy$ Minimize ediniz.

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xy - \lambda(x^2+2y^2+z^2-1) - \mu(x+y+2z-1)$$

$\nabla L = 0 \Rightarrow$
$y - 2\lambda x - \mu = 0$ (1) $\quad x+y+2z = 1$
$x - 4\lambda y - \mu = 0$ (2)
$-2\lambda z - 2\mu = 0$ (3)
$x^2+2y^2+z^2 = 1$ (4)

Maalesef bunun çözüm fazla karışık! Biraz işlem yapan öğrencilere tam puan verdim.

⑥ $f(x,y) = xe^y$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ olduğunu gösteriniz.

$\longrightarrow$ Basit hesaplama

⑦ $\log(1+x+2y)$

$$\rightsquigarrow f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,\frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,\frac{y^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,xy$$

$$\longrightarrow x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$$

⑧ $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a)|}{|h|} = \alpha$ $\leftarrow$ Bu tanım iyi bir tanım değil çünkü sabit fonksiyonlar dışında bu genelde bir limit değer vermez.

Örnek: $f(x,y) = x$ olsun.

o zaman bile $(0,0)$ da $\displaystyle\lim_{(h,k)\to 0} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ limit yok!

Demek ki bu tanım en doğal fonksiyonlar için bile bişey vermez. Boş bir tanım.