Fonksiyonel Analiz : Ödev 1

Mohan Ravichandran

Çarşamba, 24 Temmüz

1. X, Y normlu lineer uzay olmak üzere, eğer $T : X \to Y$ birebir örten lineer dönüşüm varsa ve ayrıca $||T||$ ve $||T^{-1}||$ sınırlı ise, X ve Y izomorfik denir.

   Eğer ayrıca $||T|| = ||T^{-1}|| = 1$ ise, bu uzaylar izometrik izomorfik denir.

   $1 \leq p \neq q \leq \infty$ olsun. ℓ_p^n ve ℓ_q^n nın izomorpfik ama izometrik izomorfik olmadığı ispatlayınız.

2. Her sonlu boyutlu normlu lineer uzay nın Banach uzay olduğunu kanıtlayınız.

3. Banach uzay olmayan bir normlu lineer uzay inşa ediniz.

4. X bir topolojik uzay olsun. $C(X)$ (X den $\mathbb{R}$ e giden sürekli fonksiyonler) nın bir Banach uzay olduğunu ispatlayınız. Burada normu sup normudur,

$$|f| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

   Not: Bu aynı zamanda ℓ_∞^n ve ℓ_∞ nın Banach uzay olduğunu gösterir.

5. ℓ_1^n nın bir Banach uzay olduğunu ispatlayınız.

6. X, Y Banach uzay olsun. O zaman $\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y, T \text{ lineer ve sürekli}\}$ nın bir Banach uzay olduğunu gösteriniz. Burada normu operator normudur,

$$||T|| := \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|T(x)|_Y}{|x|_X}.$$

   Eğer Y Banach uzay değil, sadece bir normlu lineer uzay ise, bu hala geçerli midir? Eğer X Banach uzay değil, sadece bir normlu lineer uzay ise, bu hala geçerli midir?

7. X bir Banach uzay olsun. Onun her kapalı alt uzay'nın bir Banach uzay olduğunu gösteriniz.

8. Derste Hahn-Banach teoremi yapmıştık. Bunun biraz farklı bir versiyon ispatlayınız. X bir normlu lineer uzay olsun. p, X üzerinde tanımlı bir non-negatif fonksiyonu olsun ve bu şartlar sağlasın

   (a) Her $x, y \in X$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

   (b) Her $x \in X$ ve $\alpha \geq 0$ için $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

   Boyle bir p e semi-normu denir (normdan iki fark var : $p(x) = 0$ demek x 0 olmak zoruna değil ve $p(-x)$ ve $p(x)$ aynı olmak zorunda değil).

   Şimdi $Y \subset X$ bir alt-uzay olsun ve $\phi : Y \to \mathbb{R}$ bir sürekli lineer dönüşüm (fonksiyonel) olsun ve öyle ki her $y \in Y$ için $\phi(y) \leq p(y)$.

   O zaman, ϕ fonksiyonel Y den X e $\phi(x) \leq p(x)$ şartı korunmuş şeklinde uzatılabılır diye gösteriniz.

9. Yukarıdakı sonuçun çök önemli başka bir sonucu var. X bir Banach uzay olsun ve $0 \in E \subset X$ bir kapalı, konveks küme olsun ve $a \in X \setminus E$ bir nokta olsun. O zaman oyle bir fonksiyonel $\phi \in X^*$ var ki

$$\forall b \in E,\ \phi(b) \geq 0, \quad \phi(a) = -1.$$

Bunu ispatlayınız. Not : İlk olarak bunu gösteriniz. $r : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ boyle tanımlayalım

$$r(x) = \inf\{\alpha \geq 0 \mid x/\alpha \in E\}.$$

Bunu bir semi-normu olduğunu gösteriniz. Sonra uygun bir şekilde yukarıdakı yeni Hahn-Banach teoremin kullanınız.