Analiz IV

Önerme 3.1

$E \subset U \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge olsun

↳ Açık küme

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ türevlenebilir (U üzerinde)

① O zaman $f(U)$ Jordan Bölgedir.

② $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun.

O zaman

$$\int_{f(U)} g = \int_U g\circ f \, |\det f'|$$

Değişken Değişiklik formül

Örnek 3.2

$$\int_{1\le x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2)$$

$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ①

$$f'(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$|\det f'| = r$$

$$(r,\theta) \xrightarrow{f} (x,y)$$

$(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$U = \left\{ \begin{matrix} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \right\} \qquad f(U) = \left\{ (x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4 \right\}$$

$$g(x,y) = x^2+y^2$$

$$\int_{1\le x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2) = \int_{\substack{1\le r\le 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi}} r^2 \cdot r = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\int_{r=1}^{2} r^3\,dr\right] d\theta = \frac{15\pi}{2} \quad \blacksquare$$

Tartış...

Hang...

Han...

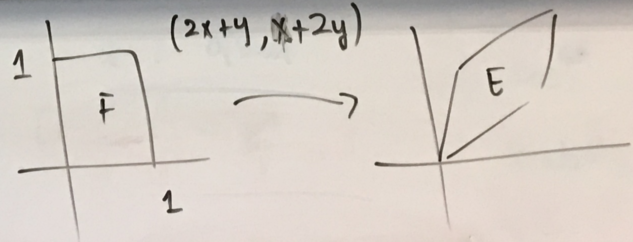
a)

Not

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_F f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

E ↳ Kartesian

F ↳ Polar



$u = 2x+y$

$v = x+2y$

②

$f(0)$

Değişken

Değişiklik formül

$$g(x,y) = x^2+y^2$$

$$\int_{1 \le x^2+y^2 \le 4} (x^2+y^2) = \int_{\substack{1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} r^2 \cdot r = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\int_{r=1}^{2} r^3 dr \right] d\theta = \frac{15\pi}{2}$$

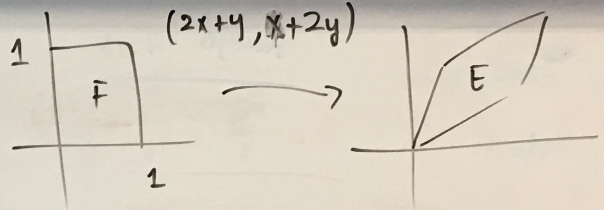
②

Not

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_F f(r,\theta)\, r \, dr\, d\theta$$

↳ cartesian

↳ Polar ko-ordinata göre



$(2x+y,\ x+2y)$

$$u = 2x+y$$
$$v = x+2y$$

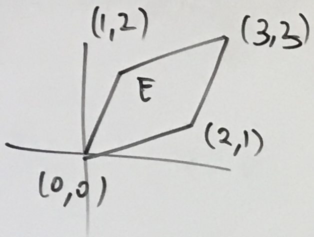
$$\int_E u^2 v = \int_F (2x+y)^2 (x+2y) \,|\det f'|$$

↳ $f(x,y) = (2x+y,\ 2y+x)$

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} \left(4x^3 + 2y^3 + 12x^2y + 9xy^2\right) dx\,dy$$

Örnek 3.3



$$\int_E u^2 v \,du\,dv$$

Tartışma 3.4

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \\ 0 & x \text{ Irrasyonel} \end{cases}$$

Hangi noktalarda sürekli?
Hangi noktalarda türevlenebilir?

a) Süreklilik

$a = \frac{p}{q}$

$f(a+h) = f(a) + o_h(1)$ $\quad h \to 0$

$f(a) = \frac{1}{q} \neq 0$

$f(a+h) = 0$ eğer $a+h$ Irrasyonel ise

$\Rightarrow$ sürekli değil. (h istediği kadar küçük ve öyle ki a+h irrasyonel seçebiliriz)

$A_n = \left\{ \frac{p}{q} : q \leq n \right\}$ Ayrık bir küme

$\varepsilon > 0$. öyle bir n | $|a - y| > \varepsilon \ \forall y \in A_n$

$\Rightarrow |f(a+h)| < \frac{1}{n}$ eğer $|h| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = 0$.

Sonuç,

f : her irrasyonel sayıda sürekli
: rasyonel sayılarda sürekli değil.

b) Türevlenebilirlik

Iddia: Hiç bir noktada türevlenebilir değil.

Not türevlenebilir $\Rightarrow$ Sürekli
Dolaysıyla $\mathbb{Q}$ üzerinde türevlenebilir değil.

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 1.$$

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$$

(Irrasyonel sayıda $f(\cdot) = 0$)

$f(a) = \frac{1}{q} \neq 0$

$f(a+h) = 0$ eğer $a+h$ Irrasyonel ise

$\Rightarrow$ sürekli değil. (h istediği kadar küçük ve öyle ki $a+h$ irrasyonel seçebiliriz)

f : her irrasyonel sayıda sürekli

: rasyonel sayılarda sürekli değil.

b) Türevlenebilirlik

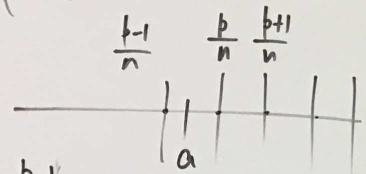
Iddia: Hiç bir noktada türevlenebilir değil.

④

Not türevlenebilir $\Rightarrow$ Sürekli

Dolaysıyla $\mathbb{Q}$ üzerinde türevlenebilir değil.

$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ olsun



$\frac{p-1}{n} < a < \frac{p}{n}$

$$\frac{f\left(\frac{p}{n}\right) - f(a)}{\frac{p}{n} - a} \geq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 1.$$

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$$

(Irrasyonel sayıda $f(\cdot) = 0$)

$\Rightarrow$ Türevlenebilir değil.

Tartışma 3.5

öyle bir f var mı?

a) f her noktada sürekli

b) f hiç bir noktada türevlenebilir değil.

VAR

Örnek $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{3/2}} =: f(x)$$

Analiz IV

Önerme 3.1

$E \subset U \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge olsun

↳ Açık küme

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad f \in C^1(U)$

① O zaman $f(E)$ Jordan Bölge dir.

② $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun.

O zaman

$$\int_{f(U)} g = \int_U g \circ f \, |\det f'|$$

Değişken

Değişiklik

formül

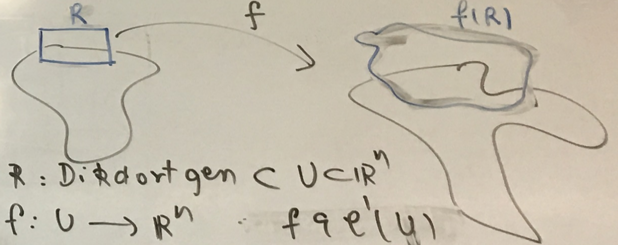
İspat (5)

① E Jordan Bölge $\Leftrightarrow V(\partial E) = 0$.

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists R_1, \dots, R_p$ dikdörtgenler var ki

$\partial E \subset \bigcup R_i$

ve $\sum |R_i| < \varepsilon$.



İddia R : Dikdörtgen $\subset U \subset \mathbb{R}^n$

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad f \in C^1(U)$

O zaman $f(R)$ Jordan Bölgedir

ve $|f(R)| \leq |R| \max_{a \in R} \|f'(a)\|^n$

$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|Ax|}{|x|}$

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(|h|)$

Taylor formül

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f'(a) \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad$ Her $u \in \mathbb{R}^n$ için

Ama $f(R)$ neden Jordan Bölgedir? (6)

İddia: $\partial f(R) = f(\partial R)$.

· $f(\partial R) \supset \partial f(R)$ çok kolay.

$f(u)$

Değişken

Değişiklik formül

O zaman $f(R)$ Jordan Bölgedir

ve $|f(R)| \leq |R| \max_{a \in R} \| f'(a) \|^n$

$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|Ax|}{|x|}$

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(|h|)$

Taylor formül

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f'(a) \in M_n(\mathbb{R})$

Her $u \in \mathbb{R}^n$ için

$\langle f(a+h), u \rangle = \langle f(a), u \rangle + \langle f'(\xi) h, u \rangle$

sağlayan bir $\xi \in [a, a+h]$ vardır.

$\Rightarrow |f(a+h) - f(a)| \leq \| f'(\xi) \| \, |h|$

$\forall h \in B_r(a)$

$|f(a+h) - f(a)| \leq \max_{\xi \in B_r(a)} \| f'(\xi) \| \cdot |h|$

$\Rightarrow \overline{V}(f(R)) \leq |R| \max_{a \in R} \| f'(a) \|^n$

Ama $f(R)$ neden Jordan Bölgedir? (6)

İddia: $\partial f(R) = f(\partial R)$.

- $f(\partial R) \supset \partial f(R)$ çok kolay.

$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

$x \in \partial R \Leftrightarrow x \in \overline{R} \cap \overline{(R^c)}$

$\Rightarrow f(\overline{R}) \supset \overline{f(R)}$, $f(\overline{R^c}) \supset \overline{f(R^c)}$

$\Rightarrow \partial f(R) \subset f(\partial R)$.

- Öbür taraf: Ters Fonksiyon Teorem.

En sonda,

$|\partial f(E)| = |f(\partial E)| \leq \varepsilon \max_{a \in R} \| f'(a) \|^n$

$\varepsilon > 0$ istediğimiz kadar küçük yapabiliriz.

$\Rightarrow |\partial f(E)| = 0 \Rightarrow f(E)$ Jordan Bölgedir.

$$\frac{f(\frac{b}{n}) - f(a)}{\frac{b}{n} - a} \geq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

h) f hiç bir noktada türevlenebilir değil.

Örnek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{3/2}} =: f(x)$

Örnek 3.6

(7)

$|B_n^3| = ?$

$\hookrightarrow \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^n + x_2^n + x_3^n \leq 1\}$