①

Önerme 3.1

$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

türevlenebilir.

1. $E \subseteq U$ Jordan Bölge $\Rightarrow$ $f(E)$ bir Jordan Bölgedir.
2. $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

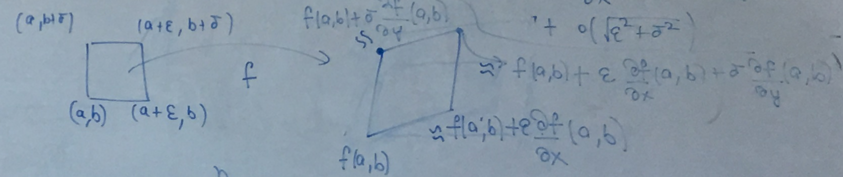
$$\int_{f(E)} g = \int_E g \circ f \, |\det f'|$$

İspat İlk olarak $g(x) = 1$ olan fonksiyon olsun.

Bunu göstermek lazım

$$|f(U)| = \int_E |\det f'|$$

$$f(a+\varepsilon, b+\delta) = f(a,b) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \delta \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o\left(\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}\right)$$



Not $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

Bunlardan oluşan paralel kenar P olsun

O zaman $|P| = \left|\det\left[v_1 | \cdots | v_n\right]\right|$

②

Önerme 3.0

$E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lineer Dönüşüm

$R = \{ 0 \le x_i \le a_i$

Adım 2 $T^{ij} = I + \lambda E^{ij}$

$E^{ij}(i,j) = 1$

$E^{ij}(k,l) = 0$ eğer $k \neq i$, $j \neq l$

örnek
$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Bunu g

eğer

(Bi

f(E) $\quad$ E $\quad$ f(a,b) $\quad$ ∂x

Not $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$

Bunlardan oluşan paralel kenar P olsun

O zaman $|P| = \left|\det\left[v_1|\cdots|v_n\right]\right|$

Önerme 3.0

$E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lineer Dönüşüm

$\Rightarrow \quad |T(E)| = |E|\,|\det(T)|$

$$R = \left\{\begin{array}{l} 0 \le x_i \le a_i \\ 1 \le i \le n \end{array}\right\}$$

İspat Bunu dikdörtgenler için göstermek yeter.

$R = [0,a_1]\times\cdots\times[0,a_n]$ olsun.

Bunu göstereceğiz $|T(R)| = |R|\,|\det(T)|$

Adım 1 $T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$T(R) = [0,\lambda_1 a_1]\times\cdots\times[0,\lambda_n a_n]$

$|T(R)| = |\lambda_1\cdots\lambda_n|\; a_1\cdots a_n$

$= |\det(T)|\;|R|$

Köşegen matrisler için doğru.

Adım 2 $T^{ij} = I + \lambda E^{ij}$

$E^{ij}(i,j) = 1$

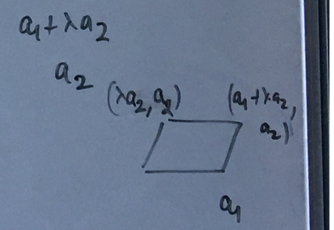
$E^{ij}(k,l) = 0$ eğer $k \ne i$, $j \ne l$

örnek
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(R) = \left\{\begin{array}{l} 0 \le x_n \le a_n \\ \vdots \\ 0 \le x_2 \le a_2 \\ x_2 \le x_1 \le x_2 + a_1 \end{array}\right.$$

$$|T(R)| = \int_{x_n=0}^{a_n}\cdots\int_{x_2=0}^{a_2}\int_{x_1=\lambda x_2}^{\lambda x_2+a_1} 1\,dx_1\cdots dx_n$$

$$= |R|\,|\det(T)|$$



③

Bunu gördük:

$|T(R)| = |R|\,|\det(T)|$

eğer T a) Köşegen Matris için. $\begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix}$

b) $I + \lambda E^{ij}$ matris için $\begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \lambda \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

Gauss Çökertme ⟹ Her Matris

a) ve b) tarz matrislerin

çarpma olarak yazılabilir: $T = \underbrace{A_1 \cdots A_k}_{(b)} \underbrace{D}_{(a)}$

(Bir iki küçük detay) ? ⟶ $|T(R)| = |R| \left(\prod_{i=1}^{k} |\det(A_i)| \right) |\det(D)|$

$= |R|\;|\det(T)|$ ∎

Gauss Yok Etme yöntem

$T \in M_n(\mathbb{R})$

$T = \underbrace{A_1 \cdots A_k}_{\substack{I+\lambda E^{ij} \\ \text{tarz} \\ \text{matrisler}}} D$ ↳ Köşegen Matris

④

Önerme 3.1 nin İspatı

$E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge.

Önerme 3.0 ⟹ Lineer fonksiyon f için

$|f(E)| \approx \sum |f(R_i)|$

$\approx \sum |f'(a)(R_i)|$

$\approx \sum |\det f'(a)|\,|R_i|$

Doğru Düzgün İspat

Çarpma olarak yazılabilir : $T = A_1 \cdots A_k D$

(Bir iki küçük detay) ? $\longrightarrow$ $|T(R)| = |R| \left(\prod_{i=1}^{k} |\det(A_i)| \right) |\det(D)|$

$= |R| \, |\det(T)|$

$\square$

Önerme 3.1 nin İspatı

$E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan Bölge.

Önerme 3.0 $\Rightarrow$ Lineer fonksiyon f için

Türevlenebilir $|f(E)| = |E| \, |\det(f')|$

Genel Fonksiyonler : Her Türevlenebilir fonksiyon yerel olarak hemen hemen lineerdir. (*)

+ Hacim / $\int$ için yerel hesaplama yapıyoruz.

$|f(E)| \approx \sum |f(R_i)|$ $\quad$ R_i üzerinde f ≈ Lineer (f').

$\cup R_i \approx E$

küçük dikdörtgenler

④

$|f(E)| \approx \sum |f(R_i)|$

$\approx \sum |f'(a)(R_i)|$

$\approx \sum |\det f'(a)| \, |R_i|$

$\approx \int_E |\det f'|$

Doğru Düzgün İspat Sonra göreceğiz

Hacım'dan Integral ?

$\int_{f(E)} g = \int_E g \circ f \, |\det f'|$

$\Uparrow$

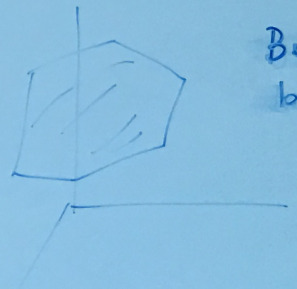
$|Ebi_{f(E)}(g)|$ $\square$

(+ 1 küçük hesaplama),

Örnek 3.2

P_3

Permutohedron : $\text{conv}\left\{ (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1) \right\}$



Bu $\mathbb{R}^3$ içinde bir iki boyutlu poligondur.

$$|P_3|_2 = ?$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Eğri

Yüzey $\int$

Fluks

$\boxed{\text{Stokes Thm}}$

$$P_n = \text{conv}\left\{ \sigma : \sigma \in S_n \right\}$$

$\sigma \rightsquigarrow (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$