① $X = (\mathbb{R}^{n+m}, |\cdot|)$

$|(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{m+n})| := |(x_1, \dots, x_n)|_1 + |(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})|_\infty$

Bunun bir Banach uzay olduğunu gösteriniz

② ℓ_p^n eğer $-\infty < p < 1$ ise Banach uzay değil. İspatlayınız

$\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, |\cdot|_p)$ $\quad |x|_p := \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}$

③ $X = (\mathcal{C}^1([0,1]), |\cdot|_\infty)$

$\hookrightarrow \{f \in \mathcal{C}([0,1]), \text{Türevlenebilir}\}$

$f \xrightarrow{T} f'$ Bunun sürekli olmadığını gösteriniz

$1 < p$ olsun

④ $\operatorname{span}\left(\left\{e_1, \frac{e_1+e_2}{2}, \frac{e_1+e_2+e_3}{3}, \dots\right\}\right) = \ell_p$ olduğunu gösteriniz

$\ell_p = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \sum |x_i|^p < \infty\}$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$

(3) $X = \left(\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$

$\hookrightarrow \{ f \in \mathcal{C}([0,1]), \text{Türevlenebilir} \}$

$f \xrightarrow{T} f'$ Bunun sürekli olmadığını gösteriniz

$1 < p$ olsun

(4) $\mathrm{span}\left(\left\{ e_1, \frac{e_1+e_2}{2}, \frac{e_1+e_2+e_3}{3}, \dots \right\} \right) = \ell_p$ olduğunu gösteriniz

$\ell_p = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \;\middle|\; \sum |x_i|^p < \infty \right\}$

$\|(x_1, x_2, \dots)\|_p := \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p}$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$

$e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots)$

(1) $(\ell_p)^* = \ell_q$

(2) Hahn - Banach Ayrışma.

limit sürekli olmak zorunda değil.

Bu mümkün mü?

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli

$\forall x \quad f_n(x) \to f(x)$

Ama $f(x)$ hiç bir noktada sürekli değil? Yok

sürekli değil.

Soru Böyle bir fonksiyon var mı? / $[0,1]$ üzerinde)

Tüm rasyonel noktalarda sürekli

Tüm irrasyonel noktalarda sürekli değil

Yok

Baire Category Thm

Fonksiyonel Analiz

1

Thm 3.1 Baire Category Theorem

(X,d) tam bir metrik uzay olsun.

$A_1, A_2, \ldots$ kapalı ve içi boş olan kümeler olsun.

O zaman $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ kümesinin içi boş.

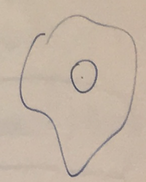
Not: A içi boş $\iff$ Hiç bir $x \in A$ ve $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \not\subset A$.

Contrapositive

(X,d) tam metrik uzay

$U_1, \ldots, U_n, \ldots$ yoğun açık kümeler.

O zaman $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ yoğundur.



9.2 Uygulama

a) $f_n(x) = x^n$ $\quad x \in [0,1]$

$$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

sürekli fonksiyonların noktasal limit sürekli olmak zorunda değil.

Bu mümkün mü?

$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli

$\forall x \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$

Ama $f(x)$ hiç bir noktada sürekli değil? Yok

b)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \ldots \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \quad (p,q) = 1 \quad x \in [0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Bu fonksiyon tüm irrasyonel sayılar ve 0 noktada sürekli.
Kalan (rasyonel noktalar : 0 hariç) noktalarda sürekli değil.

Soru Böyle bir fonksiyon var mı? / $[0,1]$ üzerinde)

Tüm rasyonel noktalarda sürekli
Tüm irrasyonel noktalarda sürekli değil

Yok

Baire Category Thm

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ yoğundur $\square$.

Sebep

İddia : E_i lerin ... boş,

Yoksa $\exists\, a \in E_i$ ...

$B(a,\varepsilon) \subset E_i \Rightarrow B(a,\varepsilon) - a \subset E_i$

$\Rightarrow B(0,\varepsilon) \subset E_i$

$b \in X \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}\frac{b}{|b|} \in B(0,\varepsilon) \subset E_i$

$\Rightarrow b \in \frac{2}{\varepsilon}|b|\, E_i = E_i$ (çünkü E_i alt uzaydır)

Baire Category $\Rightarrow \bigcup E_i$ 'nin içi boş

$\Rightarrow \bigcup E_i \subsetneq X$.

③

İspat (3.1: Baire Category Thm)

İlk olarak bunu gösterelim:

$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ Boş değildir.

$a_1 \in U_1$ olsun. U_1 açık $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$,

$B(a_1, \varepsilon) \subset U_1$.

U_2 yoğun $\Rightarrow \exists\, a_2 \in B(a_1,\varepsilon) \cap U_2$

U_2 açık $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_2 > 0$,

$B(a_2,\varepsilon_2) \subset B(a_1,\varepsilon_1) \cap U_2$

Ayrıca $\varepsilon_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olarak alabiliriz.

$B(a,\varepsilon) \subset U_1$

$B(a_2, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U_2 \cap B(a_1,\varepsilon)$

Aynı mantık kullanarak.

$\exists\, a_1, a_2, a_3, \ldots$

$\overline{B(a_1,\varepsilon)} \subset U_1$

$\overline{B(a_2,\frac{\varepsilon}{2})} \subset B(a_1,\varepsilon) \cap U_2$

$\vdots$

$\overline{B(a_n, \frac{\varepsilon}{2^{n-1}})} \subset B(a_{n-1}, \frac{\varepsilon}{2^{n-2}}) \cap U_n$

Not : $a_1 \in U_1$

$a_2 \in U_1 \cap U_2$

$a_3 \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$

$\vdots$

$a_n \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$

$d(a_n, a_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow n, m \geq N \Rightarrow$

$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1})$

$\leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$\leq \frac{1}{2^{N-1}}$

Dolayısıyla $\{a_n\}$ bir Cauchy dizi

(X,d) : Tam $\Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n$ vardır.

$\overline{B(a_i, \frac{\varepsilon}{2^{i-1}})}$ kapalı $\Rightarrow a \in \overline{B(a_i, \frac{\varepsilon}{2^{i-1}})}\ \forall i$

$\therefore \Rightarrow a \in U_1 \cap U_2 \cap \dots$

Dolayısıyla $\bigcap_{i=1} U_i$ boş değil

Aynı mantıkla her $a \in$ için

$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ boş değil.

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ yoğundur □

Uygulama 3

X : Banach uzay

O zaman $E_1, E_2, \dots$ kapalı alt-uzaylar olmak üzere $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ şeklinde yazılamaz.

Sebep

İddia : E_i'lerin içi boş,

Yoksa $\exists\, a \in E_i$ ve $\varepsilon > 0$ |

$B(a,\varepsilon) \subset E_i \Rightarrow B(a,\varepsilon) - a \subset E_i$

$\Rightarrow B(0,\varepsilon) \subset E_i$

$b \in X \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2}\frac{b}{|b|} \in B(0,\varepsilon) \subset E_i$

$\Rightarrow b \in \frac{2}{\varepsilon}|b|\, E_i = E_i$ (çünkü E_i alt uzaydır)

Baire category $\Rightarrow \bigcup E_i$'nin içi boş

$\Rightarrow \bigcup E_i \subsetneq X$.

İspat (3.1: Baire Category Thm)

İlk olarak bunu gösterelim:

$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ Boş değildir.

$a, \varepsilon\, U_1$ olsun. U_1 açık $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$,

Aynı mantık kullanarak.

$\exists\, a_1, a_2, a_3, \dots$

$\cdot\ \overline{B(a_1,\varepsilon)} \subset U_1$

$\cdot\ \overline{B(a_2,\frac{\varepsilon}{2})} \subset B(a_1,\varepsilon) \cap U_2$

$\vdots$

$\cdot\ \overline{B(a_n,\frac{\varepsilon}{2^{n-1}})} \subset B(a_{n-1},\frac{\varepsilon}{2^{n-2}}) \cap U_n$

Fonksiyonel Analiz

Teorem 3.4 (Uniform Boundedness Principle)

Banach – Steinhaus theorem

X Banach uzay, Y Banach uzay

$\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sürekli lineer dönüşümler

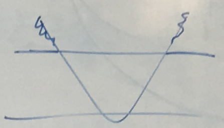
Eğer her $x \in X$ için $\{T_\alpha(x)\}$ sınırlı ise $\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha\in I}$ sınırlıdır

$\left(\left\{ T_\alpha\left[B_X(0,1) \right] \right\}_{\alpha\in I} \text{ sınırlıdır.} \right)$

... i.e Noktasal olarak sınırlı $\Rightarrow$ Düzgün sınırlı.

(5)

Tartışma $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ lineer olmasaydı bu geçerli mi?



$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \min\{|x|, n\}$

- $f_n(x) \le n \quad \forall x$
  f_n sınırlı, $\forall n$
- $f_n(x) \le |x|$
  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı
- $\{f_n(n)\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı değil.

- $\{f_n(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ sınırlı
- $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı olacak
- $\{f_n(n)\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı olmayacak

İspat $\quad A_n = \left\{ x \;\middle|\; \sup_{\alpha\in I} |T_\alpha x| \le n \right\}.$

$\exists\, N, a, \varepsilon \;\Big|\; A_N \supset B(a,\varepsilon)$

(6)

Her x için $\{T_\alpha x\}_{\alpha\in I}$ sınırlı

$\forall x \in B(a,\varepsilon)$

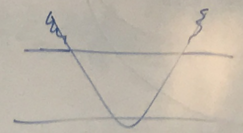
$\forall \alpha \in I$

$\alpha \in I$

Eğer her $x \in X$ için $\{T_\alpha(x)\}$ sınırlı ise $\{\|T_\alpha\|\}_{\alpha \in I}$ sınırlıdır

$\left(\left\{ T_\alpha\left[B_X(0,1)\right] \right\}_{\alpha \in I} \text{ sınırlıdır.} \right)$

$f_n(x) = \min\{|x|, n\}$



- $f_n(x) \leq n \quad \forall x$
- f_n sınırlı $\forall n$
- $f_n(x) \leq |x|$
- $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı
- $\{f_n(n)\} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı değil.
- $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı olacak
- $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlı olmayacak $x \in \mathbb{R}$

<u>İspat</u> $A_n = \left\{ x \;\middle|\; \sup_{\alpha \in I} |T_\alpha x| \leq n \right\}$.

Her x için $\{T_\alpha x\}_{\alpha \in I}$ sınırlı

$\Rightarrow \bigcup A_n = X$

İddia: A_n'ler kapalıdır.

$x_i \in A_n \Rightarrow \forall \alpha \in I,\ |T_\alpha x| \leq n$

$x_i \longrightarrow x \Rightarrow |Tx| = \lim |T_\alpha x| \leq n.$

Eğer her A_n'nin içi boş ise, $\bigcup A_n \neq X$ olmaz.

(Baire Category Thm)

$\exists N, a, \varepsilon \;\Big|\; A_N \supset B(a,\varepsilon)$

$\forall x \in B(a,\varepsilon)$

$\forall \alpha \in I$

$|T_\alpha x| \leq N$

$\forall y \in B_X(0,1)$,

$|T_\alpha(\underbrace{a + \varepsilon y}_{\in B(a,\varepsilon)})| \leq N$

$\Rightarrow |T_\alpha y| \leq \dfrac{N + |T_\alpha a|}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \sup_{\substack{y \in B_X(0,1) \\ \alpha \in I}} |T_\alpha y| \leq \dfrac{N+M}{\varepsilon}$,

$\boxed{\text{i.e. } \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| < \infty}$

6