Önerme 5.6

iki kez

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ U. açık, f türevlenebilir

$a \in U$

Eğer $f'(a) = 0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$

ve

$Hf(a) = \nabla^2 f(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] > 0$ ise

o zaman 'a' yerel minimadır.

$f'(a) = 0$ $f''(a) < 0$ $\Rightarrow$ yerel maxima. ①

İspat Yerel Minima $\Leftrightarrow$ Her türevlenebilir

$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\gamma(0) = a$

için 0 noktası

$f(\gamma(t))$ için

yerel minimadır.

$g(t) = f(\gamma(t))$ Yerel Minima $\Leftarrow$ $g'(0) = 0$

$g''(0) > 0$.

$\nabla f = 0$

$\nabla^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = e^{-\frac{1}{2}}$

$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right.$

$(0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ \gamma_i'(0)$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$

$= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\ \gamma_i'(0)\gamma_j'(0)$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$(g \circ f)'(a) = \underbrace{g'(f(a))}_{k \times m}\ \underbrace{f'(a)}_{m \times n}$

Örnek 5.7 ②

$f = x e^{-x^2-y^2}$

$\nabla f = [e^{-x^2-y^2}(1-2x^2),\ -2xy e^{-x^2-y^2}]$

$$Hf(a) = \nabla^2 f(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right] > 0 \text{ ise}$$

o zaman 'a' yerel minimadır.

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

$f(\gamma(t))$ için yerel minimadır

Yerel Minima $\Leftarrow$ $g'(0) = 0$, $g''(0) > 0$.

②

$$g'(0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \gamma_i'(0)$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

$$g''(0) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, \gamma_i'(0)\gamma_j'(0) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\, \gamma_i''(0)$$

$\nabla f(a) = 0$ ve $\nabla^2 f(a) > 0$

$\Rightarrow$ her γ için $g'(0) = 0$, $g''(0) > 0$.

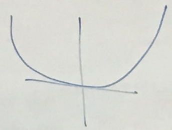
$\Rightarrow$ yerel Minima ✓

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$$\underbrace{(g \circ f)'(a)}_{k \times n \text{ Matris}} = \underbrace{g'(f(a))}_{k \times m}\, \underbrace{f'(a)}_{m \times n}$$

y^4



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ * & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Örnek 5.7

$$f = x e^{-x^2-y^2}$$

$$\nabla f = \left[e^{-x^2-y^2}(1-2x^2),\ -2xy\, e^{-x^2-y^2} \right]$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} e^{-x^2-y^2}(-6x+4x^3) & e^{-x^2-y^2}(1-2x^2)(-2y) \\ * & e^{-x^2-y^2}(-2x+4xy^2) \end{bmatrix}$$

$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 1-2x^2=0 \\ xy = 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{array}$ İki olabilen Yerel Max / Min

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = e^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow \text{Yerel Max}$$

$$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = e^{-1/2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Yerel Min.}$$

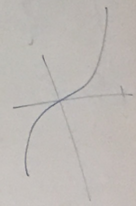
örnek 5.8 (3)

$f(x,y) = x^2 - y^2$ (Eyer noktası)

$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$

$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 1 özdeğer > 0, 1 özdeğer < 0

$\Rightarrow$ Yerel Max / Min değil.



Not 5.9

$E \subset \mathbb{R}^n$ kapalı, sınırlı

$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli

o zaman

$f(a) = \max f(x)$

örnek $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ (4)

f'nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde üzerinde

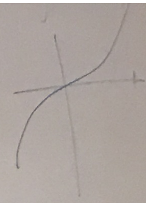
yerel max / min yok.

Ama sınır ($x^2+y^2=1$) üzerinde

maksimum değeri ulaşır.

$$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = e^{-1/2}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Yerel Min.}$$

$\Rightarrow$ Yerel Max / Min değil.



Not 5.9

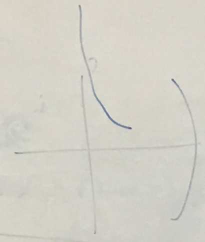
$E \subset \mathbb{R}^n$ kapalı, sınırlı
$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli

O zaman

$$f(a) = \max_{x \in E} f(x)$$

sağlayan 'a' vardır.

Kapalı olmazsa bu geçerli olmayabilir. Örnek $\left(f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0,1) \right)$



Örnek $f(x,y) = x^2 - y^2 \quad \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \}$.

f'nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde yerel max / min yok.
Ama sınır ($x^2+y^2=1$) üzerinde maksimum değeri ulaşır.

optimizasyon

$$\max_{x \in E} f(x)$$

① $E^\circ \rightarrow$ açık — Yerel Max / Min için ∇f, $\nabla^2 f$ hesaplayınız

② ∂E (sınır) — Lagrange çarpmaları.

Tartışma 5.10 (Lagrange Çarpanları)

$\max f(x)$
$x \in E$

örnek : $x^2 + y^2 = 1$ şart'ı altında
$x^4 + 3y^4$ maximize ediniz.

ŞARTLI OPTIMIZASYON

$\max\limits_{\{x \mid g(x)=0\}} f(x)$

maxsimum noktada :

$g(a) = 0$

$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$

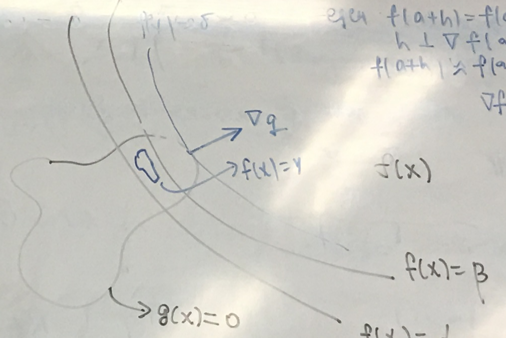
Tanım 5.11

$\max f(x)$
$g(x) = 0$

$L(x, \lambda) := f(x) - \lambda g(x)$

Lagrangian

O zaman, x : Yerel Max / Min ise öyle bir λ var ki (x, λ), $L(x, \lambda)$ için yerel Max. dır.



eğer $f(a+h) = f(a) \Rightarrow$
$h \perp \nabla f(a)$
$f(a+h) \approx f(a) + \nabla f(a)^T h$

$f(x)$

⑤

Maksimum için $g(x) = 0$ ve $f(x) = \delta$ Teğet'tir

$\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$ kesişim noktada.

$\nabla f = 0$

$\nabla^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) =$

örnek 5.12

$\max\ x + y + z$
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\max_{\{x \mid g(x)=0\}} f(x)$

Maxsimum noktada :

$g(a)=0$

$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$

Öyle bir λ var ki (x,λ), $L(x,\lambda)$ için yerel Max. dır.

$\to g(x)=0$ $\quad f(x)=\alpha$

Maksimum için $g(x)=0$ ve $f(x)=\alpha$ Teğet'tir

$\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$ kesişim noktada.

Örnek 5.12

$\max \; x+y+z$

$x^2+y^2+z^2=1$

$L(x,y,z,\lambda) = (x+y+z) - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

$\downarrow$

Yerel Max / Min

$\nabla L = (1-2\lambda x,\ 1-2\lambda y,\ 1-2\lambda z,\ -x^2-y^2-z^2+1)$

$\nabla L = 0 \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2\lambda} \quad y=\frac{1}{2\lambda} \quad z=\frac{1}{2\lambda}$

$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(x,y,z) \in \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \to \text{Max} \\ \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \to \text{Min} \end{array} \right.$