$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(a+tb)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tb)-f(a)}{t}$$

$$= \nabla f(a)^T b$$

$$= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, b_i$$

Analiz II

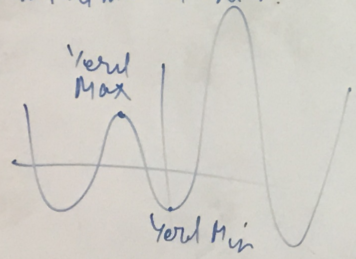
(1)

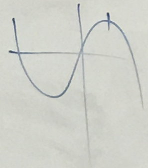
Tanım 5.3 (Yerel Max / Min)

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$

Eğer $f(a) \geq f(b)$ $\forall\, b \in B(a,\varepsilon) \cap A$ sağlayan $\varepsilon > 0$ varsa, 'a' noktası yerel maxima denir.

Eğer $f(a) \leq f(b)$ $\forall\, b \in B(a,\varepsilon) \cap A$ sağlayan $\varepsilon > 0$ varsa, 'a' noktası yerel minima denir.





Önerme 5.4

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, U açık.

Eğer 'a' noktası yerel max / min ise $\nabla f(a) = 0$ olmak zorundadır. $\left(\equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad i = 1, \ldots, n \right)$

İspat $t \longrightarrow f(a+tb)$

tek değişkenli fonksiyonun '0' noktasında yerel maksima (min) vardır

$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(a+tb)\Big|_{t=0} = 0$ (çünkü tek değişkenli fonksiyonlar için yerel maksima / minima $\Rightarrow$ türev $= 0$)

$\Rightarrow$ (önerme 4.8)

$\nabla f(a)^T b = 0$.

Bu her $b \in \mathbb{R}^n$ için geçerli. $\Rightarrow \nabla f(a) = 0$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad i = 1, \ldots, n.$

Önerme 4.8 (Hatırlatma: Zincir kuralı)

$f: \ldots \longrightarrow \mathbb{R}$, 'a' noktada türevlenebilir

$$\Rightarrow \left.\frac{d f(a+tb)}{dt}\right|_{t=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, b_i \quad \left(= \nabla f(a)^T b \right)$$

Hatırlatma

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^T h + o(|h|), \quad |h| \to 0$$

$$\Rightarrow f(a+tb) = f(a) + \nabla f(a)^T tb + o(t), \quad t \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+tb) - f(a)}{t} = \nabla f(a)^T b + o(1), \quad t \to 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d}{dt} f(a+tb)\right|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tb) - f(a)}{t}$$

$$= \nabla f(a)^T b$$

$$= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, b_i$$

②

Analiz II

①

Tanım 5.3 (Yerel max / min)

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$

Eğer $f(a) \geq f(b)$ $\forall b \in B(a, \varepsilon) \cap A$

Sağlayan $\varepsilon > 0$ varsa, 'a' noktası

yerel maximum denir

Önerme 5.4

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ U açık.

Eğer 'a' noktası yerel max / min ise

$\nabla f(a) = 0$ olmak zorundadır. $\left(\equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \; i = 1, \ldots, n \right)$

İspat $t \longrightarrow f(a+tb)$

(2)

Örnek 5.5

$f(x,y) = (x^2+y^4)\, e^{-x^2-y^2}$ $(x, \ldots)$

Yerel maksima / minima nelerdir?

Cevap

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}\; 2x\,(1-x^2 \ldots y^4)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}\left[4y^3 - 2y\,(x^2+y^4)\right]$

Yerel max / Min $\rightarrow$ $2x(1-x^2-y^4)=0$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+y^4=1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ $4y^3-2y(x^2+y^4)=0$ $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2y^2-x^2-y^4=0 \end{array}\right.$

(3)

Seçenek 1 : $x=0,\ y=0$

Seçenek 2 : $x^2+y^4=1,\ y=0 \Rightarrow x \in \{\pm 1\}$

Seçenek 3 : $2y^2-x^2-y^4=0,\ x=0 \Rightarrow y \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$

Seçenek 4 : $x^2+y^4=1,\ y^2(2-y^2)=x^2$

$\Rightarrow$ $y^2(2-y^2)+y^4=1 \Rightarrow y \in \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

$\Rightarrow (x,y) \in \{(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})\}$

Yerel Min

$(0,0)$

$(1,0)$ $(-1,0)$

$(0,\sqrt{2})$ $(0,-\sqrt{2})$

$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

9 olabilecek olan yerel max / min.

(4)

a) $(0,0)$: Mutlak Min + Yerel Min

Çünkü $f(x,y)>0$ eğer $(x,y)\neq(0,0)$

$f(0,0)=0$.

b) $(1,0)$: $f(1,0)=e^{-1}$

$\ldots (1+2h+h^2+k^4)\, e^{-1-2h-h^2-k^2}$

$\approx e^{-1}+e^{-1}\left[-k^2-2h(2h+k^2)\right]$

$\approx e^{-1}+e^{-1}\left[-k^2(1+2h)-4h^2\right]$

$\approx e^{-1}+e^{-1}\left[-k^2-4h^2\right]$

Her noktada <0

∂x

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}\left[4y^3 - 2y(x^2+y^4)\right]$$

Yerel Max / Min $\Rightarrow 2x(1-x^2-y^4)=0$: $x=0$; $x^2+y^4=1$

$\Rightarrow 4y^3-2y(x^2+y^4)=0$: $y=0$; $2y^2-x^2-y^4=0$

Yerel Min. $(0,0)$

$(1,0)$ $(-1,0)$

$(0,\sqrt{2})$ $(0,-\sqrt{2})$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

9 olabilecek olan Yerel max / min.

Sec : $x^2+y^4=1$, $y^2(2-y^2)=x$

$\Rightarrow y^2(2-y^2)+y^4=1 \Rightarrow y \in \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$\Rightarrow (x,y) \in \left\{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

a) $(0,0)$: Mutlak Min + Yerel Min

Çünkü $f(x,y)>0$ eğer $(x,y)\neq(0,0)$

$f(0,0)=0$.

b) $(1,0)$: $f(1,0)=e^{-1}$

$f(1+h,k) = (1+2h+h^2+k^4)\,e^{-1-2h-h^2-k^2}$

$(h,k\simeq 0)$

$\simeq (1+2h+k^4)\,e^{-1}\,e^{-2h-k^2}$

$\simeq (1+2h+k^4)(1-2h-k^2)\,e^{-1}$

$= e^{-1} + e^{-1}\left[(2h+k^4)-(2h+k^2)-(2h+k^4)(2h+k^2)\right]$

$(h,k)\neq 0$ $(h,k)\simeq 0$

Hep pozitif $\Leftrightarrow$ Yerel Min

Hep negatif $\Leftrightarrow$ Yerel Max

$= e^{-1} + e^{-1}\left[k^4-k^2-(2h+k^4)(2h+k^2)\right]$

$\simeq e^{-1} + e^{-1}\left[-k^2-2h(2h+k^2)\right]$

$\simeq e^{-1} + e^{-1}\left[-k^2(1+2h)-4h^2\right]$

$\simeq e^{-1} + e^{-1}\left[-k^2-4h^2\right]$ Her noktada <0.

$\Rightarrow (1,0)$ Yerel Maksimadır.

c) $(0,\sqrt{2})$ $f(0,\sqrt{2}) = \frac{4}{e^2}$

$f(h,\sqrt{2}+k) \simeq (h^2+4+8\sqrt{2}k)\,e^{-2}\,e^{-h^2-2\sqrt{2}k}$

$\simeq (4+h^2+8\sqrt{2}k)(1-h^2-2\sqrt{2}k)\,e^{-2}$

$\simeq \frac{4}{e^2} + \left[h^2+8\sqrt{2}k-4h^2-8\sqrt{2}k\right]e^{-2}$

$= \frac{4}{e^2} - \frac{3h^2}{e^2}$ $-$ve Yerel Maksima

④

d) $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-5/4}$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+h, \frac{1}{\sqrt{2}}+k\right)$

$\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+h\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+k\right)^2\right] e^{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+h\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+k\right)^2}$

$\approx \left(1+h\sqrt{3}+k\sqrt{2}\right) e^{-\left[\frac{5}{4}+h\sqrt{3}+k\sqrt{2}\right]}$

$\approx \left(1+h\sqrt{3}+k\sqrt{2}\right) \cdot e^{-5/4}\left(1-h\sqrt{3}-k\sqrt{2}\right)$

$= \left[1-\left(h\sqrt{3}+k\sqrt{2}\right)^2\right] e^{-5/4}$

$< e^{-5/4}$ $\quad (h,k) \neq (0,0)$, $h,k \approx 0$.

Yerel Max

Ödev ? ... Andiz II

$(a+h)^n \approx a^n + n h a^{n-1} \quad h \approx 0$

$e^h \approx 1+h \quad h \approx 0$

$\log(1+h) \approx h \quad h \approx 0$

... Yerel Max / Min, İkinci Türev) ⑤

$f : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad U \subset \mathbb{R}^n \quad a \in U$

İki defa türevlenebilir olsun. $\nabla f(a) = 0$ olsun.

$\nabla^2 f(a) = H_f(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{1 \le i,j \le n}$ Hessian Matris.

① Eğer $\nabla^2 f(a) > 0$ (Tüm özdeğerler > 0)

o zaman 'a' yerel minimadır.

② Eğer $\nabla^2 f(a) < 0$ (Tüm özdeğerler < 0)

o zaman 'a' yerel maksimadır.

İspat $\left.\frac{d^2}{dt^2} f(a+tb)\right|_{t=0} = \langle \nabla^2 f(a) b, b\rangle = b^T \nabla^2 f(a) b$

Neden? (Basit)

Eğer $\nabla^2 f(a) > 0$ (PSD), (Lineer Cebir) $\langle \nabla^2 f(a) b, b\rangle > 0 \quad \forall b$

⑥ Hatırlatma

$A = A^t \in M_n(\mathbb{R})$

$\sigma(A) \subset (0,\infty)$ (Tüm özdeğerler >0)

$\iff \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \langle Ah, h\rangle > 0$.

Yerel Max

$h, k \geq 0$.

(6)

İspat $\left.\dfrac{d^2}{dt^2} f(a+tb)\right|_{t=0} = \langle \nabla^2 f(a) b, b\rangle = b^T \nabla^2 f(a) b$

Neden? (Basit)

Eğer $\nabla^2 f(a) \geq 0$ (PSD), (Lineer Cebir) $\langle \nabla^2 f(a) b, b\rangle \geq 0 \quad \forall b$

⇒ Her doğru parça üzerinde $f(a+tb)$'nin yerel minima vardır.

⇒ 'a' noktası yerel minimadır.

Yerel Max: İspat aynı.

② $f: U \to \mathbb{R}$ iki defa türevlenebilir

$g(t) := f(a+tb)$

$\dfrac{d^2 g(t)}{dt^2} = \langle \nabla^2 f(a) b, b\rangle$

Sadece Türev'in Tanım Kullanarak.

Hatırlatma

$A = A^t \in M_n(\mathbb{R})$

$\sigma(A) \subset (0,\infty)$ (Tüm öz değerler >0)

$\iff \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \langle Ah, h\rangle > 0$.

① Quiz 1 10/100

$A = A^t \in M_n(\mathbb{R})$ simetrik Matris

O zaman bunlar birbirine denktir

1) A'nın tüm özdeğerler >0

2) $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \langle Ah, h\rangle > 0$.

a) Spektral Thm: $\exists\, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
($A = A^t$) $A v_i = \lambda_i v_i$ $v_1, \dots, v_n$ onb
$\lambda_i \in \mathbb{R}$.