

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA, PUC-RIO

Macro III - Primeiro esforço de replicação Smets & Wouters (2002)

Moisés Shalimay S. Andrade

2 de julho de 2015

Sumário

I	Resumo	4
II	Replicação: derivações	6
1	O modelo	6
1.1	Problema das famílias	7
1.1.1	Decisões de consumo, poupança e trabalho	7
1.1.2	Agregação	11
1.1.3	Demanda por bens domésticos e importados	15
1.2	Firmas	17
1.2.1	Firmas produtoras de bens domésticos	17
1.2.2	Firmas importadoras	21
1.2.3	Firmas exportadoras	23
1.3	Steady-State	23
1.4	O modelo linearizado	27
1.4.1	UIP, equação de Euler e oferta de trabalho	27
1.4.2	Curvas de Phillips	29
1.4.3	Market Clearing e ativos externos líquidos	33
1.5	Sistema de equações linearizadas	36
1.6	Política Ótima	36
III	Replicação: estimação e simulações	41
2	Var estrutural	41
3	IRF matching	43
3.1	Método	44
3.2	Cálculo da IRF teórica	44
3.3	Estratégia de otimização	45

3.4	Estimativas	46
4	Simulações	47
IV	Estimação Bayesiana	51
5	Arcabouço da estimação	52
5.1	Dados e Modelo estimado	52
5.2	Priors e parâmetros fixos	54
6	Verossimilhança dos dados	54
6.1	Tratamento dos dados	54
6.2	Simulação e Filtro de Kalman	55
6.2.1	Simulação	56
6.2.2	Filtro de Kalman	56
7	Markov Chain Monte Carlo (MCMC)	57
7.1	Cálculo da razão α	58
7.2	Condições iniciais da cadeia de Markov	59
7.3	Calibração da proporção de aceites	60
7.4	Posterior final	61
7.5	Dynare	61
8	Resultados	61
V	Códigos	68
A	Códigos da estimação bayesiana	68
A.1	main_prog.m	68
A.2	parameters_est.m	73
A.3	modelsims.m	74
A.4	anal_deriv_sims.m	76
A.5	model_func_sims.m	77
A.6	sig_mode_mcmc.m	79

A.7	state2param.m	81
A.8	logpriorMCMC.m	82
A.9	kf_ll.m	83
A.10	mcmc.m	84
B	Códigos de IRF matching	85
B.1	var.R	86
B.2	boot_i.R	90
B.3	main_prog.m	92
B.4	ir_gensys.m	95
B.5	perda.m	96
B.6	simul.m	97
C	Dynare	101

Parte I

Resumo

Meu trabalho consiste em replicar o paper "Openness, imperfect exchange rate pass-through and monetary policy" (JME 2002) de Frank Smets e Raf Wouters. Além disso, como extensão também realizei a estimação dos parâmetros do modelo com técnicas bayesianas.

O artigo propõe um modelo de economia aberta onde rigidez de preços leva a um repasse imperfeito das variações cambiais. Os autores mostram que, nessa situação, uma regra de Taylor que só dê peso à inflação de bens domésticos pode não ser a melhor opção de política. Para medir os efeitos de uma política que leve em conta inflação doméstica e de importados, os autores estimam os parâmetros de rigidez e indexação de ambos os setores através de um método de IRF matching de "informação limitada": todas as respostas da economia são tomadas como dadas e apenas as respostas de inflação são utilizadas na estimação.

A replicação do paper pode ser separada em quatro etapas:

1. Derivação do modelo e da política monetária ótima
2. Etapa 1 da estimação: VAR estrutural
3. Etapa 2 da estimação: IRF matching
4. Simulações da economia com preços flexíveis e preços rígidos. Para a economia de preços rígidos, duas versões: política monetária ótima e regra de Taylor na inflação doméstica

As derivações do modelo e da política monetária ótima estão na parte 2 do trabalho.

Neste texto coloquei apenas o sistema de eqs. que determinam o equilíbrio do modelo log-linearizado. A seção 2 descreve as etapas restantes e apresenta os resultados.

Na estimação bayesiana, diversos passos foram realizados para chegar à posterior dos parâmetros. A seção 3 descreve com detalhes cada um deles.

Os códigos e funções utilizadas estão no apêndice e na pasta compartilhada. Não coloquei todas no texto, só as mais importantes para a avaliação.

Parte II

Replicação: derivações

1. O modelo

Os autores desenvolvem um modelo microfundamentado para uma pequena economia aberta que toma variáveis estrangeiras como dadas. Todo o modelo é derivado em termos de equivalente de certeza.

As famílias tomam decisões de consumo e poupança em um ambiente de gerações sobrepostas no formato Blanchard-Yaari, permitindo um steady-state bem definido na presença de mercados incompletos e taxas de juros internacionais exógenas.

O setor de produção é composto por firmas produtoras de bens domésticos, importadoras e exportadoras. Todas operam em mercados monopolisticamente competitivos com rigidez de preços à la Calvo e mecanismos de indexação à inflação passada de seus respectivos setores. Por conta da rigidez de preços no mercado de importados, o repasse da taxa de câmbio aos preços domésticos é imperfeito e não vale a Lei do Preço Único no curto prazo.

Por fim, a autoridade monetária adota uma política ótima discricionária e visa minimizar uma função perda descrita como uma média ponderada da variabilidade de preços relativos nos setores de bens domésticos e importados.

A seção 2 contém o modelo base com a derivação de cada uma das equações relevantes e do steady-state (s.s.). A seção 3 contém o modelo no formato log-linearizado em torno do s.s. da seção 2. A seção 4 é dedicada à derivação da política ótima da autoridade monetária.

1.1 Problema das famílias

1.1.1 Decisões de consumo, poupança e trabalho

A família representativa da geração i escolhe trabalho, consumo e poupança para maximizar:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \vartheta^j \left[\frac{1}{1-\sigma} (C_{t+j}^i)^{1-\sigma} - \frac{\kappa}{1+\omega} (L_{t+j}^i)^{1+\omega} \right] \quad (1.1)$$

onde C_t^i é um índice de consumo, L_t^i a quantidade de trabalho ofertada, β a taxa de desconto intertemporal, $1/\sigma$ o coeficiente de substituição intertemporal do consumo, ω a elasticidade do trabalho e ϑ a probabilidade constante de sobrevivência da família i .¹ Este último parâmetro é o que incorpora o componente de gerações imbricadas ao modelo e implica em um horizonte finito de vida para cada família.

Por conta do tempo finito de vida das famílias, assume-se um mercado perfeito e competitivo de seguros de vida. Cada família assina um contrato com uma agência de seguros que, em caso de morte, assume os ativos líquidos da família (logo, em caso de dívida, se compromete a cobri-las). Se um agente for poupador, a seguradora paga a esse agente um prêmio para ficar com seus ativos caso o agente morra. Se o agente for devedor, deve pagar a agência um prêmio para ter suas dívidas quitadas caso morra. A condição de lucro zero para as agências implica que o prêmio de seguro igualará a probabilidade de morte $1 - \vartheta$, de tal modo que a taxa efetiva de retorno tanto para poupança, quanto para empréstimos fica dividida por ϑ .² Com isso, a restrição orçamentária sequencial da família i fica dada por

$$\frac{e_t F_t^i}{1 + R_t^*} + \frac{B_t^i}{1 + R_t} = \frac{1}{\vartheta} \left[e_t F_{t-1}^i + B_{t-1}^i + W_t L_t^i - P_t C_t^i + Di v_t^D + Di v_t^F - T_t^i \right] \quad (1.2)$$

onde e_t é a taxa nominal de câmbio, F_t^i são os *holdings* de títulos estrangeiros que pagam R_t^* , B_t^i os *holdings* de títulos domésticos que pagam R_t , W_t é o salário nominal, T_t^i é um imposto *lump-sum*

¹Note que, pelo fato de ϑ ser constante, não há inconsistência temporal na otimização dos agentes, permitindo escrever o problema de maximização em termos da eq. (1.1) para qualquer t .

²A explicação cuidadosa do mecanismo não tem no paper, por isso explicarei nesta nota de rodapé. Considere a receita da seguradora por unidade de seguro vendido a um devedor (para o poupador é análogo) aplicada à taxa de juros de um período: $p(1 + R)$. Os custos da seguradora serão dados por $(1 - \vartheta)(1 + R)$, a probabilidade de ter que pagar a dívida de juros R vezes o retorno bruto. Com lucro zero, $p(1 + R) = (1 - \vartheta)(1 + R) \Rightarrow p = 1 - \vartheta$. Em uma economia sem esse esquema de seguro, os juros esperados a pagar por uma unidade de empréstimo seriam $\vartheta(1 + \hat{R})$. Na economia com seguro, a família paga $(1 - \vartheta)$ por unidade de empréstimo, de tal forma que os juros ficam $\vartheta(1 + R)/(1 - (1 - \vartheta)) = (1 + R)$. A equivalência entre as taxas então implica: $(1 + \hat{R}) = (1 + R)/\vartheta$.

e Div_t^D, Div_t^F são dividendos distribuídos pelas firmas de bens domésticos e importados, respectivamente. Os mercados são incompletos pois os agentes só tem acesso a estes dois títulos de um período e, portanto, não há *international risk sharing* perfeito.

Associando um multiplicador λ_t a cada uma das restrições sequenciais e maximizando (1.1) sujeito a (1.2) para todo t (gradiente $f=\lambda$ gradiente g) obtemos

$$\partial C_{t+j}^i : \beta^j \vartheta^j C_{t+j}^{i(-\sigma)} = -\lambda_{t+j} P_{t+j} / \vartheta \quad (1.3)$$

$$\partial B_t^i : 0 = \frac{-\lambda_t}{1+R_t} + \frac{\lambda_{t+1}}{\vartheta} \quad (1.4)$$

$$\partial F_t^i : 0 = \frac{-\lambda_t e_t}{1+R_t^*} + \frac{\lambda_{t+1} e_{t+1}}{\vartheta} \quad (1.5)$$

$$\partial L_{t+j}^i : -\beta^j \vartheta^j \kappa (L_{t+j}^i)^\omega = W_{t+j} \lambda_{t+j} / \vartheta \quad (1.6)$$

Divida a equação (5) pela (4) para eliminar λ e obter:

$$\frac{(1+R_t)e_t}{(1+R_t^*)} = e_{t+1}$$

Rearranjando, obtemos a condição de paridade descoberta (eq. 3) do paper

$$\frac{1+R_t}{1+R_t^*} = \frac{e_{t+1}}{e_t} \quad (1.7)$$

Avaliando a eq. (3) em $j = 0, 1$ e substituindo na eq. (4) no lugar de λ , obtemos:

$$\frac{\vartheta C_t^{i(-\sigma)}}{P_t(1+R_t)} = \frac{\beta \vartheta C_{t+1}^{i(-\sigma)}}{P_{t+1}}$$

Rearranjando, obtemos a equação de Euler para o título doméstico (eq.4 do paper)

$$\left[\frac{C_{t+1}^i}{C_t^i} \right]^\sigma = \beta \frac{1+R_t}{P_{t+1}/P_t} \quad (1.8)$$

Por fim, isole λ_{t+j} na eq.(3) para substitua em (6):

$$-\beta^j \vartheta^j \kappa (L_{t+j}^i)^\omega = -\frac{W_t}{\vartheta} \frac{\beta^j \vartheta^{j+1} C_{t+j}^{i(-\sigma)}}{P_{t+j}} \quad (1.9)$$

Cancelando os termos e rearranjando, chegamos à condição de otimalidade na escolha entre trabalho e consumo (eq. 5 do paper):

$$(L_t^i)^\omega = \frac{1}{\kappa} (C_t^i)^{-\sigma} \frac{W_t}{P_t} \quad (1.10)$$

Defina a riqueza financeira A_t^i e o capital humano H_t^i como:

$$A_t^i = e_t F_{t-1}^i + B_{t-1}^i \quad (1.11)$$

$$H_t^i = h_t^i + \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta^j \left[\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1+R_{t+k}} \right] h_{t+j}^i \quad (1.12)$$

onde $h_t^i = W_t L_t^i + Di v_t^D + Di v_t^F - T_t^i$. Substituindo as definições de A_t^i e h_t^i diretamente na restrição orçamentária (1.2):

$$\frac{e_t F_t^i}{1+R_t^*} + \frac{B_t^i}{1+R_t} = \frac{1}{\vartheta} \left[A_t^i + h_t^i - P_t C_t \right]$$

Utilize a condição de paridade descoberta (1.7) para substituir $\frac{1}{1+R_t^*}$:

$$\frac{e_{t+1} \varphi_t F_t^i}{(1+R_t) \varphi_t} + \frac{B_t^i}{1+R_t} = \frac{e_{t+1} F_t^i + B_t^i}{(1+R_t)} = \frac{1}{\vartheta} \left[A_t^i + h_t^i - P_t C_t \right]$$

Usando novamente a definição de riqueza financeira, $A_{t+1} = e_{t+1} F_t^i + B_t^i$, e rearranjando, chegamos a uma expressão alternativa para a restrição orçamentária (eq. 8 do paper):

$$A_{t+1}^i = \frac{1+R_t}{\vartheta} \left[h_t^i - P_t C_t^i + A_t^i \right] \quad (1.13)$$

Antes de derivar a próxima equação, note que a equação de euler (1.8) pode ser reescrita em termos do consumo entre t e $t+j$. Para isso, basta encadear a equação período a período. Por exemplo, avalie em

t+1 e t+2:

$$\begin{aligned} (C_{t+2}^i)^\sigma &= (C_{t+1}^i)^\sigma \frac{\beta(1+R_{t+1})}{P_{t+2}/P_{t+1}} \Rightarrow \left[\frac{C_{t+2}}{C_t^i} \right]^\sigma = \left[\frac{C_{t+1}}{C_t^i} \right]^\sigma \frac{\beta(1+R_{t+1})}{P_{t+2}/P_{t+1}} \\ &= \frac{\beta^2(1+R_{t+1})(1+R_t)}{P_{t+2}/P_t} \end{aligned}$$

Realizando o mesmo processo iteradamente, temos, genericamente:

$$C_{t+j}^i = C_t^i \left[\frac{\beta^j \left(\prod_{k=0}^{j-1} 1 + R_{t+k} \right)}{P_{t+j}/P_t} \right]^{1/\sigma} \quad (1.14)$$

Iremos usar esta equação na próxima derivação. Comece iterando a eq. (1.13) (omiti o i temporariamente):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{1+R_t} A_{t+1} &= (h_t - P_t C_t + A_t) \\ \frac{\partial}{1+R_{t+1}} A_{t+2} &= h_{t+1} - P_{t+1} C_{t+1} + A_{t+1} \Rightarrow A_{t+1} = -h_{t+1} + P_{t+1} C_{t+1} + \frac{v}{1+R_{t+1}} A_{t+2} \end{aligned}$$

Substituindo a segunda expressão na primeira no lugar de A_{t+1} :

$$\frac{\partial^2}{(1+R_t)(1+R_{t+1})} A_{t+2} = h_t + \frac{\partial}{(1+R_t)} h_{t+1} - P_t C_t - \frac{\partial}{(1+R_t)} P_{t+1} C_{t+1} + A_t$$

Fazendo o mesmo para A_{t+2} e assim consecutivamente, obtemos:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial^s}{\prod_{s=0}^{\infty} R_{t+s-1}} A_{t+s} = h_t + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^j}{\prod_{k=0}^{j-1} R_{t+k-1}} h_{t+j} - P_t C_t - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^j}{\prod_{k=0}^{j-1} R_{t+k-1}} P_{t+j} C_{t+j} + A_t$$

Aplicando a condição de transversalidade no limite do lado esquerdo e usando a expressão (1.14) encontrada anteriormente para substituir C_{t+j} do lado direito,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial^s}{\prod_{s=0}^{\infty} R_{t+s-1}} A_{t+s} &= h_t + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^j}{\prod_{k=0}^{j-1} R_{t+k-1}} h_{t+j} - P_t C_t - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^j}{\prod_{k=0}^{j-1} R_{t+k-1}} P_{t+j} C_t \left[\frac{\beta^j \left(\prod_{k=0}^{j-1} 1 + R_{t+k} \right)}{P_{t+j}/P_t} \right]^{1/\sigma} \\ &\quad + A_t \end{aligned}$$

Usando a definição de capital humano (1.12) e isolando para C_t

$$P_t C_t + C_t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\vartheta^j \beta^{j/\sigma}}{\prod_{k=0}^{j-1} R_{t+k-1}} P_{t+j} \left[\frac{\left(\prod_{k=0}^{j-1} 1 + R_{t+k} \right)}{P_{t+j}/P_t} \right]^{1/\sigma} = A_t + H_t$$

$$P_t C_t + P_t C_t \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta^j \beta^{j/\sigma} (P_{t+j}/P_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left[\left(\prod_{k=0}^{j-1} 1 + R_{t+k} \right) \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} = A_t + H_t$$

Note que: $P_{t+j}/P_t = \frac{P_{t+1}}{P_t} \frac{P_{t+2}}{P_{t+1}} \frac{P_{t+3}}{P_{t+2}} \dots \frac{P_{t+j}}{P_{t+j-1}} = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{P_{t+k+1}}{P_{t+k}}$. Substitua na expressão anterior:

$$P_t C_t \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta^j \beta^{j/\sigma} \left[\left(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1 + R_{t+k}}{P_{t+k+1}/P_{t+k}} \right) \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right] = A_t + H_t$$

Por fim, defina

$$RR_t = \frac{1 + R_t}{P_{t+1}/P_t} \quad (1.15)$$

$$\Phi_t = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta^j \beta^{j/\sigma} \prod_{k=0}^{j-1} RR_{t+k}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{-1} \quad (1.16)$$

Como a taxa real de juros e a propensão a poupar comum a todas as gerações i . Substituindo essas duas definições na última expressão, obtemos o consumo do agente i como fração da sua riqueza (eq. 9 do paper):

$$P_t C_t^i = \Phi_t \left[A_t^i + H_t^i \right] \quad (1.17)$$

1.1.2 Agregação

Resolvemos o problema da família da geração i . O próximo passo é escrever o modelo em termos de variáveis agregadas. Defina uma variável agregada X_t como: $X_t = (1 - \vartheta) \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i X_t^i$, onde i é a geração nascida em $t - i$.³ Para encontrar o consumo agregado, vamos agregar as eqs. (1.13) e (1.17). Somando

³Esse é mais um detalhe que não está no paper. Implicitamente, assume-se que no nascimento o tamanho da família da geração i é normalizado para 1 e que a taxa de nascimentos é constante e também igual a ϑ . Com isso, o tamanho de cada geração i será ϑ^i e o tamanho da população $\sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i = \frac{1}{1-\vartheta}$.

a eq (1.13) nas gerações vivas no período t :

$$\begin{aligned}\vartheta \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i A_{t+1}^i &= (1 + R_t) \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i \left[h_t^i - P_t C_t^i + A_t^i \right] \\ \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^{i+1} A_{t+1}^i &= (1 + R_t) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i h_t^i - \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i P_t C_t^i + \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i A_t^i \right]\end{aligned}$$

Usando as definições de agregados e assumindo que as famílias nascem sem dívidas, chegamos à versão de movimento da riqueza agregada (eq. 13 do paper):

$$A_{t+1} = (1 + R_t) [h_t - P_t C_t + A_t] \quad (1.18)$$

Fazendo o mesmo para a equação (1.17),

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_t C_t^i = \phi_t \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i (A_t^i + H_t^i)$$

podemos usar as definições de agregados para obter o consumo agregado como função da riqueza agregada (eq. 12 do paper):

$$P_t C_t = \Phi_t [A_t + H_t] \quad (1.19)$$

Note que esta representação só é possível pois a propensão a consumir, Φ_t , é igual para todas as gerações. Vamos usar as duas últimas equações para obter o consumo agregado. Mas antes, vamos reescrever o capital humano e a propensão a consumir em formato recursivo, o que será útil para a derivação.

Escreva a eq. (1.12) que define o capital humano de forma recursiva:

$$\begin{aligned}H_t^i &= h_t^i + (1 + R_t)^{-1} \vartheta h_{t+1}^i + \vartheta^2 (1 + R_t)^{-1} (1 + R_{t+1})^{-1} h_{t+2}^i + \vartheta^3 (1 + R_t)^{-1} (1 + R_{t+1})^{-1} (1 + R_{t+2})^{-1} h_{t+3}^i + \dots \\ H_t^i &= h_t^i + (1 + R_t)^{-1} \vartheta [h_{t+1}^i + \vartheta (1 + R_{t+1})^{-1} h_{t+2}^i + \vartheta^2 (1 + R_{t+1})^{-1} (1 + R_{t+2})^{-1} h_{t+3}^i + \dots]\end{aligned}$$

Observe que o termo entre colchetes é exatamente H_{t+1}^i . Obtemos então

$$H_t^i = h_t^i + (1 + R_t)^{-1} \vartheta H_{t+1}^i$$

Agregando nas famílias:

$$H_t = h_t + (1 + R_t)^{-1} \vartheta H_{t+1} \quad (1.20)$$

Reescrevendo Φ_t em formato recursivo:

$$\begin{aligned} \Phi_t &= \left[1 + \vartheta \beta^{1/\sigma} R R_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \vartheta^2 \beta^{2/\sigma} (R R_t R R_{t+1})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \vartheta^3 \beta^{3/\sigma} (R R_t R R_{t+1} R R_{t+2})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \dots \right]^{-1} \\ \Phi_t &= \left[1 + \vartheta \beta^{1/\sigma} R R_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left(1 + \vartheta \beta^{1/\sigma} (R R_{t+1})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \vartheta^2 \beta^{2/\sigma} (R R_{t+1} R R_{t+2})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \dots \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

Note que o termo entre parênteses do lado direito é exatamente Φ_{t+1}^{-1} . Assim:

$$\Phi_t = \left[1 + \vartheta \beta^{1/\sigma} R R_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \Phi_{t+1}^{-1} \right]^{-1} \quad (1.21)$$

Agora vamos obter o consumo agregado. Isole h_t na equação (1.20) e H_t na equação (1.19)

$$h_t = H_t - (1 + R_t)^{-1} \vartheta H_{t+1}$$

$$H_t = \Phi_t^{-1} P_t C_t - A_t$$

Substitua a segunda na primeira para H_t e H_{t+1} :

$$h_t = \Phi_t^{-1} P_t C_t - A_t - (1 + R_t)^{-1} \vartheta [\Phi_{t+1}^{-1} P_{t+1} C_{t+1} - A_{t+1}]$$

Substituta esta última expressão para h_t na equação de movimento da riqueza agregada (1.18):

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= (1 + R_t) \left[\Phi_t^{-1} P_t C_t - \cancel{A_t} - (1 + R_t)^{-1} \vartheta (\Phi_t^{-1} P_{t+1} C_{t+1} - A_{t+1}) - P_t C_t + \cancel{A_t} \right] \\ A_{t+1} (1 - \vartheta) &= (1 + R_t) (\Phi_t^{-1} - 1) P_t C_t - \vartheta \Phi_{t+1}^{-1} P_{t+1} C_{t+1} \\ (\Phi_t^{-1} - 1) P_t C_t &= (1 + R_t)^{-1} \left[A_{t+1} (1 - \vartheta) + \vartheta \Phi_{t+1}^{-1} P_{t+1} C_{t+1} \right] \end{aligned}$$

Use a expressão (1.21) para obter: $\Phi_t^{-1} - 1 = \vartheta \beta^{1/\sigma} R R_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \Phi_{t+1}^{-1}$. Divida os dois lados da expressão anterior por este termo

$$\begin{aligned} P_t C_t &= (1 + R_t)^{-1} \left[\frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \frac{1}{R R_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \beta^{\frac{1}{\sigma}}} \Phi_{t+1} A_{t+1} + \frac{1}{R R_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \beta^{\frac{1}{\sigma}}} P_{t+1} C_{t+1} \right] \\ C_t &= \frac{P_{t+1}}{P_t} (1 + R_t)^{-1} \frac{1}{R R_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \beta^{\frac{1}{\sigma}}} \left[\frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \Phi_{t+1} A_{t+1} / P_{t+1} + C_{t+1} \right] \\ C_t &= R R_t^{-1} \frac{1}{R R_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \beta^{\frac{1}{\sigma}}} \left[\frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \Phi_{t+1} A_{t+1} / P_{t+1} + C_{t+1} \right] \end{aligned}$$

Obtemos então a equação de consumo agregado (eq. 14 do paper):

$$C_t = \frac{1}{(R R_t \beta)^{1/\sigma}} \left[\frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \Phi_{t+1} \frac{A_{t+1}}{P_{t+1}} + C_{t+1} \right] \quad (1.22)$$

Por conta da estrutura de gerações imbricadas, o consumo agregado depende não só do consumo futuro, mas também da riqueza real agregada do período seguinte. No caso de $\vartheta = 1$, cada família terá vida infinita e a equação se reduz à eq. de Euler tradicional.

Por fim, agregue a equação (1.10) para obter a relação entre consumo e trabalho agregado

$$\begin{aligned} L_t^i &= \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{1/\omega} (C_t^i)^{-\frac{\sigma}{\omega}} \left(\frac{W_t}{P_t} \right)^{1/\omega} \\ (1 - \vartheta) \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i L_t^i &= \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{1/\omega} \left(\frac{W_t}{P_t} \right)^{1/\omega} (1 - \vartheta) \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i (C_t^i)^{-\frac{\sigma}{\omega}} \end{aligned}$$

Aplicando as definições de agregados e elevando tudo por ω , chegamos à eq. 15 do paper:

$$(L_t)^\omega = \frac{1}{\kappa} \frac{W_t}{P_t} \left[(1 - \vartheta) \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i (C_t^i)^{-\frac{\sigma}{\omega}} \right]^\omega \quad (1.23)$$

1.1.3 Demanda por bens domésticos e importados

O índice de consumo é definido como um agregado CES de cestas de consumo de bens domésticos e importados (omitirei os índices i e t em nas derivações pois elas valem para qualquer geração e período de tempo):⁴

$$C_t = \left[(1 - \alpha_C)^{1/\eta} C_{D,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \alpha_C^{1/\eta} C_{F,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad (1.24)$$

onde C_D e C_F são índices de consumo de bens domésticos e importados, η é a elasticidade de substituição entre eles e α_C determina o share de bens importados no consumo de steady-state.

Para obter as funções de demanda e o índice de preços agregado apropriado, devemos resolver o problema intratemporal que a família resolve na escolha de sua cesta de consumo ótima. O problema consiste em escolher C_D e C_F de forma a maximizar o índice de consumo C para cada nível de gastos M :

$$\max_{C_D, C_F} \left[(1 - \alpha_C)^{1/\eta} C_D^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \alpha_C^{1/\eta} C_F^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad \text{s.a. } P_D C_D + P_F C_F \leq M$$

Associando um multiplicador λ à restrição (que vale em igualdade, pois a utilidade é estritamente crescente no índice de consumo) obtemos as seguintes condições de primeira ordem:

$$\partial C_D : C^{1/\eta} (1 - \alpha_C)^{1/\eta} C_D^{-1/\eta} = \lambda P_D$$

$$\partial C_F : C^{1/\eta} (\alpha_C)^{1/\eta} C_F^{-1/\eta} = \lambda P_F$$

Dividindo uma pela outra, obtemos:

$$C_F = \frac{\alpha_C}{1 - \alpha_C} C_D \left(\frac{P_D}{P_F} \right)^\eta$$

⁴Aparentemente há um typo no paper, pois as participações α_C e $1 - \alpha_C$ não estão elevadas a $1/\eta$, o que não é consistente com índice de preços da eq. (19) do paper.

Substituindo esta última expressão na definição do índice de consumo (1.24):

$$\begin{aligned} & \left[(1 - \alpha_C)^{1/\eta} C_D^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \alpha_C^{1/\eta} \left(\frac{\alpha_C}{1 - \alpha_C} \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \left(\frac{P_D}{P_F} \right)^{\eta-1} C_D^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} = C \\ C_D &= \left[(1 - \alpha_C)^{1/\eta} + \alpha_C^{1/\eta} \left(\frac{\alpha_C}{1 - \alpha_C} \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \left(\frac{P_D}{P_F} \right)^{\eta-1} \right]^{-\frac{\eta}{\eta-1}} C \\ C_D &= \left[(1 - \alpha_C)^{-\frac{\eta-1}{\eta}} P_D^{\eta-1} \left((1 - \alpha_C) P_D^{1-\eta} + \alpha_C P_F^{1-\eta} \right) \right]^{-\frac{\eta}{\eta-1}} C \\ C_D &= (1 - \alpha_C) P_D^{-\eta} \left((1 - \alpha_C) P_D^{1-\eta} + \alpha_C P_F^{1-\eta} \right)^{-\frac{\eta}{\eta-1}} C \end{aligned}$$

Definindo o índice de preços agregado como (eq.19 do paper):

$$P_t = \left((1 - \alpha_C) P_D^{1-\eta} + \alpha_C P_F^{1-\eta} \right)^{\frac{1}{1-\eta}} \quad (1.25)$$

e substituindo na expressão anterior e em seguida na relação entre C_F e C_D , chegamos às equações de demanda por bens domésticos e importados (eqs. 17 e 18 do paper):

$$C_{D,t} = (1 - \alpha_C) \left(\frac{P_{D,t}}{P_t} \right)^{-\eta} C_t \quad (1.26)$$

$$C_{F,t} = \alpha_C \left(\frac{P_{F,t}}{P_t} \right)^{-\eta} C_t \quad (1.27)$$

Cada uma das cestas C_F e C_D são agregados de bens diferenciados da forma:

$$C_{k,t} = \left[\int_0^1 C_{k,t}(j)^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}, k = D, F \quad (1.28)$$

onde θ é a elasticidade entre bens diferenciados comum às duas cestas. O problema de otimização na escolha da cesta de consumo C_k é dado por

$$\max_{\{C_k(j)\}} \left[\int_0^1 C_k(j)^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \text{ s.a. } \int_0^1 P_k(j) C_k(j) dj \leq M$$

Associando um multiplicador λ à restrição, obtemos as seguintes CPO's:

$$\partial C_k(j) : C_k^{1/\theta} C_k(j)^{-1/\theta} = P_k(j) \lambda$$

Dividindo a CPO do bem j pela CPO do bem l ,

$$C_k(j) = C_k(l) \left(\frac{P_k(l)}{P_k(j)} \right)^\theta$$

Substituindo de volta na definição do índice de consumo:

$$C_k = \left[\int_0^1 C_k(l)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\frac{P_k(l)}{P_k(j)} \right)^{\theta-1} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

$$C_k = C_k(l) P_k(l)^\theta \left[\int_0^1 P_k(j)^{1-\theta} \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

Definindo o índice de preços agregado do setor k como (eq. (22) do paper)

$$P_{k,t} = \left[\int_0^1 P_k(j)^{1-\theta} \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (1.29)$$

e substituindo na expressão anterior, obtemos a demanda pelo bem (l) do setor (k) (eq. 21 do paper):

$$C_{k,t}(l) = \left(\frac{P_{k,t}(l)}{P_{k,t}} \right)^{-\theta} C_{k,t}, \quad k = D, F \quad (1.30)$$

1.2 Firms

O setor de produção é dividido em três subsectores: produtores de bens domésticos, firmas importadoras e firmas exportadoras. Começarei pelo setor de bens domésticos.

1.2.1 Firms produtoras de bens domésticos

A firma l transforma trabalho homogêneo e um índice de produtos intermediários importados em bens diferenciados através da seguinte função de produção:

$$Y_{D,t}(l) = \min \left(\frac{v_t L_t(l)}{1 - \alpha_Y}, \frac{I_{E,t}(l)}{\alpha_Y} \right) \quad (1.31)$$

onde v_t é um choque de produtividade agregado e $I_{F,t}$ é o índice de bens importados diferenciados, definido como

$$I_{F,t}(m) = \left[\int_0^1 I_{F,t}(m)^{(1-\theta)} dm \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (1.32)$$

O problema de minimização de custos da firma l é descrito por:

$$\min_{L_t(l), I_{F,t}(l)} W_t L_t(l) + P_{F,t} I_{F,t}(l) \text{ s.a. } \min \left(\frac{v_t L_t(l)}{1-\alpha_Y}, \frac{I_{F,t}(l)}{\alpha_Y} \right) \geq \bar{Y}$$

A solução do problema de minimização implica em (eq 25 do paper):

$$Y_{D,t}(l) = \frac{v_t L_t(l)}{1-\alpha_Y} = \frac{I_{F,t}(l)}{\alpha_Y}$$

Isto se deve a: (1) a restrição vigorar em igualdade pela função objetivo ser estritamente decrescente em cada um dos insumos; (2) o formato Leontief da função de produção. Suponha que, para produzir o mesmo nível \bar{Y} , a firma fizesse $\frac{v_t L_t(l)}{1-\alpha_Y} > \frac{I_{F,t}(l)}{\alpha_Y}$. Neste caso, a firma estaria necessariamente alocando mais trabalho $L_t(l)$ que o mínimo necessário para produzir \bar{Y} e, portanto, incorreria em um custo total pelo menos mais alto do que quando faz $\frac{v_t L_t(l)}{1-\alpha_Y} = \frac{I_{F,t}(l)}{\alpha_Y}$. O mesmo vale com a relação invertida: neste caso, a firma poderia reduzir $I_{F,t}(l)$ sem alterar a produção e reduzindo custos. Deste modo $Y_t(l) = \frac{v_t L_t(l)}{1-\alpha_Y} = \frac{I_{F,t}(l)}{\alpha_Y}$ deve valer no ótimo (com preços dos insumos positivos).

Podemos substituir esta relação para $L_t(l)$ e $I_{F,t}(l)$ na equação de custo total do problema de minimização para obter:

$$CT = Y_t(l) \frac{1-\alpha_Y}{v_t} W_t + Y_t(l) I_{F,t}(l)$$

Derivando com relação a $Y_t(l)$, obtemos o custo marginal comum a todas as firmas l (eq. 27 do paper):

$$MC_t = \frac{(1-\alpha_Y)}{v_t} W_t + \alpha_Y P_{F,t} \quad (1.33)$$

As firmas operam em um mercado monopolisticamente competitivo com rigidez de preços a la Calvo. Apenas uma parcela $(1 - \xi_D)$ de firmas podem otimizar preços a cada período. As que não otimizam,

tem seus preços reajustados pela inflação de bens domésticos do período anterior:

$$P_{D,t}(l) = \left[\frac{P_{D,t-1}}{P_{D,t-2}} \right]^{\gamma_D} P_{D,t-1}(l) \quad (1.34)$$

A demanda pelo bem da firma l é a soma da demanda dos consumidores e das firmas exportadoras (ler nota), que agregam bens domésticos para vender para vender no exterior(ler nota)⁵:

$$Y_{D,t}(l) = C_{D,t}(l) + X_t(l) = \left(\frac{P_{D,t}(l)}{P_t} \right)^{-\theta} [C_{D,t} + X_t] \quad (1.35)$$

Onde $X_t(l)$ é a demanda pelo bem l por parte das firmas exportadoras. Note que usei a equação de demanda por bens domésticos (29) e uma equação equivalente para a demanda da firma exportadoras.⁶ Com isso, podemos escrever o problema de maximização de lucros de uma firma reajustando preços no período t como:

$$\max_{P_{D,t}(l), Y_{D,t}(l)} \sum_{j=0}^{\infty} Q_{t,t+j} \xi_D^j [(1-\tau) P_{D,t+j}(l) Y_{D,t+j}(l) - TC(Y_{D,t+j}(l))] \text{ s.a. } Y_{t+j}(l) = \left[\frac{P_{D,t+j}(l)}{P_{D,t+j}} \right]^{-\theta} (C_{D,t} + X_t)$$

Onde $Q_{t,t+j}$ é o fator de desconto nominal das famílias, τ é uma taxa corretiva para o mark-up de steady-state e $TC(\cdot)$ é a função de custo total. Antes de resolver, note que o mecanismo de indexação de preços implica:

$$\begin{aligned} P_{D,t+j}(l) &= \left[\frac{P_{D,t+j-1}}{P_{D,t+j-2}} \right]^{\gamma_D} P_{D,t+j-1}(l) = \left[\frac{P_{D,t+j-1}}{P_{D,t+j-2}} \right]^{\gamma_D} \left[\frac{P_{D,t+j-2}}{P_{D,t+j-3}} \right]^{\gamma_D} P_{D,t+j-2}(l) \\ &= \dots = \left[\frac{P_{D,t+j-1}}{P_{D,t-1}} \right]^{\gamma_D} P_{D,t}(l) \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever o preço em $t+j$ da firma l em termos da escolha de preços feita em t :

$$P_{D,t+j}(l) = \left[\frac{P_{D,t+j-1}}{P_{D,t-1}} \right]^{\gamma_D} P_{D,t}(l) \quad (1.36)$$

⁵Os autores não são muito claros quanto a esta demanda das firmas exportadoras. Segundo eles, ela vem de um "setor exportador competitivo", mas, ao final, o setor exportador é tratado com rigidez de preços na venda pro mercado internacional. Meu entendimento é de que as firmas exportadoras são compostas de dois ramos: um deles apenas agrega os bens e não obtém nenhum lucro ao fazê-lo, implicando na demanda acima. O outro ramo vende o bem agregado no exterior e auferir lucros em um mercado monopolisticamente competitivo.

⁶Não coloquei as contas para obter a demanda desse ramo de lucro zero das firmas porque elas são bastante parecidas com as do consumidor. A diferença é que a firma maximizaria lucros com uma função de produção agregadora CES (com o mesmo parâmetro θ dos consumidores domésticos) tomando preços como dados e obteria lucro zero. As CPO's desse problema levariam a relações completamente análogas às encontradas pro caso do consumidor.

Substituindo esta expressão no problema de maximização de lucros e substituindo a restrição de demanda na função objetivo, podemos reescrever o problema de otimização como:

$$\max_{P_{D,t}(l)} \sum_{j=0}^{\infty} Q_{t,t+j} \xi_D^j \left[(1-\tau) \left[\frac{P_{D,t+j-1}}{P_{D,t-1}} \right]^{\gamma_D} P_{D,t} \left(\left[\frac{(P_{D,t+j-1}/P_{D,t-1})^{\gamma_D} P_{D,t}(l)}{P_{D,t+j}} \right]^{-\theta} (C_{D,t} + X_t) \right) - TC \left(\left[\frac{(P_{D,t+j-1}/P_{D,t-1})^{\gamma_D} P_{D,t}(l)}{P_{D,t+j}} \right]^{-\theta} (C_{D,t} + X_t) \right) \right]$$

Derivando com relação a $P_{D,t}(l)$, obtemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} Q_{t,t+j} \xi_D^j \left[\left(\frac{P_{D,t+j-1}}{P_{D,t-1}} \right)^{\gamma_D} (1-\theta)(1-\tau) Y_{D,t+j}(l) + MC_{t+j} \theta (P_{D,t}(l))^{-1} Y_{D,t+j}(l) \right] = 0$$

Note que, como as firmas deste setor são simétricas e apresentam o mesmo custo marginal, todas as que estarão reajustando preços escolherão o mesmo nível $P_{D,t}^N$ para satisfazer a CPO acima. Multiplique por $P_{D,t}^N$ e divida por θ a CPO para obter:

$$\sum_{j=0}^{\infty} Q_{t,t+j} \xi_D^j \left[\left(\frac{P_{D,t+j-1}}{P_{D,t-1}} \right)^{\gamma_D} \frac{(1-\theta)}{\theta} (1-\tau) Y_{D,t+j}(l) P_{D,t}^N + MC_{t+j} Y_{D,t+j}(l) \right] = 0 \quad (1.37)$$

Por fim, note que, como o modelo é escrito em termos de equivalente de certeza, o fator de desconto nominal, $Q_{t,t+j}$, é simplesmente o produtório do inverso das taxas de juros (volte a eq. (1.14)):

$$Q_{t,t+j} = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1+R_{t+k}}$$

Substituindo em (1.37) e isolando para $P_{D,t}^N$, obtemos o preço ótimo cobrado pelas firmas do setor de bens domésticos (eq. 30 do paper):

$$P_{D,t}^N = \frac{\theta}{(1-\tau)(1-\theta)} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1+R_{t+k}} \right) \xi_D^j MC_{t+j} Y_{D,t+j}(l)}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1+R_{t+k}} \right) \xi_D^j Y_{D,t+j}(l) \left(\frac{P_{D,t+j-1}}{P_{D,t-1}} \right)^{\gamma_D}} \quad (1.38)$$

Onde MC_t é dado por (1.33).

Usando a definição do índice de preços, a propriedade de loteria iid do mecanismo de rigidez de Calvo e o mecanismo de indexação, podemos derivar a lei de movimento de preços no setor de bens

domésticos:

$$P_{D,t}^{1-\theta} = \left[\int_0^1 P_{D,t}^{\theta-1}(l) dl \right] = \int_{s_t} (P_{D,t}^N)^{1-\theta} + \int_{1-s_t} (P_{D,t-1})^{1-\theta} = (1-\xi_D)(P_{D,t}^N)^{1-\theta} + \xi_D \left[P_{D,t-1} \left(\frac{P_{D,t-1}}{P_{D,t-2}} \right)^{\gamma_D} \right]^{1-\theta}$$

onde s_t é a parcela das firmas que reajustou preços e $1-s_t$ é a parcela que não reajustou. Como a loteria é iid, o preço do período passado é representativo dos preços não reajustados e a segunda igualdade segue. Na terceira igualdade apenas troquei as integrais pela participação das firmas implicada pelo mecanismo de Calvo e usei o mecanismo de indexação. Com isso, obtemos a eq. 31 do paper:

$$P_{D,t}^{1-\theta} = (1-\xi_D)(P_{D,t}^N)^{1-\theta} + \xi_D \left[P_{D,t-1} \left(\frac{P_{D,t-1}}{P_{D,t-2}} \right)^{\gamma_D} \right]^{1-\theta} \quad (1.39)$$

Por fim, agregue a expressão (1.35) nas firmas l e use as demanda por bens domésticos do consumidor (1.26) e para obter:

$$\int Y_{D,t}(l) dl = \int \left(\frac{P_{D,t}(l)}{P_t} \right)^{-\theta} (C_{D,t} + X_t) = \delta_{P,t} \left[\left(\frac{P_{D,t}}{P_t} \right)^{-\eta} [C_{D,t} + X_t] \right]$$

Por market clearing, podemos então expressar o produto agregado do setor de bens domésticos como (eq. 32 do paper):

$$Y_{D,t} = \delta_{P,t} \left[\left(\frac{P_{D,t}}{P_t} \right)^{-\eta} (1-\alpha_C)C_t + X_t \right] \quad (1.40)$$

onde

$$\delta_{P,t} = \int \left(\frac{P_{D,t}(l)}{P_{D,t}} \right)^{-\theta} \quad (1.41)$$

é uma medida de dispersão de preços no setor de bens domésticos.

1.2.2 Firms importadoras

As firmas importadoras compram um bem homogêneo produzido no exterior, diferenciam através de uma tecnologia de produção linear e vendem no mercado doméstico. Apenas $1-\xi_F$ firmas podem ajustar preços a cada período. As firmas que não reajustam têm seus preços indexados pela inflação

passada através do seguinte mecanismo:

$$P_{F,t}(m) = \left(\frac{P_{F,t-1}}{P_{F,t-2}} \right)^{\gamma_F} P_{F,t-1}(m)$$

O custo marginal da firma m pode ser obtido através do uso da equação de custo total e da função de produção linear:

$$\begin{aligned} CT_t(Y_t(m)) &= e_t P_{F,t}^* Y_t(m) \\ \Rightarrow MC_t &= \frac{\partial CT_t(Y_t(m))}{\partial Y_t(m)} = e_t P_{F,t}^* \end{aligned}$$

A demanda pelos bens da firma m é a soma da demanda do consumidor e da demanda por bens importados para uso na produção de bens domésticos:⁷

$$Y_{F,t}(m) = \left(\frac{P_{F,t}(m)}{P_{F,t}} \right)^{-\theta} Y_{F,t} = \left(\frac{P_{F,t}(m)}{P_{F,t}} \right)^{-\theta} (C_{F,t} + I_{F,t}) \quad (1.42)$$

onde implicitamente os autores assumem que o mesmo parâmetro θ determina o grau de substituição entre bens intermediários importados.

O problema de otimização para esta firma é idêntico ao que foi resolvido na subseção anterior. Portanto, basta modificar a notação e substituir o custo marginal para este caso na expressão (1.38), de onde obtemos a eq. de preços para o setor de importação (eq.34 do paper):

$$P_{F,t}^N = \frac{\theta}{(1 - \tau_F)(1 - \theta)} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + R_{t+k}} \right) \xi_F^j (e_t P_{F,t}^*) Y_{F,t+j}(l)}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{1 + R_{t+k}} \right) \xi_F^j Y_{F,t+j}(l) \left(\frac{P_{F,t+j-1}}{P_{t-1}} \right)^{\gamma_F}} \quad (1.43)$$

De forma análoga à derivação na seção anterior, podemos obter a dinâmica para os preços dos bens importados (eq. 36 do paper):

$$P_{F,t}^{1-\theta} = (1 - \xi_F)(P_{F,t}^N)^{1-\theta} + \xi_F \left[P_{F,t-1} \left(\frac{P_{F,t-1}}{P_{F,t-2}} \right)^{\gamma_F} \right] \quad (1.44)$$

⁷Os autores parecem supor que existe uma firma agregadora de bens importados operando com lucro zero que cria uma cesta CES de bens intermediários. Ou, equivalentemente, há um ramo operando com lucro zero nas firmas de bens domésticos que apenas agrega bens importados. De qualquer modo, a demanda por bens dessa firma é análoga à demanda do consumidor.

1.2.3 Firms exportadoras

Não há uma seção para este setor no artigo, muito provavelmente pelo fato de ser bastante parecido com o setor de importação. Deste modo, esta seção só descreve algumas características básicas do setor que serão úteis ao longo do texto.

As firmas exportadoras criam bens homogêneos a partir de bens domésticos (sem lucro nesse empacotamento) e exportam para o mercado estrangeiro. Assim como o setor importador na economia doméstica, essas firmas também estarão sujeitas a rigidez de preços e mecanismos de indexação na moeda estrangeira. Os parâmetros de Calvo e indexação são assumidos como sendo os mesmos das firmas importadoras, (ξ_F, γ_F) .

Os custos marginais das firmas exportadoras em termos da moeda de sua receita, é dado por:

$$\begin{aligned} CT_t(X_t(x)) &= P_{D,t} X_t(x) / e_t \\ \Rightarrow MC_t &= \frac{\partial CT_t(X_t(x))}{\partial X_t(x)} = P_{D,t} / e_t \end{aligned}$$

Por simetria, os autores assumem que firmas importadoras de outros países usam o bem exportado pela economia doméstica para produzir bens diferenciados em seus respectivos países. Com isso, a demanda por exportações é dada por:

$$X_t = \left[\frac{P_{D,t}^*}{P_{E,t}^*} \right]^{-\eta} C_t^* \quad (1.45)$$

onde C_t^* é o consumo estrangeiro e $P_{D,t}^*$ é o preço do bem composto praticado pelos exportadores em moeda estrangeira, que tipicamente será diferente do preço doméstico traduzido pela taxa de câmbio por conta do repasse imperfeito.

A maximização de lucros é análoga à da firma importadora, bastando mudar a expressão para o custo marginal na eq. (1.43).

1.3 Steady-State

Os autores linearizam o modelo em torno de um steady-state (s.s.) de inflação zero e assumindo que as taxas de juros reais internacionais e domésticas são tais que $1/\beta = \tilde{R}\bar{R}$, ou seja, a taxa real de juros de s.s.

é igual ao fator de desconto intertemporal das famílias domésticas. Sob essas hipóteses, a propensão a consumir Φ_t de s.s. fica dada por (eq. 38 do paper):

$$\bar{\Phi} = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta^j \beta^{j/\sigma} (\beta^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}})^j \right]^{-1} = \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta^j \beta^j \right]^{-1} = 1 - \vartheta\beta \quad (1.46)$$

Além disso, podemos usar a equação de euler (8) para concluir que o consumo das gerações é constante:

$$\left[\frac{C_{t+1}^i}{C_t^i} \right]^\sigma = 1 \Rightarrow C_{t+1}^i = C_t^i = \bar{C}$$

O que, por sua vez, implica que o consumo agregado também é constante:

$$\bar{C} = (1 - \vartheta) \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i \bar{C}^i$$

Usando a expressão de consumo agregado (1.22), obtemos que a riqueza financeira agregada será nula (ou seja, a posição líquida do país será zero):

$$\bar{C} = \bar{C} + \frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \bar{\Phi} \bar{A} / \bar{P} \Rightarrow \bar{A} = 0$$

Usando a equação (1.19) e o resultado anterior, obtemos que o capital humano é constante e que a seguinte relação vale:

$$\bar{C} = \bar{\Phi} \bar{H} / \bar{P} \quad (1.47)$$

A eq. (1.18) implica que h_t é constante e $\bar{h} = \bar{P} \bar{C}$ Usando a equação recursiva para o capital humano, obtemos:

$$\bar{H} = \bar{h} + (1 + R)^{-1} \vartheta \bar{H} \Rightarrow \bar{H} = \frac{\bar{R}R}{\bar{R}R - \vartheta} \bar{h} \quad (1.48)$$

Usando a definição de h e o fato de que, com subsídio corretivo rebatido através de impostos lump-sum, a renda não derivada do trabalho (Dividendos - impostos) será nula, obtemos:

$$\bar{h} = \bar{W} \bar{L} \quad (1.49)$$

No s.s. com imposto corretivo, a equação de preço ótimo (1.38) das firmas de bens domésticos implica que o preço será igual ao custo marginal:

$$\bar{P}^D = (1 - \alpha_Y) \bar{W} + \alpha_Y \bar{P}_F \Rightarrow \bar{W} = \frac{\bar{P}_D - \alpha_Y \bar{P}_F}{1 - \alpha_Y}$$

Pela minimização de custos e ausência de choques de produtividade

$$\bar{Y}_D = \frac{\bar{L}}{1 - \alpha_Y} \Rightarrow \bar{L} = (1 - \alpha_Y) \bar{Y}_D$$

Combinando as últimas duas expressões

$$\bar{W} \bar{L} = (\bar{P}_D - \alpha_Y \bar{P}_F) \bar{Y}_D \quad (1.50)$$

Combinando as equações (1.46)-(1.50), obtemos a o consumo agregado de s.s. como função dos termos de troca $T\bar{O}T = \bar{P}_D / \bar{P}_F$ (eq. 39 do paper):

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \bar{\Phi} \bar{H} / \bar{P} = \bar{\Phi} \frac{\bar{R}\bar{R}}{\bar{R}\bar{R} - \vartheta} \bar{h} / \bar{P} = \bar{\Phi} \frac{\bar{R}\bar{R}}{\bar{R}\bar{R} - \vartheta} \bar{L} \bar{W} / \bar{P} = \bar{\Phi} \frac{\bar{R}\bar{R}}{\bar{R}\bar{R} - \vartheta} (\bar{P}_D - \alpha_Y \bar{P}_F) \bar{Y}_D / \bar{P} \\ &= (1 - \vartheta) \frac{1/\beta}{1/\beta - \vartheta} (1 - \alpha_Y \bar{P}_F / \bar{P}_D) \bar{P}_D / \bar{P} \bar{Y}_D \\ &\Rightarrow \bar{C} = \left(1 - \alpha_Y \frac{\bar{P}_F}{\bar{P}_D} \right) \frac{\bar{P}_D}{\bar{P}} \bar{Y}_D \end{aligned} \quad (1.51)$$

Combinando a eq. (1.40) para o produto agregado⁸ no s.s. com a eq. (1.45) para as exportações e assumindo s.s. na economia estrangeira

$$\bar{Y} / (1 - \alpha_Y) = \left[\frac{\bar{P}_D}{\bar{P}} \right]^{-\eta} (1 - \alpha_C) \bar{C} + \left[\frac{\bar{P}_D^*}{\bar{P}^*} \right]^{-\eta} \bar{C}^*$$

No s.s. com subsídio corretivo, a condição de ótimo para os preços das firmas importadoras e exportadoras implicam igualdade com seus custos marginais, de tal modo que vale a Lei do Preço Único:

⁸Note que o produto agregado desta economia é a produção de bens domésticos menos o uso de bens intermediários.

$\bar{P}_F = \bar{P}_F^* e_t$, $\bar{P}_D^* = \bar{P}_{D,t}/e_t$. Substituindo na expressão anterior, obtemos a (eq 40 do paper)⁹:

$$\bar{Y}/(1-\alpha_Y) = \left[\frac{\bar{P}_D}{\bar{P}} \right]^{-\eta} (1-\alpha_C) \bar{C} + \left[\frac{\bar{P}_D}{\bar{P}_F} \right]^{-\eta} \bar{C}^* \quad (1.52)$$

Substituindo (1.51) em (1.52) para \bar{C} e rearranjando, chegamos à seguinte relação de s.s. (eq. 41 do paper):

$$\bar{Y}/(1-\alpha_Y) = \frac{(\bar{P}_D/\bar{P}_F)^{-\eta}}{1 - (1-\alpha_C) \left(1 - \alpha_Y T \bar{O} T^{-1} \right) \bar{P}_D/\bar{P}^{1-\eta}} \bar{C}^* \quad (1.53)$$

onde (lembrando) $T \bar{O} T = \bar{P}_D/\bar{P}_F$. Avalie a expressão (1.23) no s.s. e use o fato de que o consumo é constante entre as gerações derivado anteriormente para obter a seguinte relação entre trabalho e consumo agregado (eq. 42 do paper):

$$\begin{aligned} \bar{L}^\omega &= \frac{1}{\kappa} \left[(1-\vartheta) \sum_{i=0}^{\infty} \bar{C}^{-\sigma/\omega} \right]^\omega \frac{W_t}{P_t} \\ \Rightarrow \bar{W} &= \kappa \bar{P} \bar{L}^\omega \bar{C}^\sigma \end{aligned} \quad (1.54)$$

Finalmente, combine esta última expressão com as duas expressões imediatamente anteriores à eq. (1.50)) e com a eq.(1.51) para eliminar o salário, trabalho e consumo, obtendo a relação de s.s. entre o produto agregado e os termos de troca vinda do lado da oferta (eq.41 do paper):¹⁰

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}_D - \alpha_Y \bar{P}_F}{1 - \alpha_Y} &= \kappa \bar{P} ((1 - \alpha_Y) \bar{Y})^\omega \left[\left(1 - \alpha_Y \frac{\bar{P}_F}{\bar{P}_D} \right) \frac{\bar{P}_D}{\bar{P}} \bar{Y} \right]^\sigma \\ \kappa \bar{Y}^{\sigma+\omega} &= \frac{1}{(1 - \alpha_Y)^{1+\omega}} \left[\left(1 - \alpha_Y \frac{\bar{P}_F}{\bar{P}_D} \right) \frac{\bar{P}_D}{\bar{P}} \right]^{1-\sigma} \\ \Rightarrow \kappa \bar{Y}^{\sigma+\omega} &= \frac{1}{(1 - \alpha_Y)^{1+\omega}} \left[\left(1 - \alpha_Y T \bar{O} T^{-1} \right) \frac{\bar{P}_D}{\bar{P}} \right]^{1-\sigma} \end{aligned} \quad (1.55)$$

⁹A equação aqui difere da eq. do paper no termo $1/(1-\alpha_Y)$. Este termo aparece porque o produto agregado da economia iguala ao produto das firmas de bens domésticos menos o uso de intermediários na produção. Nas contas de steady-state por algum motivo os autores não usam essa relação, mas nas contas de log-linearização eles usam. Para manter a consistência, adicionei o termo aqui também.

¹⁰Há uma pequena diferença entre a minha expressão e a do paper: a ausência do termo \bar{v} . Isto ocorre porque nas derivações anteriores implicitamente já tinha sido assumido (aqui e no paper) que $\bar{v} = 1$. Deste modo, mantive a hipótese para preservar a consistência das equações.

1.4 O modelo linearizado

Nesta seção linearizamos o modelo em torno do s.s. da seção anterior com termos de troca normalizados para 1. Variáveis com chapéu representarão desvios percentuais do s.s., a menos que dito o contrário.

1.4.1 UIP, equação de Euler e oferta de trabalho

Linearizando da eq. de paridade descoberta (1.7), obtemos (eq. 44 do paper):

$$\begin{aligned}
 \log\left(\frac{1+R_t}{1+R_t^*}\right) &= \log\left(\frac{e_{t+1}}{e_t}\right) \\
 \text{expansão de taylor em torno de } (1+R_t)/(1+R^*) &= \frac{1/\beta}{1/\beta} = 1 \text{ e } e_{t+1}/e_t = 1 \text{ (já cortando constantes):} \\
 \left(\frac{1+R_t}{1+R_t^*} - 1\right) &\approx \left(\frac{e_{t+1}}{e_t} - 1\right) \\
 \Rightarrow \hat{R}_t - \hat{R}_t^* &= \hat{e}_{t+1} - \hat{e}_t
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Linearizando a eq. (1.15), obtemos (eq. 45 do paper):

$$\begin{aligned}
 \log(RR_t) &= \log\left(\frac{1+R_t}{P_{t+1}/P_t}\right) \\
 \frac{(RR_t - 1/\beta)}{(1/\beta)} &\approx \frac{\frac{1+R_t}{P_{t+1}/P_t} - 1/\beta}{(1/\beta)} \\
 \Rightarrow \hat{R}R_t &= \hat{R}_t - \hat{P}_{t+1} + \hat{P}_t
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

Linearizando a eq. de consumo agregado (1.22) obtemos (eq.46 do paper):

$$C_t = \frac{1}{(\beta \bar{R} R_t)^{1/\sigma}} \left[C_{t+1} + \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \Phi_{t+1} \frac{A_{t+1}}{P_{t+1}} \right]$$

Expansão de taylor dos dois lados em torno do s.s. com $\beta \bar{R} \bar{R} = 1$ e $\bar{A} = 0$ (já cortando constantes)

$$\begin{aligned} (C_t - \bar{C}) &\approx -\frac{1}{\sigma} \frac{\bar{C} - \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \Phi \frac{\bar{A}}{\bar{P}}}{\beta^{1/\sigma} \bar{R} \bar{R}^{1+\sigma} \bar{R} \bar{R}} (R R_t - \bar{R} \bar{R}) + (C_{t+1} - \bar{C}) + \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \bar{\Phi} \left(\frac{A_{t+1}}{P_t} - 0 \right) + \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \frac{\bar{A}}{\bar{P}} (\Phi_t - \bar{\Phi}) \\ \frac{C_t - \bar{C}}{\bar{C}} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{R R_t - \bar{R} \bar{R}}{\bar{R} \bar{R}} + \frac{C_{t+1} - \bar{C}}{\bar{C}} + \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \bar{\Phi} \left(\frac{A_{t+1}}{P_t} / \bar{C} \right) \\ \Rightarrow \hat{C}_t &= -\frac{1}{\sigma} \hat{R} R_t + \hat{C}_{t+1} + \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \bar{\Phi} \hat{a}_{t+1} \end{aligned} \quad (1.58)$$

onde $\hat{a}_t = (A_t/P_t)/\bar{C}$ é o desvio da posição internacional de ativos em relação ao s.s. como percentual do consumo de s.s. .

Note que, nesta economia o produto agregado da economia é dado pela produção de bens domésticos menos o uso de bens intermediários. Usando as relações implicadas pela função de produção de bens domésticos obtemos:

$$Y_t = Y_{D,t} - I_t = Y_{D,t}(1 - \alpha_Y) \Rightarrow Y_{D,t} = Y_t/(1 - \alpha_Y)$$

Agregando e linearizando a produção da firma de bens domésticos:

$$(1 - \alpha_Y) \int Y_{d,t}(l) dl = v_t \int L_t(l) dl$$

$$(1 - \alpha_Y) Y_{D,t} = v_t L_t$$

$$(1 - \alpha_Y) Y_t / (1 - \alpha_Y) = v_t L_t$$

$$\log(Y_t) = \log(v_t) + \log(L_t)$$

$$\frac{Y_t - \bar{Y}}{\bar{Y}} \approx \frac{v_t - \bar{v}}{\bar{v}} + \frac{L_t - \bar{L}}{\bar{L}}$$

$$\Rightarrow \hat{Y}_t = \hat{v}_t + \hat{L}_t$$

Linearizando a oferta de trabalho agregada (1.23):

$$\omega \log(L)_t = \log(1/\kappa) + \omega \log \left((1 - \vartheta) \sum_{i=0}^{\infty} \vartheta^i (C_t^i)^{-\sigma/\omega} \right) + \log(W_t/P_t)$$

Expansão de taylor :

$$\begin{aligned} \omega \hat{L}_t &\approx \sum_{i=0}^{\infty} \omega \frac{1}{\bar{C}^{-\sigma/\omega}} (-\sigma/\omega)(1 - \vartheta) \bar{C}^{-\sigma/\omega-1} \vartheta^i (C_t^i - \bar{C}) + \hat{W}_t - \hat{P}_t = (-\sigma)(1 - \vartheta) \sum_{i=0}^{\infty} \bar{C}^{-1} \vartheta^i (C_t^i - \bar{C}) + \hat{W}_t - \hat{P}_t \\ \Rightarrow \omega \hat{L}_t &= (-\sigma) \hat{C}_t + \hat{W}_t - \hat{P}_t \end{aligned}$$

Combinando as duas últimas expressões para eliminar \hat{L}_t , obtemos a eq. (48) do paper para a oferta de trabalho:

$$\hat{W}_t = \hat{P}_t + \omega \hat{Y}_t + \sigma \hat{C}_t - \omega \hat{v}_t \quad (1.59)$$

1.4.2 Curvas de Phillips

Como os problemas das firmas de cada setor só se diferenciam pelo formato do custo marginal, vamos derivar uma curva de Phillips genérica para cada setor e então especializar.

O ponto de partida será a eq. (1.37), reescrita aqui por conveniência:

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_{t,t+j} \xi_k^j \left[\left(\frac{P_{k,t+j-1}}{P_{k,t-1}} \right)^{\gamma_k} \frac{(\theta-1)}{\theta} (1-\tau) Y_{k,t+j}(l) P_{k,t}^N \right] = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{t,t+j} \xi_k^j MC_{t+j} Y_{k,t+j}(l), \quad k = D, F, X$$

Aplicando uma expansão de taylor em torno do s.s. de inflação zero dos dois lados:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_k^j \bar{M}C \bar{Y}_k (Q_{t,t+j} - \beta^j) + \beta^j \epsilon_k^j \bar{Y}_k \gamma_k \bar{M}C \left(\frac{P_{k,t+j-1}}{P_{k,t-1}} - 1 \right) + \beta^j \epsilon_k^j (Y_k(l) - \bar{Y}_k) + \beta^j \epsilon_k^j \bar{Y}_k (P_{k,t}^N - \bar{P}_k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon_k^j \bar{M}C \bar{Y}_k (Q_{t,t+j} - \beta^j) + \beta^j \epsilon_k^j (Y_k(l) - \bar{Y}_k) + \beta^j \epsilon_k^j \bar{Y}_k (MC_{t+j} - \bar{M}C) \end{aligned}$$

Onde usamos o fato de que, no s.s., $\bar{P}_k = \bar{M}C$ e $\frac{\theta-1}{\theta}(1-\tau) = 1$. Cancelando os termos em comum, obtemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \epsilon_k^j \bar{Y}_k \gamma_k \bar{M}C \left(\frac{P_{k,t+j-1}}{P_{k,t-1}} - 1 \right) + \beta^j \epsilon_k^j \bar{Y}_k (P_{k,t}^N - \bar{P}_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \epsilon_k^j \bar{Y}_k (MC_{t+j} - \bar{M}C)$$

Dividindo ambos os lados por $\bar{M}C = \bar{P}_k$ e \bar{Y}_k , obtemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\beta \epsilon_k)^j \gamma_k (\hat{P}_{k,t+j-1} - \hat{P}_{k,t-1}) + (\beta \epsilon_k)^j \hat{P}_{k,t}^N = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \epsilon_k^j \hat{M}C_{t+j}$$

Reescrevendo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (\beta \epsilon_k)^j \hat{P}_{k,t}^N - (\beta \epsilon_k)^j \gamma_k \hat{P}_{k,t-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \epsilon_k^j \hat{M}C_{t+j} - \gamma^k \hat{P}_{k,t+j-1} \\ \hat{P}_{k,t}^N - \gamma_k \hat{P}_{k,t-1} &= (1 - \beta \xi_k) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \epsilon_k^j \hat{M}C_{t+j} - \gamma^k \hat{P}_{k,t+j-1} \end{aligned}$$

Escreva esta última expressão de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{k,t}^N - \gamma_k \hat{P}_{k,t-1} &= (1 - \beta \xi_k) (\hat{M}C_t - \gamma_k \hat{P}_{k,t-1}) + \beta \xi_k \sum_{j=1}^{\infty} (\beta \epsilon_k)^{j-1} \hat{M}C_{t+j} - \gamma^k \hat{P}_{k,t+j-1} \\ \hat{P}_{k,t}^N - \gamma_k \hat{P}_{k,t-1} &= (1 - \beta \xi_k) (\hat{M}C_t - \gamma_k \hat{P}_{k,t-1}) + \beta \xi_k (\hat{P}_{k,t+1}^N - \gamma_k \hat{P}_{k,t}) \end{aligned}$$

Subtraia $\bar{P}_{k,t-1}$ dos dois lados e reorganize para obter:

$$\hat{P}_{k,t}^N - \hat{P}_{k,t-1} = (1 - \beta \xi_k) \hat{M}C_t + \gamma_k \beta \xi_k (\hat{P}_{k,t-1} - \hat{P}_{k,t}) + \beta \xi_k \hat{P}_{k,t+1}^N - \hat{P}_{k,t-1}$$

Some e subtraia $\beta \xi_k \hat{P}_{k,t}$ e $\hat{P}_{k,t}$ do lado direito e reorganize para obter:

$$\hat{P}_{k,t}^N - \hat{P}_{k,t-1} = (1 - \beta \xi_k) (\hat{M}C_t - \hat{P}_{k,t}) + (1 - \gamma_k \beta \xi_k) \hat{\pi}_{k,t} + \beta \xi_k (\hat{P}_{k,t+1}^N - \hat{P}_{k,t}) \quad (1.60)$$

onde $\hat{\pi}_{k,t} = \hat{P}_{k,t} - \hat{P}_{k,t-1}$ Vamos agora obter a dinâmica de preços do setor k implicada pelo mecanismo de calvo. Comece dividindo o análogo da expressão (1.39) por $P_{k,t-1}$, obtendo:

$$\Pi_{k,t}^{1-\theta} = (1 - \xi_k) (P_{k,t}^N / P_{k,t-1})^{1-\theta} + \xi_k [(\Pi_{k,t-1})^{\gamma_k}]^{1-\theta}$$

Onde $\Pi_{k,t} = (1 + \pi_{k,t})$ é a inflação bruta. Realizando uma expansão de taylor dos dois lados, obtemos:

$$\begin{aligned} (1 - \theta)(\Pi_{k,t} - 1) &\approx (1 - \xi_k)(1 - \theta)(P_{k,t}^N / P_{k,t-1} - 1) + (1 - \theta)\gamma_k \xi_k (\Pi_{k,t-1} - 1) \\ \Rightarrow \hat{\pi}_{k,t} &= (1 - \xi_k)(\hat{P}_{k,t}^N - \hat{P}_{k,t-1}) + \xi_k \gamma_k \hat{\pi}_{k,t-1} \end{aligned}$$

Isole esta última expressão para $\hat{P}_{k,t}^N - \hat{P}_{k,t-1}$, obtendo:

$$\hat{P}_{k,t}^N - \hat{P}_{k,t-1} = \frac{\hat{\pi}_{k,t}}{1 - \xi_k} - \frac{\xi_k}{1 - \xi_k} \gamma_k \hat{\pi}_{k,t-1}$$

Finalmente, utilize esta última expressão para substituir para $\hat{P}_{k,t}^N - \hat{P}_{k,t-1}$ e $\hat{P}_{k,t+1}^N - \hat{P}_{k,t}$ na equação (1.60) e reorganize para obter a curva de phillips do setor k :

$$\hat{\pi}_{k,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_k \beta} \hat{\pi}_{k,t+1} + \frac{\gamma_k}{1 + \gamma_k \beta} \hat{\pi}_{k,t-1} + \frac{(1 - \beta \xi_k)(1 - \xi_k)}{\xi_k(1 + \gamma_k \beta)} (\hat{M}C_t - \hat{P}_{k,t}) \quad (1.61)$$

Agora vamos especializar esta expressão para obter as curvas de Phillips de cada setor. Para o setor de bens domésticos, vamos começar obtendo a expressão de steady-state do custo marginal. Avaliando a eq. (1.33) no s.s., obtemos:

$$\bar{M}C = (1 - \alpha_Y) / \bar{v} \bar{W} + \alpha_Y \bar{P}_{F,t}$$

Com subsídio corretivo de mark-up, temos $\bar{M}C = \bar{P}_D$. Além disso, com termos de troca normalizados para 1: $\bar{P}_D = \bar{P}_F = \bar{P}$. Substituindo na equação anterior obtemos a seguinte relação de s.s.:

$$\bar{M}C = \frac{\bar{W}}{\bar{v}}$$

Agora aplique uma expansão de taylor e use as relações anteriores na (1.33),

$$\begin{aligned} (M C_t - \bar{M}C) &= \frac{(1 - \alpha_Y)}{\bar{v}} (W_t - \bar{W}) - \frac{(1 - \alpha_Y) \bar{W}}{\bar{v}} \frac{v_t - \bar{v}}{\bar{v}} + \alpha_Y (P_F - \bar{P}_F) \\ (M C_t - \bar{M}C) / \bar{M}C &= \frac{(1 - \alpha_Y)}{\bar{M}C \bar{v}} (W_t - \bar{W}) - \frac{(1 - \alpha_Y) \bar{W}}{\bar{M}C \bar{v}} \frac{v_t - \bar{v}}{\bar{v}} + \alpha_Y (P_F - \bar{P}_F) / \bar{M}C \\ \hat{M}C_t &= (1 - \alpha_Y) \frac{W_t - \bar{W}}{\bar{W}} - (1 - \alpha_Y) \hat{v}_t + \alpha_Y \frac{P_F - \bar{P}_F}{\bar{P}_F} \end{aligned}$$

para obter uma expressão para o custo marginal da firma de bens domésticos:

$$\hat{MC}_t = (1 - \alpha_Y)\hat{W}_t - (1 - \alpha_Y)\hat{v}_t + \alpha_Y\hat{P}_{F,t} \quad (1.62)$$

Linearize a equação do nível de preços agregado (1.25):

$$\begin{aligned} (1 - \eta)(P_t - \bar{P}) &= (1 - \eta)(1 - \alpha_C)(P_{D,t} - \bar{P}_D) + (1 - \eta)\alpha_C(P_{F,t} - \bar{P}_F) \\ (P_t - \bar{P})/\bar{P} &= (1 - \alpha_C)(P_{D,t} - \bar{P}_D)/\bar{P}_D + \alpha_C(P_{F,t} - \bar{P}_F)/\bar{P}_F \end{aligned}$$

De onde obtemos o índice de preços agregado no modelo linearizado (eq. 52 do paper):

$$\hat{P}_t = (1 - \alpha_C)\hat{P}_{D,t} + \alpha_C\hat{P}_{F,t} \quad (1.63)$$

Agora substitua a eq. (1.59) no custo marginal da firma doméstica (1.62) para eliminar o salário e em seguida substitua o nível de preços agregado (1.63) para obter:

$$\hat{MC}_t = (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)(\hat{P}_D - \hat{P}_F) - \hat{P}_F + (1 - \alpha_Y)(\omega\hat{Y} + \sigma\hat{C}) - (\omega(1 - \alpha_Y) + (1 - \alpha_Y))\hat{v}_t$$

Finalmente, substituindo esta expressão na curva de phillips genérica (1.61), rearranje e especialize para k=D para obter a curva de phillips do setor de bens domésticos (eq. 49 do paper)

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{D,t} &= \frac{\beta}{1 + \gamma_D\beta} \hat{\pi}_{D,t+1} + \frac{\gamma_D}{1 + \gamma_D\beta} \hat{\pi}_{D,t-1} - \frac{(1 - \beta\xi_D)(1 - \xi_D)}{\xi_D(1 + \gamma_D\beta)} \times \\ &\quad [(1 - (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)(\hat{P}_{D,t} - \hat{P}_{F,t}) - (1 - \alpha_Y)(\omega\hat{Y}_t + \sigma\hat{C}_t) + (1 - \alpha_Y)(1 + \omega)\hat{v}_t] \end{aligned} \quad (1.64)$$

Para obter a curva de Phillips do setor de importados, linearize a expressão para o custo marginal:

$$\begin{aligned} \log(MC_t) &= \log(e_t) + \log(P_{F,t}^*) \\ \Rightarrow \hat{MC}_t &= \hat{e}_t \end{aligned}$$

Onde assumimos que os preços do setor externo estão em s.s. . Substituindo esta expressão em (1.61) e

especializando para $k = F$, obtemos a curva de phillips do setor de importação (eq. 50 do paper):

$$\hat{\pi}_{F,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{F,t+1} + \frac{\gamma_F}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{F,t-1} - \frac{(1 - \beta \xi_F)(1 - \xi_F)}{\xi_F(1 + \gamma_F \beta)} (\hat{P}_{F,t} - \hat{e}_t) \quad (1.65)$$

Por fim, para obter a curva de phillips do setor de exportação, linearize a expressão para o custo marginal dessas firmas (escrito em termos da moeda de sua receita):

$$MC_t = P_{D,t}/e_t \Rightarrow \log(MC_t) = \log(P_{D,t}) - \log(e_t) \Rightarrow \hat{M}C_t = \hat{P}_{D,t} - \hat{e}_t$$

Substituindo esta expressão em (1.61) e especializando para $k = X$, obtemos a curva de phillips do setor de exportação (eq. 53 do paper):

$$\hat{\pi}_{X,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{X,t+1} + \frac{\gamma_F}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{X,t-1} - \frac{(1 - \beta \xi_F)(1 - \xi_F)}{\xi_F(1 + \gamma_F \beta)} (\hat{P}_{D,t}^* - \hat{P}_{D,t} + \hat{e}_t) \quad (1.66)$$

onde lembrando: $P_{D,t}^*$ é o preço do bem doméstico exportado no exterior, assume-se que os parâmetros de indexação e rigidez são iguais aos do setor de importação e $\hat{\pi}_{X,t} = \hat{P}_{D,t}^* - \hat{P}_{D,t-1}$.

1.4.3 Market Clearing e ativos externos líquidos

Vamos linearizar a condição de equilíbrio no mercado de bens. Reescrevendo (1.40) em termos do produto agregado:

$$Y_t = (1 - \alpha_Y) \delta_{P,t} \left[\left(\frac{P_{D,t}}{P_t} \right)^{-\eta} (1 - \alpha_C) C_t + X_t \right]$$

Onde usei $Y_{D,t} = Y_t/(1 - \alpha_Y)$ (produto agregado é o produto de bens domésticos menos o uso de intermediários). Aplicando uma expansão de taylor dos dois lados da expressão acima,

$$Y_t - \bar{Y} = (1 - \alpha_Y) \bar{Y} (\delta_{P,t} - 1) + (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)(C_t - \bar{C}) + (1 - \alpha_Y)(X_t - \bar{X}) - \eta \bar{C}(1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)(\hat{P}_{D,t} - \hat{P}_t)$$

e dividindo os dois lados por \bar{Y} :

$$\hat{Y}_t = (1 - \alpha_Y) \hat{\delta}_{P,t} + (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C) \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \hat{C}_t + (1 - \alpha_Y) \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \hat{X}_t - \eta \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C) (\hat{P}_{D,t} - \hat{P}_t)$$

Para simplificar esta expressão, primeiro observe que, numa aproximação de primeira ordem, $\hat{\delta}_{p_t} \approx 0$ (ver próxima seção). Além disso, avalie a eq. de demanda por bens estrangeiros (ou domésticos) no S.S. com termos de troca normalizados para 1:

$$\bar{C}_F = \alpha_C \bar{C} \Rightarrow \bar{C}_F / \bar{Y} = \alpha_C \bar{C} / \bar{Y} \Rightarrow \bar{C} / \bar{Y} = 1$$

Avalie a expressão original no S.S. e use o resultado anterior para obter a razão \bar{X} / \bar{Y} :

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)\bar{C} + (1 - \alpha_Y)\bar{X} \\ 1 &= (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)\bar{C} / \bar{Y} + (1 - \alpha_Y)\bar{X} / \bar{Y} \\ \Rightarrow \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} &= \frac{1 - (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)}{(1 - \alpha_Y)} \end{aligned}$$

Substituindo tudo na expressão de equilíbrio no mercado de bens linearizada:

$$\hat{Y}_t = (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)\hat{C}_t + (1 - (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C))\hat{X}_t - \eta(1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)(\hat{P}_{D,t} - \hat{P}_t) \quad (1.67)$$

Agora utilize a demanda por bens exportados por parte do setor externo (1.45) para obter \hat{X}_t :

$$\begin{aligned} \log(X_t) &= -\eta \log\left(\frac{P_{D,t}^*}{P_{E,t}^*}\right) + \log(C_t^*) \\ \Rightarrow \hat{X}_t &= -\eta \hat{P}_{D,t}^* + \hat{C}_t^* \end{aligned}$$

onde novamente assumimos que não há inflação no exterior. Substituindo esta última expressão e a eq. (1.63) para o preço agregado em (1.67) e rearranjando, obtemos a seguinte equação de equilíbrio no mercado de bens (eq.51 do paper, escrita de uma forma ligeiramente diferente):

$$\hat{Y}_t = (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)\hat{C}_t + [1 - (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)](C_t^* - \eta P_{D,t}^*) - \eta \alpha_C (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)(\hat{P}_{D,t} - \hat{P}_{E,t}) \quad (1.68)$$

Finalmente, reescreva a eq. (1.18):

$$\begin{aligned}
A_{t+1} &= (1 + R_t) [h_t - P_t C_t + A_t] \\
A_{t+1} &= (1 + R_t) / P_t [h_t / P_t - C_t + A_t / P_t] \\
A_{t+1} / P_{t+1} &= \frac{(1 + R_t)}{P_{t+1} / P_t} [h_t / P_t - C_t + A_t / P_t] \\
A_{t+1} / P_{t+1} &= R R_t [h_t / P_t - C_t + A_t / P_t]
\end{aligned}$$

Aplicando uma expansão de taylor de ambos os lados:

$$(A_{t+1} / P_{t+1} - 0) = \bar{R} \bar{R} \left[\left(\frac{h_t}{P_t} - \frac{\bar{h}}{\bar{P}} \right) - (C_t - \bar{C}) + (A_t / P_t - 0) \right]$$

Dividindo os dois lados por \bar{C} e notando que no s.s. $\bar{h} / \bar{P} = \bar{C}$,

$$\tilde{a}_{t+1} = \bar{R} \bar{R} [\hat{h}_t / \hat{P}_t - \hat{C}_t + \tilde{a}_t]$$

Linearizando a definição de $h_t = W_t L_t + Div_t^D + Div_t^F - T_t$, o fato de que os impostos lump-sum se igualam aos subsídios pagos às firmas, a relação de preços (1.63), as expressões dos custos marginais linearizados anteriores e a relação $Y_{D,t} = Y_t / (1 - \alpha_Y)$, obtemos:

$$\frac{\hat{h}_t}{\hat{P}_t} = \hat{Y}_t + \left(\alpha_C + \frac{\alpha_Y}{1 - \alpha_Y} (\hat{P}_{D,t} - \hat{e}_t) \right)$$

Substituindo na eq. anterior, obtemos a lei de movimento para a posição de ativos financeiros (eq. 47 do paper):

$$\tilde{a}_{t+1} = \bar{R} \bar{R} \left[\tilde{a}_t + \hat{Y}_t - \hat{C}_t + \left(\alpha_C + \frac{\alpha_Y}{1 - \alpha_Y} (\hat{P}_{D,t} - \hat{e}_t) \right) \right] \quad (1.69)$$

1.5 Sistema de equações linearizadas

O sistema de equações linearizadas do modelo é portanto:

$$\hat{R}_t - \hat{R}_t^* = \hat{e}_{t+1} - \hat{e}_t \quad (1.70)$$

$$\hat{R}R_t = \hat{R}_t - \hat{P}_{t+1} + \hat{P}_t \quad (1.71)$$

$$\hat{C}_t = -\frac{1}{\sigma} \hat{R}R_t + \hat{C}_{t+1} + \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \bar{\Phi} \tilde{a}_{t+1} \quad (1.72)$$

$$\hat{P}_t = (1 - \alpha_C) \hat{P}_{D,t} + \alpha_C \hat{P}_{F,t} \quad (1.73)$$

$$\hat{\pi}_{D,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_D \beta} \hat{\pi}_{D,t+1} + \frac{\gamma_D}{1 + \gamma_D \beta} \hat{\pi}_{D,t-1} - \frac{(1 - \beta \xi_D)(1 - \xi_D)}{\xi_D(1 + \gamma_D \beta)} \times$$

$$\left[(1 - (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C))(\hat{P}_{D,t} - \hat{P}_{F,t}) - (1 - \alpha_Y)(\omega \hat{Y}_t + \sigma \hat{C}_t) + (1 - \alpha_Y)(1 + \omega) \hat{v}_t \right] \quad (1.74)$$

$$\hat{\pi}_{X,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{X,t+1} + \frac{\gamma_F}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{X,t-1} - \frac{(1 - \beta \xi_F)(1 - \xi_F)}{\xi_F(1 + \gamma_F \beta)} (\hat{P}_{D,t}^* - \hat{P}_{D,t} + \hat{e}_t) \quad (1.75)$$

$$\hat{\pi}_{F,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{F,t+1} + \frac{\gamma_F}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{F,t-1} - \frac{(1 - \beta \xi_F)(1 - \xi_F)}{\xi_F(1 + \gamma_F \beta)} (\hat{P}_{F,t} - \hat{e}_t) \quad (1.76)$$

$$\hat{Y}_t = (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C) \hat{C}_t + [1 - (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)] (C_t^* - \eta P_{D,t}^* - \eta \alpha_C(1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)(\hat{P}_{D,t} - \hat{P}_{F,t})) \quad (1.77)$$

$$\tilde{a}_{t+1} = \bar{R}R \left[\tilde{a}_t + \hat{Y}_t - \hat{C}_t + \left(\alpha_C + \frac{\alpha_Y}{1 - \alpha_Y} (\hat{P}_{D,t} - \hat{e}_t) \right) \right] \quad (1.78)$$

Que complementado por uma regra de política monetária define o equilíbrio da economia. Mais a frente reescrevermos este sistema só em termos de variáveis estacionárias para fins de estimação com métodos de full-information.

1.6 Política Ótima

Os autores argumentam que por conta da natureza de gerações imbricadas do modelo, derivar uma função perda diretamente das funções utilidades da família é muito complicado. Por esse motivo, eles assumem que o Banco Central irá minimizar uma média ponderada da variabilidade de preços relativos no setor de bens domésticos e estrangeiros. Para entender a motivação, comece agregando as equações

(1.35) e (1.42). Agregando (1.42) e resolvendo para o consumo:

$$\begin{aligned}\int Y_{F,t}(m) dm &= \int \left(\frac{P_{F,t}(m)}{P_{F,t}} \right)^{-\theta} (C_{F,t} + I_{F,t}) dm \\ \Rightarrow M_t &= \delta_{F,t}(C_{F,t} - I_{F,t}) \\ \Rightarrow C_{F,t} &= M_t / \delta_{F,t} - I_{F,t}\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo com a eq. (1.35):

$$\begin{aligned}\int Y_{D,t}(l) dl &= \int \left(\frac{P_{D,t}(l)}{P_{D,t}} \right)^{-\theta} (C_{D,t} + X_t) dl \\ \Rightarrow Y_{D,t} &= \delta_{D,t}(C_{D,t} - X_t) \\ \Rightarrow C_{D,t} &= Y_{D,t} / \delta_{D,t} - X_t\end{aligned}$$

Substituindo as duas expressões de consumo no índice agregado de consumo agregado (1.24) obtemos (eq. 54 do paper):

$$C_t = \left[(1 - \alpha_C)^{1/\eta} (Y_{D,t} / \delta_{D,t} - X_t)^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \alpha_C^{1/\eta} (M_t / \delta_{F,t} - I_{F,t})^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad (1.79)$$

onde $(\delta_{k,t} = \int \left[\frac{P_{k,t}(i)}{P_{k,t}} \right]^{-\theta} di)$ para $k = D, F$. Essa equação mostra, que para a mesma quantidade de produtos domésticos e importados, o consumo dos agentes será mais alto quanto menor for a variabilidade de preços relativos, isto é, quanto menor for $\delta_{k,t}$.

O objetivo do Banco Central é minimizar uma média ponderada dessas medidas de variabilidade de preços relativos, $\delta_{F,t}$ e $\delta_{D,t}$. O peso de cada uma é obtido através da elasticidade (relativa) do consumo agregado a cada uma. Derivando a expressão (1.79) com relação a $\delta_{D,t}$ e $\delta_{F,t}$ e avaliando no s.s., obtemos:

$$\frac{\partial C_t}{\partial \delta_{D,t}} = 1/\bar{C} (1 - \alpha_C)^{1/\eta} \bar{C}_D^{-1/\eta} (-\bar{Y})$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial \delta_{F,t}} = 1/\bar{C} (\alpha_C)^{1/\eta} \bar{C}_F^{-1/\eta} (-\bar{M})$$

Dividindo uma derivada pela outra e notando que $\bar{C}_D/\bar{C}_F = (1 - \alpha_C)/\alpha_C$, obtemos:¹¹

$$w_D/w_F = \bar{Y}/\bar{M}$$

Avaliando a expressão que define M_t no s.s. e usando a função de produção da firma de bens domésticos, obtemos a razão \bar{Y}/\bar{M} em termos dos parâmetros:¹²

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \bar{C}_F + \bar{I}_F = \bar{C}_F + \bar{Y}_D \alpha_Y = \bar{C}_F + \frac{\alpha_Y \bar{Y}}{1 - \alpha_Y} \\ \Rightarrow \bar{M}/\bar{Y} &= \alpha_C + \frac{\alpha_Y}{1 - \alpha_Y}\end{aligned}$$

Normalizando w_D para a unidade e usando a condição anterior, obtemos os pesos de cada termo na função perda do BC (eq. 55 do paper, ver nota)¹³

$$w_D = 1, w_F = \alpha_C + \frac{\alpha_Y}{1 - \alpha_Y} \quad (1.80)$$

Em seguida, vamos associar $\delta_{k,t}$ diretamente com as variâncias de cada setor. Para isso, tome uma aproximação de segunda ordem em torno do s.s.:

$$\begin{aligned}\delta_{k,t} &= \int \left[\frac{P_{k,t}(i)}{P_{k,t}} \right]^{-\theta} di \\ (\delta_{k,t} - 1) &= -\theta \int \left[\frac{P_{k,t}(i)}{P_{k,t}} - 1 \right] + \frac{(\theta + 1)\theta}{2} \int \left[\frac{P_{k,t}(i)}{P_{k,t}} - 1 \right]^2 di \\ \hat{\delta}_{k,t} &= -\theta \int [\hat{P}_{k,t}(i) - \hat{P}_{k,t}] + \frac{(\theta^2 + \theta)}{2} \int [\hat{P}_{k,t}(i) - \hat{P}_{k,t}]^2 di\end{aligned}$$

Aproximando a definição de preços do setor k em primeira ordem, obtemos que o termo de primeira

¹¹Na verdade a relação deveria ser $w_D/w_F = \frac{\bar{Y}_D}{\bar{M}}$, pois o produto agregado é o agregado de produção doméstica menos o uso de bens intermediários. Apesar de usar esta relação entre os produtos em outros trechos do paper, mais uma vez os autores abstraem dela e tratam os dois como equivalentes.

¹²Note que agora voltamos com a relação $\bar{Y} = (1 - \alpha_Y)\bar{Y}_D$, apesar de abstrair dela na derivação anterior. Esta foi a única forma de chegar às expressões do paper para os pesos.

¹³Os pesos aqui diferem dos pesos na eq. 55 pois há um typo nela, que é corrigido posteriormente na eq. 60. do paper.

ordem da expressão anterior é zero:

$$\begin{aligned}
P_t &= \left[\int P_{k,t}(i)^{1-\theta} di \right]^{1/(1-\theta)} \\
1 &= \left[\int (P_{k,t}(i)/P_t)^{1-\theta} di \right]^{1/(1-\theta)} \\
0 &= \frac{1}{1-\theta} \int \left(\frac{P_{k,t}(i)}{P_t} - 1 \right) di \Rightarrow \frac{1}{1-\theta} \int (\hat{P}_{k,t}(i) - \hat{P}_{k,t}) di = 0 \Rightarrow \int (\hat{P}_{k,t}(i) - \hat{P}_{k,t}) di = 0
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos a seguinte relação (eq. 56 do paper, ligeiramente diferente aqui; aparentemente há um typo no paper):

$$\hat{\delta}_{k,t} = \frac{(\theta^2 + \theta)}{2} \text{Var}_i P_{k,t}(i), k = D, F \quad (1.81)$$

Esta equação só ilustra que, uma forma de reduzir a variabilidade de preços relativos é reduzindo a variância cross-section dos preços em cada setor. Como esta medida não é observada, vamos derivar uma relação entre a variância incondicional cross-section dos preços e a variância da inflação (omitirei o subscrito k pois as derivações valem para ambos os setores).¹⁴ Defina $\Delta_t \equiv \text{var}_i \hat{P}_t(i)$ e $p_t \equiv E_i \hat{P}_t(i)$, $p_t^N \equiv \hat{P}_t^N$ e $p_t(i) \equiv \hat{P}_t(i)$. Pelo mecanismo de calvo e o mecanismo de indexação, temos:

$$\begin{aligned}
p_t - p_{t-1} &= E_i[p_t(i) - p_{t-1}] = (1 - \xi)(p_t^N - p_{t-1}) + \xi E_i[p_{t-1}(i) + \gamma \pi_{t-1} - p_{t-1}] \\
\Rightarrow p_t - p_{t-1} &= (1 - \xi)(p_t^N - p_{t-1}) + \xi \gamma \pi_{t-1}
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\Delta_t &= \text{Var}_i[p_t(i)] = \text{Var}_i[p_t(i) - p_{t-1}] = E_i[(p_t(i) - p_{t-1})^2] - [E_i(p_t(i) - p_{t-1})]^2 \\
&= (1 - \xi)(p_t^N - p_{t-1})^2 + \xi E_i(p_{t-1}(i) + \gamma \pi_{t-1} - p_{t-1})^2 - (p_t - p_{t-1})^2
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão anterior no para $p_t^N - p_{t-1}$ usando o fato de que, em uma aproximação de primeira ordem, $p_t - p_{t-1} \approx \hat{P}_t - \hat{P}_t = \pi_t$ e abrindo os quadrados obtemos:

$$\Delta_t = \frac{(\pi_t - \gamma \xi \pi_{t-1})^2}{1 - \xi} + \xi \gamma^2 \pi_{t-1}^2 + \xi E_i(p_{t-1}(i) - p_{t-1})^2 + 2\xi \pi_{t-1} E_i(p_{t-1}(i) - p_t) - \pi_t^2$$

¹⁴A derivação é baseada em Woodford(2002)-Interest and Prices

Rearranjando, obtemos:

$$\Delta_t = \xi \Delta_{t-1} + \frac{\xi}{1-\xi} (\pi_t - \gamma \pi_{t-1})$$

Iterando esta equação para frente chegamos a:

$$\Delta_t = \xi^{t+1} \Delta_{-1} + \frac{\xi}{1-\xi} \sum_{s=0}^t \xi^{t-s} (\pi_s - \gamma \pi_{s-1})^2 = \xi^{t+1} \Delta_{-1} + \frac{\xi}{1-\xi} \sum_{s=0}^t \xi^{t-s} ((1-\gamma)\pi_s + \gamma \Delta \pi_s)^2$$

Partindo de uma condição inicial simétrica e de inflação zero e abrindo os quadrados,

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \frac{\xi}{1-\xi} \sum_{s=0}^t \xi^{t-s} ((1-\gamma)^2 \pi_s^2 + \gamma^2 \Delta \pi_s^2 + 2\gamma(1-\gamma)\pi_s(\pi_t - \pi_{t-1})) \\ &= \frac{\xi}{1-\xi} \sum_{s=0}^t \xi^{t-s} [(1-\gamma) - (1-\gamma)\gamma\xi] \pi_s^2 + (\gamma^2 + \gamma(1-\gamma)(1-\xi)) \Delta \pi_s^2 \\ &= \frac{\xi}{1-\xi} \sum_{s=0}^t \xi^{t-s} [(1-\gamma)(1-\gamma\xi) \pi_s^2 + (\gamma(\xi(\gamma-1) + 1)) \Delta \pi_s^2] \end{aligned}$$

Definindo $\text{Var}\pi_t \equiv (1-\xi) \sum_{s=0}^t \xi^{t-s} \pi_s^2$ e $\text{Var}\Delta\pi_t \equiv (1-\xi) \sum_{s=0}^t \xi^{t-s} \Delta \pi_s^2$, obtemos a eq. (57) do paper:

$$\Delta_{k,t} = \frac{\xi_k(1-\gamma_k)(1-\xi_k\gamma_k)}{(1-\xi_k)^2} \text{Var}\pi_{k,t} + \frac{\xi_k\gamma_k(\xi_k(\gamma_k-1) + 1)}{(1-\xi_k)^2} \text{Var}\Delta\pi_{k,t} \quad (1.82)$$

Usando os pesos para bens domésticos e importados e o resultado anterior, a função de perda do BC fica definida como (eq. 60 do paper):

$$L = w_{\pi_D} \text{Var}\pi_{D,t} + w_{\Delta\pi_D} \text{Var}\Delta\pi_{D,t} + \left[\alpha_C + \frac{\alpha_Y}{1-\alpha_Y} \right] [w_{\pi_F} \text{Var}\pi_{F,t} + w_{\Delta\pi_F} \text{Var}\Delta\pi_{F,t}] \quad (1.83)$$

Onde w_{p_k} são os coeficientes de cada termo da variância em (1.82) para cada setor k .

Parte III

Replicação: estimação e simulações

2. Var estrutural

As estimações foram feitas usando o software de programação "R". O arquivo principal é o "lvar.R", que já chama todas as funções necessárias para a estimação. Procurei não usar nenhum pacote pronto do R na estimação pois eles performaram pior do que usando um misto de códigos do Chris Sim's e de autoria própria.

Os dados para a estimação do VAR estrutural (SVAR) foram disponibilizados por Wouters. O SVAR é estimado com dados trimestrais da zona do euro para o período 1977.1:1999.4. São usadas seis séries: PIB real, exportações líquidas em % do PIB, CPI de bens domésticos, preços de importados, taxas de juros nominais de curto prazo e uma taxa real de câmbio. Além dessas seis variáveis endógenas, mais três variáveis exógenas são incluídas: taxa nominal de juros, PIB e CPI dos EUA e um índice de preços de commodities.

A estratégia de identificação dos erros estruturais é uma combinação de Cholesky com as seguintes relações contemporâneas. Mudanças na política monetária tem efeitos defasados sobre o PIB e CPI doméstico, mas podem ter efeitos imediatos sobre o câmbio e CPI de importados; CPI de importados não tem efeito contemporâneo sobre o CPI doméstico. Esse conjunto de restrições implica em um SVAR sobreidentificado, que foi estimado por verossimilhança usando o algoritmo de otimização fornecido pelo Chris Sim's csminwel (o algoritmo do SIMs levou a resultados melhores que o algoritmo do R).

Os erros padrões para as funções de resposta ao impulso foram construídos por um processo de

bootstrap da seguinte forma. Primeiro, extrai-se com reposição uma amostra (de mesmo tamanho que a amostra da estimação) do conjunto de resíduos \hat{u}_t obtidos na estimação do VAR na forma reduzida. Usando esses resíduos, as estimações das matrizes de coeficientes do VAR na forma reduzida e p condições iniciais para as variáveis endógenas (onde p é a quantidade de lags) cria-se recursivamente uma amostra artificial para as endógenas através de:

$$y_t = \hat{A}(L)y_{t-1} + \hat{B}(L)x_t + \hat{u}_t$$

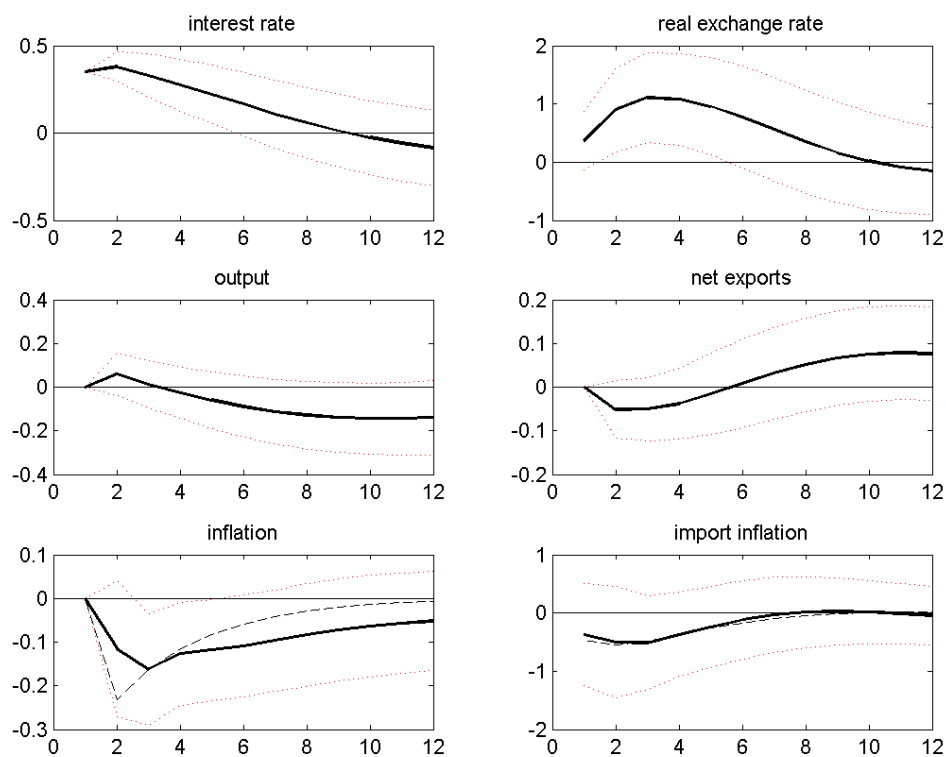
Com esse novo conjunto de dados, o VAR, SVAR e as IRF's são reestimados de forma idêntica à realizada fora do bootstrap. Esse processo é repetido 1000 vezes. Através dessas replicações, obtém-se uma estimativa para o viés das matrizes de coeficientes, que são então corrigidas. Com as matrizes de coeficientes corrigidas, corrijo também os resíduos e repito o processo de bootstrap mais 2000 vezes, obtendo, por fim, as estimativas para os desvios padrões para cada uma das respostas ao impulso.

Os resultados são apresentados nas figuras 2.1 e 2.2, que tentam replicar as figuras 1 e 2 do artigo.¹ As linhas pontilhadas em vermelho são os intervalos de confiança de dois desvios padrões calculados pelo bootstrap descrito acima (seguindo os autores). As linhas pretas tracejadas no terceiro gráficos são as IRF's teóricas calculadas com os parâmetros estimados por IRF matching.

Alguns comentários seguem. Tanto a dinâmica quanto os valores das IRF's são praticamente idênticos aos estimados por SW. Isto serve inclusive para as bandas do intervalo de confiança, o que indica que os erros padrões também ficaram semelhantes (eles serão importantes no IRF matching). Note também que as respostas ao impulso de inflação são truncadas em zero no primeiro período, mesmo embora isso não tenha sido imposto na identificação. O SVAR estimado não trunca as respostas no zero, mas geram outliers no primeiro período. Acredito que os autores plugaram zero no lugar do valor verdadeiro para que esses outliers não afetassem a estimação posterior. Fiz isso também aqui. Por fim, as IRF's teóricas ficam relativamente semelhantes às empíricas, com uma maior discrepância na resposta da inflação doméstica ao choque monetário.

¹Não entendi muito bem o que são as figuras da última linha no artigo. Como elas são irrelevantes para a estimação e toda a análise (os autores nem falam delas ao longo do paper), desconsidereei.

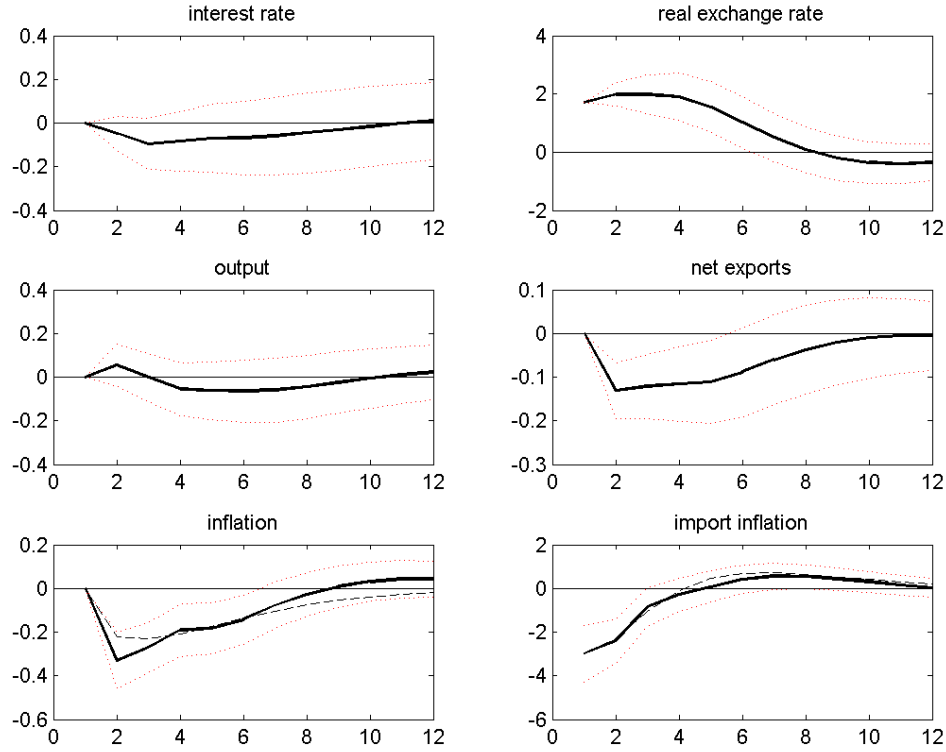
Figura 2.1: Respostas ao impulso de um choque monetário



3. IRF matching

Os códigos para esta parte estão no arquivo "main_prog.m", na parte de "IRF_matching". Os autores estimam os parâmetros de indexação e rigidez de preços fazendo um matching das IRF's teóricas e estimadas pelo SVAR para a inflação doméstica e de importados. Um choque monetário e um choque cambial são usados para gerar as respostas ao impulso. Vinte trimestres são usados na estimação.

Figura 2.2: Respostas ao impulso de um choque cambial



3.1 Método

Seja θ o vetor de parâmetros a ser estimado e $\hat{x}, x(\theta)$ as respostas ao impulso estimadas e teóricas, respectivamente. O método consiste em escolher um vetor de parâmetros θ que minimize a função perda

$$J(\theta) = [vec(\hat{x}) - vec(x(\theta))]W^{-1}[vec(\hat{x}) - vec(x(\theta))]$$

onde W é uma matriz diagonal cujas entradas são as variâncias de cada resposta ao impulso.

3.2 Cálculo da IRF teórica

A construção da IRF empírica foi descrita na seção anterior. A IRF teórica é obtida da solução do modelo pelo "gensys". A construção das matrizes de input para o gensys foi feita usando os recursos de

cálculo simbólico do matlab. A função "modelsims.m" define o sistema de equações linearizadas simbolicamente e chama a função "anal_deriv", que toma o jacobiano do sistema com relação às variáveis em t , $t + 1$, os choques exógenos e os erros expectationais para obter as matrizes g_1, g_0 , PI e PSI exigidas pelo programa. Para não precisar fazer esse processo de derivação simbólica durante todas as etapas da maximização, a função "model_func_sims" escreve um mfile que é outra função cujos inputs são os parâmetros do modelo e que, na sua sintaxe, já tem as matrizes do gensys obtidas nos passos anteriores. Com isso, a cada iteração o algoritmo de otimização só precisa preencher as matrizes com o novo guess para os parâmetros, em vez de calculá-las de novo.

3.3 Estratégia de otimização

Os autores não especificam no artigo que tipo de política monetária o BC segue e como os processos exógenos são gerados, porém isso é essencial para replicar os resultados do artigo. Por esse motivo, para tentar aproximar o máximo possível o meu mecanismo gerador de dados com o dos autores, adotei a seguinte estratégia. Primeiro, para a regra de política monetária, assumi que o BC adota uma regra de Taylor simples na inflação doméstica, como parece ser o caso das simulações realizadas no final do artigo. Além disso, assumi que os processos exógenos seguem um $AR(1)$, como também parece ser o caso nas simulações. Com o modelo completo, pluguei os parâmetros obtidos pelos autores e tentei fazer o matching das minhas IRF's com as IRF's da terceira linha da figura 1 do artigo (linhas tracejadas). Para realizar esse matching, ainda resta determinar: o tamanho do parâmetro de resposta da política monetária; o tamanho dos coeficientes autoregressivos nos processos exógenos e o tamanho do choque gerado no modelo teórico.

Para escolher essas quantias, fixei os parâmetros a serem estimados nos valores encontrados pelos autores e escolhi o tamanho do choque e coeficientes autoregressivos para aproximar o valor da minha função perda com o valor deles. Também fiz o mesmo variando o parâmetro de política monetária; o que ficou mais razoável foi $\phi = 1.5$ (resposta dos juros à inflação doméstica), que acabei fixando ao longo desse ajuste. Em seguida fiz uma análise gráfica direta e alterei mais um pouco essas quantias para tentar chegar às curvas da terceira linha da figura 1 do artigo. Mesmo fazendo isso, as curvas não ficaram idênticas. Em particular, as minhas trajetórias tendem a reverter para o steady-state(s.s.) mais rápido que as reportadas pelos autores (todas avaliadas nos parâmetros encontrados por eles).

Realizado esse matching, prossegui com o método de estimação da seção 3.1. Utilizei o algoritmo

de otimização condicionada do matlab, restringindo o valor dos parâmetros de indexação e rigidez no intervalo (0,1). Para verificar a sensibilidade das estimativas às condições iniciais, repeti o processo de otimização para um grid de 980 condições iniciais, coletando os parâmetros e valores da função perda em cada caso. Selecionei os parâmetros que levaram ao menor valor para a função perda como as estimativas finais (a menos de casos patológicos; ver a seção seguinte).

3.4 Estimativas

Os resultados da estimação são reportados na tabela 3.1, que procura replicar a tabela 1 do artigo. Os parâmetros de rigidez e indexação identificados através do choque monetário ficam próximos aos obtidos pelos autores (0.9,0.9, 0 e 0.45 em SW), embora o valor da função perda fique mais alto. Os três primeiros parâmetros identificados pelo choque cambial ficam bem próximos aos dos autores (0.72, 0.73 e 0), mas o parâmetro de indexação no setor externo fica bastante diferente (0.03 em SW). A função perda também ficou mais alta que a obtida pelos autores (14.0). Alguns comentários sobre a estimação.

Tabela 3.1: Estimativas dos parâmetros de indexação e rigidez de preços

	Choque Monetario	Choque Cambial
ξ_D	0.9018 (0.0884)	0.7325 (0.0279)
ξ_F	0.8806 (0.0136)	0.7379 (0.0001)
γ_D	0 -	0 -
γ_F	0.5365 (0.4020)	0.4273 (0.0016)
Perda	14.5	17.4
Prob.	0.75	0.43

ξ_j e γ_j são os parâmetros de rigidez e indexação de preços no setor j . Valores em parênteses são desvios-padrões obtidos através da raiz dos elementos da diagonal da hessiana no ótimo. Perda é o valor da função no ótimo e Prob. é o valor de sua acumulada em uma distribuição chi-quadrado com 19 graus de liberdade.

Primeiro, embora os resultados para política monetária fiquem mais parecidos, é importante ressaltar que as estimativas são muito instáveis: pequenas mudanças nas condições iniciais geram grandes variações nos parâmetros estimados. Em geral, as otimizações do grid de condições iniciais degeneram para soluções de canto em que os parâmetros de rigidez convergem para 1, a indexação doméstica para

zero e a externa varia entre 0.3 e 0.55. Contudo, essas soluções levam a funções perdas com um valor mais alto que a reportada na tabela, por isso foram descartadas.

Outras soluções levaram a um overfit das IRF's, em que todos os parâmetros ficam muito próximos de 1. Essas soluções muito provavelmente ocorrem pela incapacidade do modelo de gerar "hump-shape" e inércia nas IRF's que não através dos parâmetros de rigidez e indexação, por conta de sua estrutura simplificada que abstrai de fricções como hábitos no consumo, curvatura na função de produção, etc. Essas soluções também foram descartadas, mesmo embora algumas levassem (como esperado) a funções perdas bastante pequenas (inclusive menores que as de SW).

Segundo, em contraste com a estimação através do choque monetário, a estimação através do choque cambial se mostrou muito estável. Diferentes valores iniciais foram testados e o algoritmo de otimização convergiu para os parâmetros reportados em todas as situações. Apesar disso, não foi possível chegar ao mesmo parâmetro de indexação para o setor externo. Contudo, a estimativa apresenta uma medida de desvio padrão mais baixa que a dos autores e fica bem mais próxima das estimativas obtidas pelo choque monetário (aqui e o no artigo). Além disso, essa estimativa leva a um bom fit das IRF's teóricas e empíricas, como pode ser visto na figura 2.

Por último, uma dificuldade em replicar as estimativas dos autores e, principalmente, o valor da função perda, se deve à não especificação dos processos exógenos e política monetária no artigo. Mesmo usando os parâmetros obtidos pelos próprios autores e tendo chegado a resultados praticamente idênticos para o SVAR e para as simulações, não fui capaz de chegar aos valores da função perda obtida por eles. Muito provavelmente esta é a maior fonte de discrepância entre meus resultados e os de SW.

4. Simulações

As simulações das respostas ao impulso do modelo foram calculadas da mesma forma que o descrito na seção 3.2. Para poder comparar com o artigo, utilizei a parametrização dos autores, mesmo embora não tenha conseguido estimar exatamente os mesmos parâmetros de rigidez e indexação. Para gerar os resultados do modelo de preços flexíveis, fiz os parâmetros de rigidez próximos de zero. Os códigos estão no arquivo "simul.m". A política ótima foi obtida através de uma "simple rule" como proposto por Söderlind.

Três choques são introduzidos no modelo: choque de produtividade, de demanda externa e sobre a

taxa de câmbio. Para cada um deles, três cenários são considerados: política monetária ótima, regra de taylor na inflação doméstica e preços flexíveis.

Mais uma vez tive que ajustar o tamanho dos choques e o parâmetro de política monetária da regra de taylor ($\phi=10$ foi o melhor ajuste) para gerar resultados quantitativamente idênticos aos do paper. O qualitativo não é alterado com esses ajustes.

Os resultados das simulações usando o Gensys são apresentados nas figuras 4.1-4.3. As figuras reproduzem os painéis da figura 3 do artigo. O modelo também foi simulado no Dynare, mas como as dinâmicas são idênticas optei por omitir os gráficos. Se desejado, eles podem ser obtidos através dos arquivos "sw.mod", "sw_flex.mod" e "sw_opt.mod", na pasta "Dynare"(que vou compartilhar).

Figura 4.1: Resposta a um aumento de produtividade

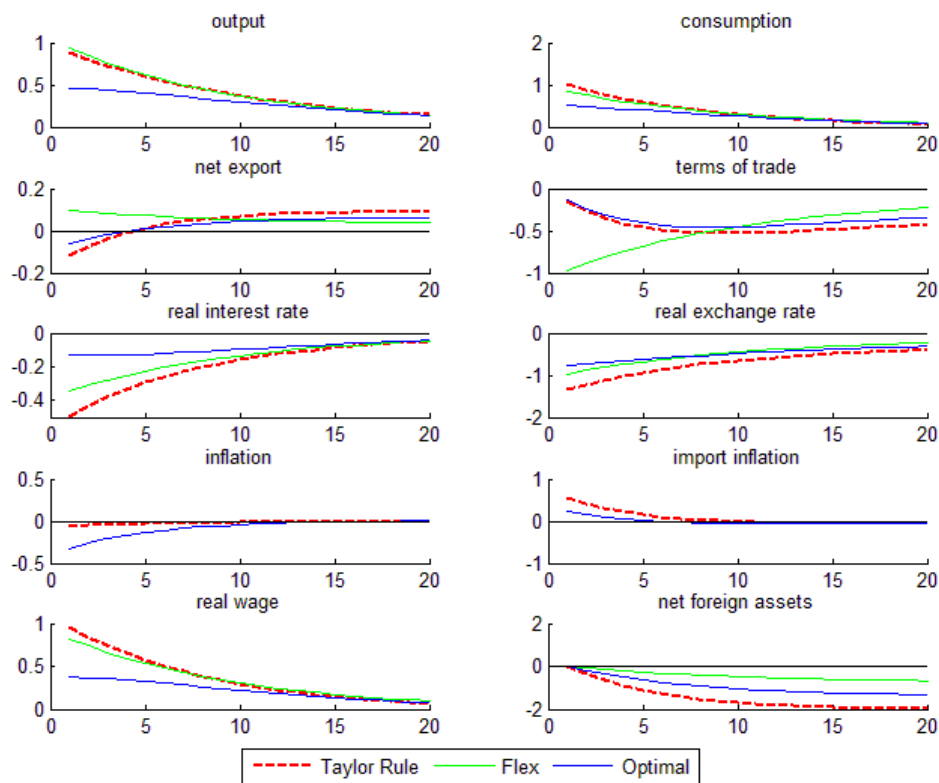


Figura 4.2: Resposta a um aumento da demanda externa

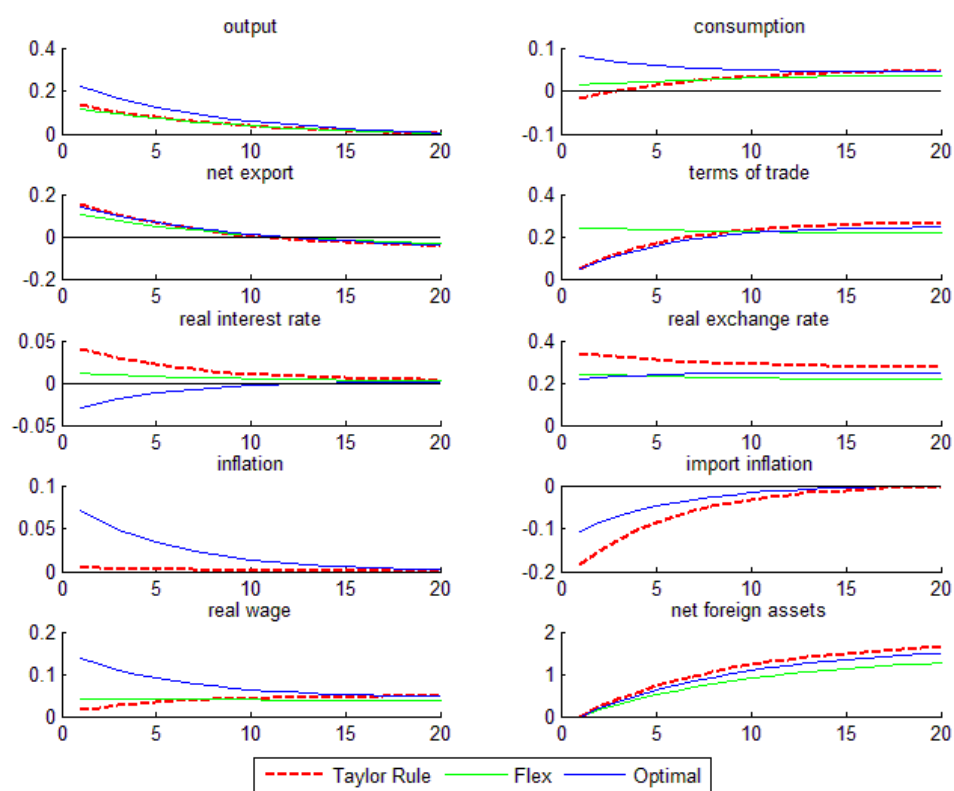
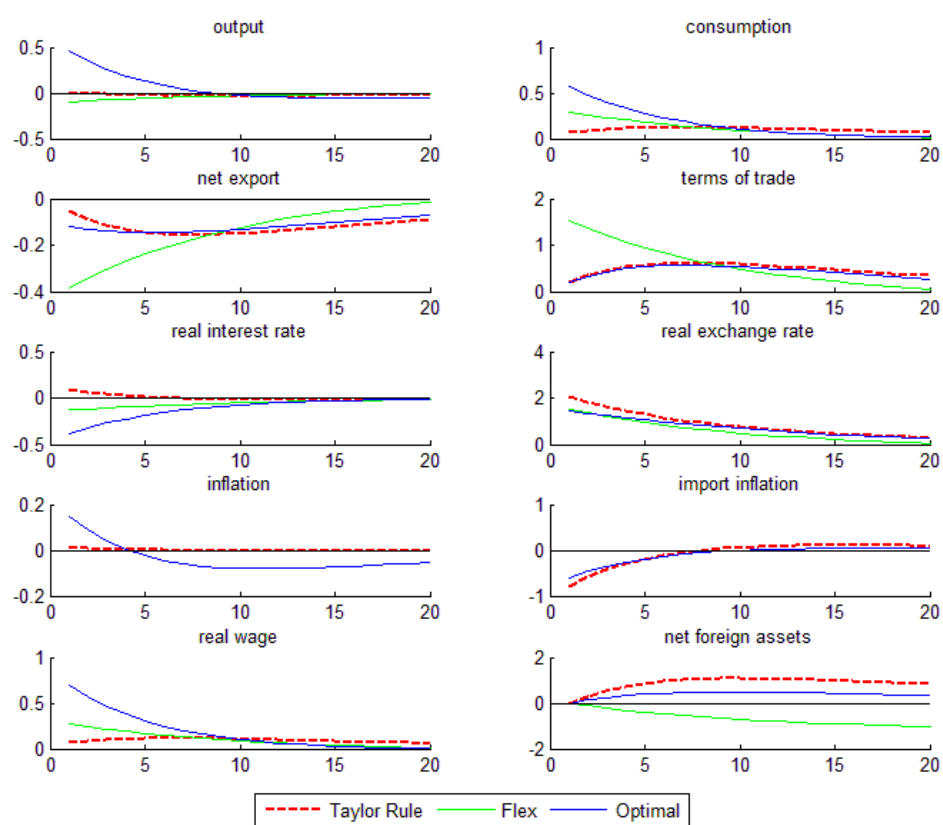


Figura 4.3: Resposta a uma queda no prêmio de risco



Parte IV

Estimação Bayesiana

Essa parte se dedica à estimação bayesiana dos coeficientes do modelo. Os códigos principais são "main_prog.m" e "mcmc.m" da seção de estimação bayesiana. Outros códigos também foram criados para realizar algumas das etapas abaixo e também estão no apêndice.

O método consiste em utilizar o teorema de Bayes para calcular a densidade dos parâmetros condicional aos dados observados. Sendo θ os parâmetros estimados e Y os dados observados, o teorema de Bayes nos diz que:

$$P(\theta|Y) = \frac{P(Y|\theta)\pi(\theta)}{P(Y)}$$

Onde $P(\theta|Y)$ é a distribuição posterior dos parâmetros, $P(Y|\theta)$ é a verossimilhança dos dados condicional aos parâmetros, $\pi(\theta)$ são as distribuições a priori dos parâmetros e $P(Y)$ a densidade marginal dos dados. Este último termo é intratável analiticamente e numericamente, o que impede a aplicação direta do teorema. Para contorná-lo, o método de Markov Chain Monte Carlo foi utilizado. Ele nos permite computar a distribuição posterior apenas como a razão da expressão acima em dois pontos distintos, dispensando o cálculo de $P(Y)$.

Diversas etapas foram realizadas antes da estimação das distribuições posteriores dos parâmetros. As seções seguintes descrevem cada uma delas.

5. Arcabouço da estimação

O maior desafio da estimação foi encontrar uma estrutura para o modelo em que simultaneamente: o maior número de series fossem utilizadas sem incorrer em singularidade estocástica; priors razoáveis para os parâmetros fossem adotadas e que o modelo continuasse identificado. Para atingir esses 3 objetivos, realizei um processo iterativo. Primeiro defini priors para os parâmetros a serem estimados com base na literatura. Segundo, modifiquei o modelo para ser capaz de usar seis séries de dados disponíveis. Terceiro, dadas as priors e a estrutura do modelo, verifiquei se era possível identificar todos os parâmetros. Para isso, utilizei o relatório de identificação do dynare. Quando os resultados de identificação se mostraram muito ruins, voltei novamente aos dois passos anteriores e também modifiquei o conjunto das variáveis observáveis. Ao conseguir uma combinação relativamente identificada, fixei os parâmetros do modelo para os quais a identificação era pior. As seções seguintes descrevem a versão final adotada para o arcabouço de estimação.

As seções seguintes descrevem as etapas desse processo.

5.1 Dados e Modelo estimado

Os dados usados são obtidos da mesma base que da replicação do artigo: são dados trimestrais para a Zona do Euro que vão de 1977.1-1999.4. As séries usadas foram: inflação de bens domésticos, importados e exportados; crescimento do PIB real; exportações líquidas e juros nominais. Note que o conjunto de variáveis é diferente do que foi usado na replicação do artigo. Fiz isso para tornar o modelo bem identificado. Em particular, não foi possível introduzir

O modelo original possui apenas três processos exógenos, mas há 6 séries disponíveis para a estimação. Para conseguir utilizá-las e não cair em um problema de singularidade estocástica, duas são as possibilidades: incorporar erros de mensuração ou mais processos exógenos ao modelo. A primeira via não levou a resultados satisfatórios de identificação dos parâmetros, por isso optei pela segunda, incorporando quatro novos choques: um choque de preferências, choques de mark-up no setor de bens importados e exportados e um choque monetário.¹

Além da introdução desses processos, permiti a separação dos parâmetros de rigidez e indexação

¹Não introduzi um choque de mark-up nos bens domésticos porque não seria possível distingui-lo estatisticamente de um choque de produtividade nesse modelo.

dos setores de bens importados e exportados (no artigo os setores compartilham o mesmo parâmetro). Também introduzi uma regra de Taylor mais completa, seguindo Adolfson et al. (2007).

Por fim, para uma melhor estimação da verossimilhança através do filtro de Kalman, reescrevi o sistema de equações linearizadas apenas com variáveis estacionárias.².

As equações estimadas são:

$$\hat{R}_t = \hat{R}_t^* + \Delta \hat{e}_{t+1} \quad (5.1)$$

$$\hat{C}_t = -\frac{1}{\sigma}(\hat{R}_t - \hat{\pi}_{t+1}) + \hat{C}_{t+1} + \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \bar{\Phi} \tilde{a}_{t+1} \quad (5.2)$$

$$\hat{\pi}_t = (1 - \alpha_C) \hat{\pi}_{D,t} + \alpha_C \hat{\pi}_{F,t} \quad (5.3)$$

$$\hat{\pi}_{D,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_D \beta} \hat{\pi}_{D,t+1} + \frac{\gamma_D}{1 + \gamma_D \beta} \hat{\pi}_{D,t-1} - \frac{(1 - \beta \xi_D)(1 - \xi_D)}{\xi_D(1 + \gamma_D \beta)} \times$$

$$\left[(1 - (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C) T T_t - (1 - \alpha_Y)(\omega \hat{Y}_t + \sigma \hat{C}_t) + (1 - \alpha_Y)(1 + \omega) \hat{v}_t \right] \quad (5.4)$$

$$\hat{\pi}_{X,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{X,t+1} + \frac{\gamma_F}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{X,t-1} - \frac{(1 - \beta \xi_F)(1 - \xi_F)}{\xi_F(1 + \gamma_F \beta)} (T T X_t - \mu_X) \quad (5.5)$$

$$\hat{\pi}_{F,t} = \frac{\beta}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{F,t+1} + \frac{\gamma_F}{1 + \gamma_F \beta} \hat{\pi}_{F,t-1} - \frac{(1 - \beta \xi_F)(1 - \xi_F)}{\xi_F(1 + \gamma_F \beta)} (T T F_t - \mu_F) \quad (5.6)$$

$$\hat{Y}_t = (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C) \hat{C}_t + [1 - (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C)] (C_t^* - \eta P_{D,t}^*) - \eta \alpha_C (1 - \alpha_Y)(1 - \alpha_C) T T_t \quad (5.7)$$

$$\tilde{a}_{t+1} = \bar{R} \bar{R} \left[\tilde{a}_t + \hat{Y}_t - \hat{C}_t - \left(\alpha_C + \frac{\alpha_Y}{1 - \alpha_Y} \right) T T X_t \right] \quad (5.8)$$

$$\hat{R}_t = \rho_r \hat{R}_{t-1} + (1 - \rho_r)(\phi \hat{\pi}_t + \phi_y \hat{Y}_t + \phi_{rer} RER_t) + \phi_{\Delta\pi}(\hat{\pi}_t - \hat{\pi}_{t-1}) + \phi_{\Delta y}(\hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1}) + \epsilon_m \quad (5.9)$$

$$T T_t = T T_{t-1} + \hat{\pi}_{D,t} - \hat{\pi}_{F,t} \quad (5.10)$$

$$T T F_t = T T_{t-1} + \hat{\pi}_{F,t} - \Delta \hat{e}_t \quad (5.11)$$

$$T T X_t = T T X_{t-1} + \hat{\pi}_{X,t} - \hat{\pi}_{D,t} + \Delta \hat{e}_t \quad (5.12)$$

$$RER_t = RER_{t-1} + \hat{\pi}_t + \Delta \hat{e}_t \quad (5.13)$$

$$\hat{P}_{D,t}^* = \hat{P}_{D,t-1}^* + \hat{\pi}_{x,t} \quad (5.14)$$

Todos os processos exógenos seguem um AR(1). Além disso, mais duas equações de observação são

²(1) O sistema poderia ter sido estimado com variáveis não estacionárias também, mas os resultados ficaram melhores fazendo dessa forma; (2) O preço praticado pelo setor de exportados, P_D^* , é uma variável estacionária no modelo

adicionadas para a estimação:

$$\Delta \hat{y}_t = \hat{y}_t - \hat{y}_{t-1} \quad (5.15)$$

$$\hat{X}L_t = \hat{y}_t - (1 - \alpha_c)(1 - \alpha_y)\hat{C}_t \quad (5.16)$$

$\hat{X}L$ são exportações líquidas.

5.2 Priors e parâmetros fixos

As tabelas 5.1 e 5.2 descrevem os parâmetros calibrados e as priors. Adotei priors para os parâmetros com base em Smets et al. (2005) e Adolfson et al. (2007), que estimam um modelo Novo Keynesiano com técnicas bayesianas usando praticamente a mesma base de dados. Além disso, parâmetros para os quais o modelo se mostrou pouco identificado ficaram fixos durante a estimação. Os valores foram escolhidos também com base nos artigos anteriores, a menos da probabilidade de sobrevivência. A identificação se mostrou bastante sensível a este parâmetro, e a melhor especificação foi com $\nu = 0.85$, abaixo do valor usado por SW no paper original (0.99).

Tabela 5.1: Parâmetros calibrados

Parametros	Descricao	Valor	Parametros	Descricao	Valor
σ	Taxa de desconto intertemporal	0.99	ρ_r	Persistencia na taxa de juros	0.8
α_y	Partic. importados intermediarios	0	ϕ_y	Resposta ao hiato	0.125
α_c	Partic. importados consumo	0.3	ρ_c	Choque de preferencias	0.9
ν	Probabilidade de sobrevivencia	0.85	ρ_{π_f}	Choque mark-up importados	0.9
ω	Elast. Trabalho	2			

6. Verossimilhança dos dados

6.1 Tratamento dos dados

As variáveis do modelo são todas estacionárias em torno de um steady-state zero. O mesmo não se observa nos dados. Para tornar os dados consistentes com o modelo, primeiro, um ajuste sazonal foi realizado usando o método X13 do Census US. Utilizei os pacotes já implementados no "R". O arquivo

Tabela 5.2: Priors

		Prior		
Parametro		tipo	media	d.p.
Rigidez domestica	ξ_D	Beta	0.675	0.05
Rigidez importados	ξ_F	Beta	0.5	0.1
Rigidez exportados	ξ_X	Beta	0.5	0.1
Indexacao domestica	γ_D	Beta	0.5	0.15
Indexacao importados	γ_F	Beta	0.5	0.15
Indexacao exportados	γ_X	Beta	0.5	0.15
Subst. Intertemporal	σ	Normal	1.5	0.375
Subst. domest e import.	η	Normal	1.5	0.5
Resposta a inflacao	ϕ	Normal	1.7	0.1
ao cresc. da inflacao	$\phi_{\Delta\pi}$	Normal	0.3	0.1
a taxa real de cambio	ϕ_{rer}	Normal	0	0.05
ao cresc. do produto	$\phi_{\Delta y}$	Normal	0.063	0.05
produtividade	ρ_v	Normal	0.9	0.1
premio de risco	ρ_{R^*}	Beta	0.9	0.1
demanda externa	ρ_{c^*}	Beta	0.9	0.1
choque monetario	ρ_m	Beta	0.9	0.1
mark-up exportados	ρ_{μ_x}	Beta	0.9	0.1
D.P. produtividade	σ_m	Inv.Gam	0.07	Inf
premio de risco	σ_R^*	Inv.Gam	0.05	Inf
demanda externa	σ_v	Inv.Gam	0.2	Inf
monetario	σ_{μ_F}	Inv.Gam	0.15	Inf
mark-up exportados	σ_{μ_X}	Inv.Gam	0.3	Inf
mark-up importados	σ_c^*	Inv.Gam	0.3	Inf
preferencias	σ_c	Inv.Gam	0.2	Inf

"seasonal_adjustment" tem os códigos. Após o ajuste sazonal, retirei a tendência das exportações líquidas aplicando um *one-sided HP-Filter*, como recomendado por Pfeifer (2013). Para as outras séries, só foi necessário realizar um demeaning.

6.2 Simulação e Filtro de Kalman

Para computar a verossimilhança dos dados, dois passos foram realizados: (1) Simulação do modelo e cálculo das leis de transição nos parâmetros propostos; (2) Representação do modelo no formato de espaço de estados e utilização do filtro de Kalman para computar a verossimilhança. As seções seguintes descrevem cada um deles.

6.2.1 Simulação

O modelo pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\Gamma_0 Z_t = \Gamma_1 Z_{t-1} + \Psi u_t + \Pi \eta_t$$

Onde Z_t é o vetor de variáveis endógenas, u_t são choques exógenos e η_t são erros expectacionais. Escrito dessa forma, podemos utilizar o algoritmo "gensys.m" fornecido por Chris Sims para a simulação e solução do sistema de expectativas racionais. Para isso, precisamos calcular cada uma das matrizes em termos dos parâmetros do modelo.

Para calcular as matrizes Γ_0, Γ_1, Ψ e Π , utilizei as ferramentas de cálculo simbólico do matlab. Definindo as variáveis simbólicas $x, x_f, epsx, eta_x, expx$ e $expx_f$ é possível escrever o sistema de eqs. da seção 5.1 de forma bem semelhante ao que é feito no Dynare. x e x_f são as endógenas do modelo t e $t+1$ e $expx$ e $expx_f$ suas expectativas; $epsx$ e eps_x são os choques exógenos e eta_x são os choques expectacionais. Definindo um sistema simbólico com uma equação para cada x e para cada $expx$ e derivando com respeito a $x, x_f, expx, expx_f, epsx$ e eta_x obtemos as matrizes Γ_1, Γ_0, Ψ e Π , respectivamente.¹

Por fim, para que não seja necessário realizar o procedimento de cálculo simbólico em cada iteração do MCMC, o código auxiliar "mode_func_sims" cria o script de uma função de matlab ("model_prog") que toma os parâmetros como inputs e apenas preenche as matrizes resultantes do procedimento anterior.

6.2.2 Filtro de Kalman

O "gensys" retorna o modelo anterior no formato:

$$Z_t = G_1 Z_{t-1} + M u_t$$

Do vetor Z_t , as seguintes variáveis são observadas na base de dados:

$$Y_t = [\Delta Y_t, \pi_{D,t}, \pi_{F,t}, \pi_{x,t}, XL_t, R_t]'$$

¹Na realidade não é preciso de uma equação para as expectativas, mas criando elas e as tratando como se fossem variáveis facilita o input. As equações de expectativas são as próprias variáveis um período à frente mais os erros expectacionais.

Podemos então particionar o sistema, escrevendo-o no formato de espaço de estados:

$$Z_t = G_1 Z_{t-1} + M u_t$$

$$Y_t = H Z_t$$

Onde H é uma matriz que seleciona os observáveis no vetor Z_t . A verossimilhança do sistema acima pode ser computada através do filtro de Kalman. Para isso, utilizei o código disponibilizado por Chris Sims, que toma as matrizes H , G_1 e M e condições iniciais Z_0 , Σ_0 para os estados e a matri de covariância como inputs e computa a log-verossimilhança para cada observação t . A verossimilhança dos dados é a soma das verossimilhanças individuais.

A inicialização do filtro foi feita com valores arbitrários para os estados e a matriz de covariâncias (zeros e uma identidade, respectivamente), pois foi inviável utilizar a matriz de variância de longo-prazo por conta do tempo computacional necessário. Por conta dessa arbitrariedade inicial, duas alternativas foram consideradas para calcular a verossimilhança: descartar uma parcela inicial das iterações do filtro ou simplesmente ignorar a arbitrariedade e computar a verossimilhança normalmente. Ao descartar 10% das observações iniciais, consegui obter valores maiores na maximização preliminar da posterior, mas tive imprevistos com os computadores da PUC: o computador que calculou as posteriors usando essa abordagem foi desligado e por erro meu os arquivos não foram salvos. Por esse motivo, a segunda opção acabou sendo escolhida.

7. Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

O procedimento de Markov Chain Monte Carlo consiste em gerar uma cadeia markov reversível, cuja distribuição estacionária é igual à distribuição desejada (no nosso caso, $p(\theta|Y)$). As seguintes etapas descrevem o método a ser aplicado no caso desse trabalho

1. Gere uma observação da cadeia de Markov através de: $\theta_t = \theta_{t-1} + e_t$, onde $e_t \sim N(0, s\Sigma)$.
2. Compute:¹

$$\alpha = \frac{p(Y|\theta_t)\pi(\theta_t)}{p(Y|\theta_{t-1})\pi(\theta_{t-1})}$$

¹No método original a razão também incluiria a razão entre os kernel's $\frac{P(\theta_{t-1}|\theta_t)}{P(\theta_t|\theta_{t-1})}$, mas como a cadeia de Markov escolhida é normal, logo, simétrica, essa razão é igual a 1.

3. Aceite θ_t como um novo ponto da posterior com probabilidade $\text{Min}(\alpha, 1)$. No nosso caso, sempre que o parâmetro proposto aumentar a verossimilhança, será aceito. Caso contrário, será aceito somente com probabilidade α , que será maior quanto mais verossímil for a posterior avaliada nesse parâmetro relativamente ao último que foi aceito.

Diversas etapas são necessárias para a aplicação do método. São elas: definir um método para calcular as densidades entrando na razão da etapa 2; definir condições iniciais x_0 e Σ_0 para a distribuição proposta; ajustar o valor do parâmetro s para atingir a proporção de aceites desejada e recalculer x_0 e Σ_0 para este novo valor de s e, por fim, marginalizar e analisar as distribuições de cada parâmetro do vetor θ . As seções seguintes se dedicam a descrevê-los.

7.1 Cálculo da razão α

Já descrevemos o método que usamos para calcular a densidade dos dados $p(Y|\theta)$ e as priors $\pi(\theta)$ assumidas, mas alguns cuidados adicionais devem ser tomados no processo.

Primeiro, assumimos a hipótese de que as distribuições à priori são independentes, o que nos permite obter $\log(\alpha)$ através do somatório das priors e da densidade dos dados.²

Segundo, note que a distribuição proposta no MCMC envolve todo o conjunto de números reais para os parâmetros, mesmo embora alguns não tomem valores nos reais. Uma forma pouco robusta de tratar essa discrepância no suporte é simplesmente usar o fato de que as priors tenderão a zerar esses valores e aplicar o método normalmente. O problema disso é que as simulações do Gensys podem ficar comprometidas. Novamente, uma opção seria limar esses valores colocando $-\text{Inf}$ para a verossimilhança nesses pontos. O problema disso é que perde-se eficiência na estimação da posterior, pois a distribuição proposta na verdade está definida em um suporte diferente dos Reais e isso deveria ser levado em conta no cômputo da razão de rejeição.

Uma solução simples é realizar uma transformação de variáveis. Continuamos gerando o processo de Markov no espaço dos reais como na etapa 1, mas para um estado auxiliar x_t , que será transformado

²Para fins computacionais é melhor trabalhar com os logs e somas em vez das razões e produtos.

nos parâmetros do modelo através de algum mapping. No nosso caso, temos as seguintes relações:

$$\theta = \begin{cases} e^x & \text{para suporte: } \theta > 0 \\ \frac{e^x}{1+e^x} & \text{para suporte: } 0 < \theta < 1 \\ x & \text{para suporte: } 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por conta dessa transformação de variáveis, a cadeia de Markov estará aproximando para a densidade das novas variáveis x , e não dos parâmetros originais. Por esse motivo, precisamos ajustar nossas priors por um jacobiano do mapping entre x e θ . Como as distribuições a priori são assumidas como independentes, podemos calcular apenas a derivada de cada transformação individual, em vez de uma matriz de transformação jacobiana. As priors de cada estado auxiliar x ficam dadas por:

$$\pi_x(x) = \pi(h(x))J(x) = \begin{cases} \pi(e^x)e^x & \text{para suporte: } \theta > 0 \\ \pi\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\frac{e^x}{(1+e^x)^2} & \text{para suporte: } 0 < \theta < 1 \\ \pi(x), & \text{para suporte: } \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (7.1)$$

Onde $\pi(\cdot)$ são as priors originais definidas na seção 5.2. Com isso, a razão de rejeição α é calculada através de:

$$\alpha = \frac{p(Y|h(x_t))\pi(h(x_t))J(x_t)}{p(Y|h(x_{t-1}))\pi(h(x_{t-1}))J(x_{t-1})} = \frac{p(Y|h(x_t))\pi_x(x_t)}{p(Y|h(x_{t-1}))\pi_x(x_{t-1})}$$

As funções *state2param* e *logprior_{MCMC}* fazem as devidas transformações.

Por fim, devemos lidar com casos em que há indeterminação ou equilíbrio instável no modelo. Seguindo An and Schorfheide (2007), para esses casos atribuímos verossimilhança -Inf. A identificação desses equilíbrios foi feita através da variável *eu* do gensys.

7.2 Condições iniciais da cadeia de Markov

Há pelo menos duas formas de encontrar condições iniciais para a cadeia de Markov do MCMC. A primeira delas é obtendo uma estimativa preliminar da moda e covariância da posterior maximizando $P(Y|h(x))\pi_x(x)$ (repare que escrevi em termos do estado auxiliar x , que será a variável para a qual obteremos a posterior através do MCMC). A moda é o vetor x que maximiza essa função e a matriz de covariância é o negativo do inverso da hessiana dessa função avaliada na moda.

Uma outra forma é realizar um processo iterativo, iniciando o algoritmo com condições iniciais ar-

bitrarias (por exemplo, a média e covariância implicadas pelas priors) e calcular as novas condições iniciais como a moda e covariância da estimativa preliminar da posterior resultante.

As duas opções foram realizadas. Na otimização, utilizei o algoritmo `csminwel` do Chris Sims tomando como condições iniciais a média e covariância implicadas pelas priors.

No segundo caso, utilizei como condições iniciais arbitrárias a média e uma matriz diagonal com as variâncias dos estados x implicados pelas priors sobre θ na diagonal principal. Para obter as médias e variâncias do estado auxiliar x , gerei 1.000.000 de parâmetros das priors, apliquei o inverso das transformações da seção anterior para obter os estados e calculei com base na amostra gerada.

Pelo Dynare, tive que computar apenas o segundo caso (i.e., usando `mode_compute=6`), pois o programa não conseguiu maximizar a posterior (reclamou de problemas na Hessiana).

Os resultados do MCMC utilizando as condições iniciais implicadas pela otimização ficaram melhores em uma primeira estimativa da posterior com 500.000 de draws. Por este motivo (e por falta de tempo), gerei resultados finais somente para este caso.

7.3 Calibração da proporção de aceites

O último passo antes de calcular a posterior final é calibrar a matriz de variância da posterior Σ e a escala s para obter uma razão de aceites razoáveis durante o algoritmo de MCMC. A literatura trabalha com algo entre 0.2 e 0.4. Neste trabalho, calibrei os parâmetros para que os aceites ficassem entre 23% e 28%. Para isso, realizei o seguinte procedimento

Etapa 1: com as condições iniciais calculadas como na seção anterior e uma condição inicial para a escala s (1 em geral) uma nova repetição do MCMC é feita para 20.000 draws. Entre os draws, a moda da posterior é atualizada caso o vetor x_t leve a uma verossimilhança mais alta que todas as obtidas até então (incluindo dos passos anteriores). Ao término dos 20.000 draws, verifico se a proporção de aceites está na região desejada. Se estiver, passo para a próxima etapa. Caso contrário, aumento o tamanho da escala s caso o algoritmo esteja aceitando demais e reduzo caso esteja aceitando muito pouco, repetindo os 20.000 draws tomando como condições iniciais a última moda calculada. Esse processo é repetido até a convergência.

A etapa seguinte só foi realizada para o caso em que a moda e covariância não foram obtidas do problema de maximização preliminar. O Dynare também fez assim.

Etapa 2: Na segunda etapa, gero mais uma cadeia de 20.000 draws tomando como condições iniciais

a última moda e matriz de variância calculada e a escala s da etapa 1. Aqui também a moda é atualizada caso surja um estado com posterior mais alta que todas de até então. Ao término do MCMC, atualizo a matriz de covariância descartando 40% dos draws e volto à etapa 1 para calcular uma nova escala s com essa nova matriz de covariância e a última moda calculada.

Esse processo é repetido três vezes. Se ao final das três vezes a proporção de aceites no último passo não cair na região desejada, repito mais três vezes.

7.4 Posterior final

Após todas essas etapas, são feitas mais três repetições do MCMC começando de pontos diferentes (a última moda calculada mais um choque $\epsilon \sim N(0, s\Sigma)$), cada uma com 500.000 draws, tomando como condições iniciais a escala da seção anterior e a última matriz de covariância calculada. Em todos os casos, foram descartados 50% dos draws para amenizar o impacto das priors e condições iniciais nas posteriors.

7.5 Dynare

No Dynare, a estimação foi feita usando a opção *mode_compute* = 6, que realiza as estimações sem maximizar a verossimilhança inicialmente e usa o método iterativo descrito nas seções anteriores para calcular a moda, a proporção de aceites e a matriz de covariância da posterior. Utilizei essa opção porque o Dynare não conseguiu maximizar diretamente a posterior. Aqui gerei três blocos com 1.000.000 de draws.

8. Resultados

Os resultados aqui se referem ao caso: sem a queima inicial de observações no filtro de Kalman, usando a moda e covariância iniciais obtidas na maximização preliminar da posterior e combinando as três cadeias de 500.000 draws (descartando 50% de cada uma). A proporção de aceite na simulações finais ficou em torno de 25% (menor que a do Dynare, 30%).

A tabela 8.1 apresenta estatísticas descritivas para as posteriors obtidas pelo Dynare e pelo proce-

dimento explicado nas seções anteriores. A figura 8.1 apresenta o histograma da distribuição dos parâmetros obtida com o Matlab e contém também as modas e percentis 5 e 95 do Dynare (linhas em verde e círculos amarelos). A figura 8.2 mostra a distribuição posterior do Dynare e a figura 8.3 compara cada uma com as priors. Por fim, a figura 8.4 apresenta os diagnósticos de convergência do Dynare.

Em geral as distribuições ficam semelhantes, assim como as estatísticas. Exceções entre os parâmetros estruturais do modelo: o parâmetro de indexação doméstica e a resposta da PM à taxa real de câmbio. No primeiro caso, o algoritmo de matlab parece ser pouco eficiente (pelo menos para 500.000 draws) em identificar o parâmetro: note que a distribuição é bem semelhante à prior. No segundo caso, a distribuição se distancia da prior, mas as respostas são relativamente mais baixas que as implicadas pelo Dynare (1% no meu caso, 8% no Dynare). Ainda assim, vale notar que o diagnóstico de convergência do Dynare não apresenta um padrão favorável (note que há um leve trend positivo para os 3 momentos, em especial o terceiro).

Entre os parâmetros exógenos há mais divergência. Em particular, a variância do choque de preferências obtida pelo código de matlab apresenta bimodalidade, sendo uma das modas próxima à do Dynare e outra concentrada em torno da prior. Talvez isso se deva à convergência do algoritmo (só fiz 500.000 draws no matlab), mas somente com um teste formal é possível identificar isso, o que exigiria novas cadeias (as que eu fiz parecem estar muito próximas, mas é provável que isso se deva ao tamanho dos choques que eu dei para variar as condições iniciais).

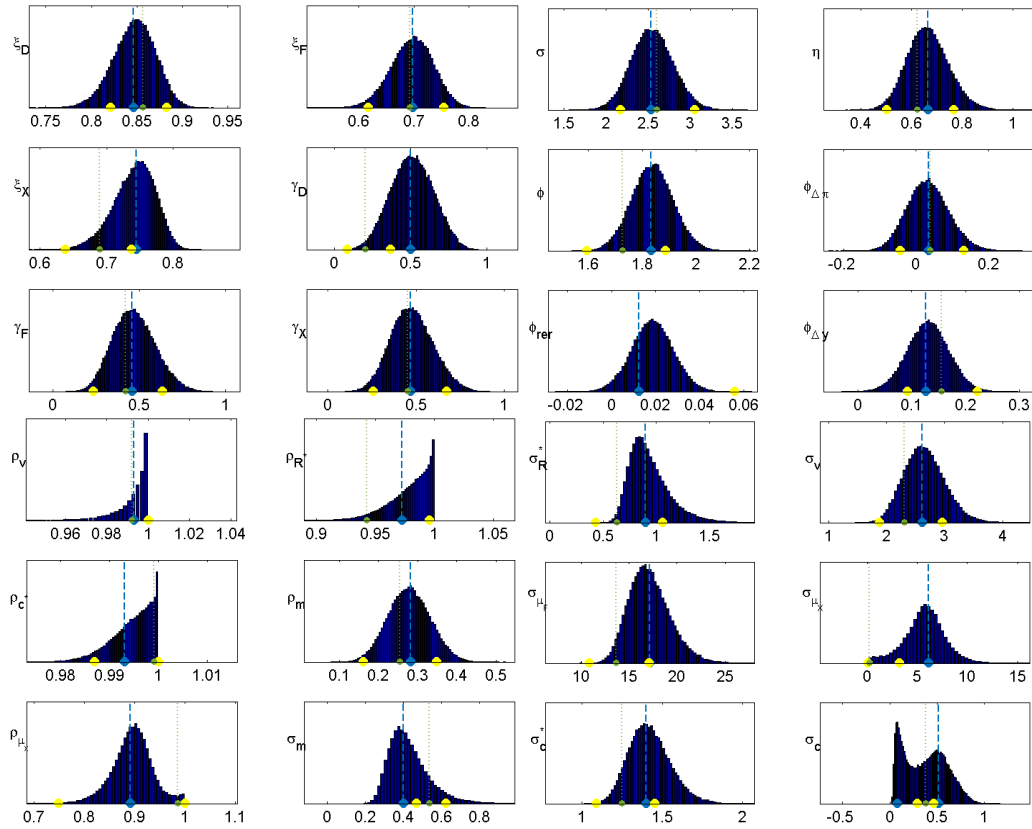
Outro parâmetro cuja discrepância é mais acentuada é o parâmetro de persistência do choque de mark-up externo (ρ_{μ_x}). Mas neste caso, note que os resultados do Dynare são bastante duvidosos: a distribuição e os diagnósticos de convergência são muito pouco bem comportados. Entre os restantes ainda há algumas discrepâncias, mas no geral os valores e distribuições ficam semelhantes (cuidado com as escalas dos gráficos, elas são um pouco enganosas).

Dois observações finais que julgo relevante. Primeiro, note que mesmo o Dynare tem dificuldade de obter boas distribuições para todos os parâmetros (mesmo com 3 cadeias de 1KK de draws). Lembrando que esse modelo foi alterado para que a estimação pudesse ser feita e sérios problemas de identificação surgiram por conta disso. Somente para ilustrar, o modelo se tornava ou não identificado com pequenas mudanças na taxa de sobrevivência ! Além disso, as priors embora construídas com dados parecidos, foram obtidas de modelos bastante mais completos que esse e com estrutura diferente. Apesar do relatório do Dynare indicar que o modelo é identificado, isso não garante que o modelo seja BEM

identificado (e com efeito, durante todo o processo de simulação o Dynare relatou problemas de singularidade na matriz hessiana) . Esse pode ser um dos motivos pelos quais haja problemas nas estimativas dos choques que foram incluídos no modelo. Para os parâmetros estruturais, esses problemas parecem bem menos intensos.

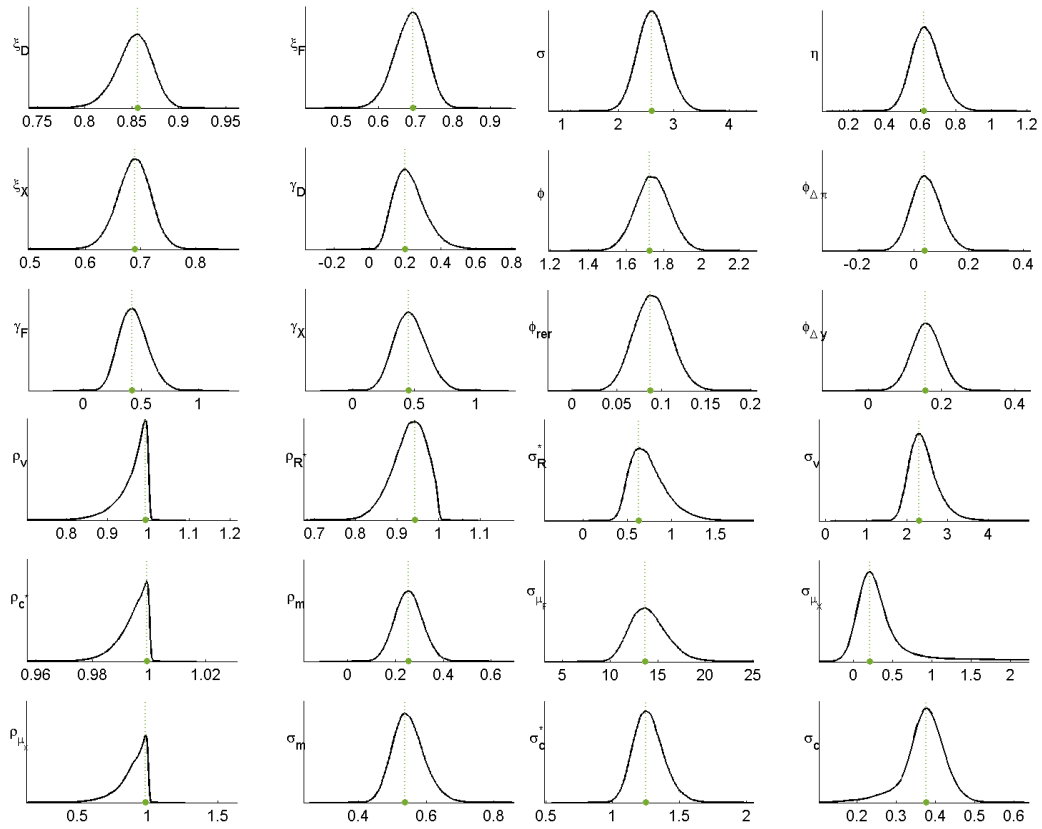
Segundo, o algoritmo de matlab difere em algumas dimensões do Dynare. Somente entre as que eu sei: o Dynare inicializa o KF com a matriz de variância de LP (não achei uma opção equivalente a algo que eu fiz) e não foi capaz de maximizar a função de verossimilhança, então usou o método iterativo para obter a moda e matriz de variância iniciais (mais uma vez, o problema foi singularidade da matriz Hessiana; no meu caso isso não ocorreu durante a maximização).

Figura 8.1: Posteriors Matlab



Histogramas das distribuições obtidas com o Matlab. Linhas em azul são as modas de cada distribuição, linhas em verde e pontos em amarelo as modas e percentis das respectivas distribuições obtidas no Dynare.

Figura 8.2: Posteriors Dynare



Histogramas das distribuições obtidas com o Matlab. Linhas em azul são as modas de cada distribuição, linhas em verde e pontos em amarelo as modas e percentis das respectivas distribuições obtidas no Dynare.

Figura 8.3: Prior x Posteriors Dynare

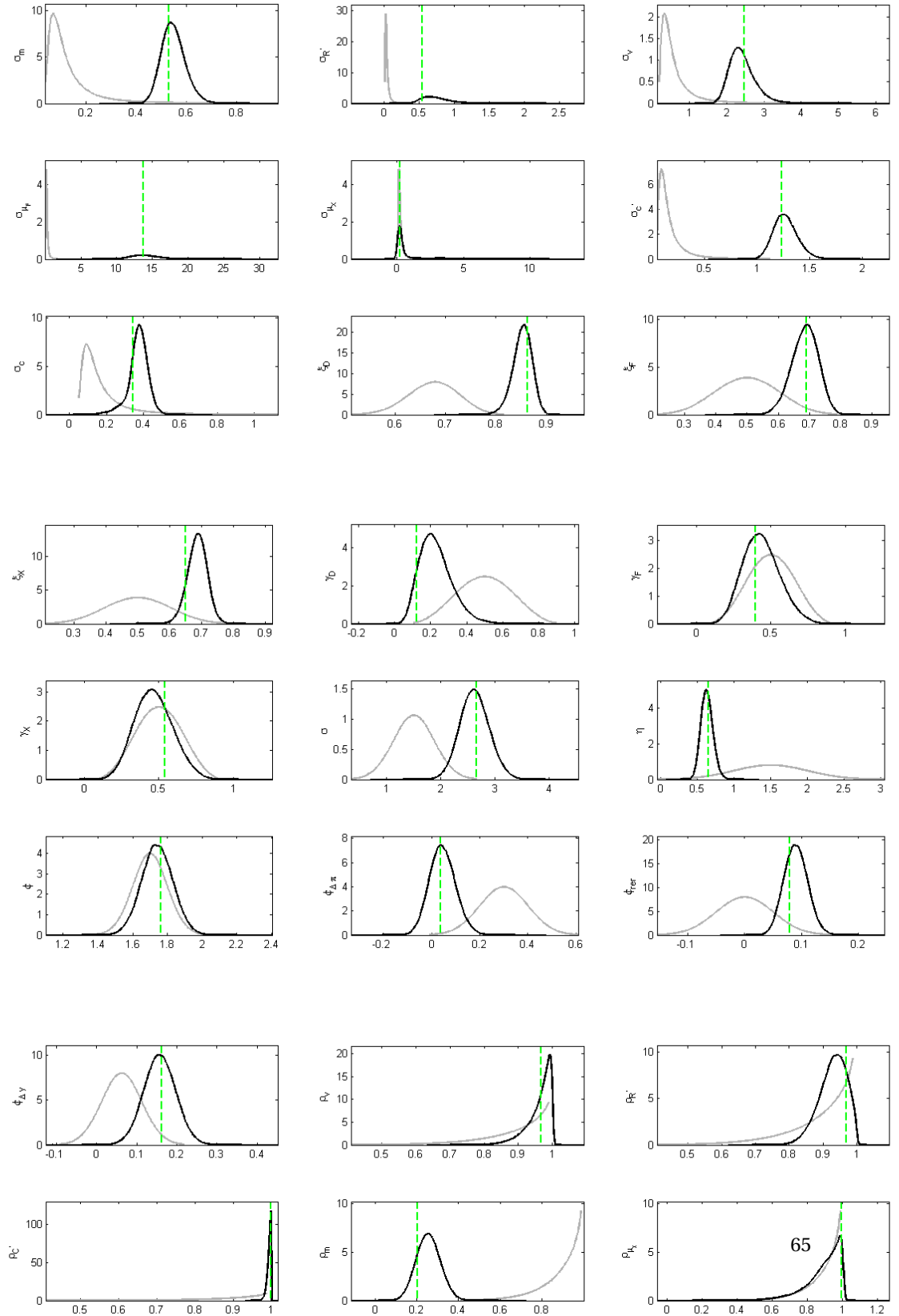
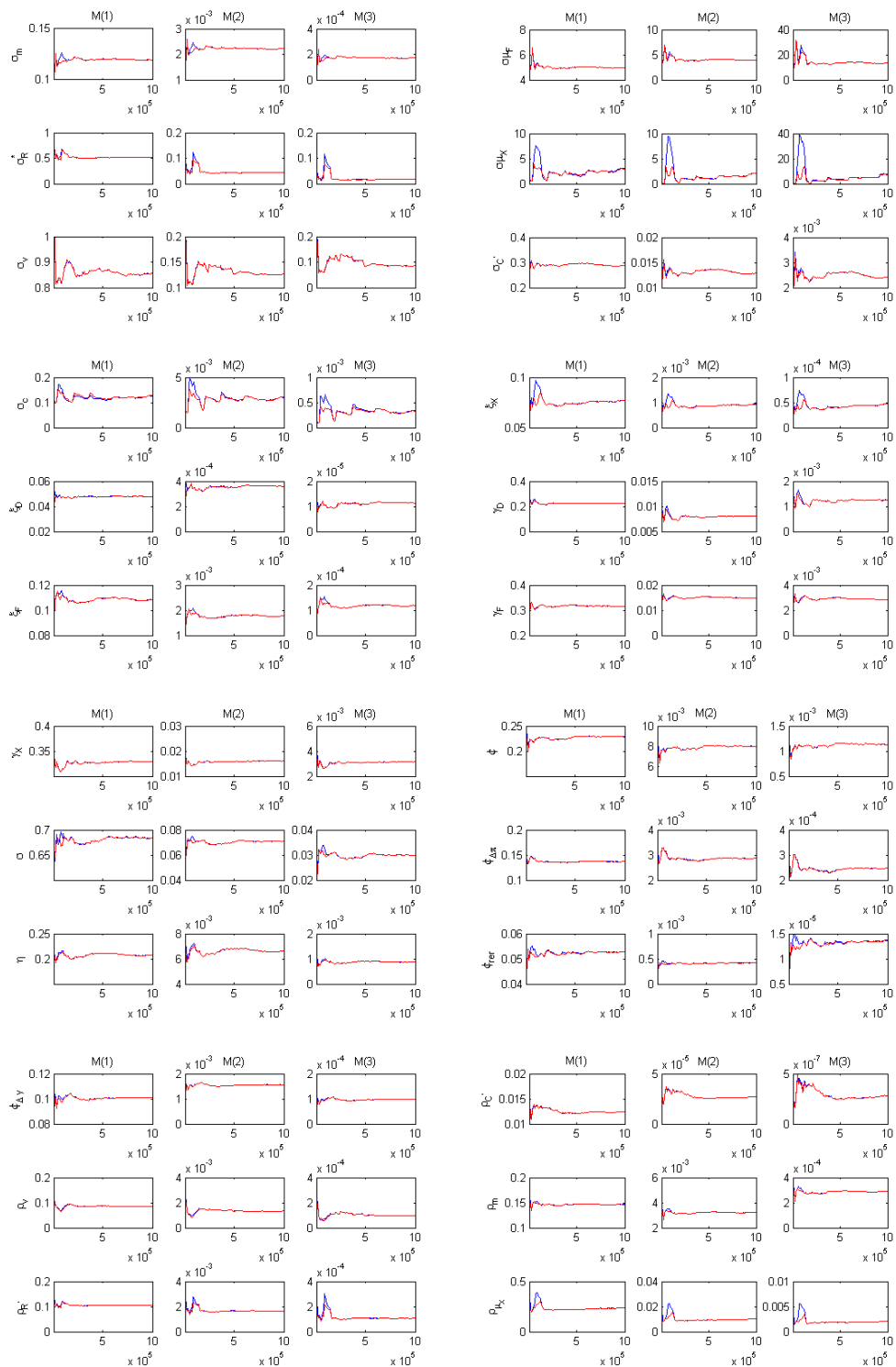


Figura 8.4: Convergencia Dynare



Relatorios de convergencia do Dynare. Cada linha representa um parametro e cada coluna um momento da distribuicao posterior. Idealmente, as linhas vermelhas e azuis devem estar proximas e vermelha estavel (sem trend)

Tabela 8.1: Posteriors

		Posterior				Dynare			
Parametro		Moda	Media	p5	p95	Moda	Media	p5	p95
Rigidez domestica	ξ_D	0.846	0.847	0.807	0.883	0.863	0.852	0.821	0.883
Rigidez importados	ξ_F	0.697	0.697	0.631	0.758	0.690	0.685	0.616	0.754
Rigidez exportados	ξ_X	0.745	0.741	0.685	0.789	0.652	0.687	0.637	0.737
Indexacao domestica	γ_D	0.500	0.509	0.281	0.738	0.124	0.229	0.085	0.366
Indexacao importados	γ_F	0.460	0.471	0.280	0.682	0.395	0.434	0.234	0.632
Indexacao exportados	γ_X	0.470	0.477	0.288	0.682	0.543	0.464	0.256	0.672
Subst. Intertemporal	σ	2.535	2.551	2.153	2.968	2.661	2.618	2.173	3.050
Subst. domest e import.	η	0.665	0.665	0.536	0.806	0.656	0.633	0.501	0.766
Resposta a inflacao	ϕ	1.833	1.839	1.711	1.969	1.761	1.740	1.594	1.888
ao cresc. da inflacao	$\phi_{\Delta\pi}$	0.035	0.033	-0.059	0.131	0.037	0.044	-0.043	0.132
a taxa real de cambio	ϕ_{rer}	0.013	0.019	0.003	0.034	0.079	0.090	0.056	0.123
ao cresc. do produto	$\phi_{\Delta y}$	0.126	0.130	0.066	0.193	0.163	0.157	0.091	0.221
produtividade	ρ_v	0.993	0.992	0.973	1.000	0.967	0.960	0.909	1.000
premio de risco	ρ_{R^*}	0.972	0.979	0.944	0.999	0.969	0.928	0.870	0.996
demanda externa	ρ_{c^*}	0.993	0.995	0.986	1.000	0.998	0.994	0.987	1.000
choque monetario	ρ_m	0.281	0.278	0.191	0.368	0.203	0.255	0.161	0.348
mark-up exportados	ρ_{μ_x}	0.891	0.894	0.824	0.961	0.996	0.887	0.748	1.000
D.P. produtividade	σ_m	0.403	0.432	0.292	0.637	0.530	0.547	0.469	0.622
premio de risco	σ_R^*	0.898	0.939	0.693	1.314	0.548	0.743	0.428	1.062
demanda externa	σ_v	2.612	2.655	2.101	3.276	2.480	2.419	1.867	2.954
monetario	σ_{μ_F}	17.147	17.157	13.957	21.028	13.747	14.053	10.834	17.103
mark-up exportados	σ_{μ_X}	6.149	5.739	2.042	9.042	0.240	0.893	0.060	3.233
mark-up importados	σ_c^*	1.401	1.421	1.225	1.648	1.240	1.270	1.087	1.453
preferencias	σ_c	0.515	0.367	0.058	0.733	0.344	0.370	0.287	0.460

Parte V

Códigos

A. Códigos da estimação bayesiana

Abaixo os principais códigos usados na estimação bayesiana. Na ordem: código principal; códigos para computar as matrizes do gensys analiticamente e auxiliares; códigos para realizar a transformação dos parâmetros e calcular os jacobianos; código para o cálculo do filtro de kalman e, por fim a função que realiza o MCMC.

Obs.:

(1) A função `mcmc_busca_tun` é praticamente idêntica à função `mcmc`, só possui algumas linhas a mais para printar e salvar, por isso omiti.

(2) Alguns valores nos códigos não devem estar iguais aos que usei no final, pois fiquei mudando enquanto gerava os resultados.

A.1 `main_prog.m`

```
1 clear all
2 close all
3
4 %%*****
5 % Resolve o modelo analiticamente
6 %*****
7 %parametros
8 [param0,set] = parameters_est;
9 %priors=prior(param0) %priors em formato structure (mudei para array para agilizar no loop do mcmc, entao essa funcao ficou meio
    inutil
```

```

10
11 %Define o modelo e calcula as matrizes do gensys analiticamente
12 model = modelsims(param0,set);
13 %dimensao do modelo
14 neq=length(model.f);
15 %Gerar uma funcao que retorna as matrizes do Gensys
16 %essa linha criara um file ".m" com as matrizes simbolicas que
17 %serao usadas na solucao do modelo (nome do arquivo criado: model_prog)
18 %aumentar eficiencia: nao precisa computar as derivadas em toda iteracao
19 model_func_sims(model);
20
21 %Transforma em matriz os parametros fixos
22 set = struct2array(set);
23
24 %*****
25 %% Selecao das observaveis e matriz de selecao do KF
26 %*****
27 variaveis={'pidd' 'pif' 'dy' 'xl' 'pix' 'r'};
28
29 %selecinona as observaveis
30 [dados txt raw]=xlsread('data.xlsx','data_77','B1:I119');
31 for i=1:length(variaveis);
32     idx(i)=find(strcmp(txt,variaveis{i}));
33 end
34 dados=dados(:,[idx]);
35
36 %Matriz de selecao
37 for i=1:length(variaveis)
38     idx(i)=find(model.Y==variaveis{i});
39 end
40 H=zeros(length(idx),neq);
41 for i=1:length(idx);
42     H(i,idx(i))=1;
43 end
44 clear idx;
45
46 %% Kalman filter
47
48 warm=0; %quantidade de dados da amostra que serao descartados para computar a verossimilhanca dos dados
49 shat=zeros(neq,1); %chute inicial dos estados
50 sig=eye(neq); %chute inicial da matriz de cov.
51
52 %*****
53 %*****MAXIMIZACAO DA VEROSSIMILHANCA*****
54 %*****
55
56 %%Calcula valores iniciais para os estados com base nas priors
57 %%(Lembrando: os estados sao transformacoes dos parametros !)
58 sig_mode_mcmc;
59
60 %media dos states
61 load('mean_prior');
62 %
63 % %funcao objetivo
64 obj=@(STATE) -(kf_ll(dados',state2param(STATE),set,warm,H,sig,shat)+logpriorMCMC(STATE,state2param(STATE)))
65 %
66 %hessiana no ponto inicial
67 H0=numhessian(obj,mean0);
68 save('H0','H0');
69 load('H0');

```

```

70
71 %minimizacao codigo do SIMS
72 [fh, x0_LL, gh, sigma0_LL, itct]=csminwel(obj,mean0,H0^(-1),[],1e-9,100000);
73 %salva os resultados da maximizacao por ver
74
75 maxLL.fh=fh; maxLL.x0=x0_LL; maxLL.sigma0=sigma0_LL; maxLL.itct=itct;
76 save('max_LL','max_LL');
77 mode_LL=state2param(x0_LL);
78 save('mode_LL','mode_LL')
79
80 %% %*****
81 %*****
82 %*****MARKOV CHAIN MONTE CARLO*****
83 %*****
84 %*****
85
86 %%Calcula valores iniciais para os estados com base nas priors
87 %%(Lembrando: os estados sao transformacoes dos parametros !)
88 sig_mode_mcmc;
89
90
91 %Load dos valores iniciais (baseados nas priors)
92 load('sigma_prior') ; %chute inicial para a matriz de variancia da cadeia de markov do MCMC
93 load('mode_prior') ; %ponto inicial para a cadeia de markov do MCMC
94 load('mean_prior');
95
96 %%define a funcao que calcula a densidade dos dados
97 ll_kf=@(PAR) kf_ll(dados',PAR,set,warn,H,sig,shat);
98
99 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
100 %% Parte 1: Estimacao preliminar da moda e covariancia da posterior
101 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
102 %
103 % %DESATIVAR ESSE PASSO SE FOR USAR OS VALORES OBTIDOS NA MAXIMIZACAO
104 %
105 tun=1;
106 ndraws=5000;
107 nburn=0.4*ndraws;
108 sigma0=diag(sigma_prior)
109 x0=mean_prior;
110 %profile on
111 [x accept_rate mode_state]=mcmc(ndraws,x0,sigma0,tun,ll_kf);
112 %profile viewer
113
114 %Burna e calcula moda e covariancia
115 x=x(nburn:end,:);
116 sigma0=cov(x);
117 x0=mode_state;
118
119 for i=1:size(x,1);
120 param(i,:)= state2param(x(i,:));
121 end
122
123 save('sigma0','sigma0');save('x0','x0');
124
125 %salva em um arquivo diferente para comparar depois com as obtidas na LL
126 sigma0_MC=sigma0; x0_MC=x0;
127 save('sigma0_MC','sigma0');save('x0_MC','x0');
128 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
129 %% Parte 2: Tuning para o acceptance ratio e matriz de variancia

```

```

130 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
131
132 %Usa moda e variancia obtidas pelo processo de monte carlo
133
134 %      load('sigma0','sigma0');load('x0','x0');%load('sig','sig');load('shat','shat');
135 %
136 % %Usa moda e variancia obtidas da maximizacao da verossimilhanca
137 % % Note que o csminvel MINIMIZA. Entao o inverso da hessiana no problema de
138 % % maximizacao teorico eh a propria matriz H que sai do csminvel.
139
140     load('sigma0_LL'); load('x0_LL');
141     sigma0=sigma0_LL; x0=x0_LL;
142
143 %inicializacao
144     tun=1;
145     tun_1=1;
146     desired_rate=0.3;
147     l_b=desired_rate-0.07; u_b=desired_rate+0.07; %bounds para a aceitacao desejada
148     max_attemp=100; %nro maximo de tentativas de tunnar
149     maxiter=1; %nro de repeticao do processo inteiro: vai achar "maxiter" tunning parameters otimos
150     jump=2;
151     cunha=1000;
152
153     for j=1:maxiter;
154         %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
155         %%2.1: Tunning
156         %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
157         ndraws=20000;
158         for i=1:max_attemp
159             [x accept_rate x0]=mcmc_busca_tun(ndraws,x0,sigma0,tun_,ll_kf,l_b,u_b);
160
161             if (accept_rate)>u_b % se aceita demais
162                 if tun_>=tun %testa se o tun anterior era menor que o atual. Se for, precisamos entao aumentar mais ainda o tun
163                     tun=tun_;
164                     tun_=tun_*jump;
165                 else %caso o tun anterior ja fosse alto, pegamos a media
166                     tun_=(tun_+tun)/2;
167                 end
168             elseif (accept_rate)<l_b %se aceita pouco
169                 if tun_<=tun %testa se o tun atual e menor que o anterior. Se for e mesmo assim aceitamos demais, reduz mais ainda o tun
170                     tun=tun_;
171                     tun_=tun_/jump;
172                 else
173                     tun_=(tun_+tun)/2;
174                 end
175             else %se caiu na regioa desejada,
176                 best_tun=tun_;
177                 tun=tun_;
178                 disp(strcat('busca ',num2str(j),' do parametro de tunning convergiu: acceptance rate= ',num2str(accept_rate)));
179                 break
180             end
181
182             %Verifica se o novo tun eh melhor que o anterior, guarda e atualiza(se nao convergir alguma coisa ele pega)
183             if abs(accept_rate-desired_rate)<cunha;
184                 cunha=abs(accept_rate-desired_rate);
185                 best_tun=tun;
186             end
187         i
188     end
189     save('best_tun','best_tun'); save('x0','x0');

```



```

190
191 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
192 %%2.2: Matriz de covariancia da proposed
193 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
194 ndraws=20000;
195 nburn=0.4*ndraws;
196
197 [x accept_rate x0]=mcmc(ndraws,x0,sigma0,best_tun,ll_kf);
198
199 %atualiza covariancia
200 x=x(nburn:end,:);
201 sigma0=cov(x);
202 save('sigma0');
203 %verifica se ao final do ultimo passo o tuning esta realmente no intervalo
204 if j==maxiter
205     if l_b<accept_rate & accept_rate<u_b
206         disp(strcat('busca do parametro de tuning convergiu: acceptance ratio= ',num2str(accept_rate)));
207     else
208         prompt = strcat('Accept_rate=',num2str(accept_rate),' final fora do intervalo desejado. Deseja continuar ? 1 para sim','Se
                sim, quantas iteracoes do processo inteiro ?');
209         dlg_title = 'Input';
210         num_lines = 1;
211         def = {'1','3'};
212         answer = inputdlg(prompt,dlg_title,num_lines,def);
213         if eval(answer{1})==1;
214             j=1; maxiter=eval(answer{2});
215         end
216     end
217 end
218 j
219 end
220
221 save('sigma0','sigma0');save('x0','x0');
222 save('best_tun','best_tun');
223
224 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
225 %% Parte 3: Posterior final
226 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
227 load('sigma0','sigma0');load('x0','x0');
228 load('best_tun');
229
230 disp('Calculando a posterior final');
231
232 %Posterior final: roda nblocks MCMC's com cadeias de markov comecando em
233 %pontos diferentes. Um choque normal e adicionado a moda calculada nos
234 %passos anteriores para alterar as condicoes iniciais.
235
236 ndraws=1000000;
237 nblocks=3;
238
239 X=zeros(ndraws,size(sigma0,1),nblocks);
240 ACCCEPT_RATE=zeros(nblocks,1);
241 SIGMA=zeros(size(sigma0,1),size(sigma0,2),nblocks);
242 mode_posteriors=zeros(length(x0),1,nblocks);
243 for j=1:nblocks
244     load('x0','x0');
245     x0=x0+mvnrnd(zeros(length(x0),1),best_tun*sigma0,1);
246     %profile on
247     [x accep_rate x0_]=mcmc(ndraws,x0,sigma0,best_tun,ll_kf);
248     %profile viewer

```

```

249
250 X(:, :, j) = x; SIGMA(:, :, j) = sigma0; ACCEPT_RATE(j) = accept_rate;
251 mode_posteriors(:, :, j) = x0_;
252 j
253 end
254
255 MCMC_LL.X = X; MCMC_LL.SIGMA = SIGMA; MCMC_LL.ACCEPT_RATE = ACCEPT_RATE; MCMC_LL.mode_posteriors = mode_posteriors;
256
257 save('!MCMC_LL', 'MCMC_LL');

```

A.2 parameters_est.m

```

1 function [param, set] = parameters()
2 set.bet = 0.99;
3 set.alphay = 0;
4 set.alphac = 0.3;
5 set.v = .85;
6 set.rrbar = 1/set.bet;
7 set.phibar = 1 - set.v * set.bet;
8 set.omeg = 2;
9 set.rhor = 0.8;
10 set.phiy = 0.125;
11 set.rhoc = 0.9;
12 set.rhopif = 0.9;
13
14 %% Parametros estimados
15 %chutes iniciais sao as medias das priors (ver priorarray para saber as dist)
16
17 %parametros de rigidez
18 param.xid = 0.675; %domestic rigidity
19 param.xif = 0.5; %import rigidity
20 param.xix = 0.5; %export rigidity
21
22 %Parametros de indexacao
23 param.gammad = 0.5; %domestic indexation
24 param.gammaf = 0.5; %import
25 param.gammax = 0.5; %export
26
27 %Parametros comportamentais
28 param.sigm = 1.5; %elast. intertemp. subst.
29 param.eta = 1.5; %elast. subst. import x domestic goods
30
31 %Regra de taylor
32 param.phi = 1.7; %inflation response TR
33 param.rdpi = 0.3; %inflation growth response TR
34 param.phirer = 0; %real exchange rate response TR
35 param.rdy = 0.0625; %gdp growth response TR
36
37 %Autoregressivos dos choques
38 param.rhoveta = 0.9; %productivity shock persistence
39 param.rhorstar = 0.9; %exchange rate shock persistence
40 param.rhocstar = 0.9; %external demand
41 param.rhom = 0.9; %monetary shock
42 param.rhopix = 0.9; %mark-up export sector
43
44 %Desvios padroes dos choques

```

```

45
46 %inv gamma mean x (mean = 3*mode=scale) and 2 degree freedom (shape) (or sd = infinity)
47 param.sdm=0.45/3;      %moetary shock
48 param.sdrstar=0.15/3;  %exchange rate shock
49 param.sdvst=2.1/3;     %product. shock
50 param.sdpif=0.9/3;     %mark-up import
51 param.sdpix=0.9/3;     %mark-up export
52 param.sdcstar=0.6/3;   %foreign demand shock
53 param.sdc=0.6/3;      %preference shock
54
55 end

```

A.3 modelsims.m

```

1 function [mod] = model(param,set)
2
3 %parametros simbolicos
4 param_list = fieldnames(param);
5 syms(param_list{1:end});
6 for j = 1:length(param_list)
7     eval(['PARAM(j) = ',param_list{j} ,','']);
8 end
9 PARAM
10
11 set_list = fieldnames(set);
12 syms(set_list{1:end});
13 for j = 1:length(set_list)
14     eval(['SET(j) = ',set_list{j} ,','']);
15 end
16 %Variaveis simbolicas
17 %Descr.: x_f eh a variavel no periodo seguinte, x_l_j eh a o lag j da variavel
18 %epsx sao os choques , etax sao os erros expectationais
19 %expx eh o valor esperado em t de x
20 %expx_f eh o forward do valor esperado em t de x. So precisa pra manter as matrizes do Gensys quadradas (todas as derivadas vao ser
    zero)
21 syms pdstar r de c a y pidd pif pix pi veta rer xl cstar rstar choquem dy dpi tt ttx ttf choquepif choquepix choquec dc ...
22     pidd_l pif_l pix_l pi_l r_l y_l c_l tt_l ttf_l ttx_l rer_l pdstar_l;
23
24 syms pdstar_f r_f de_f c_f a_f y_f pidd_f pif_f pix_f pi_f veta_f rer_f xl_f cstar_f rstar_f choquem_f dy_f dpi_f tt_f ttx_f ttf_f
    choquepif_f choquepix_f choquec_f dc_f ...
25     pidd_l_f pif_l_f pix_l_f pi_l_f r_l_f y_l_f c_l_f tt_l_f ttf_l_f ttx_l_f rer_l_f pdstar_l_f;
26
27 syms expde exppi expc expidd expdif exppix;
28 syms expde_f exppi_f expc_f expidd_f expdif_f exppix_f
29
30 syms etade etapi etac etapidd etapif etapix;
31 syms epsvet epscstar epsrstar epsmm epspif epspix epsc;
32
33
34 % Vetores de variaveis, choques expectationais e choques exogenos
35 Y = [pdstar r de c a y pidd pif pix pi veta rer xl cstar rstar choquem dy dpi tt ttx ttf choquepif choquepix choquec dc ...
36     pidd_l pif_l pix_l r_l y_l c_l pi_l tt_l ttf_l ttx_l rer_l pdstar_l expde exppi expc expidd expdif exppix] ; %variaveis em t
37
38 Yf = [pdstar_f r_f de_f c_f a_f y_f pidd_f pif_f pix_f pi_f veta_f rer_f xl_f cstar_f rstar_f choquem_f dy_f dpi_f tt_f ttx_f ttf_f
    choquepif_f choquepix_f choquec_f dc_f ...

```

```

39     pidd_l_f pif_l_f pix_l_f r_l_f y_l_f c_l_f pi_l_f tt_l_f ttf_l_f ttx_l_f rer_l_f pdstar_l_f expde_f exppi_f expc_f exppidd_f
        exppif_f exppix_f] ; %t+1
40
41 et = [etade etapi etac etapidd etapif etapix]; %choques expectacionais
42
43 eps = [epsvet epscstar epsrstar epsmm epspif epspix epscl]; %choques exogenos
44
45 %Eqs. do modelo LINEARIZADAS
46 syms f
47 f(length(f)+1)=r-rstar_f-expde; %UIP
48
49 f(length(f)+1)=-c-1/sigm*(r-exppi)+expc+(1-v)/v*phibar*a_f+choquec_f;
50
51 f(length(f)+1)=-pi+(1-alphac)*pidd+alphac*pif;
52
53 f(length(f)+1)=-pidd+bet/(1+gammad*bet)*expidd+gammad/(1+gammad*bet)*pidd_l-(1-bet*xid)*(1-xid)/(xid*(1+gammad*bet))*...
54     ((1-(1-alphay)*(1-alphac))*(tt)-(1-alphay)*(omeg*y+sigm*c)+(1-alphay)*(1+omeg)*veta_f);
55
56 f(length(f)+1)=-pif+bet/(1+gammaf*bet)*expdif+gammaf/(1+gammaf*bet)*pif_l-(1-bet*xif)*(1-xif)/(xif*(1+gammaf*bet))*(ttf-choquepif_f);
57
58 f(length(f)+1)=-pix+bet/(1+gammax*bet)*expdix+gammax/(1+gammax*bet)*pix_l-(1-bet*xix)*(1-xix)/(xix*(1+gammax*bet))*(ttx-choquepix_f);
59
60 f(length(f)+1)=-y*(1-alphay)*(1-alphac)*c+(1-(1-alphay)*(1-alphac))*(cstar_f-eta*pdstar)-eta*alphac*(1-alphay)*(1-alphac)*(tt);
61
62 f(length(f)+1)=-a_f+rrbar*(a+y-c+(alphac+alphay/(1-alphay))*(-ttx));
63
64 f(length(f)+1)=-r+rhor*r_l+(1-rhor)*(phi*pi+phiy*y+phirer*rer)+rdpi*dpi+rdy*dy+choquem_f; %Regra de Taylor
65
66 %processos exogenos
67 f(length(f)+1)=-veta_f+rhoveta*veta+sdvet*epsvet;
68 f(length(f)+1)=-cstar_f+rhocstar*cstar+sdscstar*epscstar;
69 f(length(f)+1)=-rstar_f+rhorstar*rstar+sdrstar*epsrstar;
70 f(length(f)+1)=-choquem_f+rhom*choquem+sdm*epsmm;
71 f(length(f)+1)=-choquepif_f+rhopif*choquepif+sdpif*epspif;
72 f(length(f)+1)=-choquepix_f+rhopix*choquepix+sdpix*epspix;
73 f(length(f)+1)=-choquec_f+rhoc*choquec+sdsc*epsc;
74 %law of movement
75 f(length(f)+1)=-rer+r_l+pi-de;
76 f(length(f)+1)=-tt+tt_l+pidd-pif;
77 f(length(f)+1)=-ttf+ttf_l+pif-de;
78 f(length(f)+1)=-ttx+ttx_l+pix-pidd+de;
79 f(length(f)+1)=-pdstar+pdstar_l+pix;
80
81 %ident
82 f(length(f)+1)=-xl+y-(1-alphac)*(1-alphay)*c;
83 f(length(f)+1)=-dpi+pi-pi_l;
84 f(length(f)+1)=-dy+y-y_l;
85 f(length(f)+1)=-dc+c-c_l;
86
87 %Equacoes de lag
88 f(length(f)+1)=-pidd_l_f+pidd;
89 f(length(f)+1)=-pif_l_f+pif;
90 f(length(f)+1)=-pix_l_f+pix;
91 f(length(f)+1)=-pi_l_f+pi;
92 f(length(f)+1)=-r_l_f+r;
93 f(length(f)+1)=-y_l_f+y;
94 f(length(f)+1)=-c_l_f+c;
95 f(length(f)+1)=-tt_l_f+tt;
96 f(length(f)+1)=-ttx_l_f+ttx;
97 f(length(f)+1)=-ttf_l_f+ttf;

```

```

98 f(length(f)+1)=-rer_l_f+rer;
99 f(length(f)+1)=-pdstar_l_f+pdstar;
100
101
102 %eqs expectationais
103 f(length(f)+1)=-expipi+pi_f+etapi;
104 f(length(f)+1)=-expidd+pidd_f+etapidd;
105 f(length(f)+1)=-expdif+pif_f+etapif;
106 f(length(f)+1)=-expdix+pix_f+etapix;
107 f(length(f)+1)=-expc+c_f+etac;
108 f(length(f)+1)=-expde+de_f+etade;
109
110 %remove colunas zeradas da matriz de eqs.
111 f(1)=0;
112 f(all(isAlways(f==0),2),:)= [];
113 f(:,all(isAlways(f==0),1))= [];
114
115 mod.Y = Y;
116 mod.Yf = Yf;
117 mod.eps = eps;
118 mod.et = et;
119 mod.PARAM = PARAM;
120 mod.param = param;
121 mod.SET = SET;
122 mod.set = set;
123
124 mod.f = f;
125 mod = anal_deriv_sims(mod);

```

A.4 anal_deriv_sims.m

```

1 function mod=anal_deriv(mod);
2 %Calcula as derivadas analiticas do modelo LINEARIZADO para computar as
3 %matrizes do GENSYS
4 %Inputs: estrutura mod contendo o modelo com as equacoes escritas no
5 %formato g0*y(t+1)=g1y(t) + PSI eps + PI eta
6 %f eh o sistema de eqs.
7 %eps sao choques exogenos
8 %eta sao erros expectationais
9
10 y = mod.Y;
11 yf = mod.Yf;
12 eps = mod.eps;
13 et = mod.et;
14 f = mod.f;
15 %Matrizes g0 e g1 PI e PSI do GENSYS
16
17 g1 = jacobian(f,y);
18 g0 = jacobian(f,yf);
19 PI = jacobian(f,et);
20 PSI = jacobian(f,eps);
21
22 mod.g1 = g1;
23 mod.g0 = g0;
24 mod.PI = PI;
25 mod.PSI = PSI;

```

```
26 end
```

A.5 model_func_sims.m

```
1 function model_func(model)
2 f = fopen('model_prog.m', 'w');
3
4 %chama os parametros do modelo
5 param_list = char(model.PARAM);
6 param_list = param_list(10:end-3);
7 str = ['function [g0 g1 PSI PI] = model_prog(param, set)'];
8 fprintf(f, '%s\n', str);
9 fprintf(f, '%s\n', '');
10
11 %parametro para string
12 str_sv{1} = ['function ' str(1:end-1)];
13 str = '%parametro para string';
14 str_sv{2} = str;
15 fprintf(f, '%s\n', str);
16 for j = 1:length(model.PARAM)
17     str = [char(model.PARAM(j)) ' = param(' num2str(j), ')'];
18     str_sv{j+2} = str;
19     fprintf(f, '%s\n', str);
20 end
21 fprintf(f, '%s\n', '');
22
23
24 %set para string
25 str = '%set para string';
26 str_sv{j+3} = str;
27 fprintf(f, '%s\n', str);
28 for j = 1:length(model.SET)
29     str = [char(model.SET(j)) ' = set(' num2str(j), ')'];
30     str_sv{j+length(model.PARAM)+4} = str;
31     fprintf(f, '%s\n', str);
32 end
33 fprintf(f, '%s\n', '');
34
35 %*****
36 %g0
37 %*****
38 str = ['g0 = ' symmat_print(model.g0) ''];
39 fprintf(f, '%s\n', str);
40
41 %*****
42 %g1
43 %*****
44 str = ['g1 = ' symmat_print(model.g1) ''];
45 fprintf(f, '%s\n', str);
46
47 %*****
48 %PSI
49 %*****
50 str = ['PSI = ' symmat_print(model.PSI) ''];
51 fprintf(f, '%s\n', str);
52
```

```

53 %*****
54 %PI
55 %*****
56 str = ['PI = ' symmat_print(model.PI) ''];
57 fprintf(f, '%s\n', str);
58
59
60 fclose(f);
61
62 %*****
63 % Transforma em matriz do matlab
64 %*****
65 function str = symmat_print(x)
66
67 str = char(x);
68 str = str(8:end-1);
69
70 row_idx = findstr(str, '],');
71 for j = 1:length(row_idx)
72     str(row_idx(j):row_idx(j)+1)=']';
73 end
74
75 %*****
76 %troca old por new_str
77 %*****
78 function update_param(old, new_str)
79
80 new = [old, '_tmp'];
81
82 f_old = fopen([old, '.m'], 'r');
83 f_new = fopen(new, 'w');
84
85 l = '';
86 j = 1;
87 while ~strcmp('%START_ADD', l) && j < 300
88     l = fgetl(f_old);
89     fprintf(f_new, '%s\n', l);
90     j = j+1;
91 end
92 if j == 300
93     error('Too many lines have passed.');
```

```

113     l = fgetl(f_old);
114     fprintf(f_new,'%s',l);
115     j = j+1;
116 end
117 if j == 500
118     error('Too many lines have passed.');
```

```

119 end
```

```

120
```

```

121 fclose(f_old);
```

```

122 fclose(f_new);
```

```

123 eval(['!mv ', new ' ' old '.m']);
```

A.6 sig_mode_mcmc.m

```

1
2 %Esse codigo gera uma estimativa inicial para as variancias e moda
3 %dos estados do MCMC pq nao podemos usar os da prior diretamente pois
4 %os estados da cadeia de markov sao transf. dos parametros originais
5
6 %A relacao entre os parametros do modelo e os estados da cadeia de markov
7 %eh dada por:
8 %theta e o parametro; x e o state
9 %Para theta>0: theta=exp(x)
10 %Para 0<theta<1: theta=exp(x)/(1+exp(x))
11
12 %Portanto, a transformacao inversa para obter os estados eh dada por:
13 % para theta>0: x=log(theta)
14 % para 0<theta<1: x = log (theta/(1-theta))
15
16 %% Calculo das variancias e modas
17 %Obs.: criei uma funcao que calcula a moda pq a do matlab eh uma merda
18 sigma_prior=zeros(24,1);
19 mode_prior=zeros(24,1);
20 mean_prior=zeros(24,1);
21
22 %rigidez domestica
23 x=betarnd(58.5563,28.1937,1000000,1); %beta media 0.675 sd 0.05
24 x=log(x./(1-x));
25 sigma_prior(1)=var(x);
26 mode_prior(1)=moda(x);
27 mean_prior(1)=mean(x);
28
29 %rigidez importados e exportados
30 x=betarnd(12,12,1000000,1); %beta media 0.5 sd 0.1
31 x=log(x./(1-x));
32 sigma_prior(2:3)=var(x);
33 mode_prior(2:3)=moda(x);
34 mean_prior(2:3)=mean(x);
35
36 %indexacoes
37 x=betarnd(5.05556,5.05556,1000000,1); %beta media 0.5 sd 0.15
38 x=log(x./(1-x));
39 sigma_prior(4:6)=var(x);
40 mode_prior(4:6)=moda(x);
41 mean_prior(4:6)=mean(x);
42
```



```

43 %estado e parametro sao normais(x,sig^2)
44 sigma_prior(7)=0.375^2; %elast. subst. intertemporal
45 mode_prior(7)=1.5;
46 mean_prior(7)=1.5;
47
48 sigma_prior(8)=0.5^2; %elast. subst. importados exportados
49 mode_prior(8)=1.5;
50 mean_prior(8)=1.5;
51
52 %parametros da regra de taylor
53 sigma_prior(9)=0.1^2; %inflation response
54 mode_prior(9)=1.7;
55 mean_prior(9)=1.7;
56
57 sigma_prior(10)=0.1^2; %inflation growth response
58 mode_prior(10)=0.3;
59 mean_prior(10)=0.3;
60
61 sigma_prior(11)=0.05^2; %rer response
62 mode_prior(11)=0;
63 mean_prior(11)=0;
64
65 sigma_prior(12)=0.05^2; %gdp growth response
66 mode_prior(12)=0.0625;
67 mean_prior(12)=0.0625;
68
69 %parametros autoregressivos dos processos exogenos
70 x=betarnd(7.2,0.8,1000000,1); %beta media 0.9 sd 0.1
71 x=log(x./(1-x));
72 sigma_prior(13:17)=var(x);
73 mode_prior(13:17)=moda(x);
74 mean_prior(13:17)=mean(x);
75
76 %desvio padrao dos choques exogenos
77 %epsm
78 x=1./gamrnd(2,1/((2-1)*0.15),1000000,1); % invgamma media=0.15 e shape=degrees freedom=2
79 x=log(x);
80 sigma_prior(18)=var(x);
81 mode_prior(18)=moda(x);
82 mean_prior(18)=mean(x);
83
84 %epsrstar
85 x=1./gamrnd(2,1/((2-1)*0.05),1000000,1); % invgamma media=0.05 e shape=degrees freedom=2
86 x=log(x);
87 sigma_prior(19)=var(x);
88 mode_prior(19)=moda(x);
89 mean_prior(19)=mean(x);
90
91 %epsveta
92 x=1./gamrnd(2,1/((2-1)*0.7),1000000,1); % invgamma media=0.7 e shape=degrees freedom=2
93 x=log(x);
94 sigma_prior(20)=var(x);
95 mode_prior(20)=moda(x);
96 mean_prior(20)=mean(x);
97
98 %epspif e epspix
99 x=1./gamrnd(2,1/((2-1)*0.3),1000000,1); % invgamma media=0.3 e shape=degrees freedom=2
100 x=log(x);
101 sigma_prior(21:22)=var(x);
102 mode_prior(21:22)=moda(x);

```

```

103 mean_prior(21:22)=mean(x);
104
105 %epscstar e epsc
106 x=1./gamrnd(2,1/((2-1)*0.2),1000000,1); % invgamma media=0.2 e shape=degrees freedom=2
107 x=log(x);
108 sigma_prior(23:24)=var(x);
109 mode_prior(23:24)=moda(x);
110 mean_prior(23:24)=mean(x);
111
112
113 save('sigma_prior','sigma_prior')
114 save('mode_prior','mode_prior')
115 save('mean_prior','mean_prior')

```

A.7 state2param.m

```

1 function state2param = state2param(state)
2 %Essa funcao transforma os estados saindo da cadeia de markov no MCMC de
3 %volta nos parametros do modelo
4
5 %input: estados da cadeia de markov
6 %output: parametros do modelo associados
7
8 %% Transformacoes
9 %Os estados no MCMC sao draws de uma normal, mas param nao tera
10 %necessariamente o mesmo suporte que o estado
11 %Solucao: gera os estados de uma transformacao dos parametros e retransforma o
12 %estado de volta pro parametro
13
14 %Seja theta o parametro do modelo e x o estado sorteado no MCMC
15 %Duas transformacoes sao feitas: t1 e t2.
16
17 %t1 garante que parametro sorteado no MCMC sao positivos: theta=exp(x)
18 %t2 garante que seja entre 0 e 1: theta=exp(x)/(1+exp(x))
19
20 state2param=zeros(length(state),1)+NaN;
21 t1=@(x) exp(x);
22 t2=@(x) exp(x)./(1+exp(x));
23 %cont=@(x) sum(isnan(x))
24 %% Calculo dos parametros
25 state2param(1)=t2(state(1)); %rigidez domestica
26 state2param(2)=t2(state(2)); %rigidez importados
27 state2param(3)=t2(state(3)); %rigidez exportados
28
29 state2param(4)=t2(state(4)); %indexacao domestica
30 state2param(5)=t2(state(5)); %indexacao importados
31 state2param(6)=t2(state(6)); %indexacao exportados
32
33 state2param(7)=state(7); %elast. subst intertemp.
34 state2param(8)=state(8); %elast. subst. importados x domesticos
35
36 %parametros da regra de taylor
37 state2param(9)=state(9); %politica monetaria
38 state2param(10)=state(10); %parametro do cresc. da iflacao na TR
39 state2param(11)=state(11); %parametro do cambio na TR
40 state2param(12)=state(12); %parametro do cresc. pib na TR

```

```

41
42 %parametros autoregressivos dos processos exogenos
43 state2param(13:17)=t2(state(13:17));
44
45 %desvio padrao dos choques exogenos
46 %Obs.: para a ivngamma temos beta=(alpha-1)*media,
47 %onde:alpha eh o shape (degree freedom) e beta eh o scale
48 %priors de Smets Wouters 2006 e malind Adolfsson
49 state2param(18:end)=t1(state(18:end));
50
51 end

```

A.8 logpriorMCMC.m

```

1 function [prior] = logpriorMCMC(state,param)
2 %Essa funcao avaliara a prior em cada parametro saindo dos draws do MCMC
3
4 %input: Vetor de estados da cadeia de markov do MCMC e parametros associados (ja transformados)
5 %output: vetor de priors dos estados
6
7 priors=zeros(length(state),1);
8
9 %% Transformacoes de variaveis no MCMC.
10 %Os estados no MCMC sao draws de uma normal, mas param nao tera necessariamente o mesmo suporte que o estado
11 %Solucao: gera os estados de uma variavel transformada e retransforma o
12 %estado de volta pro parametro
13 %funcao state2param transforma os estados da cadeia de markov de volta nos
14 %parametros do modeloo
15
16 %Alem de fazer o mapping de volta para os parametros, eh preciso ajustar a
17 %proposal pelo jacobiano da transformacao feita
18
19 %Ao final do MCMC a distribuicao recuperada sera a distribuicao dos
20 %parametros TRANSFORMADOS (ou seja, dos estados do MCMC). eh preciso
21 %transformar de volta para obter a densidade dos parametros do modelo
22
23 %Seja theta o parametro como no modelo e x o estado sorteado no MCMC
24 %Duas transformacoes sao feitas: t1 e t2.
25
26 %t1 garante que parametro sorteado no MCMC sao positivos: theta=exp(x)
27 %t2 garante que seja entre 0 e 1: theta=exp(x)/(1+exp(x))
28 %j1 e j2 sao os jacobianos das transformacoes acima no formato log.
29 %j1=exp(x) --> log(j1)=x;
30 %j2=exp(x)/(1+exp(x))^2 --> log(j2)=x-2*log(1+exp(x))
31
32 %A posterior final eh dada por: p(x|Y)~p(Y|t(x))*prior(t(x))*j
33
34 %j1=0(x) x;
35 %j2=0(x) x-2*log((1+exp(x)));
36
37 %% Calculo das priors
38 %rigidez
39 priors(1)=log(beta_dens(param(1),0.675,0.05))+j2(state(1)); %beta media 0.675 sd 0.05
40 priors(2)=log(beta_dens(param(2),0.5,0.1))+j2(state(2)); %beta media 0.5 sd 0.1
41 priors(3)=log(beta_dens(param(3),0.5,0.1))+j2(state(3)); %beta media 0.5 sd 0.1
42 %indexacao

```

```

43 priors(4)=log(beta_dens(param(4),0.5,0.15))+j2(state(4)); %beta media 0.5 e sd 0.15
44 priors(5)=log(beta_dens(param(5),0.5,0.15))+j2(state(5)); %beta media 0.5 e sd 0.15
45 priors(6)=log(beta_dens(param(6),0.5,0.15))+j2(state(6)); %beta media 0.5 e sd 0.15
46
47 priors(7)=log(normpdf(param(7),1.5,0.375));
48 priors(8)=log(normpdf(param(8),1.5,0.5));
49
50 %parametros da regra de taylor
51 priors(9)=log(normpdf(param(9),1.7,0.1));%(param(9)>=1.1 & param(9)<100);
52 priors(10)=log(normpdf(param(10),0.3,0.1));
53 priors(11)=log(normpdf(param(11),0,0.05));
54 priors(12)=log(normpdf(param(12),0.0625,0.05));
55
56 %parametros autoregressivos dos processos exogenos
57 priors(13)=log(beta_dens(param(13),0.9,0.1))+j2(state(13)); %beta media 0.9, sd 0.1
58 priors(14)=log(beta_dens(param(14),0.9,0.1))+j2(state(14)); %beta media 0.9, sd 0.1
59 priors(15)=log(beta_dens(param(15),0.9,0.1))+j2(state(15)); %beta media 0.9, sd 0.1
60 priors(16)=log(beta_dens(param(16),0.9,0.1))+j2(state(16)); %beta media 0.9, sd 0.1
61 priors(17)=log(beta_dens(param(17),0.9,0.1))+j2(state(17)); %beta media 0.9, sd 0.1
62
63
64 %desvio padrao dos choques exogenos
65 %Obs.: para a invgamma temos beta=(alpha-1)*media,
66 %onde:alpha eh o shape (degree freedom) e beta eh o scale
67 %priors de Smests Wouters 2006
68 priors(18)=log(invgamma_dens(param(18),0.15,Inf))+state(18);
69 priors(19)=log(invgamma_dens(param(19),0.05,Inf))+state(19);
70 priors(20)=log(invgamma_dens(param(20),0.7,Inf))+state(20);
71 priors(21)=log(invgamma_dens(param(21),0.3,Inf))+state(21);
72 priors(22)=log(invgamma_dens(param(22),0.3,Inf))+state(22);
73 priors(23)=log(invgamma_dens(param(23),0.2,Inf))+state(23);
74 priors(24)=log(invgamma_dens(param(24),0.2,Inf))+state(24);
75
76 prior=sum(priors);
77 end

```

A.9 kf_ll.m

```

1 function [LL shat sig]=kf_ll(dados,PAR,set,warm,H,sig,shat)
2 %calcula a verossimilhanca do modelo atraves do filtro de kalman
3 %Inputs:
4 %seja q = numero de variaveis no modelo q1=observaveis e T=tamanho da amostra
5 %dados: matriz q1xT de dados
6 %PAR: vetor de parametros a ser estimado
7 %set: vetor de parametros fixos na estimacao
8 %warm: percentual dos dados usados para aquecimento
9 %H: matriz q1xq de selecao para as observaveis do conjunto de estados
10 %shat: chute inicial para o vetor de estados (opcional)
11 %sig: chute inicial para a matriz de covariancia dos estados (opcional)
12 %Outputs:
13 % verossimilhanca dos dados dado o vetor de parametros
14
15 %Matrizes do Gensys
16 [g0 g1 PSI PI]=model_prog(PAR,set);
17 C=zeros(size(g1,1),1);
18

```

```

19 %dimensoes
20 nvar=size(g1,1);
21 T=size(dados,2);
22
23 %Gensys
24 [G1,C,impact,fmat,fwt,ywt,gev,eu,loose]=gensys(-g0,g1,C,PSI,PI);
25
26 if eu(2)~=1
27     %eu
28     %PAR
29     %error('Gensys sem solucao')
30     LL=-Inf; %nao pode usar -infinito por causa da minimizacao por verossimilhanca. Se nao for usa-la, troque para -Inf caso desjee
31     shat=shat; sig=sig;
32 else
33
34 % switch nargin
35 %     case 5
36 %         shat=zeros(nvar,1); %chute inicial
37 %         sig=10*eye(nvar); %
38 %     case 6
39 %         shat=zeros(nvar,1); %chute inicial
40 % end
41
42 %% Aquecimento
43 if warm>0
44     for i=1:warm;
45         [shat,sig,lh,ydev]=kf(dados(:,i),H,shat,sig,G1,impact,C);
46     end;
47 end;
48
49 LL=0;
50 %% Verossimilhanca
51 for i=(warm+1):T
52     [shat,sig,lh,ydev]=kf(dados(:,i),H,shat,sig,G1,impact,C);
53     LL=sum(lh)+LL;
54 end
55 end

```

A.10 mcmc.m

```

1 function [x accept_rate mode_state]= mcmc(ndraws,x0,sigma,tun,ll_kf)
2
3 x=zeros(ndraws,length(x0));
4 %x(1,:)=mvnrnd(x0,tun*sigma);
5
6 %condicoes iniciais
7 x(1,:)=x0;
8 par=state2param(x(1,:));
9 post=ll_kf(par)+logpriorMCMC(x(1,:),par);
10 %choques da cadeia de markov
11 e=mvnrnd(zeros(length(par),1),tun*sigma,ndraws);
12 %probabilidades de aceitacao
13 u=log(rand(ndraws,1));
14
15 %inicializacao
16 reject=0;

```

```

17 accept=0;
18 max_post=post;
19 mode_state=x0;
20
21 %parametros para estimacao iterativa da variancia da posterior (como no
22 %mode_compute=6 do dynare)
23 %mi=x0';
24 %var=sigma;
25 %t=0;
26
27 for i=2:(ndraws)
28     %t=t+1;
29     x_=x(i-1,:)+e(i,:);
30     par=state2param(x_);
31
32     [T,llkf]=evalc('ll_kf(par)');
33     post_=llkf+logpriorMCMC(x_,par);
34
35     %teste 1: aceita ou rejeita o novo ponto
36     if u(i)<post_-post
37         x(i,:)=x_;
38         %Teste 2: muda ou nao a moda
39         if post_>max_post;
40             max_post=post_;
41             mode_state=x_;
42         end
43         post=post_;
44         accept=accept+1;
45     else %rejeitou
46         x(i,:)=x(i-1,:);
47         reject=reject+1;
48     end
49     %mi=mi+1/t*(x(i,:)-x(i-1,:));
50
51     %var= var + mi'*mi - mi_'*mi_ + 1/t*(x(i,:)'*x(i,:)-var-mi'*mi);
52
53     %mi=mi_;var=var_;
54     if mod(i,500)==0
55         i
56         accept_rate=accept/(reject+accept)
57     end
58 end
59 accept_rate=accept/(reject+accept);

```

B. Códigos de IRF matching

Abaixo os principais códigos usados na estimação por IRF matching. Na ordem: código em R estimando o SVAR; função em R que calcula os desvios padrões da IRF por bootstrap; código principal do matlab que realiza a estimação; funções do matlab que calculam as impulso respostas teóricas e a função perda a ser minimizada.

Os códigos para gerar as simulações do modelo teórico através do gensys são os mesmos que os da seção anterior.

B.1 var.R

```
1 rm(list=ls())
2 library(ggplot2)
3 library(vars)
4 require(zoo)
5 library(multicore)
6 library(boot)
7 library(parallel)
8 library(foreach)
9 library(doParallel)
10 library(reshape)
11 library(R.matlab)
12
13
14 cl <- makeCluster(3)
15 registerDoParallel(cl, cores=3)
16 options(scipen=999)
17
18 setwd("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/R")
19 source("rfvar3.r"); source("impulsdtrf.r");
20 source("SVARlh.r"); source("SVARlh0.r")
21 source("csmiwellNew.r"); source("numgrad.r"); source("csminit.r"); source("numHess.r"); source("bfgsi.r")
22 source("boot_i.r")
23
24 #####
25 ##Organizando matrizes do VAR
26 #####
27 dados<-read.table("input.csv",header=TRUE,sep=",",row.names=1)
28
29 x=dados[c("YUS","CPIUS","RUS","WP")]
30 y=setdiff(dados,x)
31
32 lagsy = 2
33 lagsx = 3
34 ##onde começa a amostra (-2 pq o programa do SIMS já tira duas obs.)
35 iniciosims=which(row.names(y)=='77Q1')-lagsy
36 inicio=iniciosims+lagsy
37
38
39 ##CRIA AS VARIÁVEIS COM LAG
40 xx=Reduce(cbind,sapply(0:lagsx,function(i) lag(zoo(x),-i)))
41 yy=Reduce(cbind,sapply(1:lagsy,function(i) lag(zoo(y),-i)))
42
43 #CRIA OS FATORES DE SAZONALIDADE LEMBRAR DE AJUSTAR CONFORME A PLANILHA DE INPUTS PARA QUE CAIAM NO TRIMESTRE CERTO
44 seas1=rep(c(1,0,0,0),nrow(dados)/4); seas2=rep(c(0,1,0,0),nrow(dados)/4); seas3=rep(c(0,0,1,0),nrow(dados)/4)
45 seas=cbind(seas1,seas2,seas3)
46
47 #matriz de regressores
48 X=as.matrix(cbind(seas,xx)) #se for usar o prog. do sims
49 X=X[iniciosims:nrow(X),]
50
51 XX=cbind(1,as.matrix(cbind(seas,xx,yy))) #na mao ou por LM
```

```

52 XX=XX[inicio:nrow(XX),]
53 #matriz de explicadas
54 Y=as.matrix(y[iniciosims:nrow(y),])
55 YY=as.matrix(y[inicio:nrow(y),])
56
57 #BETA=solve(crossprod(X,X),crossprod(X,Y))# <---CALCULO NA MAO
58 #varred=lm(YY~0+XX) #calculo por OLS
59
60 #####
61 #*Var na FR
62 #####
63 varred=rfrvar3(Y,2,X,TRUE,NULL,NULL,NULL,NULL)
64 B=varred$By
65 u=varred$u
66
67 Bx=varred$Bx
68 seq=seq(from = 0,by = ncol(Bx),to=ncol(Bx)*nrow(Bx))
69 Bx=Reduce('rbind',lapply(1:nrow(Bx),function(i) Bx[(seq[i]+1):(seq[i+1])]))
70 rownames(Bx)=rownames(B)
71
72 sigma=var(u)
73
74 #####
75 #IDENTIFICACAO DO SVAR
76 ##OBS.: Seja e_t erro da FR e u_t erro estru. . Autores usam RATS, que faz: G u_t = e_t
77 ## Eviews faz: A e_t = B u_t . Codigos aqui fazem: A0*(-1) u_t = e_t
78 #(Ou seja, saindo de um VAR escrito como A0 y_t = A1 yt-1 + ...+ Ap yt-p + u_t )
79 # Identificacao como os autores, impondo restricoes sobre a matriz G. Depois transformo G em A0 para
80 #computar a verossimilhanca do SVAR.
81
82 idmat=matrix(FALSE,ncol(sigma),ncol(sigma))
83 rownames(idmat)=rownames(sigma)
84 colnames(idmat)=colnames(sigma)
85
86 idmat['Y','Y']=TRUE; #PRODUTO NAO RECEBE EFEITOS CONTEMPORANEOS
87 idmat['XMY','XMY']=TRUE; idmat['XMY','Y']=TRUE; #EXPORTACOES SO SAO AFETADAS PELO PRODUTO
88 idmat['CPI','CPI']=TRUE; idmat['CPI','XMY']=TRUE; idmat['CPI','Y']=TRUE; idmat['CPI','REX']=TRUE; #cambio, produto e exportacoes afetam
    inflacao domestica
89 idmat['R','CPI']=TRUE; idmat['R','R']=TRUE #SO INFLACAO DOMESTICA AFETA JUROS
90 idmat['REX',]=TRUE; idmat['REX','CPIM']=FALSE;
91 idmat['CPIM',]=TRUE #inflacao de importados sofre efeitos de todos
92
93 diag(idmat)<-FALSE #elementos da diagonal nao precisam de identificacao
94 #####
95
96 #PARAMETROS E CHUTE INICIAL#####
97 pvec=idmat
98 pvec=idmat*0 #chute do SW
99 diag(pvec)<-1 #G COM DIAG = 1
100 pvec['R','CPI']=0.05;pvec['CPI','REX']=-0.25; ##chute do SW
101 pvec=pvec[idmat==TRUE]
102 #####
103
104 #Otimizacao
105 H0=numHess(SVARlh0,pvec,idmat=idmat,sigma=sigma,T=nrow(u))
106 svar=csmwvNew(SVARlh0,x0=pvec,H0=H0,idmat=idmat,sigma=sigma,T=nrow(u),crit = 1e-40,nit=10000)
107 svarr=optim(pvec,SVARlh0,idmat=idmat,sigma=sigma,T=nrow(u),control=list(maxit=100000,reltol=1e-40))
108
109 #Constroi G e A0 = G*(-1)
110 n <- dim(idmat)[1]

```



```

111 G <- matrix(0,n,n)
112 G[idmat] <- svar$Xh
113 diag(G) <- 1 #efeitos unitarios da variavel em si mesma
114 rownames(G)=rownames(sigma)
115 colnames(G)=colnames(sigma)
116 G['CPI','REX']=0; #robadinha SW
117 #A0=solve(G)
118
119 #Structural decomposition
120 IRF=impulsdtrf(B,smat=G,20)
121
122 IRF_r_cpi=IRF[, 'R', ]['CPI',]
123 IRF_r_cpim=IRF[, 'R', ]['CPIM',]
124 IRF_rex_cpi=IRF[, 'REX', ]['CPI',]
125
126 IRF_rex_cpim=IRF[, 'REX', ]['CPIM',]
127
128 plot(1:20,IRF_rex_cpi)
129 abline(h=0)
130
131 #####
132 #Bootstrap
133 #####
134 ##CRIA AS VARIÁVEIS COM LAG
135 xx=Reduce(cbind,sapply(0:lagsx,function(i) lag(zoo(x),-i)))
136 yy=Reduce(cbind,sapply(1:lagsy,function(i) lag(zoo(y),-i)))
137
138 #CRIA OS FATORES DE SAZONALIDADE LEMBRAR DE AJUSTAR CONFORME A PLANILHA DE INPUTS PARA QUE CAIAM NO TRIMESTRE CERTO
139 seas1=rep(c(1,0,0,0),nrow(dados)/4); seas2=rep(c(0,1,0,0),nrow(dados)/4); seas3=rep(c(0,0,1,0),nrow(dados)/4)
140 seas=cbind(seas1,seas2,seas3)
141
142 #matriz de exogenas
143 xboot=cbind(as.matrix(cbind(seas,xx)),1)
144 xboot=xboot[iniciosims:nrow(xboot),]
145
146 #condicoes iniciais dadas
147 presmly=as.matrix(y[iniciosims:(iniciosims+lagsy-1),])
148
149 #reescreve a matriz B das endogenas do VAR no formato adequado
150 BB=B[,1]
151 for(i in 2:dim(B)[3]){
152   BB=cbind(BB,B[,i])
153 }
154
155
156 #bootstraping: 1000 replicacoes
157 bootstrap=list()
158 while(length(bootstrap)<1000){
159   end=1000-length(bootstrap)
160   print(length(bootstrap))
161   boot<-foreach(i=1:end,.errorhandling = "remove") %dopar% {
162     boot_i(presmly,xboot,u,lagsy,iniciosims,BB,Bx,20)}
163   bootstrap=c(bootstrap,boot)
164 }
165 #Bootstraping: corrige o vies pela estimativa do bootstrap anterior e simula 2000 vezes
166
167 #corrigind vies
168 b=Reduce('+',lapply(bootstrap,function(x) x$B_boot))/length(bootstrap)
169 bx=Reduce('+',lapply(bootstrap,function(x) x$Bx_boot))/length(bootstrap)
170 viesb=b-B

```

```

171 viesbx=bx-Bx
172 Bstar=B-viesb
173 Bxstar=Bx-viesbx
174
175 BBstar=Bstar[,1]
176 for(i in 2:dim(Bstar)[3]){
177   BBstar=cbind(BBstar,Bstar[,i])
178 }
179 #corrigir os residuos
180 xstar=xboot[(lagsy+1):nrow(xboot),]
181 ystar=as.matrix(yy[(inicio-1):nrow(yy),])
182 ustar=as.matrix(y[inicio:nrow(y),]-ystar*%t(BBstar)-xstar*%t(Bxstar))
183
184 bootstrap=list()
185 # 2000 replicasções
186 while(length(bootstrap)<2000){
187   end=2000-length(bootstrap)
188   print(length(bootstrap))
189   boot<-foreach(i=1:end,.errorhandling = "remove") %dopar% {
190     boot_i(presmply,xboot,ustar,lagsy,iniciosims,BBstar,Bxstar,20)}
191   bootstrap=c(bootstrap,boot)
192 }
193 #salva o exercicio de simulacao
194 save(bootstrap,file='bootstrap')
195
196 #####
197 #Plot e desvio padrao das IRF's
198 #####
199 #load nos resultados do bootstrap
200 load('bootstrap')
201 tunningr = 0.35 ##para fittar com o tamanho do choque monetario em SW
202 tunningrex=1.7 ##para fittar com o tamanho do choque cambial em SW
203
204 #IR do choque monetario
205 IRFr=lapply(bootstrap,function(x) t(x$IRF[, 'R',]) * tunningr) ##0.35 PARA FITTAR COM O TAMANHO DO CHOQUE QUE SW DaO
206 IRFrbar=Reduce('+',IRFr)/length(IRFr)
207 IRFrstd=sqrt(Reduce('+',lapply(IRFr,function(x) (x-IRFrbar)^2))/length(IRFr))
208
209 #IRF do choque de cambio
210 IRFrex=lapply(bootstrap,function(x) t(x$IRF[, 'REX',]) * tunningrex)
211 IRFrexbar=Reduce('+',IRFrex)/length(IRFrex)
212 IRFrexstd=sqrt(Reduce('+',lapply(IRFrex,function(x) (x-IRFrexbar)^2))/length(IRFrex))
213
214 #Intervalo de confianca da IRF do choque monetario
215 IRFr=t(IRF[, 'R',]) * tunningr #0.35 eh para fittar com o choque do SW
216 upperR=IRFr+2*IRFrstd
217 lowerR=IRFr-2*IRFrstd
218
219 #Intervalo de confianca do choque de cambio
220 IRFrex=t(IRF[, 'REX',]) * tunningrex
221 upperrex=IRFrex+2*IRFrexstd
222 lowerrex=IRFrex-2*IRFrexstd
223
224 #Exportando para matlab
225 IRFrcpi=IRFr[,c('CPI', 'CPIM')]
226 IRFrcpisd=IRFrstd[,c('CPI', 'CPIM')]
227 IRFrexcpi=IRFrex[,c('CPI', 'CPIM')]
228 IRFrexcpisd=IRFrexstd[,c('CPI', 'CPIM')]
229
230 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRFr", ".mat", sep="")

```

```

231 writeMat(filename, IRFr=IRFrcpi)
232 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRFr", ".mat", sep="")
233 writeMat(filename, IRFr=IRFrcpi)
234
235 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRFrex", ".mat", sep="")
236 writeMat(filename, IRFrex=IRFrexcpi)
237 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRFrex", ".mat", sep="")
238 writeMat(filename, IRFrex=IRFrexcpi)
239
240 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRr", ".mat", sep="")
241 writeMat(filename, IRr=IRr[,c('R','REX','Y','XMY','CPI','CPIM')])
242 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRrsd", ".mat", sep="")
243 writeMat(filename, IRrsd=IRrsd[,c('R','REX','Y','XMY','CPI','CPIM')])
244
245 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRrex", ".mat", sep="")
246 writeMat(filename, IRrex=IRrex[,c('R','REX','Y','XMY','CPI','CPIM')])
247 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRrex", ".mat", sep="")
248 writeMat(filename, IRrex=IRrex[,c('R','REX','Y','XMY','CPI','CPIM')])
249
250
251 filename <- paste("C:/Users/Moises/Desktop/papers para replicar/Estimacao/Matlab/IRFr", ".mat", sep="")
252 writeMat(filename, IRFr=IRFrcpi)
253
254
255 #Plotando*****
256 df<-data.frame(t=1:20,irf=IRFrex[, 'CPIM'],u=upperrex[, 'CPIM'],d=lowerrex[, 'CPIM'])
257 df<-melt(df,id="t")
258
259 graph=ggplot(df,aes(x=t,y=value,color=variable))+geom_line(aes(linetype=variable))+
260   scale_color_manual(values = c("dodgerblue2", "red", "red")) +
261   scale_linetype_manual(values=c("solid","dotted","dotted"))
262
263 graph+theme(axis.title.x=element_blank(),
264             axis.title.y=element_blank(),legend.position="none")
265 *****

```

B.2 boot_i.R

```

1 boot_i<-function(presmply,xboot,u,lagsy,inicio,BB,Bx,nIRF){
2
3   uboot=as.data.frame(u-colMeans(u))
4   uboot=sapply(uboot,function(x) sample(x,replace = TRUE,size = (nrow(u)+lagsy)))
5
6   yboot=matrix(0,nrow(uboot),ncol(u))
7
8   yboot[1:lagsy,]=presmply
9
10  for(i in (lagsy+1):nrow(uboot)){
11    yboot[i,]=BB%*%c(t(yboot[(i-1):(i-lagsy),]))+Bx%*%xboot[i,]+uboot[i,]
12  }
13
14  colnames(yboot)=colnames(presmply)
15  *****
16  #*Var na FR
17  *****
18  varred=rfvar3(yboot,lagsy,xboot,FALSE,NULL,NULL,NULL,NULL)

```

```

19 B_boot=varred$By
20 uu=varred$u
21 sigmaa=var(uu)
22
23 Bx_boot=varred$Bx
24 seq=seq(from = 0,by = ncol(Bx_boot),to=ncol(Bx_boot)*nrow(Bx_boot))
25 Bx_boot=Reduce('rbind',lapply(1:nrow(Bx_boot),function(i) Bx_boot[(seq[i]+1):(seq[i+1])]))
26 rownames(Bx_boot)=rownames(B_boot)
27
28
29 #####
30 #IDENTIFICACAO DO SVAR
31 ##OBS.: Seja e_t erro da FR e u_t erro estru. . Autores usam RATS, que faz: G u_t = e_t
32 ## Eviews faz: A e_t = B u_t . Codigos aqui fazem: A0*(-1) u_t = e_t
33 #(Ou seja, saindo de um VAR escrito como A0 y_t = A1 y_t-1 + ... + Ap y_t-p + u_t )
34 # Identificacao como os autores, impondo restricoes sobre a matriz G. Depois transformo G em A0 para
35 #computar a verossimilhanca do SVAR.
36 idmat=matrix(FALSE,ncol(sigmaa),ncol(sigmaa))
37 rownames(idmat)=rownames(sigmaa)
38 colnames(idmat)=colnames(sigmaa)
39
40 idmat['Y','Y']=TRUE; #PRODUTO NAO RECEBE EFEITOS CONTEMPORANEOS
41 idmat['XMY','XMY']=TRUE; idmat['XMY','Y']=TRUE; #EXPORTACOES SO SAO AFETADAS PELO PRODUTO
42 idmat['CPI','CPI']=TRUE; idmat['CPI','XMY']=TRUE; idmat['CPI','Y']=TRUE; idmat['CPI','REX']=TRUE; #cambio, produto e exportacoes afetam
    inflacao domestica
43 idmat['R','CPI']=TRUE; idmat['R','R']=TRUE #SO INFLACAO DOMESTICA AFETA JUROS
44 idmat['REX',]=TRUE; idmat['REX','CPIM']=FALSE;
45 idmat['CPIM',]=TRUE #inflacao de importados sofre efeitos de todos
46
47 diag(idmat)<-FALSE #elementos da diagonal nao precisam de identificacao
48 #####
49
50 #PARAMETROS E CHUTE INICIAL#####
51 pvec=idmat
52 pvec=idmat*0 #chute do SW
53 diag(pvec)<-1 #G COM DIAG = 1
54 pvec['R','CPI']=0.05;pvec['CPI','REX']=-0.25; #chute do SW
55 pvec=pvec[idmat==TRUE]
56 #####
57
58 #Otimizacao
59 H0=numHess(SVARlh0,pvec,idmat=idmat,sigma=sigmaa,T=nrow(uu))
60 svar=csmiNew(SVARlh0,x0=pvec,H0=H0,idmat=idmat,sigma=sigmaa,T=nrow(uu),crit = 1e-20,nit=10000)
61
62 #Constroi G e A0 = G*(-1)
63 n <- dim(idmat)[1]
64 G_boot <- matrix(0,n,n)
65 G_boot[idmat] <- svar$xh
66 diag(G_boot) <- 1 #efeitos unitarios da variavel em si mesma
67 rownames(G_boot)=rownames(sigmaa)
68 colnames(G_boot)=colnames(sigmaa)
69 G_boot['CPI','REX']=0; #robadinha SW
70 #A0=solve(G_boot)
71
72 #Structural decomposition
73 IRF_boot=impulsdtrf(B_boot,smat=G_boot,nIRF)
74
75 return(list(B_boot=B_boot,Bx_boot=Bx_boot,G_boot=G_boot,IRF_boot=IRF_boot))
76 }

```

B.3 main_prog.m

```
1 clear
2 close all
3 tun = 2 %para rhom=0.7
4 %tun=5.5 %para rhom=0.55
5 %*****
6 % Resolve o modelo analiticamente
7 %*****
8
9 %parametros
10 [param0,set] = parameters_est;
11
12 %Define o modelo e calcula as matrizes do gensys analiticamente
13 mod = modelsims(param0,set);
14 %dimensao do modelo
15 neq=length(mod.f);
16 %Gerar uma funcao que retorna as matrizes do Gensys
17 %essa linha criara um file ".m" com as matrizes simbolicas que
18 %serao usadas na solucao do modelo (nome do arquivo criado: model_prog)
19 %aumentar eficiencia: nao precisa computar as derivadas em toda iteracao
20 model_func_sims(mod);
21
22 %Valores iniciais dos parametros
23 param0 = struct2array(param0);
24 set = struct2array(set);
25
26 %*****
27 %Load das IRFs e calculo da matriz de ponderacao
28 %*****
29
30 %Primeira coluna eh CPI domestico e segunda coluna o estrangeiro
31 %empiricas
32 load('IRFr'); load('IRFrstd'); load('IRFrex'); load('IRFrexstd');
33 T=100;
34 %Matrizes de ponderacao
35 IRFrvar=IRFrstd.^2;
36 IRFrvar=IRFrvar(:);
37 Wr=diag(IRFrvar,0);
38
39 IRFrexvar=IRFrexstd.^2;
40 IRFrexvar=IRFrexvar(:);
41 Wrex=diag(IRFrexvar,0);
42
43
44 %%*****
45 %%Calcula as IRF's teoricas
46 %%*****
47 Matrizes do Gensys com valores iniciais
48 param0=[0.9018,0.8806,0,0.5365];
49 [g0 g1 PSI PI]=model_prog(param0,set);
50 C=zeros(neq,1);
51
52 %Gensys
53 [G1,C,impact,fmat,fwt,ywt,gev,eu,loose]=gensys(-g0,g1,C,PSI,PI);
54
55 %Calculo da funcao de resposta ao impulso
56 T=30;
```

```

57 IRv=zeros(T,neq);IRrstar=zeros(T,neq);IRcstar=zeros(T,neq);IRm=zeros(T,neq);
58 %Ajustando os choques para coincidir com as dinamicas do paper
59 %tunning=ones(4,1);
60 tunning=zeros(size(impact,1),1);
61 tunning(find(mod.eps=='epsvet'))=1.25;
62 tunning(find(mod.eps=='epsrstar'))=-5.5661;
63 tunning(find(mod.eps=='epscstar'))=2.4;
64 tunning(find(mod.eps=='epsmm'))=tun;
65 %Calcula a impulso resposta
66 [IR]=ir_gensys(G1,impact,T,tunning) ;%tunning opcional para ajustar o tamanho do choque na IRF. Se vazio, tunning=1
67 %transforma Impulsos de inflacao e juros em anuais (como no paper)
68 IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:);
69 IR(:,find(mod.Y=='pif'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pif'),:);
70 IR(:,find(mod.Y=='pi'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pi'),:);
71 IR(:,find(mod.Y=='rr'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='rr'),:);
72 %coleta impulsos de cada choque em vetores especificos
73 IRrstar=IR(:,find(mod.eps=='epsrstar'));
74 IRv=IR(:,find(mod.eps=='epsvet'));
75 IRcstar=IR(:,find(mod.eps=='epscstar'));
76 IRm=IR(:,find(mod.eps=='epsmm'));
77
78 %IRFs usadas na otimizacao
79 IRFrt=IRm(1:T,[find(mod.Y=='pidd'),find(mod.Y=='pif')])
80 IRFrest=IRrstar(1:T,[find(mod.Y=='pidd'),find(mod.Y=='pif')]);
81
82 %%
83 %*****
84 %***** IRF MATCHING*****
85 %*****
86
87 %*****
88 %Funcao perda da IR ao choque monetario
89 %*****
90
91 %options da otimizacao
92 options = optimset('fmincon');
93 options = optimset(options, 'TolFun', 1e-40);
94
95 wr=pinv(Wr);
96
97 param0=[0.9, 0.9, 0, 0.45];
98 perda(param0,set,IRFr,wr,mod,'epsmm',tun);
99 objh = @(param) perda(param,set,IRFr,wr,mod,'epsmm',tun);
100 [param_r,wlf_r,exitflag,output,lambda,grad,hessian_r] = fmincon(objh, param0,[],[],[],[],[.01,.01,0,0],[.99,.99,.99,.99],[],options);
101 dp_r=sqrt(diag(hessian_r^(-1)));
102 prob_r=chi2cdf(wlf_r/1000,19);
103 [lixo,IRtr]=perda(param_r,set,IRFr,wr,mod,'epsmm',tun)
104
105 %-----
106 %Esse pedaco testa condicoes iniciais para a minimizacao da funcao
107 %perda quando o choque eh o choque monetario.
108
109 estimativas=zeros(980,5);
110 wr=pinv(Wr)
111 matlabpool ('open');
112 parfor i=1:980;
113     param0=[i/1000, i/1000, (981-i)/1000, (981-i)/1000];
114     objh = @(param) perda(param,set,IRFr,wr,mod,'epsmm',tun);
115     [param_r,wlf_r] = fmincon(objh, param0,[],[],[],[],[.01,.01,0,0],[.99,.99,.99,.99],[],options);
116     estimativas(i,:)=param_r wlf_r/1000;

```

```

117 end
118 matlabpool close;
119 save('estimativas',estimativas);
120 %-----
121
122 %*****
123 %Funcao perda da IR ao choque de cambio
124 %*****
125 param0=[0.9,0.9,0.5,0.5];
126 objh = @(param) perda(param,set,IRFrex,pinv(Wrex),mod,'epsrstar',0);
127 [param_rex,wlf_rex,exitflag,output,lambda,grad,hessian_rex] = fmincon(objh, param0,[],[],[],[],[.01,.01,0,0],[.99,.99,.99,.99],[],
    options);
128 dp_rex=diag(hessian_rex^(-1));
129 prob_rex=chi2cdf(wlf_rex/1000,19);
130 [lixo,IRtrex]=perda(param_rex,set,IRFrex,pinv(Wrex),mod,'epsrstar',0);
131 %%
132 save('IR_teorica.mat','IRtr','IRtrex')
133
134 %-----
135 %Esse pedaco testa condicoes iniciais para a minimizacao da funcao
136 %perda quando o choque eh o choque de cambio.
137
138 estimativas=zeros(980,5);
139 wr=pinv(Wrex)
140 matlabpool ('open');
141 parfor i=1:980;
142     param0=[i/1000, i/1000, (981-i)/1000, (981-i)/1000];
143     objh = @(param) perda(param,set,IRFrex,Wrex,mod,'epsrstar',tun);
144     [param_rex,wlf_rex] = fmincon(objh, param0,[],[],[],[],[.01,.01,0,0],[.99,.99,.99,.99],[],options);
145     estimativas(i,:)=param_rex wlf_rex/1000;
146 end
147 matlabpool close;
148 save('estimativas',estimativas);
149 %-----
150
151
152 %%
153 %*****
154 %Essa secao foi feita pra tentar fitar com as IRFs do paper (terceira linha fig1)
155 %*****
156
157 % *****
158 % %Esse pedaco foi feito para tentar fittar com a IRF do choque de cambio
159 % no paper graficamente
160 %*****
161 % inicio=1
162 % x=IRFrext(inicio:inicio+20,1)
163 % x(1,1)=0
164 % um=IRFrex+2*IRFrexsd
165 % lm=IRFrex-2*IRFrexsd
166 % figure
167 % plot([IRFrex(:,1),um(:,1),lm(:,1),x(1:20)])
168 %
169 % inicio=1
170 % x=IRFrext(inicio:inicio+20,2)
171 % plot(x)
172 % um=IRFrex+2*IRFrexsd
173 % lm=IRFrex-2*IRFrexsd
174 % figure
175 % plot([IRFrex(:,2),um(:,2),lm(:,2),x(1:20)])

```

```

176
177 %%*****
178 %Esse pedaco foi feito para tentar fittar com a IRF do choque de mon.
179 %%no paper graficamente
180 %%*****
181 %inicio=1
182 % x=IRFrt(inicio:inicio+20,1)
183 % x(1,1)=0
184 % um=IRFr+2*IRFrds
185 % lm=IRFr-2*IRFrds
186 % figure
187 % plot([IRFr(:,1),um(:,1),lm(:,1),x(1:20)])
188 %
189 %inicio=1
190 %x=IRFrt(inicio:inicio+20,2)
191 %plot(x)
192 %um=IRFr+2*IRFrds
193 %lm=IRFr-2*IRFrds
194 %figure
195 %plot([IRFr(:,2),um(:,2),lm(:,2),x(1:20)])
196 %
197
198 %*****
199 %Funcao de ajuste para tentar fittar com as IRFs do paper, minimizando a
200 %funcao perda em relacao ao tamanho do choque e coeficiente autoregressivo
201 %%sob os parametros 'verdadeiros' estimados por SW
202 %*****
203 %options = optimset('fmincon');
204 %options = optimset(options, 'TolFun', 1e-20, 'display', 'iter');
205 %fittando as IRFs com as do SW
206 %para o choque de cambio (convergencia estavel, testei outros valores inic.)
207 %otimizador=[0.9 -1]
208 %objh = @(otim) ajuste(otim,set,IRFr,pinv(Wrex),mod,'epsrstar')/1000-14;
209 %[param_est,vlf_est] = fmincon(objh, otimizador,[],[],[],[0,-100,1.01],[1,0,10],[],options);
210 %para o choque monetario (convergencia estavel, testei outros valores inic.)
211 %otimizador=[0.55 8]
212 %ajuste(otimizador,set,IRFr,pinv(Wr),mod,'epsmm')/1000-3.26;
213 %objh = @(otim) ajuste(otim,set,IRFr,pinv(Wr),mod,'epsmm')/1000-3.26;
214 %[param_est,vlf_est] = fmincon(objh, otimizador,[],[],[],[0,0],[1,100],[],options);
215 %

```

B.4 ir_gensys.m

```

1 function [IR]=ir_gensys(G1,impact,T,magn)
2 %G1 eh a matriz G1 do Gensys
3 %impact eh a matriz 'impact' do Gensys
4 %T eh o numero de periodos desejados
5 % magn eh o tamanho dos choques (opcional, padrao=1)
6
7 neq=size(G1,1); nchoques=size(impact,2);
8 IR=zeros(T,neq,nchoques);
9 G1=G1';
10 impact=impact';
11
12 if nargin<4
13     magn=ones(nchoques,1);

```



```

14 end
15
16 for t=1:T
17     for j=1:nchoques
18         IR(t,:,j)=(magn(j)*impact(j,:))*G1^(t-1);
19     end
20 end

```

B.5 perda.m

```

1 function [wlf,IRt] = perda(param,set,IRFempirica,W,mod,choque,tun)
2 %param sao os parametros sendo estimados (vetor)
3 %set sao os parametros mantidos fixos (vetor)
4 %IRFempirica eh uma matriz (nvar x T) contendo as respostas das nvar variaveis
5 %W eh a inversa da matriz diagonal (nvar x T x nvar x T) dos desvios padroes de cada impulso do vetor IRFempirica na diagonal
   principal
6 %mod eh o arquivo com o modelo original (so para facilitar indexacao)
7 %choque eh o choque exogeno que esta sendo usado em formato string com o mesmo nome que no arquivo mod
8
9 %%*****
10 %Solucao do modelo (GENSYS)
11 %%*****
12 [g0 g1 PSI PI]=model_prog(param,set);
13 neq=size(g0,1);
14 C=zeros(neq,1);
15
16 %Gensys
17 [G1,C,impact,fmat,fwt,ywt,gev,eu,loose]=gensys(-g0,g1,C,PSI,PI);
18 %%
19 %%*****
20 %Calculo da funcao de resposta ao impulso
21 %%*****
22 T=size(IRFempirica,1);
23 IRt=zeros(T,neq);
24 %Ajustando os choques para coincidir com as dinamicas do paper
25 tunning=zeros(size(impact,1),1);
26 tunning(find(mod.eps=='epsvet'))=1.25;
27 tunning(find(mod.eps=='epstar'))=-5.5661;
28 tunning(find(mod.eps=='epscstar'))=2.4;
29 tunning(find(mod.eps=='epsmm'))=tun;
30 %Calcula a impulso resposta
31 [IR]=ir_gensys(G1,impact,T,tunning); %tunning opcional para ajustar o tamanho do choque na IRF. Se vazio, tunning=1
32 %transforma Impulsos de inflacao e juros em anuais (como no paper)
33 IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:);
34 IR(:,find(mod.Y=='pif'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pif'),:);
35 IR(1,find(mod.Y=='pidd'),:)=0; %robada do SW
36 %coleta as impulso resposta relevantes
37 IRt=IR(1:T,[find(mod.Y=='pidd'),find(mod.Y=='pif')],find(mod.eps=='choque'));
38 %%
39 %%*****
40 %Funcao perda
41 %%*****
42 %plot([IRt(:,1),IRFempirica(:,1)])
43 %plot([IRt(:,2),IRFempirica(:,2)])
44
45 desv = IRFempirica(:) - IRt(:);

```

```

46
47 wlf = 1000*desv'*W*desv;

```

B.6 simul.m

```

1 clear
2 close all
3
4 %%
5 %*****
6 % Resolve o modelo analiticamente - sem optimal policy
7 %*****
8
9 %parametros
10 [param0,settled] = parameters_sim;
11 %Define o modelo e calcula as matrizes do gensys analiticamente
12 mod = modelsims(param0,settled);
13 %dimensao do modelo
14 neq=length(mod.f);
15 %Gerar uma funcao que retorna as matrizes do Gensys
16 %essa linha criara um file ".m" com as matrizes simbolicas que
17 %serao usadas na solucao do modelo (nome do arquivo criado: model_prog)
18 %aumentar eficiencia: nao precisa computar as derivadas em toda iteracao
19 model_func_sims(mod);
20 var={'y' 'c' 'x1' 'tt' 'rr' 'rer' 'pidd' 'pif' 'w' 'a'};
21 eps={'epsvet','epscstar','epsrstar'};
22 idxv=zeros(1,size(var,2));
23 idxeps=zeros(1,3)
24
25 for i=1:size(var,2);
26     idxv(i)=find(mod.Y==var{i});
27 end
28 for i=1:3;
29     idxeps(i)=find(mod.eps==eps{i});
30 end
31
32 settled = struct2array(settled);
33
34 %%
35 %*****
36 %Calculo da funcao de resposta ao impulso - TR na inflacao domestica
37 %*****
38 %Valores iniciais dos parametros
39 param = [0.85,0.85,0,0];
40 %Matrizes do Gensys com valores iniciais
41 [g0 g1 PSI PI]=model_prog(param,settled);
42 C=zeros(neq,1);
43
44 %Gensys
45 [G1,C,impact,fmat,fwt,ywt,gev,eu,loose]=gensys(-g0,g1,C,PSI,PI);
46
47 T=100;
48 IRv=zeros(T,neq);IRrstar=zeros(T,neq);IRcstar=zeros(T,neq);IRm=zeros(T,neq);
49 %Ajustando os choques para coincidir com as dinamicas do paper
50 tunning=ones(4,1);
51 tunning=zeros(size(impact,1),1);

```

```

52 tunning(find(mod.eps=='epsvet'))=1.25;
53 tunning(find(mod.eps=='epsrstar'))=-0.45; %para bater com os ultimos graf.
54 tunning(find(mod.eps=='epscstar'))=2.4;
55 tunning(find(mod.eps=='epsmm'))=1;
56 %Calcula a impulso resposta
57 [IR]=ir_gensys(G1,impact,T,tunning) ;%tunning opcional para ajustar o tamanho do choque na IRF. Se vazio, tunning=1
58 %transforma Impulsos de inflacao e juros em anuais (como no paper)
59 IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:);
60 IR(:,find(mod.Y=='pif'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pif'),:);
61 IR(:,find(mod.Y=='pi'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pi'),:);
62 IR(:,find(mod.Y=='rr'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='rr'),:);
63 % %coleta impulsos de cada choque em vetores especificos
64 % IRrstar=IR(:,find(mod.eps=='epsrstar'));
65 % IRv=IR(:,find(mod.eps=='epsvet'));
66 % IRcstar=IR(:,find(mod.eps=='epscstar'));
67 % IRm=IR(:,find(mod.eps=='epsmm'));
68
69 IRtr=zeros(T,size(idvx,2),size(idxeps,2))
70
71 for j=1:size(idxeps,2)
72     for i=1:size(idvx,2)
73         IRtr(:,i,j)=IR(:,idxv(i),idxeps(j))
74     end
75 end
76 %%
77 %*****
78 %Calculo da funcao de resposta ao impulso - Precos flexiveis
79 %*****
80 %Valores iniciais dos parametros
81 param = [0.0001,0.0001,0,0];
82 %Matrizes do Gensys com valores iniciais
83 [g0 g1 PSI PI]=model_prog(param,settled);
84 C=zeros(neq,1);
85
86 %Gensys
87 [G1,C,impact,fmat,fwt,ywt,gev,eu,loose]=gensys(-g0,g1,C,PSI,PI);
88
89 T=100;
90 IRv=zeros(T,neq);IRrstar=zeros(T,neq);IRcstar=zeros(T,neq);IRm=zeros(T,neq);
91 %Ajustando os choques para coincidir com as dinamicas do paper
92 tunning=ones(4,1);
93 tunning=zeros(size(impact,1),1);
94 tunning(find(mod.eps=='epsvet'))=1.25*10^-8;
95 tunning(find(mod.eps=='epsrstar'))=-0.45; %para bater com os ultimos graf.
96 tunning(find(mod.eps=='epscstar'))=2.4;
97 tunning(find(mod.eps=='epsmm'))=1;
98 %Calcula a impulso resposta
99 [IR]=ir_gensys(G1,impact,T,tunning) ;%tunning opcional para ajustar o tamanho do choque na IRF. Se vazio, tunning=1
100 %transforma Impulsos de inflacao e juros em anuais (como no paper)
101 IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:);
102 IR(:,find(mod.Y=='pif'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pif'),:);
103 IR(:,find(mod.Y=='pi'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pi'),:);
104 IR(:,find(mod.Y=='rr'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='rr'),:);
105 %coleta impulsos de cada choque em vetores especificos
106 % IRrstar=IR(:,find(mod.eps=='epsrstar'));
107 % IRv=IR(:,find(mod.eps=='epsvet'));
108 % IRcstar=IR(:,find(mod.eps=='epscstar'));
109 % IRm=IR(:,find(mod.eps=='epsmm'));
110
111 IRflex=zeros(T,size(idvx,2),size(idxeps,2))

```

```

112
113 for j=1:size(idxepts,2)
114     for i=1:size(id xv,2)
115         IRflex(:,i,j)=IR(:,id xv(i),id xepts(j))
116     end
117 end
118
119 %%
120 %%
121 %*****
122 % Resolve o modelo analiticamente para Optimal Policy
123 %*****
124
125 %parametros
126 [param,settled] = parameters_sim;
127 %Define o modelo e calcula as matrizes do gensys analiticamente
128 mod = model_sims_opt(param,settled);
129 %dimensao do modelo
130 neq=length(mod.f);
131 %Gerar uma funcao que retorna as matrizes do Gensys
132 %essa linha criara um file ".m" com as matrizes simbolicas que
133 %serao usadas na solucao do modelo (nome do arquivo criado: model_prog)
134 %aumentar eficiencia: nao precisa computar as derivadas em toda iteracao
135 model_func_sims(mod);
136 var={'y' 'c' 'xl' 'tt' 'rr' 'rer' 'pidd' 'pif' 'w' 'a'};
137 eps={'epsvet','epscstar','epsrstar'};
138 id xv=zeros(1,size(var,2));
139 id xepts=zeros(1,3)
140
141 for i=1:size(var,2);
142     id xv(i)=find(mod.Y==var{i});
143 end
144 for i=1:3;
145     id xepts(i)=find(mod.eps==eps{i});
146 end
147
148 settled = struct2array(settled);
149
150
151 %*****
152 %Calculo da funcao de resposta ao impulso - Optimal policy
153 %*****
154 %Valores iniciais dos parametros
155 param = [0.85,0.85,0,0];
156 %Matrizes do Gensys com valores iniciais
157 [g0 g1 PSI PI]=model_prog(param,settled);
158 C=zeros(neq,1);
159
160 %Gensys
161 [G1,C,impact,fmat,fwt,ywt,gev,eu,loose]=gensys(-g0,g1,C,PSI,PI);
162
163 T=100;
164 IRv=zeros(T,neq);IRrstar=zeros(T,neq);IRcstar=zeros(T,neq);IRm=zeros(T,neq);
165 %Ajustando os choques para coincidir com as dinamicas do paper
166 tunning=ones(4,1);
167 tunning=zeros(size(impact,1),1);
168 tunning(find(mod.eps=='epsvet'))=1.25;
169 tunning(find(mod.eps=='epsrstar'))=-0.45; %para bater com os ultimos graf.
170 tunning(find(mod.eps=='epscstar'))=2.4;
171 tunning(find(mod.eps=='epsmm'))=1;

```

```

172 %Calcula a impulso resposta
173 [IR]=ir_gensys(G1,impact,T,tunning) ;%tunning opcional para ajustar o tamanho do choque na IRF. Se vazio, tunning=1
174 %transforma Impulsos de inflacao e juros em anuais (como no paper)
175 IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pidd'),:);
176 IR(:,find(mod.Y=='pif'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pif'),:);
177 IR(:,find(mod.Y=='pi'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='pi'),:);
178 IR(:,find(mod.Y=='rr'),:)=4*IR(:,find(mod.Y=='rr'),:);
179 % %coleta impulsos de cada choque em vetores especificos
180 % IRrstar=IR(:,find(mod.eps=='epsrstar'));
181 % IRv=IR(:,find(mod.eps=='epsvet'));
182 % IRcstar=IR(:,find(mod.eps=='epscstar'));
183 % IRm=IR(:,find(mod.eps=='epsmm'));
184
185 IRopt=zeros(T,size(idvx,2),size(idxepts,2))
186
187 for j=1:size(idxepts,2)
188     for i=1:size(idvx,2)
189         IRopt(:,i,j)=IR(:,idxv(i),idxeps(j))
190     end
191 end
192 %%
193 %*****
194 %Plot dos graficos
195 %*****
196 titulos={'output','consumption','net export','terms of trade','real interest rate','real exchange rate','inflation','import
inflation','real wage','net foreign assets'}
197 t=20;
198 zero=zeros(1,t)
199 for j=1:size(idxepts,2)
200     fig=figure
201     color=get(fig,'Color')
202     for i=1:size(idvx,2)
203         subplot(5,2,i)
204         if strcmp(titulos{i},'inflation')==1 | strcmp(titulos{i},'import inflation')==1
205             h=plot(1:t,IRtr(1:t,i,j),'red',1:t,IRopt(1:t,i,j),'blue');
206             set(h(1),'LineStyle','--','LineWidth',1.5)
207         else
208             h=plot(1:t,IRtr(1:t,i,j),'red',1:t,IRflex(1:t,i,j),'green',1:t,IRopt(1:t,i,j),'blue');
209             set(h(2),'LineWidth',1)
210             set(h(1),'LineStyle','--','LineWidth',1.5)
211         end
212         title(titulos{i})
213         box off
214         hold on
215         hline(0,'black')
216         hold off
217         if i==1
218             legend('Taylor Rule','Flex','Optimal','Position',[0.5,0.5,420,25],'Orientation','Horizontal')
219         end
220     end
221 saveas(fig,strcat(eps{j},'.png'))
222 end

```

C. Dynare

Abaixo o código de Dynare com a estimação.

```
var pdstar r de c a y pidd pif pix pi veta rer xl cstar rstar choquem dy dpi tt ttX ttF choquempif cl
varexo epsveta epscstar epsrstar epsm epspif epspix epsc;
parameters beta alphay alphac v rrbar phibar xid xif xix gammad gammaf gammax sigma omega eta rhor rho
rhoFif rhoPix rhoC;
```

%%%

```
%OBS.: IDENTIFICAO EH MT SENSIVEL AO v
```

%%%

```
%%fixed parameters
```

```
beta=0.99;
```

```
alphy=0;
```

```
alphac=0.3;
```

$$v = .85;$$

```
rrbar=1/beta;
```

```
phibar=1-v*beta;
```

```
%rhom=0;
```

```
%sigma=1;
```

```
omega=2;
```

```
%eta=5;
```

```
rhor=0.8;
```

```
phi y=0.125;
```

```
rhoc=0.9;
```

```
rhopif=0.9;
```

```
model(linear);
```

```
r=rstar+de(+1);
```

```

c=-1/sigma*(r-pi(+1))+c(+1)+(1-v)/v*phibar*a+choquec;

pi=(1-alphac)*pidd+alphac*pif;

pidd=beta/(1+gammad*beta)*pidd(+1)+gammad/(1+gammad*beta)*pidd(-1)-(1-beta*xid)*(1-xid)/(xid*(1+gamm
((1-(1-alphay)*(1-alphac))*(tt)-(1-alphay)*(omega*y+sigma*c)+(1-alphay)*(1+omega)*veta);

pif=beta/(1+gammaf*beta)*pif(+1)+gammaf/(1+gammaf*beta)*pif(-1)-(1-beta*xif)*(1-xif)/(xif*(1+gammaf
pix=beta/(1+gammax*beta)*pix(+1)+gammax/(1+gammax*beta)*pix(-1)-(1-beta*xix)*(1-xix)/(xix*(1+gammax
y=(1-alphay)*(1-alphac)*c+(1-(1-alphay)*(1-alphac))*(cstar-eta*pdstar)-eta*alphac*(1-alphay)*(1-alp
a=rrbar*(a(-1)+y-c+(alphac+alphay/(1-alphay))*(-ttx));

r=rhor*r(-1)+(1-rhor)*(phi*pi+phiy*y+phirer*rer)+rd pi*dpi+rdy*dy+choquem; %Taylor rule

%exogenous process
veta=rhoveta*veta(-1)+epsveta;
cstar=rhocstar*cstar(-1)+epscstar;
rstar=rhorstar*rstar(-1)+epsrstar;
choquem=rhom*choquem(-1)+epsm;
choquepif=rhopif*choquepif(-1)+epspif;
choquepix=rhopix*choquepix(-1)+epspix;
choquec=rhoc*choquec(-1)+epsc;

%law of movement
tt=tt(-1)+pidd-pif;
ttf=ttf(-1)+pif-de;

```

```

ttx=ttx(-1)+pix-pidd+de;
rer=rer(-1)+pi+de;
pdstar=pdstar(-1)+pix;
%identities
xl=y-(1-alphac)*(1-alphay)*c;
dpi=pi-pi(-1);
dy=y-y(-1);
dc=c-c(-1);
end;

```

```

steady_state_model;

```

```

pdstar    =0;
r          =0;
de         =0;
c          =0;
a          =0;
y          =0;
pidd       =0;
pif        =0;
pix        =0;
pi         =0;
veta       =0;
rer        =0;
xl         =0;
cstar      =0;
rstar      =0;
choquem    =0;
dy         =0;
dpi        =0;
tt         =0;

```



```

ttx      =0;
ttf      =0;
choquepif =0;
choquepix =0;
choquec  =0;
dc=0;
end;

estimated_params;
xid, beta_pdf, 0.675, 0.05; %domestic rigidity
xif, beta_pdf, 0.5, 0.1;    %import rigidity
xix, beta_pdf, 0.5, 0.1;    %export rigidity

gammad, beta_pdf, 0.5, 0.15; %domestic indexation
gammaf, beta_pdf, 0.5,0.15; %import
gammamax, beta_pdf, 0.5,0.15; %export

sigma, normal_pdf, 1.5, 0.375; %elast. intertemp. subst.
%omega, normal_pdf, 2, 0.75; %elast. frisch
eta, normal_pdf, 1.5, 0.5; %elast. subst. import x domestic goods

%rhorr, beta_pdf, 0.8, 0.05; %interest rate smoothing taylor rule
phi, normal_pdf, 1.7, 0.1; %inflation resp onse TR
rdpi, normal_pdf, 0.3, 0.1; %inflation growth response TR
phirer, normal_pdf, 0, 0.05; %real exchange rate response TR
%phiy, normal_pdf, 0.125, 0.05; %gdp response TR
rdy, normal_pdf, 0.0625, 0.05; %gdp growth response TR

rhoveta, beta_pdf, 0.9, 0.1; %productivity shock persistence
rhorstar, beta_pdf, 0.9, 0.1; %exchange rate shock persistence

```

```

rhocstar, beta_pdf, 0.9, 0.1; %external demand
rhom, beta_pdf, 0.9, 0.1; %monetary shock
%rhopif,beta_pdf,0.9,0.1; %mark-up import sector
rhopix,beta_pdf,0.9,0.1; %mark-up export sector
%rhoc,beta_pdf,0.9,0.1; %preference shock

%inv gamma mean x and 2 degree freedom (shape) (or sd = infinity)
stderr epsm, inv_gamma_pdf, 0.45/3, inf; %moetary shock
stderr epsrstar, inv_gamma_pdf, 0.15/3, inf; %exchange rate shock
stderr epsveta, inv_gamma_pdf, 2.1/3, inf; %product. shock
stderr epspif, inv_gamma_pdf, 0.9/3, inf; %mark-up import
stderr epspix, inv_gamma_pdf, 0.9/3, inf; %mark-up export
stderr epscstar, inv_gamma_pdf, 0.6/3, inf; %foreign demand shock
stderr epsc, inv_gamma_pdf, 0.6/3, inf; %preference shock
end;

varobs pidd pif dy xl pix r;

%estimated_params_init(USE_CALIBRATION);
// xid, 0.675;
// xif, 0.5;
// xix, 0.5;
// gammad,0.5;
// gammaf, 0.5; %indexacao importados
// gammax, 0.5; %indexacao exportados

// sigma, 1.5; %elast. substituicao intertemp.
// omega, 2; %elast. frisch
// eta,1.5; %elast. subst. importados domesticos

```

```

// rhor,0.8; %parametro autoregressivo da TR
// phi,1.7; %inflacao na TR
// rdpi,0.3; %parametro do cresc. da iflacao na TR
// phirer,0; %parametro do cambio na TR
// phiy,0.125; %parametro do pib na TR
// rdy,0.0625; %parametro do cresc. pib na TR

// rhoveta,0.85; %persistencia choque produtivo.
// rhorstar,0.1; %persistencia choque cambial
// rhocstar,0.85; %persistencia choque demanda externa.
// %rhom, beta_pdf, 0.85, 0.1; %persistencia choque monetario
// rhopid,0.85; %mark-up choque no setor domestico
// rhopif,0.85; %mark-up choque no setor importados
// rhopix,0.85; %mark-up choque no setor exportados
// rhoc,0.85; %mark-up choque no setor exportados

// // stderr epsm, 0.1;
// // stderr epsrstar, .1;
// // stderr epsveta, .1;
// // stderr epspid, .1;
// // stderr epspif, .1;
// // stderr epspix, .1;
// // stderr epscstar, .1;
// // stderr epsc, .1;

identification;

options_.gmhmaxlik.number=20000;
options_.gmhmaxlik.nscale=20000;
options_.gmhmaxlik.nclimb =0;

```

```

estimation(datafile=data,xls_sheet=data_77,xls_range=b1:j120,first_obs=1,mode_compute=6,mh_nblocks=3)

%impulso resposta

% shocks;
//var epsveta; stderr 2.1/3;
//var epscstar; stderr 0.2/3;
//var epsm; stderr 0.45/3;
//var epsrstar; stderr 0.15/3;
//var epspid; stderr 0.9;
//var epspif; stderr 0.9/3;
//var epspix; stderr 1/2*0.9/3;
//var epsc; stderr 1/2*0.6/3;
%end;

%stoch_simul(irf=10,nograph);

```

Referências Bibliográficas

- Adolfson, Malin, Stefan Laseen, Jesper Linde, and Mattias Villani**, “Bayesian estimation of an open economy DSGE model with incomplete pass-through,” *Journal of International Economics*, July 2007, 72 (2), 481–511.
- An, Sungbae and Frank Schorfheide**, “Bayesian Analysis of DSGE Models,” *Econometric Reviews*, 2007, 26 (2-4), 113–172.
- Pfeifer, Johannes**, “A Guide to Specifying Observation Equations for the Estimation of DSGE Models,” 2013. mimeo.
- Smets, Frank, Raf Wouters, and Gregory De Walque**, “An estimated two-country DSGE model for the Euro area and the US economy,” *European Central Bank, mimeo*, 2005.