

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Отчёт
по лабораторной работе №2
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил:
Анищенко Михаил Денисович
группа:
5030102/00201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Реализация	2
3	Результаты	2
3.1	ИСЛАУ	2
3.2	Достижение разрешимости	3
3.3	Достижение разрешимости за счет корректировки правой части	3
3.4	Достижение разрешимости за счет корректировки матрицы	4
4	Управление положением максимума распознающего функционала	6
5	Сравнение	9
6	Выводы	9

1 Постановка задачи

Пусть дана интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) (1.1)

$$\begin{cases} [0.5, 1.5] \cdot x_1 + [0.5, 2.5] \cdot x_2 = [1, 7] \\ x_1 + [-3, -1] \cdot x_2 = [-0.5, 0.5] \\ [0.9, 1.1] \cdot x_1 = [2.95, 3.45] \\ [0.9, 1.1] \cdot x_2 = [1.55, 2.05] \end{cases} \quad (1.1)$$

Необходимо найти и проиллюстрировать:

1. Максимум распознающего функционала
2. Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет корректировки правой части
3. Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет корректировки матрицы
4. Оценки вариабельности решения
5. Управление положением максимума распознающего функционала за счет полной корректировки матрицы ИСЛАУ
6. Управление положением максимума распознающего функционала за счет корректировки матрицы ИСЛАУ построчно

2 Реализация

Для решения данной задачи была написана программа на языке Python версии 3.11.4. Дополнительно была использована библиотека Intvalpy 1.5.8.

3 Результаты

3.1 ИСЛАУ

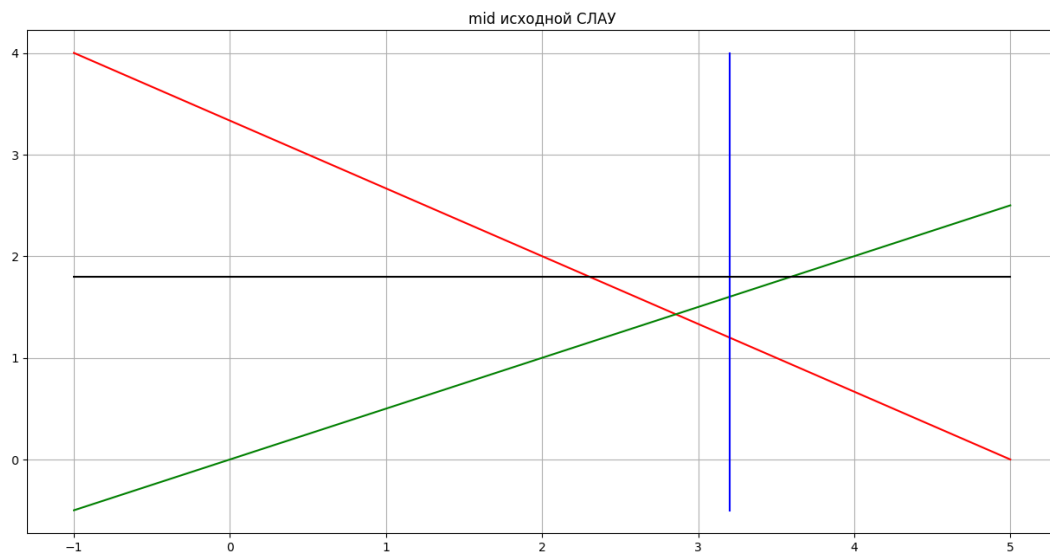


Рис. 1: mid исходной ИСЛАУ

3.2 Достижение разрешимости

Исходная рассматриваемая ИСЛАУ имеет пустое допустовое множество: $\max \text{Tol} = -0.90$, $\arg\max \text{Tol} = (2.80, 1.40)$.

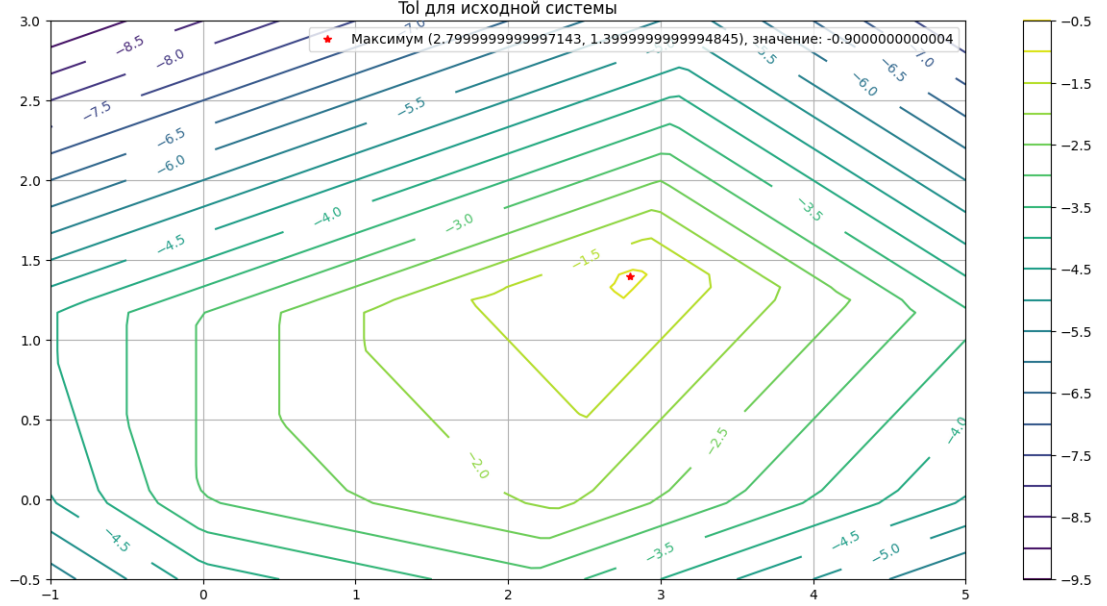


Рис. 2: Tol для исходной системы

3.3 Достижение разрешимости за счет корректировки правой части

Добавим к каждой компоненте правой части величину $K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1]$, где i – номер компоненты, ν_i – вес, задающий расширение компоненты, K – общий коэффициент этого расширения. Будем использовать $\nu_i = 1 \forall i$, чтобы компоненты расширялись одинаково. Подберем K так, чтобы $K + \max_{x \in R^n} \text{Tol} \geq 0$.

Подобрав такое K , получим непустое допустовое множество. Получили $K = 1.35$

Используя вышеописанный способ корректировки, получаем следующие результаты: $\max \text{Tol} = 0.45$, $\arg\max \text{Tol} = (2.80, 1.40)$. Множество решений стало непустым, правая часть приняла вид $b' = ([1.65, 8.35], [-1.85, 1.85], [1.6, 4.8], [0.2, 3.4])$. Допустовое множество перестало быть пустым, $\text{ive}(A, b') = 0.25$, $\text{rve}(A, b') = 0.49$. На графике ниже представлены бруссы с центром в точке $\arg\max \text{Tol}$ и радиусами ive , rve .

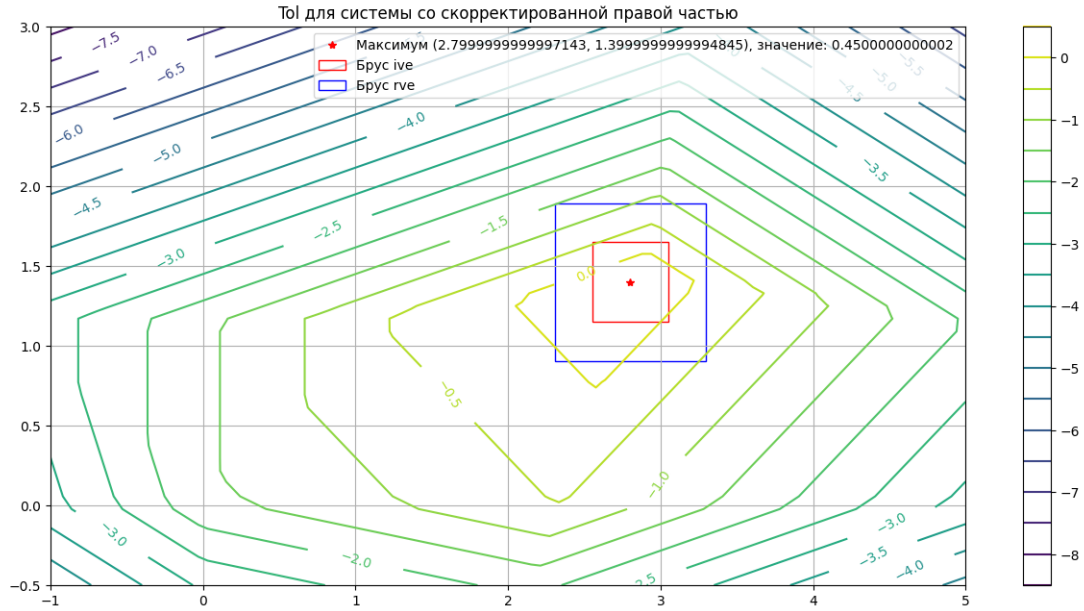


Рис. 3: Tol для системы с корректировкой правой части

3.4 Достижение разрешимости за счет корректировки матрицы

Корректировка левой части происходит по следующей схеме. Заменяем исходную матрицу A на $A \ominus K \cdot N \cdot E$, где K – общий коэффициент сужения матрицы A , $N = \{\nu_{ij}\}$ – матрица весов, E состоит из $[-e_{ij}, e_{ij}]$. При этом необходимо следить, чтобы мы все время оставались в пределах \mathbb{IR} . Возьмем также $K = 1.35$.

Для полной корректировки исходной матрицы системы рекомендуется брать матрицу N , где $\nu_{i,j} = 1 \forall i, j$. В случае корректировки k -ой строки матрицы A берем матрицу N , где $\nu_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.

Возьмем следующую матрицу E :

$$E = \begin{pmatrix} [-0.3, 0.3] & [-0.6, 0.6] \\ [0, 0] & [-0.6, 0.6] \\ [-0.06, 0.06] & [0, 0] \\ [0, 0] & [-0.06, 0.06] \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Тогда получим непустое множество решений, $\max \text{Tol} = 0.10$, $\arg \max \text{Tol} = (3.29, 1.68)$. Сравним начальную матрицу A и скорректированную матрицу A' :

$$A = \begin{pmatrix} [0.5, 1.5] & [0.5, 2.5] \\ 1 & [-3, -1] \\ [0.9, 1.1] & 0 \\ 0 & [0.9, 1.1] \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} [0.905, 1.095] & [1.31, 1.69] \\ 1 & [-2.19, -1.81] \\ [0.981, 1.019] & 0 \\ 0 & [0.981, 1.019] \end{pmatrix} \quad (3.2)$$



Рис. 4: Tol для системы с полной корректировкой левой части

Допусковое множество перестало быть пустым, $\text{ive}(A, b') = 0.09$, $\text{rve}(A, b') = 0.15$. На Рис. 4 представлены брусы с центром в точке argmaxTol и радиусами ive , rve .

4 Управление положением максимума распознающего функционала

Объединим графики для распознающего функционала и уравнений, образующих средние значения интервалов в системе.

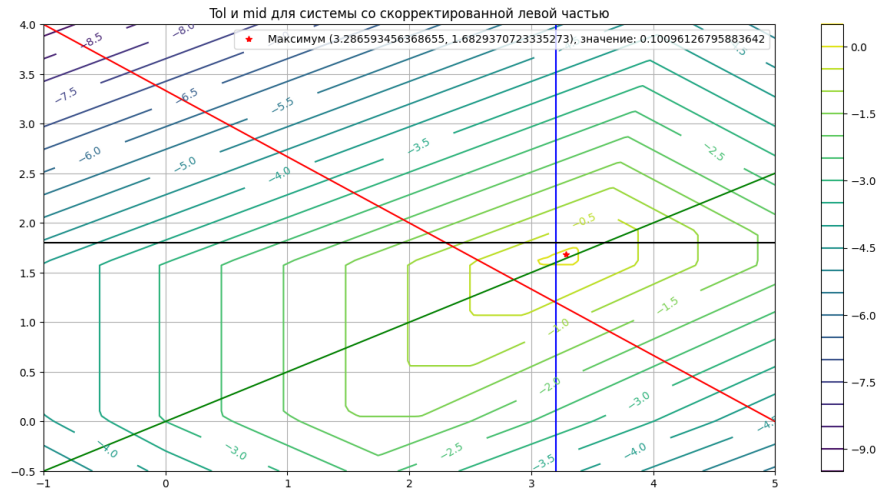


Рис. 5: Tol и mid для системы с корректировкой левой части

Теперь будем производить построчную корректировку матрицы.
Результат корректировки первой строки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1 & [-3, -1] \\ [0.9, 1.1] & 0 \\ 0 & [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\max \text{Tol} = -0.73, \arg\max \text{Tol} = (2.46, 1.23)$$

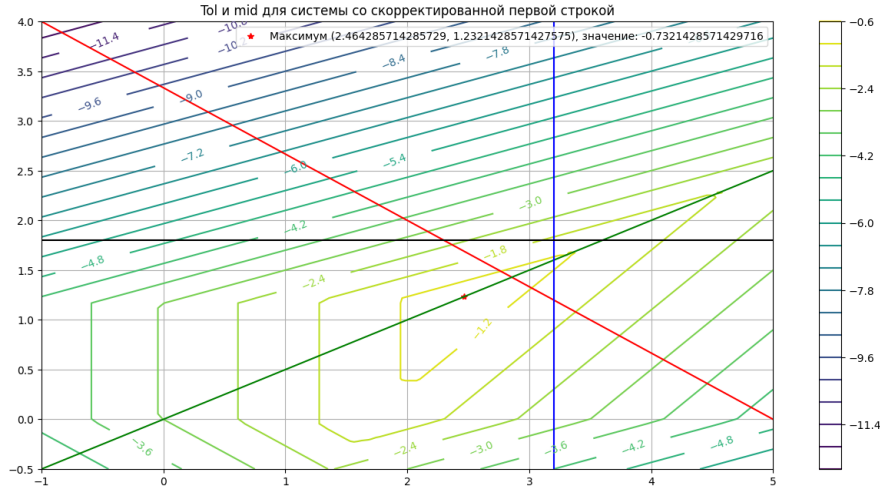


Рис. 6: Tol и mid для системы с корректировкой первой строки матрицы

Результат корректировки второй строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0.5, 1.5] & [0.5, 2.5] \\ 1 & -2 \\ [0.9, 1.1] & 0 \\ 0 & [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$\max \text{Tol} = -0.77$, $\arg\max \text{Tol} = (3.40, 1.07)$

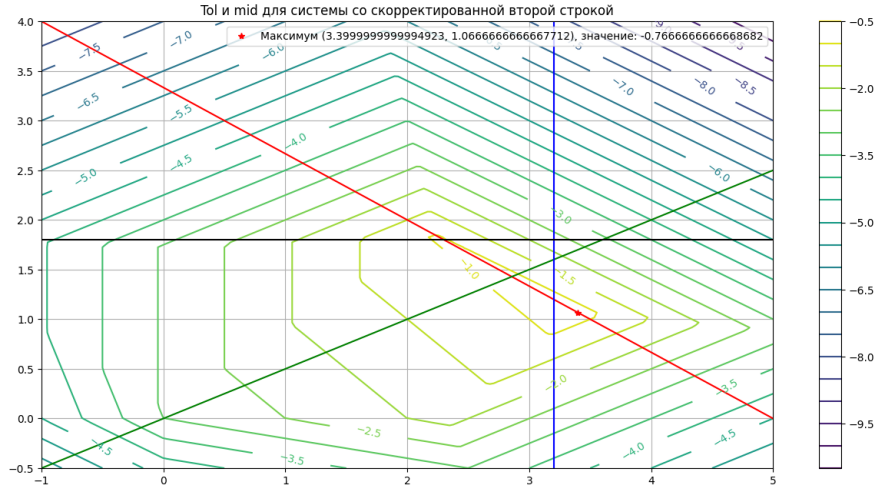


Рис. 7: Tol и mid для системы с корректировкой второй строки матрицы

Результат корректировки третьей строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0.5, 1.5] & [0.5, 2.5] \\ 1 & [-3, -1] \\ 1 & 0 \\ 0 & [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\max \text{Tol} = -0.73, \arg\max \text{Tol} = (2.80, 1.40)$$

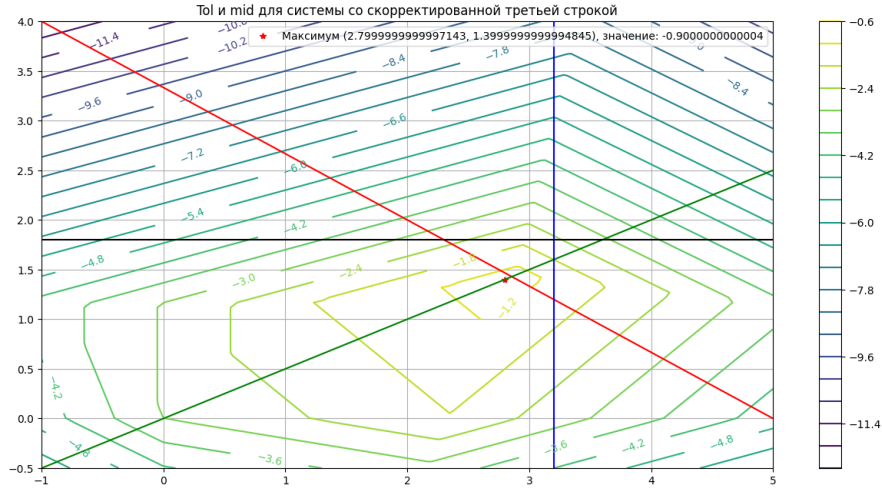


Рис. 8: Tol и mid для системы с корректировкой третьей строки матрицы

Результат корректировки четвёртой строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0.5, 1.5] & [0.5, 2.5] \\ 1 & [-3, -1] \\ [0.9, 1.1] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$\max \text{Tol} = -0.90, \arg\max \text{Tol} = (2.80, 1.40)$$

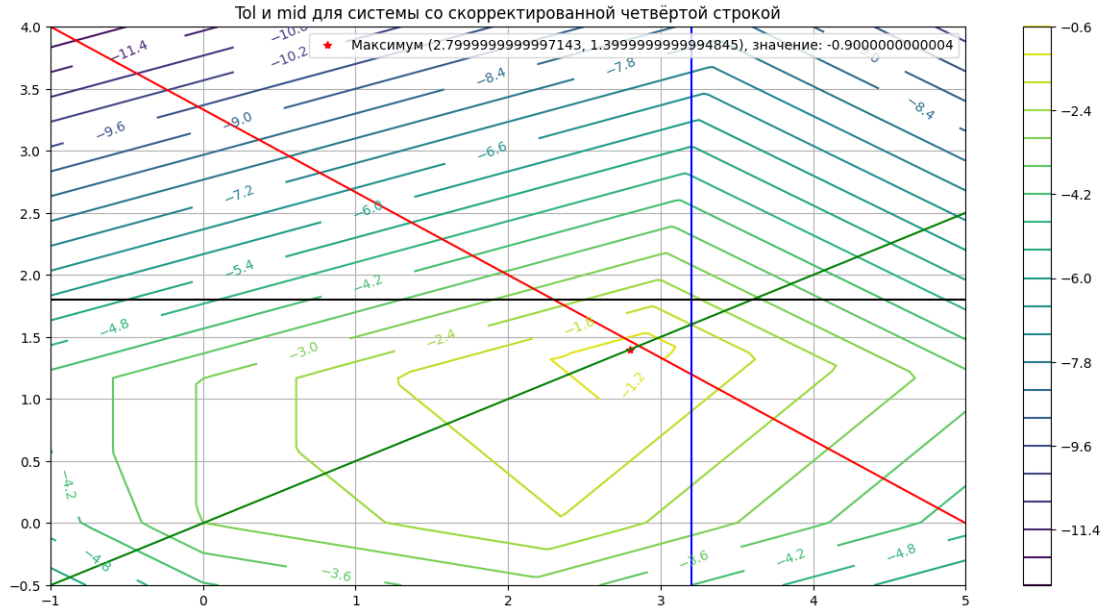


Рис. 9: Tol и mid для системы с корректировкой четвёртой строки матрицы

5 Сравнение

Объект преобразования	argmax Tol	max Tol	Способ коррекции
Правая часть	(2.80, 1.40)	0.45	Увеличим правой части с коэффициентом $K=1.35$
Матрица	(3.29, 1.68)	0.10	Сужение матрицы с коэффициентом $K=1.35$
1-ая строка	(2.46, 1.23)	-0.73	Сведение элементов строки в точечные интервалы
2-ая строка	(3.40, 1.07)	-0.77	Сведение элементов строки в точечные интервалы
3-ая строка	(2.80, 1.40)	-0.73	Сведение элементов строки в точечные интервалы
4-ая строка	(2.80, 1.40)	-0.90	Сведение элементов строки в точечные интервалы

6 Выводы

- Построчным преобразованием не удалось достичь разрешимости данной системы
- Оценки вариабельности меньше при корректировке матрицы. При этом брусы, соответствующие оценкам вариабельности, хорошо оценили допусковое множество итоговой ИСЛАУ.
- Корректировка правой части ИСЛАУ влечет за собой увеличение значений максимума распознающего функционала.
- При корректировке первой и второй строк матрицы максимум распознающего функционала располагается на прямых, соответствующих mid второй и первой строк соответственно.
- При корректировке третьей и четвёртой строк матрицы argmaxTol совпали.
- При корректировке первой и третьей строк max Tol совпали.
- Корректировка матрицы ИСЛАУ влечет за собой изменение формы распознающего функционала при всех преобразованиях, рассмотренных в данной работе.