

ЗАДАНИЕ на лабораторные работы №4

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями III рода и исследование математической модели на основе технологии вычислительного эксперимента.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа, и исследование соответствующей компьютерной математической модели.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Уравнение для функции $T(x, t)$

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{2}{R} \alpha(x) T + k(T) F_0(t) e^{-k(T(x))x} + \frac{2T_0}{R} \alpha(x) \quad (1)$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, & T(x, 0) = T_0, \\ x = 0, & \lambda(T(0)) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_0 (T(0) - T_0), \\ x = l, & -\lambda(T(l)) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_N (T(l) - T_0) \end{cases}$$

2, Значения параметров (все размерности согласованы)

$$\lambda(T) = a_1 (b_1 + c_1 T^{m_1}), \quad \text{Вт/см К},$$

$$c(T) = a_2 + b_2 T^{m_2} - \frac{c_2}{T^2}, \quad \text{Дж/см}^3 \text{К}.$$

$$k(T) = k_0 \left(\frac{T}{300} \right)^2,$$

$$k_0 = 1.0 \text{ см}^{-1},$$

$$a_1 = 0.0134, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4}, \quad m_1 = 1,$$

$$a_2 = 2.049, \quad b_2 = 0.563 \cdot 10^{-3}, \quad c_2 = 0.528 \cdot 10^5, \quad m_2 = 1,$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x-d}, \quad \text{где константы } c, d \text{ находятся из условия, что в точках } x_0, x_N \text{ коэф-}$$

$$\text{фициенты равны } \alpha_0 = 0.05 \text{ Вт/см}^2 \text{ К}, \quad \alpha_N = 0.01 \text{ Вт/см}^2 \text{ К},$$

$$l = 10 \text{ см},$$

$$T_0 = 300\text{K},$$

$$R = 0.5 \text{ см},$$

2. Определен поток излучения $F_0(t)$ при $x = 0$

$$F_0(t) = \frac{F_{\max}}{t_{\max}} t \exp(-(t/t_{\max} - 1)),$$

где F_{\max}, t_{\max} - амплитуда импульса потока и время её достижения (Вт/см^2 и с).

Для отладки принять $F_{\max} = 50 \text{ Вт/см}^2$, $t_{\max} = 60 \text{ с}$.

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы).

Сформулированная математическая модель описывает нестационарное температурное поле $T(x, t)$ вдоль цилиндрического стержня радиуса R и длиной l , причем $R \ll l$ и температуру можно принять постоянной по радиусу цилиндра. Таким образом, поле $T(x, t)$ зависит от координаты x и меняется во времени t . Ось x направлена вдоль оси цилиндра, и начало координат совпадает с левым торцом стержня. Слева при $x = 0$ в цилиндр поступает импульс потока излучения $F_0(t)$ меняющийся во времени по заданному закону. Поглощение этого излучения в стержне служит источником тепловыделения, которое его нагревает. Стержень со всех сторон обдувается воздухом, температура которого равна T_0 . В результате происходит съем тепла с цилиндрической поверхности и двух торцов: с левого торца при $x = 0$ и правого торца при $x = l$.

Функции $\lambda(T), c(T), k(T)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности, теплоемкости и оптического поглощения материала стержня, и они привязаны к температуре, α - коэффициент теплоотдачи при обдуве.

Если в настоящей работе задать поток постоянным, т.е. $F_0(t) = \text{const}$, то будет происходить формирование температурного поля от начальной температуры T_0 до некоторого установившегося (стационарного) распределения $T(x, t)$. Это поле в дальнейшем с течением времени меняться не будет. Это полезный факт для тестирования программы.

Если после разогрева стержня положить поток $F(t)=0$, то будет происходить *остывание*, пока температура не выровняется по всей длине и не станет равной T_0 .

При произвольной зависимости потока $F(t)$ от времени температурное поле будет некоторым сложным образом отслеживать поток.

Замечание. Варьируя параметры задачи, следует обращать внимание на то, что решения, в которых температура превышает примерно 2000K, физического смысла не имеют и практического интереса не представляют.

Результаты работы.

1. Алгоритм и программа, реализующие решение сформулированной задачи методом конечных разностей.

2. Исследование по выбору оптимальных шагов по времени τ и пространству h . Шаги должны быть максимально большими при сохранении устойчивости разностной схемы и заданной точности расчета.

Рассмотреть влияние на получаемые результаты амплитуды импульса F_{\max} и времени t_{\max} (определяют крутизну фронтов и длительность импульса).

Точность расчета можно оценить разными способами.

1) Уменьшая шаги и наблюдая сходимость решений в фиксированной пространственной точке и в фиксированный момент времени.

2) Проверяя, соблюдается ли при выбранных шагах h, τ баланс мощности после выхода на стационарное распределение температуры (в установившемся режиме), реализующееся при $F(t)=\text{const}$, т.е. в этом режиме должно выполняться условие: отводимая мощность равна подводимой. Имеем

$$\pi R^2 (-F_0 + F_N) + 2\pi R \int_0^l \alpha (T(x, t_M) - T_0) dx = \pi R^2 F_0(t) \int_0^l k(T(x)) e^{-k(T(x))x} dx$$

,

окончательно

$$\left| \frac{-F_0 + F_N + \frac{2}{R} \int_0^l \int \alpha [T(x, t_M) - T_0] dx}{F_0(t) \int_0^l k(T(x)) e^{-k(T(x))x} dx} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Здесь

$$F_0 = -\lambda(T(0)) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad F_N = -\lambda(T(0)) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l}.$$

Задать точность ε примерно 10^{-2} . Здесь t_M - время выхода на стационарный режим, т.е. когда температура перестает меняться с заданной точностью.

Замечание. Варьируя параметры задачи, следует иметь ввиду, что решения, в которых температура превышает значения примерно 2000K, физического смысла не имеют и практического интереса не представляют.

3. График зависимости температуры $T(0,t)$ при 3-4 значениях параметров a_2 и/или b_2 теплоемкости.

Справка. С ростом теплоемкости темп нарастания температуры снижается.

4. График зависимости температуры $T(0,t)$ (т.е. при $x = 0$) в частотном режиме теплового нагружения. Импульсы следуют один за другим с заданной частотой ν (частота определяется количеством импульсов в 1 секунду).

Показать, что при большом количестве импульсов температурное поле выходит на регулярный режим, т.е. начинает в точности воспроизводиться от импульса к импульсу.

Продемонстрировать, как по мере роста частоты импульсов размах колебаний температуры уменьшается (вплоть до нуля), т.е. реализуется квазистационарный режим. Проследить, чтобы импульсы не перекрывались на уровне 0.35 от $F_{\text{пик}}$.

Методика оценки работы.

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Разработана программа, проведено тестирование, выполнены пункты 1-3 Задания, обнаружено понимание технологии исследования в математическом моделировании - 18 баллов (минимум).

2. Проведено детальное исследование по всем пунктам задания и любых других вопросов, сформулированных автором в инициативном порядке по теме работы в различных компонентах вычислительного эксперимента: модель, алгоритм, программа, исследование предметной области – 19-30 баллов (максимум).