

ЗАДАНИЕ на лабораторную работу №5

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе многомерных дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями III рода и исследование математической модели на основе технологии вычислительного эксперимента.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи для линейного многомерного уравнения эллиптического типа, и исследование соответствующей математической модели.

Исходные данные.

1. Уравнение модели.

Вариант 1. Математическая модель в самом общем квазилинейном виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f(x, z) = 0.$$

Более простые варианты модели.

Вариант 2. Линейная математическая модель с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, z) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(x, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f(x, z) = 0.$$

Вариант 3. Математическая модель с постоянными коэффициентами $\lambda(x, z) \equiv \lambda$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{f(x, z)}{\lambda} = 0.$$

Результатом решения задачи является функция $u(x, z)$.

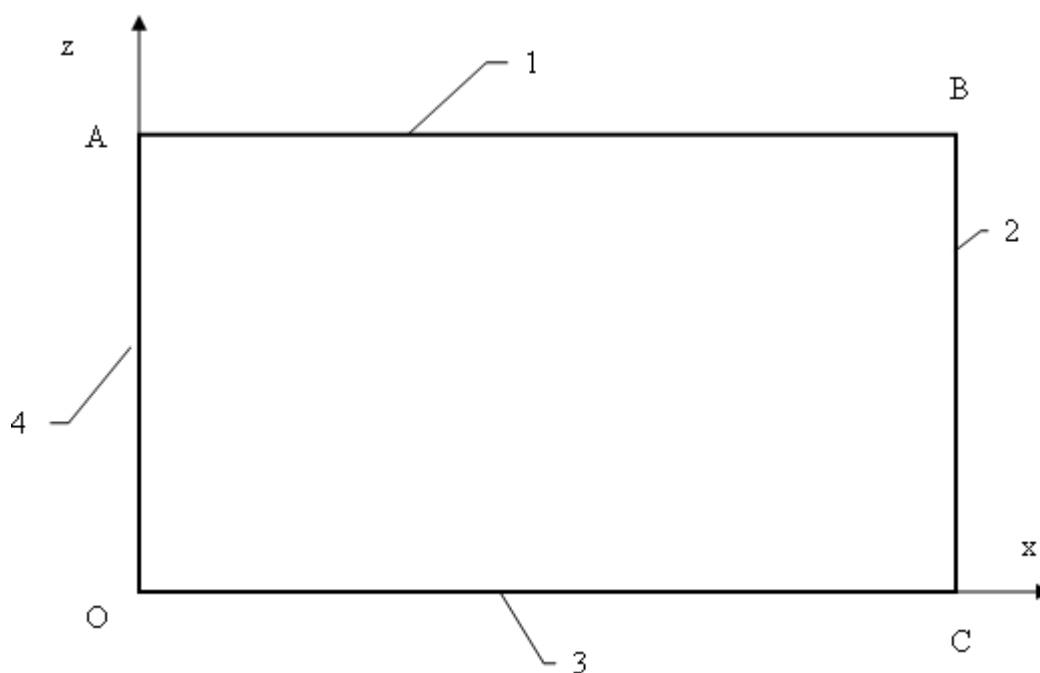
2. Область решения и краевые условия (КУ)

Область изображена на рисунке и представляет собой прямоугольник OABC.

На границах 1-4 области задаются три варианта **краевых условий КУ** – I, II и III родов. Все размеры области заданы, т.е. заданы координаты точек A, B, C (см. рисунок).

Указанные краевые условия на поверхностях 1-4 можно ставить в разных комбинациях. Для примера, рассмотрим 3 варианта постановки краевых условий на границах 1-

4. Пусть для этого прямоугольника размеры $OC=a$, $OA=b$. Тогда на границах 4, 2, 3 и 1



краевые условия могут быть поставлены следующим образом, соответственно.

Вариант 1 (граница 4 – КУ II рода, остальные границы- КУ III рода):

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0, \text{ граница 4, } -k(u(0,z)) \frac{\partial u}{\partial x} = F_0, \\ x=a, \text{ граница 2, } -k(u(a,z)) \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 (u(a,z) - u_0), \\ z=0, \text{ граница 3, } k(u(x,0)) \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_3 (u(x,0) - u_0), \\ z=b, \text{ граница 1, } -k(u(x,b)) \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_4 (u(x,b) - u_0) \end{array} \right.$$

Вариант 2 все КУ –III рода):.

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0, \quad k(u(0,z)) \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1 (u(0,z) - u_0), \\ x=a, \quad -k(u(a,z)) \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 (u(a,z) - u_0), \\ z=0, \quad k(u(x,0)) \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_3 (u(x,0) - u_0), \\ z=b, \quad -k(u(x,b)) \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_4 (u(x,b) - u_0) \end{array} \right.$$

Вариант 3 (все КУ –I рода):

$$\begin{cases} x = 0, & u(0, z) = u_0, \\ x = a, & u(a, z) = u_0, \\ z = 0, & u(x, 0) = u_0, \\ z = b, & u(x, b) = u_0. \end{cases}$$

Еще раз отметим, что можно написать и многие другие комбинации краевых условий на поверхностях 1-4, ориентируясь на написанные выше условия.

Значения коэффициентов задачи (все размерности согласованы).

В квазилинейном уравнении

$$\lambda(u) = a_1(b_1 + c_1 u^{m_1}), \quad \text{Вт/см К.} \quad (1)$$

$$a_1 = 0.0134, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4}, \quad m_1 = 1,$$

В линейном варианте $\lambda(x, z)$ задается пользователем аналитически или в виде двумерной таблицы. Можно ориентироваться на значения, даваемые формулой (1).

Параметры α_i варьируются в диапазоне 0.05-1.0 Вт/см² К, (i=1,2,3,4).

Для отладки программы геометрические размеры прямоугольника можно принять $a = b = 10$ см.

Можно взять значение $u_0 = 300\text{К}$, значение потока при $x = 0$ $F_0 = 30$ Вт/см².

В качестве примера функции источников можно взять распределение вида $f(x, z) = f_0 e^{-\beta[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]}$, параметры f_0, β варьируются исходя из условия, чтобы максимум решения уравнения - функции $u(x, z)$ не превышал 3000К. Коэффициент β - положительный, координаты x_0, z_0 центра распределения функции $f(x, z)$ задаются пользователем.

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы).

Сформулированная математическая модель описывает двумерное температурное поле $u(x, z)$ в тонкой прямоугольной пластине с размерами $a \times b$. Температура по толщине пластины (третьей координате) принимается постоянной. Функция $f(x, z)$ пред-

ставляет внутренние объемные источники тепловыделения, например, за счет поглощения излучения в полупрозрачном материале пластины. Излучение может представлять собой, например, узконаправленный луч лазера. Краевые условия в варианте 1 соответствуют нагружению объекта тепловым потоком F_0 с одной стороны $x = 0$, постоянным вдоль координаты z , и отводу тепла с трех других сторон при заданной температуре окружающей среды u_0 . Можно считать, что пластина по этим границам охлаждается воздухом или водой, температура которых равна u_0 , с коэффициентами теплоотдачи α_i , в общем случае отличающимися для каждой из сторон.

Функция $\lambda(x, z)$ является коэффициентом теплопроводности материала стержня.

3. Условия выполнения работы

Модель для последующей программно-алгоритмической реализации строится студентом самостоятельно. Можно выбрать:

- 1) любой вариант уравнения из представленных выше трех,
- 2) любой тип краевых условий, описанных выше. Хотя варианты краевых условий могут быть любыми, однако они не должны противоречить физическому смыслу задачи, иначе получение решения невозможно. Например, нельзя ставить на всех 4 границах КУ II рода, соответствующее при определенных знаках у потока подводу тепла к пластине. Учитывая наличие объемных источников тепла, хотя бы на одной границе надо принять, что тепло отводится от объекта.

Для справки укажем, что в варианте 1 краевых условий на границе 4 тепло подводится, а на остальных 1-3 границах - отводится от пластины. В варианте 2 КУ на всех границах тепло отводится.

Результаты работы.

1. Алгоритм и программа, реализующие решение сформулированной задачи методом конечных разностей.
2. Исследование по выбору оптимальных шагов по времени τ и пространству h_x, h_z . Шаги должны быть максимально большими при сохранении устойчивости разностной схемы и заданной точности расчета.

Точность расчета можно оценить разными способами.

- 1) Уменьшая шаги и наблюдая сходимость решений в фиксированной пространственной точке.

2) Проверять, соблюдается ли при выбранных шагах h, τ баланс мощности после выхода на стационарное распределение температуры (в установившемся режиме), в этом режиме должно выполняться условие: отводимая мощность равна подводимой.

3. Трёхмерный график температуры $u(x, z)$.

4. Одномерные графики зависимости температуры $u(x, z)$ от одной координаты при фиксированной другой.

Методика оценки работы.

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Задание полностью выполнено - 9 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на все вопросы - 15 баллов (максимум).