Πολυτεχνείο Κρήτης

Σχολή ΗΜΜΥ

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

Παράδοση 2ης εργασίας

Ημερομηνία Παράδοσης: 30 Μαΐου 2024

Μονάδες 100/1000

Ομάδα 25

	Φοιτητής 1	Φοιτητής 2
Επώνυμο	Σιώτος	Αγγελόπουλος
Όνομα	Μόδεστος	Γιώργος
Α.Μ.	2016030030	2016030083

Ώρες που απαιτήθηκαν για την υλοποίηση της άσκησης ≈ 12

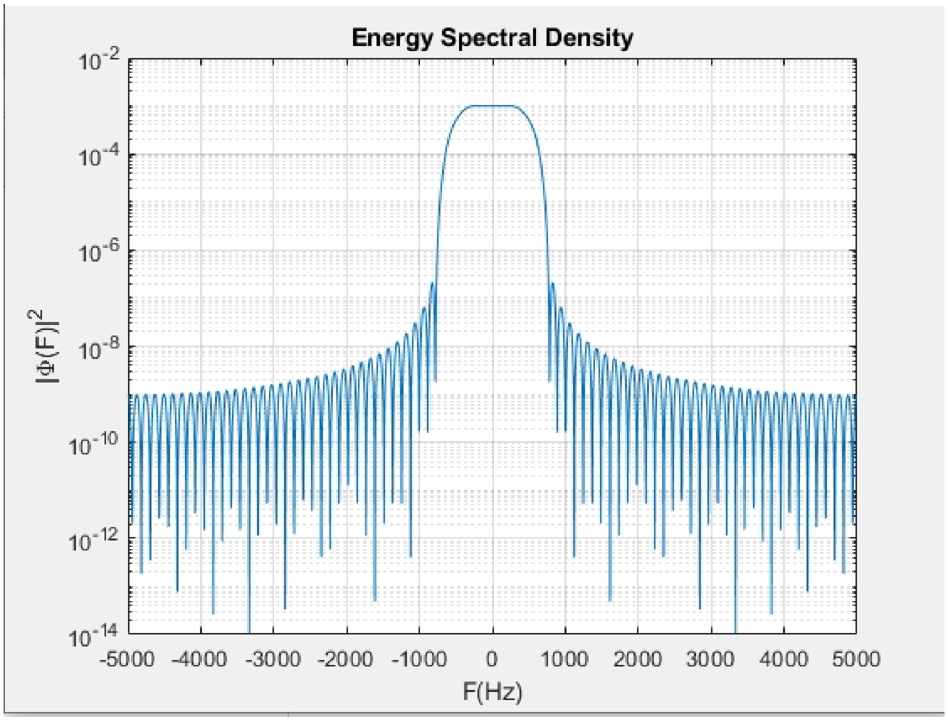
Περιεχόμενα

A Μελέτη φασματικού περιεχομένου PAM κυματομορφών

A.1 Υπολογισμός $|\Phi(F)|$ και σχεδίαση $|\Phi(F)|^2$

Αρχικά δημιουργούμε αποκομμένο παλμό *SRRC* $\phi(t)$ με τις δοσμένες τιμές της εκφώνησης και τη συνάρτηση *srrc_pulse*.
Με τη χρήση των *fft*, *fftshift* υπολογίζουμε το μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier* της $\phi(t)$, $|\Phi(F)|$ σε $N_f = 2048$ ισαπέχοντα σημεία.
Κατόπιν, σχεδιάζουμε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ με τη χρήση της εντολής *semilogy*.

```
%Askisi A
%A1
clear all;
close all;
clc;

T = 10 ^ (-3);
over = 10;
Ts = T/over;
A = 4;
a = 0.5;
Nf=2048;


[phi, t1] = srrc_pulse (T, Ts, A, a);

Fs=1/Ts;

F = (-Fs/2):(Fs/Nf):(Fs/2)-(Fs/Nf);

Ft = fftshift(fft(phi,Nf))*Ts;

ESD=abs(Ft).^2;

figure();
semilogy(F,ESD);
grid on;
title('Energy Spectral Density');
xlabel('F(Hz)');
ylabel('|\Phi(F)|^2');
```



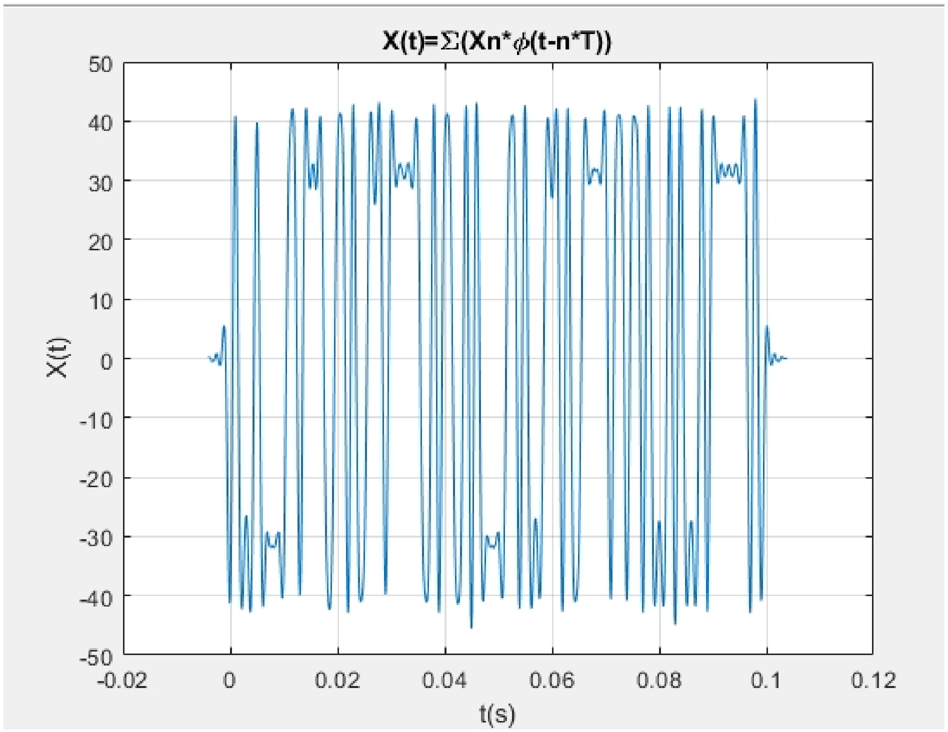
Σχήμα 1: Φασματική ενέργεια πυκνότητας με *semilogy*

A.2 2-PAM απεικόνιση δυαδικής σειράς

Έχουμε όπως και στην 1η άσκηση, μια διαμόρφωση 2-PAM, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση *bits_to_2PAM* που υλοποιήσαμε τότε, για να απεικονίσουμε τα bits σε σύμβολα X_n. Η $X(t)$ κατασκευάζεται κάνοντας upsample τη X_n κατά over και έπειτα κάνοντας συνέλιξη με τον παλμό SRRC.

```
%A2
N=100;

b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
X_n = bits_to_2PAM(b);
X_d=1/Ts*upsample(X_n,over);
t_Xd = 0:Ts:N*T-Ts;
X_t =conv(X_d,phi)*Ts;
t_conv = min(t1)+min(t_Xd):Ts:max(t1)+max(t_Xd);


figure()
plot(t_conv,X_t)
title('X(t)=\Sigma(Xn*\phi(t-n*T))');
```

```
xlabel('t(s)');
ylabel('X(t)');
grid on
```



Σχήμα 2: Προσωμοίωση του $X(t)$

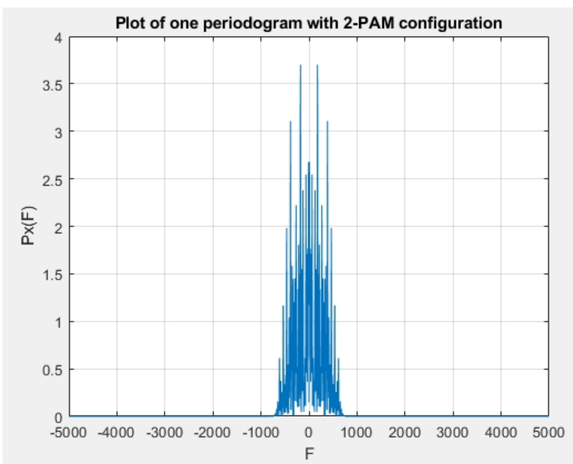
A.3 Περιοδόγραμμα και φασματική πυκνότητα ισχύος 2-PAM

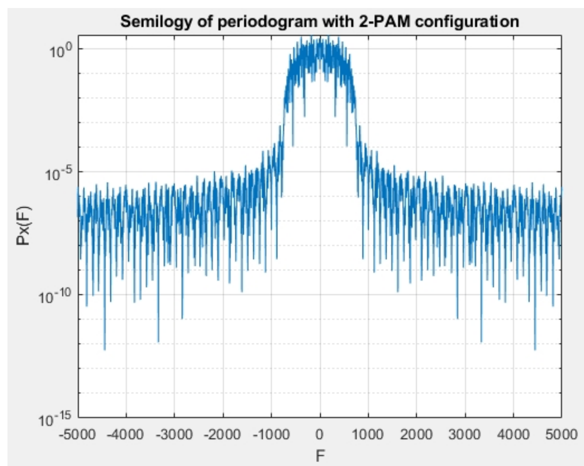
Αρχικά, υπολογίζουμε το περιοδόγραμμα μιας υλοποίησης της $X(t)$:

$$P_X(F) = \frac{|\mathcal{F}[X(t)]|^2}{T_{\text{total}}}$$

```
%A3
T_total=length(t_conv)*Ts;
XF=fftshift(fft(X_t,Nf)*Ts);
P_x=(abs(XF).^2)/T_total;

%plot
figure();
plot(F,P_x)
title('Plot of one periodogram with 2-PAM configuration');
xlabel('F');
```

```
ylabel('Px(F)')
grid on;

%semilogy
figure();
semilogy(F, P_x);
title('Semilogy of periodogram with 2-PAM configuration');
xlabel('F');
ylabel('Px(F)')
grid on;
```

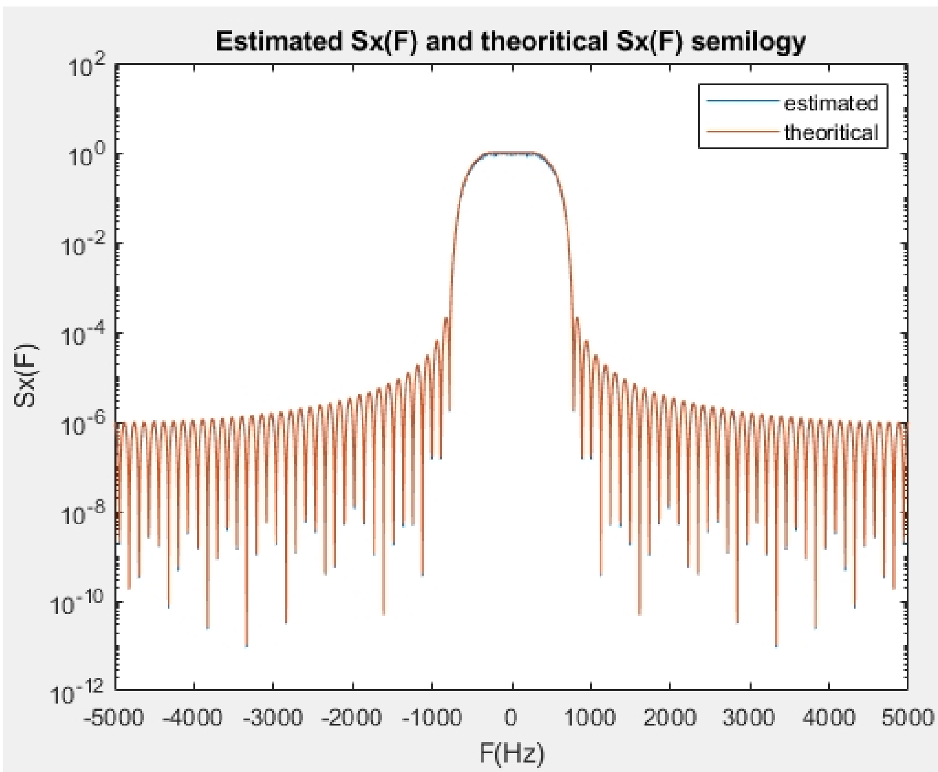




Κατόπιν, σχεδιάζουμε σε κοινό semilogy την θεωρητική πυκνότητα ισχύος και την εκτίμηση για $K = 500$ υλοποιήσεις περιοδοδιαγραμμάτων, όπου η θεωρητική τιμή προκύπτει από τον τύπο του ερωτήματος A.2.

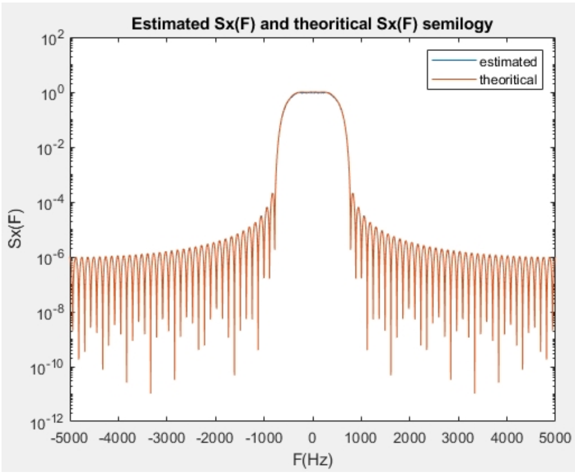
```
K = 500;
sum=0;

for k=0:K-1
b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
X_n=bits_to_2PAM(b);
X_d=1/Ts*upsample(X_n,over);
X_t=conv(phi,X_d)*Ts;
XF=fftshift(fft(X_t,Nf)*Ts);
P_x=abs(XF).^2/T_total;
sum=sum+P_x;
end

Sx=sum/K;
```

```
Sx_th= (var(X_n)/T).*(ESD);


figure();
semilogy(F,Sx,F,Sx_th);
title('Estimated Sx(F) and theoritical Sx(F) semilogy');
xlabel('F(Hz)');
ylabel('Sx(F)');
legend('estimated', 'theoritical');
```

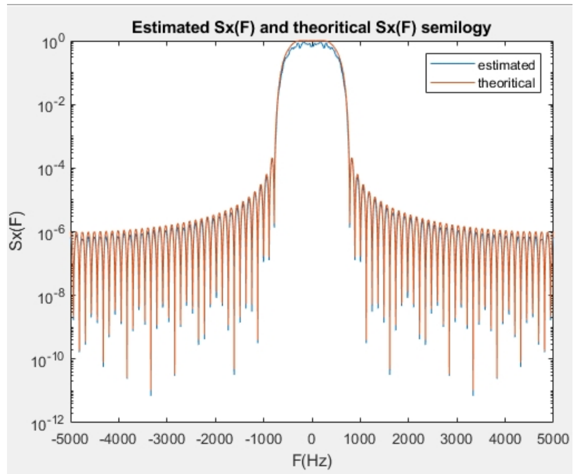


Σχήμα 3: Κοινό semilogy για K=500, N=100

Για K = 500 που χρησιμοποιήθηκε, η προσέγγιση μας είναι πολύ καλή κρίνοντας από τη γραφική αναπαράσταση.
Έπειτα διπλασιάσαμε τις τιμές του K και του N (K = 1000, N = 200)και μετά τις υποτετραπλασιάσαμε από τις αρχικές τους (K = 125, N = 25) για να εντοπίσουμε, πως αυτές οι αλλαγές θα επηρεάσουν τις μετρήσεις μας. Παρατηρώντας τα κοινά semilogy, είναι εμφανές ότι στην περίπτωση που αυξήσαμε τις παραμέτρους, η προσέγγιση μας είναι σχεδόν τέλεια, αφού η θεωρητική πυκνότητα ισχύος φαίνεται να ταυτίζεται με την εκτίμηση, ενώ αντίθετα όταν τα μειώσαμε παρατηρήσαμε μια αστάθεια και η προσεγγιση μας πλέον δεν είναι τόσο ακριβής.



Σχήμα 4: Κοινό semilogy για K=1000, N=200



Σχήμα 5: Κοινό semilogy για K=125, N=25

A.4 Περιοδόγραμμα και φασματική πυκνότητα ισχύος 4-PAM

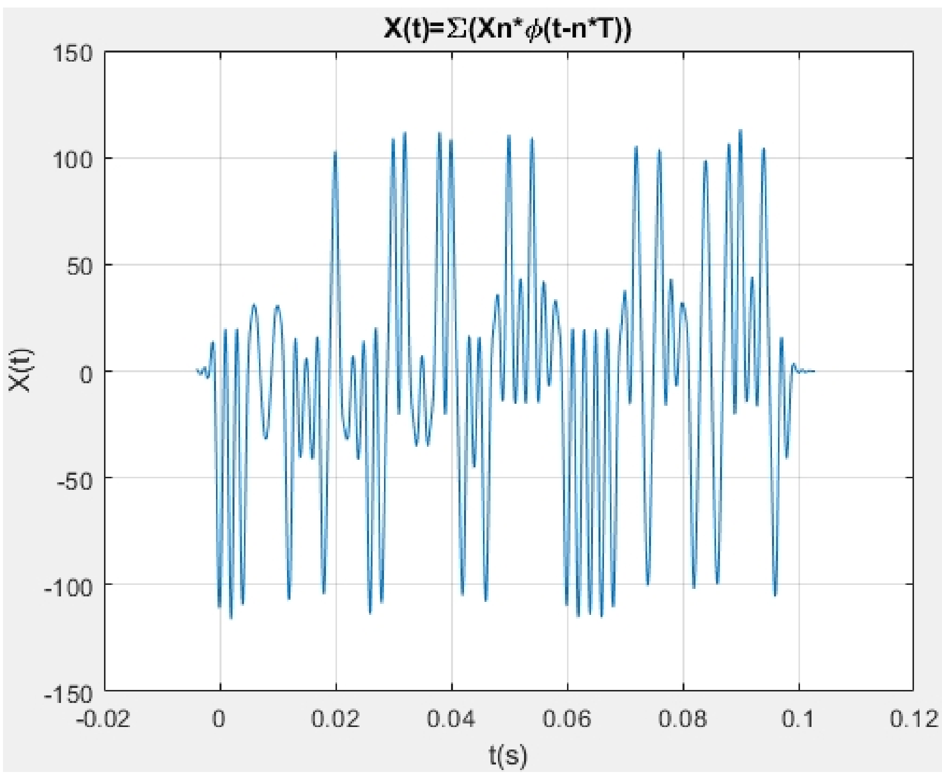
Για το συγκεκριμένο υποερώτημα, σε πρώτη φάση κατασκευάσαμε μία νέα συνάρτηση *bits_to_4PAM*.

```
function [X] = bits_to_4PAM(b)
for k=1:2:length(b)
if b(k)==0 && b(k+1)==0
X(k) = 3;
elseif(b(k)==0 && b(k+1)==1)
X(k)=1;
elseif(b(k)==1 && b(k+1)==1)
X(k)=-1;
elseif(b(k)==1 && b(k+1)==0)
X(k)=-3;
else
disp('Error')
return
end
end
```

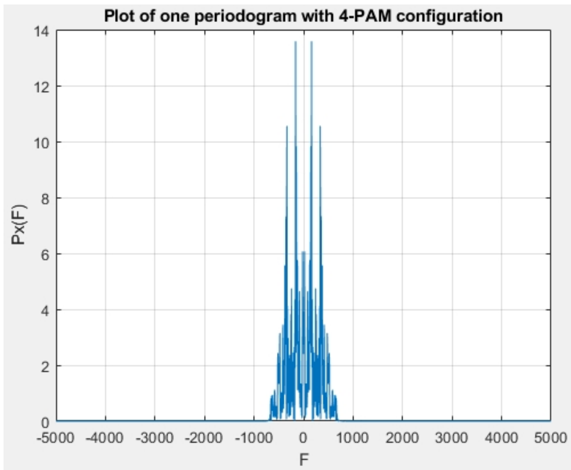
Στη συνέχεια ακολουθήσαμε παρόμοια διαδικασία με το υποερώτημα A.2 για να κατασκευάσουμε τη ζητούμενη κυματομορφή:

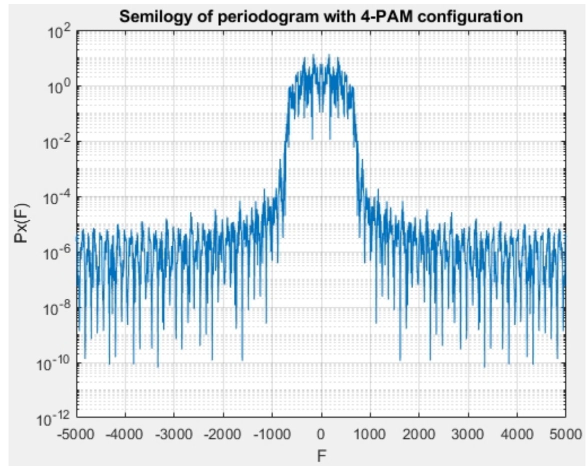
$$X(t) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \phi(t - nT)$$

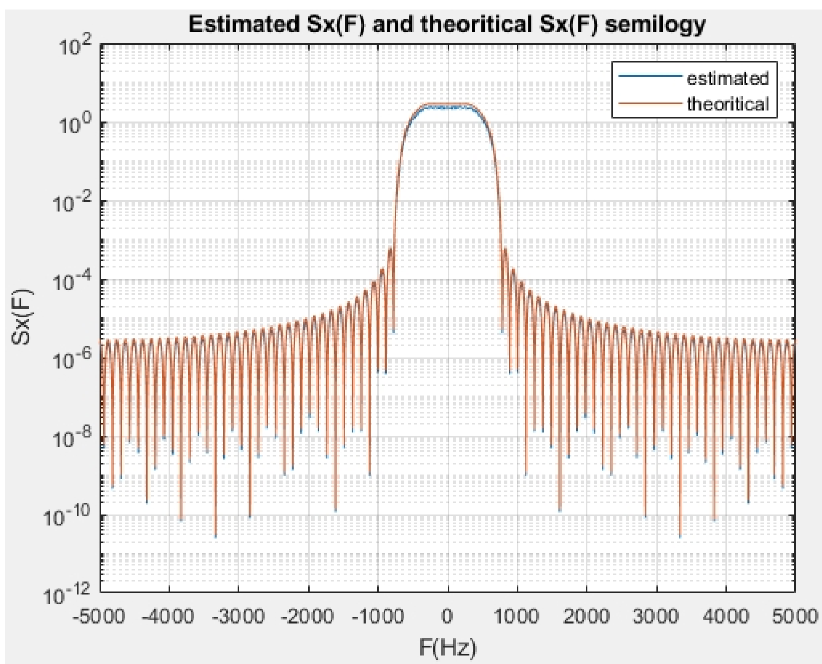
Και με παρόμοια διαδικασία με το υποερώτημα A.3 υπολογίσαμε το περιοδόγραμα και υπολογίσαμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της X(t).
Πρακτικά αυτό που θα αλλάξει θα είναι η τιμή της διασποράς: $var(X_n) = \frac{3^2+1^2+(-3)^2+(-1)^2}{2} = 5$
Ακολουθούν παρακάτω τα διαγράμματα, συμπεράσματα και όλος ο κώδικας για το A.4.



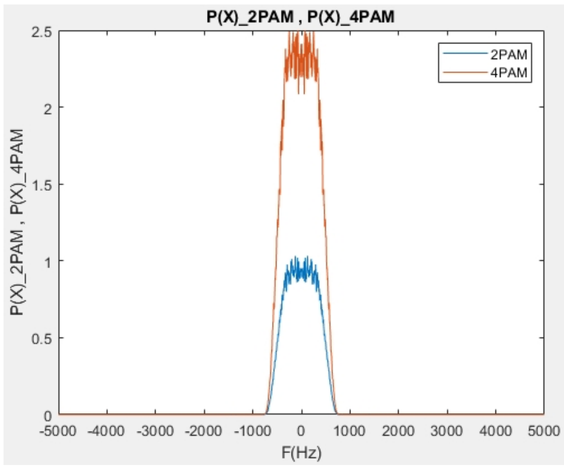
Σχήμα 6: Προσωμοίωση του $X(t)$



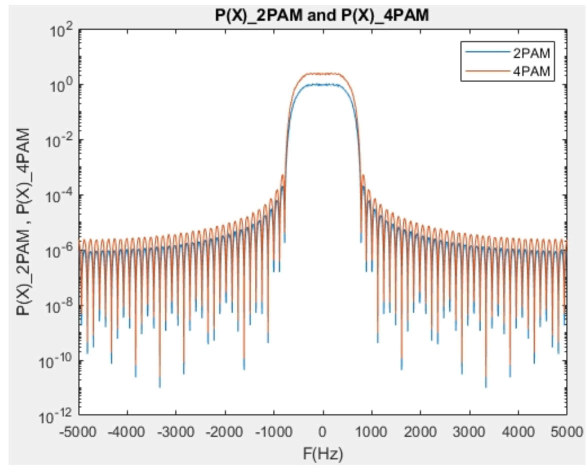




Σχήμα 7: Κοινό semilogy για K=500, N=100



Σχήμα 8: Κοινό plot για 2-PAM, 4-PAM



Σχήμα 9: Κοινό semilogy για 2-PAM, 4-PAM

Συγκρίνοντας τις φασματικές πυκνότητες για 2-PAM, 4-PAM παρατηρούμε σε πρώτη φάση ότι οι γραφικές έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Μέσω των διαγραμμάτων παρατηρούμε οτι το εύρος φάσματος θα είναι το ίδιο, πράγμα λογικό αφού όπως γνωρίζουμε από τον τύπο του BW, εξαρτάται μόνο απο το T που είναι σταθερό στην περίπτωση μας. Η μεγάλη διαφορά παρατηρείται στο πλάτος των κυματομορφών εξαιτίας της μεγαλύτερης τιμής διασποράς, στην περίπτωση του 4-PAM.

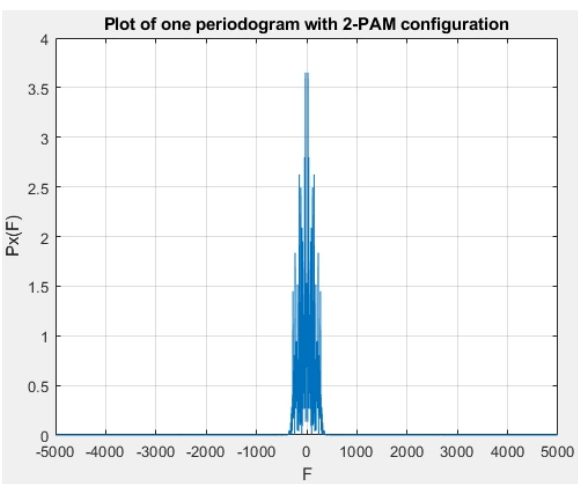
```
%A4
b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
X_n_4 = bits_to_4PAM(b);
t_Xd_4=(0:Ts:length(X_n_4)*T-Ts);
X_d_4=1/Ts*upsample(X_n_4,over);
X_t_4 =conv(phi,X_d_4)*Ts;
t_conv_4= min(t1)+min(t_Xd_4):Ts:max(t1)+max(t_Xd_4);

figure()
plot(t_conv_4,X_t_4);
title('X(t)=\Sigma(Xn*\phi(t-n*T))');
xlabel('t(s)');
ylabel('X(t)');
grid on

T_total=length(t_conv_4)*Ts;
XF_4=fftshift(fft(X_t_4,Nf))*Ts;
P_x_4=(abs(XF_4).^2)/T_total;

sum_4=0;

for k=0:K-1
```

```
b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
X_n_4 = bits_to_4PAM(b);
X_d_4=1/Ts*upsample(X_n_4,over);
X_t_4 = conv(phi,X_d_4)*Ts;
XF_4=fftshift(fft(X_t_4,Nf))*Ts;

P_x_4=(abs(XF_4).^2)/T_total;
sum_4=sum_4+P_x_4;

end

Sx_4=sum_4/K;
Sx_th_4= (var(X_n_4)/T).*(ESD);


%plot
figure();
plot(F,P_x_4)
title('Plot of one periodogram with 4-PAM configuration');
xlabel('F');
ylabel('Px(F)')
grid on;


%semilogy
figure();
semilogy(F, P_x_4);
title('Semilogy of periodogram with 4-PAM configuration');
xlabel('F');
ylabel('Px(F)')
grid on;

figure();
semilogy(F,Sx_4,F,Sx_th_4);
title('Estimated Sx(F) and theoritical Sx(F) semilogy');
xlabel('F(Hz)');
ylabel('Sx(F)');
legend('estimated', 'theoritical');
grid on;

figure()
```

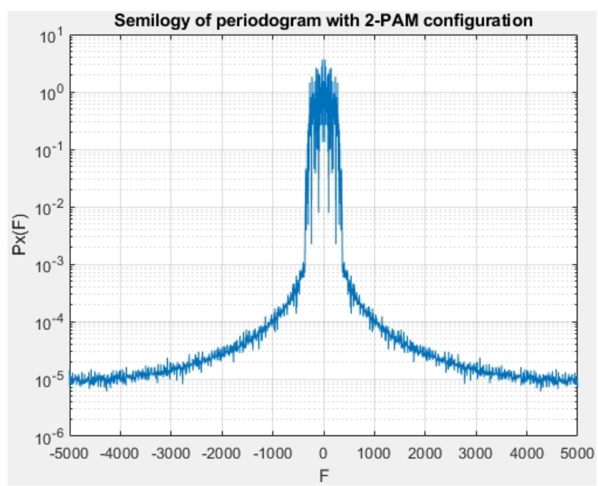
```
semilogy(F,Sx,F,Sx_4);
title('P(X)\_2PAM and P(X)\_4PAM')
xlabel('F(Hz)');
ylabel('P(X)\_2PAM , P(X)\_4PAM')
legend('2PAM','4PAM')

figure()
plot(F,Sx,F,Sx_4);
title('P(X)\_2PAM , P(X)\_4PAM')
xlabel('F(Hz)');
ylabel('P(X)\_2PAM , P(X)\_4PAM')
legend('2PAM','4PAM')
```

A.5 Περιοδόγραμμα και φασματική πυκνότητα ισχύος για T′

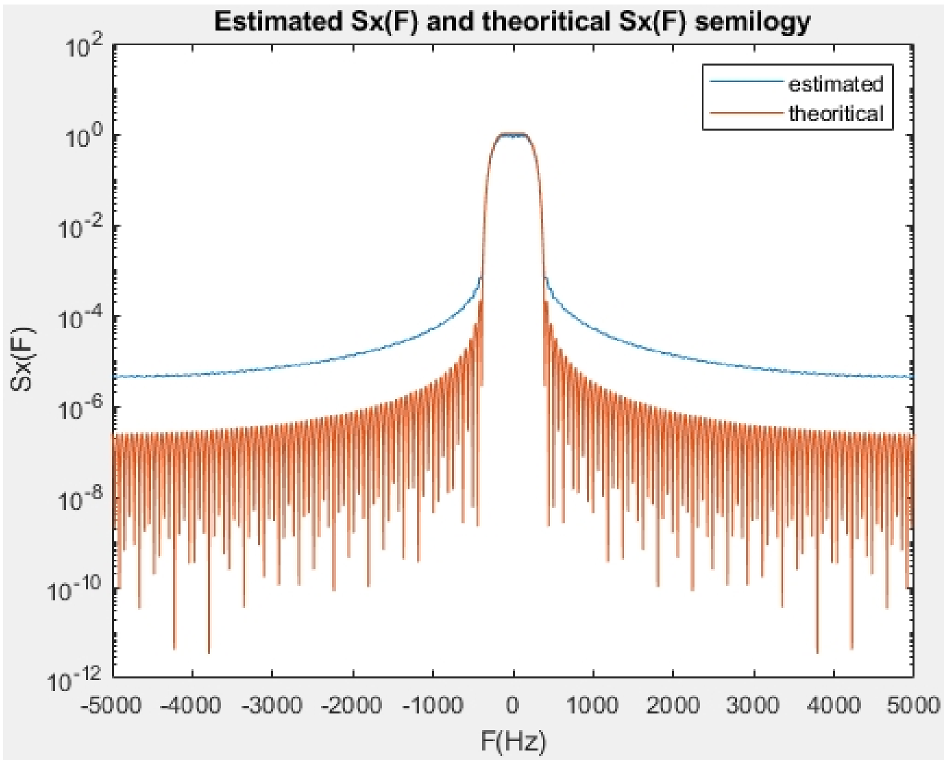
Σε αυτό το βήμα, διπλασιάζουμε την τιμή του T (T′ = 2T) διατηρώντας σταθερό το T_s, οπότε $over' = 2\ over$. Ακολουθούμε τη διαδικασία του βήματος A.3, για τον υπολογισμό ενός περιοδογράμματος της $X(t)$ και για τη σύγκριση της εκτίμησης και της θεωρητικής φασματικής πυκνότητας ισχύος.



Σχήμα 10: Περιοδόγραμμα της P_x με *plot*



Σχήμα 11: Περιοδόγραμμα της P_x με *semilogy*



Σχήμα 12: Κοινό semilogy εκτίμησης και θεωρητικής τιμής

Αυτό που γίνεται αντιληπτό από τις γραφικές απεικονίσεις, είναι ότι το εύρος φάσματος για το νέο T, είναι το μισό. Αυτό εξηγείται από τη θεωρία μας αφού ο τύπος $BW = \frac{1+a}{2T}$ υποδηλώνει ότι το εύρος φάσματος υποδιπλασιάζεται όταν διπλασιάζουμε την περίοδο συμβόλου T.
Ακολουθεί ο κώδικας, ο οποίος είναι ακριβώς ο ίδιος με το υποερώτημα A.3, έχοντας χρησιμοποιήσει και κομμάτια από τα A.1,A.2, για τη δημιουργία νέου παλμού και της χρήσης της συνάρτησης $bits_{t}o_{2}PAM$ αντίστοιχα. Πρακτικά το μόνο που αλλάξαμε είναι οι τιμές των T,over τις οποίες στο τέλος επαναφέραμε στις αρχικές.

```
%A5
T = 2*T;
over = 2*over;

[phi, t1] = srrc_pulse (T, Ts, A, a);

Fs=1/Ts;
F = (-Fs/2):(Fs/Nf):(Fs/2)-(Fs/Nf);
Ft = fftshift(fft(phi,Nf))*Ts;
ESD=abs(Ft).^2;
N=100;

```

```
b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
X_n = bits_to_2PAM(b);
X_d=1/Ts*upsample(X_n,over);
t_Xd = 0:Ts:N*T-Ts;
X_t =conv(X_d,phi)*Ts;
t_conv = min(t1)+min(t_Xd):Ts:max(t1)+max(t_Xd);
T_total=length(t_conv)*Ts;
XF=fftshift(fft(X_t,Nf)*Ts);
P_x=(abs(XF).^2)/T_total;

%plot
figure();
plot(F,P_x)
title('Plot of one periodogram with 2-PAM configuration');
xlabel('F');
ylabel('Px(F)')
grid on;

%semilogy
figure();
semilogy(F,P_x);
title('Semilogy of periodogram with 2-PAM configuration');
xlabel('F');
ylabel('Px(F)')
grid on;

K = 500;
sum=0;

for k=0:K-1
b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
X_n=bits_to_2PAM(b);
X_d=1/Ts*upsample(X_n,over);
X_t=conv(phi,X_d)*Ts;
XF=fftshift(fft(X_t,Nf)*Ts);
P_x=abs(XF).^2/T_total;
sum=sum+P_x;
end

Sx=sum/K;
Sx_th= (var(X_n)/T).*(ESD);

```

```
figure();
semilogy(F,Sx,F,Sx_th);
title('Estimated Sx(F) and theoritical Sx(F) semilogy');
xlabel('F(Hz)');
ylabel('Sx(F)');
legend('estimated', 'theoritical');
T = T/2;
over = over/2;
```

A.6 Επιλογή μεταξύ των υλοποιήσεων

A.6.α′ 2-PAM ή 4-PAM;

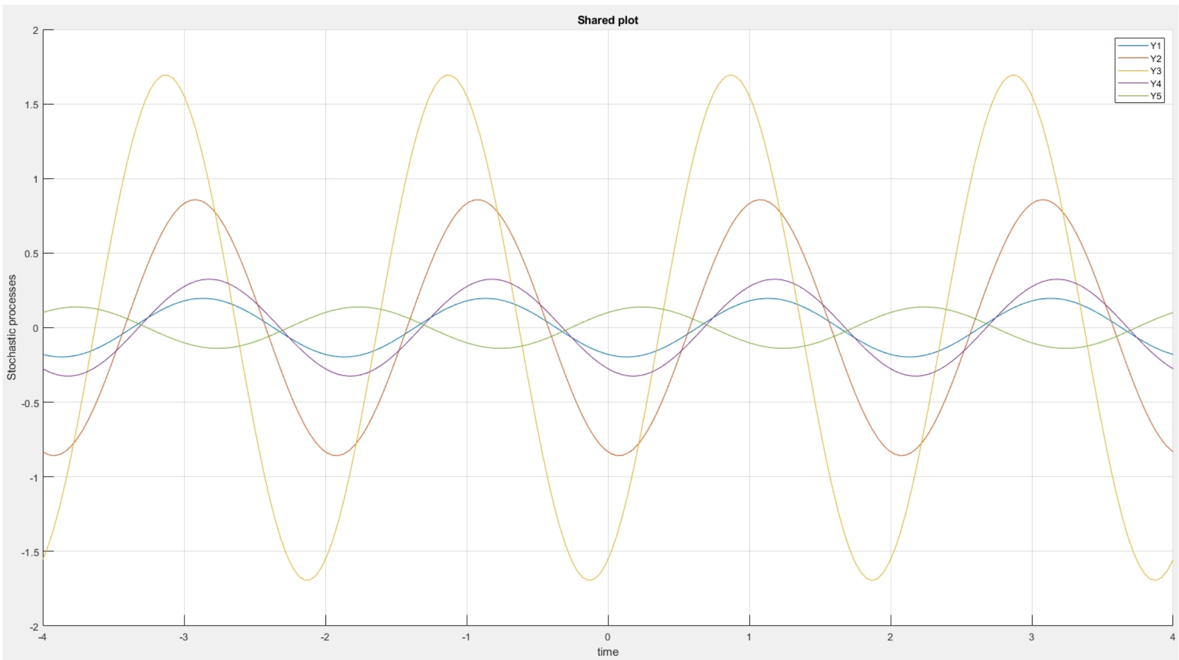
Εφόσον μας ενδιαφέρει η ταχύτερη διάδοση των δεδομένων θα επιλέγαμε 4-PAM κωδικοποίηση. Με αυτόν τον τρόπο μεταφέρονται 2 bits ανα σύμβολο, σε αντίθεση με την 2-PAM που αντιστοιχεί μόνο 1 σε κάθε σύμβολο. Έτσι, στον ίδιο χρόνο στέλνονται περισσότερα bits πληροφορίας.

A.6.β′ T ή T′ = 2T;

Εφόσον γνωρίζουμε πως το εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θέλουμε να το περιορίσουμε. Όπως αποδείχθηκε από το υποερώτημα A.5, αλλά και από τον θεωρητικό μας τύπο, όταν διπλασιάζεται η περίοδος T, υποδιπλασιάζεται το εύρος φάσματος. Έτσι, η επιλογή μας θα είναι η νέα T′ = 2T.

B Μελέτη στοχαστικών διαδικασιών

B.1 Σχεδίαση 5 υλοποιήσεων



Σχήμα 13: Κοινό plot 5 υλοποιήσεων της στοχαστικής διαδικασίας

Αρχικά, ορίσαμε $F0 = 100Hz$. Το X παίρνει τυχαίες τιμές από μια κανονική κατανομή (Gaussian) και το Φ από μια ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 0 και 2π.

```
%B
F0 = 100;
t = linspace(-A,A,2*F0);

X = randn(1,5);
phi_b = (2*pi)*rand(1,5);

figure
hold on;
for i = 1 : 5
Y = X(i)*cos(2*pi*F0*t + phi_b(i));
txt = ['Y',num2str(i)];
plot(t,Y,'DisplayName',txt)
end
grid on;
hold off
```

```
xlabel("time")
ylabel("Stochastic processes")
legend show;
title("Shared plot")
```

B.2 Υπολογισμός $E[Y(t)]$ και $R_{YY}(t+\tau,t) = E[(Y(t+\tau)Y(t))]$

Αφού η X, Φ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές:

$E[Y(t)] = E[X\cos(2\pi F_0 t + \Phi)] = E[X]E[\cos(2\pi F_0 t + \Phi)]$

Από υπόθεση όμως, το X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, οπότε E[X] = 0.
Ο όρος $E[\cos(2\pi F_0 t + \Phi)]$ γράφεται ως ολοκλήρωμα και με απλοποίηση μπορεί να γίνει:
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(u)\,du$.
Αυτό θα ισούται με 0, αφού $sin(2\pi) - sin(0) = 0$ - $0 = 0$
Έτσι, $E[Y(t)] = 0$ * $0 = 0$

Έπειτα μας ζητείται ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης $R_{YY}(t+\tau,t) = E[(Y(t+\tau)Y(t))]$
•Έχουμε $Y(t) = X\cos(2\pi F_0 t + \Phi)$ και
•$Y(t+\tau) = X\cos(2\pi F_0(t+\tau) + \Phi) = X\cos(2\pi F_0 t + 2\pi F_0\tau + \Phi)$

Έτσι, $Y(t)(Y(t+\tau) = X^2\frac{1}{2}[cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0\tau + 2\Phi) + cos(2\pi F_0\tau)]$
Δεδομένου ότι το Φ κατανέμεται ομοιόμορφα, εστιάζουμε στον όρο που δεν εξαρτάται από τη φάση Φ.
Οπότε, θα έχουμε $E[X^2\frac{1}{2}cos(2\pi F_0\tau)] = \frac{1}{2}E[X^2]cos(2\pi F_0\tau) = \frac{1}{2}cos(2\pi F_0\tau)$, αφού το X^2 από την κανονική τιμή θα έχει μέση τιμή = 1.

Άρα, $R_{YY}(t+\tau,t) = \frac{1}{2}cos(2\pi F_0\tau)$

B.3 Υπολογισμός $S_y(F)$

Για τη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_y(F)$ ισχύει:
Αν $R_{YY}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(2\pi F_0\tau)$, τότε ο μετασχηματισμός Φουριερ της $R_{YY}(\tau)$ είναι:

$$S_Y(F) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau)e^{-j2\pi F\tau}\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\cos(2\pi F_0\tau)e^{-j2\pi F\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(F-F_0)\tau}\,d\tau + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(F+F_0)\tau}\,d\tau$$

Όμως:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi F\tau}\, d\tau = \delta(F)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο αυτόν, παίρνουμε:

$$S_Y(F) = \frac{1}{4}\delta(F - F_0) + \frac{1}{4}\delta(F + F_0)$$