Systèmes quantiques à deux niveaux

Les états de spin

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_{\vec{u}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |+\rangle_{\vec{u}} &= \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}|-\rangle \\ |-\rangle_{\vec{u}} &= -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}|-\rangle \end{aligned}}$$

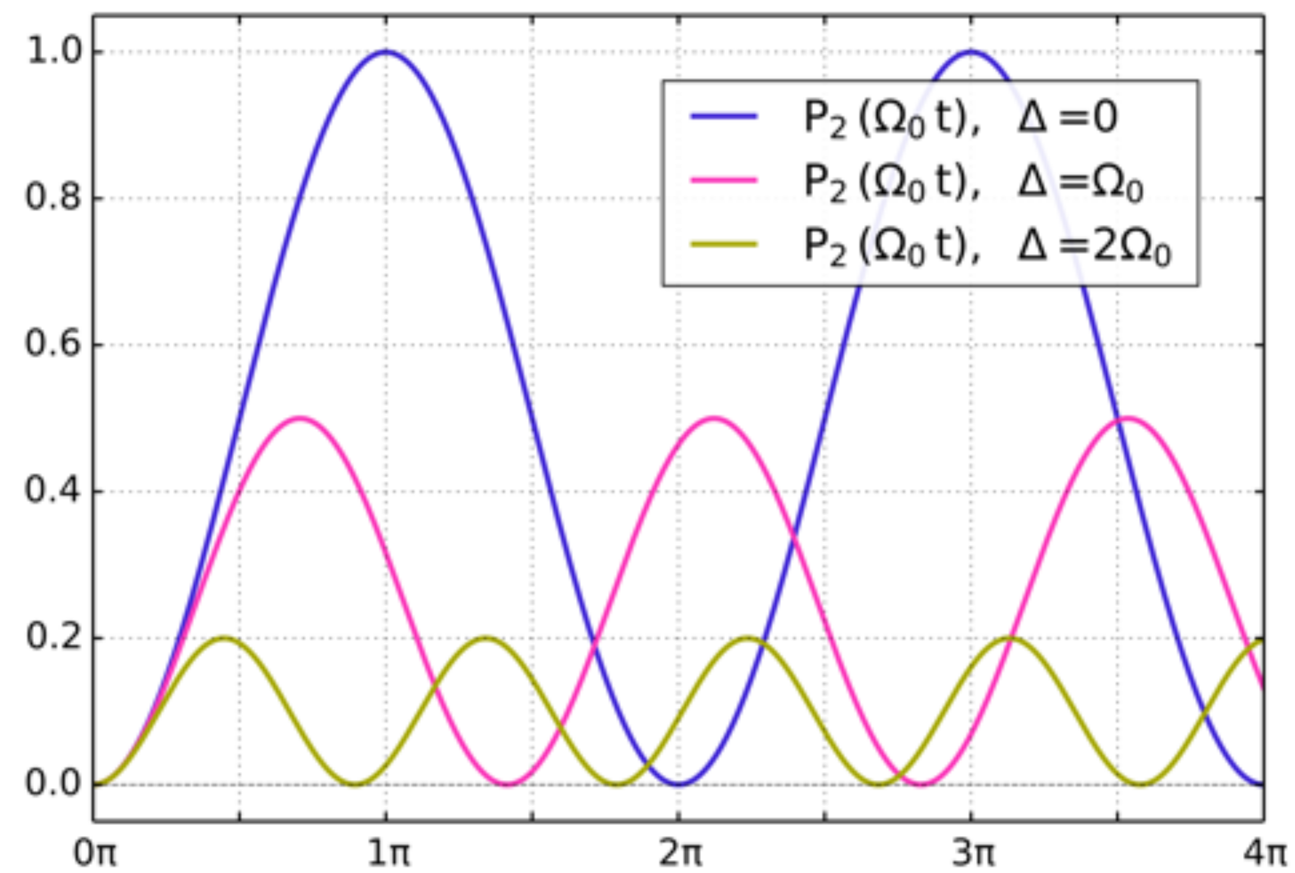
Évolution temporelle : les oscillations de Rabi

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\phi/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{-iE_+/\hbar}|\psi_+\rangle - \sin\frac{\theta}{2}e^{-iE_-/\hbar}|\psi_-\rangle\right)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{4|W|^2}{4|W|^2+\Delta^2} \qquad W = |W|e^{i\phi}$$

$$\mathcal{P}_{1\to 2}(t) = \sin^2(\theta)\sin^2(\omega t)$$

$$\omega = \frac{E_+ - E_-}{2\hbar} = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 4|W|^2}}{2\hbar}$$



Un hamiltonien dépendant du temps

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\Omega t} \\ \omega_1 e^{i\Omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i\dot{a}_+(t) &= \frac{\omega_0}{2}a_+(t) + \frac{\omega_1}{2}e^{-i\Omega t}a_-(t) \\ i\dot{a}_-(t) &= \frac{\omega_1}{2}e^{i\Omega t}a_+(t) - \frac{\omega_0}{2}a_-(t) \end{aligned}}$$

$$b_+(t) = e^{i\Omega t/2}a_+(t)$$

$$b_-(t) = e^{-i\Omega t/2}a_-(t)$$

Analogue à se placer dans le référentiel tournant

$$\tilde{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i\dot{b}_+(t) &= -\frac{\Delta\omega}{2}b_+(t) + \frac{\omega_1}{2}b_-(t) \\ i\dot{b}_-(t) &= \frac{\omega_1}{2}b_+(t) + \frac{\Delta\omega}{2}b_-(t) \end{aligned}}$$

Résonance magnétique

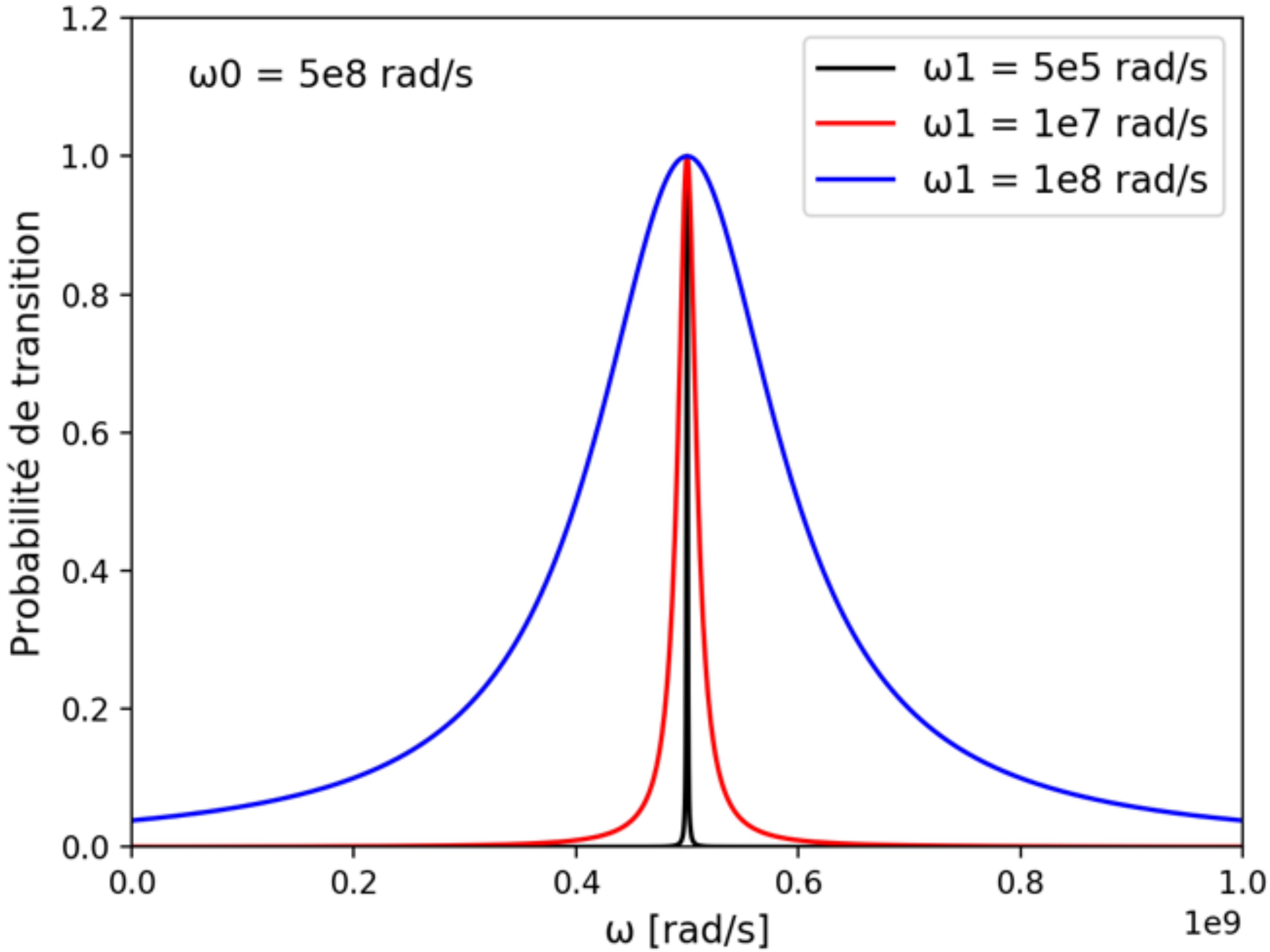
Ordres de grandeur pour la RMN du proton:

$B_0 \sim 5$ T

$B_1 \sim$ qq mT

$\omega_0 \sim 500$ Mrad/s

$\omega_1 \sim 500$ krad/s



Termes de couplage supplémentaires en RMN