劣モジュラ最適化

2023 年 2 月 18 日

目次

第 1 章

基礎

1.1　劣モジュラ関数の定義と具体例

定義 1.1.1（劣モジュラ関数　その１） n 個の要素からなる有限集合 $V = \{1, \ldots, n\}$ と、 V を台集合とする集合関数 $f : 2^V \to \mathbb{R}$ を考える。V の任意の部分集合 $S, T \subset V$ について次の不等式が成立するとき、 f を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T) \tag{1.1}$$

定義 1.1.2（劣モジュラ関数　その２） f と V は先ほどと同じものとする。$S \subset T$ を満たす V の任意の部分集合 $S, T \subset V$ と T に含まれない任意の要素 $i \in V - T$ について次の不等式が成立するとき、 f を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S \cup \{i\}) - f(S) \geq f(T \cup \{i\}) + f(T) \tag{1.2}$$

1.2 を限界効用逓減と言う。

命題 1.1.3（二つの定義の等価性） 劣モジュラ関数の二つの定義 1.1.1 と 1.1.2 は等価である。

(証明) 1.1 $\Longrightarrow$ 1.2 について。$S \subset T, i \in V - T$ とする。

$$\begin{aligned}
&f(S \cup \{i\}) + f(T) \geq f((S \cup \{i\}) \cup T) + f((S \cup \{i\}) \cap T) \\
\Longrightarrow\ &f(S \cup \{i\}) + f(T) \geq f(T \cup \{i\}) + f(S) \\
\Longrightarrow\ &f(S \cup \{i\}) - f(S) \geq f(T \cup \{i\}) - f(T)
\end{aligned}$$

1.2 $\Longrightarrow$ 1.1 について。S, T を V の任意の部分集合とする。$S \subset T$ の場合、1.1 は自明である。$S \not\subset T$ の場合を考える。$\{i_1, \ldots, i_m\} = S - T$ とする。集合の増加列を考え

る：$S_j, T_j (j=0,\ldots,m)$。

$$
\begin{aligned}
&S_0 = S \cap T, S_j = S_{j-1} \cup \{i_j\} \\
&T_0 = T, T_j = T_{j-1} \cup \{i_j\}
\end{aligned}
$$

上の式の j は $j = 1,\ldots,m$ とする。$S_m = S, T_m = S \cup T$ が成立する。また、 1.2 より、$f(S_j) - f(S_{j-1}) \geq f(T_j) - f(T_{j-1}) (j = 1,\ldots,m)$ が成立する。この式を足し合わせることで証明できる。

$$
\begin{aligned}
&f(S_m) - f(S_0) \geq f(T_m) - f(T_0) \\
\Longrightarrow\ &f(S) - f(S \cap T) \geq f(S \cup T) - f(T) \\
\Longrightarrow\ &f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T)
\end{aligned}
$$

例 1.1.4（カバー関数）

例 1.1.5（グラフのカット関数）

例 1.1.6（凹関数が生成する関数）

例 1.1.7（Matroid rank functions）

例 1.1.8（Entropy functions）

1.2　劣モジュラ多面体と基多面体

$V = \{1,\ldots,n\}, f : 2^V \to \mathbb{R}$ で、 f は正規化された劣モジュラ関数とする（正規化とは $f(\{\}) = 0$ が成り立つ関数のこと)。f を使って、$\mathbb{R}^n$ に二つの凸多面体 $P(f), B(f)$ を定義できる。

定義 1.2.1（劣モジュラ多面体、基多面体） $x = (x_1,\ldots,x_n)$ を n 次元の変数ベクトルとし、 V の各部分集合を S とする。$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ として、劣モジュラ多面体 (submodular polyhedron) $P(f)$ を次のように定義する。

$$P(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | x(S) \leq f(S), S \subset V\} \tag{1.3}$$

また、基多面体 (base polytope) $B(f)$ は次のように定義する。

$$P(f) = \{x \in P(f) | x(V) = f(V)\} \tag{1.4}$$

命題 1.2.2 $B(f)$ は有界

(証明)

$$
\begin{aligned}
&x_i \le f(\{i\}) \\
&x(V - \{i\}) \le f(V - \{i\}) \iff x(V) - x_i \le f(V - \{i\}) \\
&x(V) = f(V) \\
\Longrightarrow\ &f(V) - f(V - \{i\}) \le x_i \le f(\{i\})
\end{aligned}
$$

命題 1.2.3 $B(f)$ の端点と $P(f)$ の端点は一致する。

集合 V を並び替えた線形順序 (linear ordering) $L = (i_1, \ldots, i_n)$ を考える。 $n!$ 通りある。この時、 L に対応する基多面体 $B(f)$ の端点 x^L を定めることができる。

1.3　ロヴァース拡張

第２章

劣モジュラ最適化

第 3 章

実装

- https://github.com/OptMist-Tokyo/SubmodularFunctionMinimization
- https://github.com/joschout/SubmodularMaximization

第 4 章

参考文献

- https://proceedings.mlr.press/v119/breuer20a.html
- https://fujiik.github.io/
- https://viterbi-web.usc.edu/~shanghua/teaching/Fall2021-670/krause12survey.pdf
- https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1634.pdf
- http://papers.neurips.cc/paper/6652-continuous-dr-submodular-maximization-structure-and-algorithms.pdf