

劣モジュラ最適化

2023 年 2 月 6 日

目次

第 1 章	基礎	2
1.1	劣モジュラ関数の定義と具体例	2
1.2	劣モジュラ多面体と基多面体	3
1.3	ロヴァース拡張	4
第 2 章	劣モジュラ最適化	5
第 3 章	実装	6
第 4 章	参考文献	7

第 1 章

基礎

1.1 劣モジュラ関数の定義と具体例

定義 1.1.1 (劣モジュラ関数 その 1) n 個の要素からなる有限集合 $V = \{1, \dots, n\}$ と、 V を台集合とする集合関数 $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 V の任意の部分集合 $S, T \subset V$ について次の不等式が成立するとき、 f を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T) \quad (1.1)$$

定義 1.1.2 (劣モジュラ関数 その 2) f と V は先ほどと同じものとする。 $S \subset T$ を満たす V の任意の部分集合 $S, T \subset V$ と T に含まれない任意の要素 $i \in V - T$ について次の不等式が成立するとき、 f を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S \cup \{i\}) - f(S) \geq f(T \cup \{i\}) - f(T) \quad (1.2)$$

1.2 を限界効用逓減と言う。

命題 1.1.3 (二つの定義の等価性) 劣モジュラ関数の二つの定義 1.1.1 と 1.1.2 は等価である。

(証明) 1.1 \implies 1.2 について。 $S \subset T, i \in V - T$ とする。

$$\begin{aligned} f(S \cup \{i\}) + f(T) &\geq f((S \cup \{i\}) \cup T) + f((S \cup \{i\}) \cap T) \\ \implies f(S \cup \{i\}) + f(T) &\geq f(T \cup \{i\}) + f(S) \\ \implies f(S \cup \{i\}) - f(S) &\geq f(T \cup \{i\}) - f(T) \end{aligned}$$

1.2 \implies 1.1 について。 S, T を V の任意の部分集合とする。 $S \subset T$ の場合、1.1 は自明である。 $S \not\subset T$ の場合を考える。 $\{i_1, \dots, i_m\} = S - T$ とする。集合の増加列を考え

る： $S_j, T_j (j = 0, \dots, m)$ 。

$$\begin{aligned} S_0 &= S \cap T, S_j = S_{j-1} \cup \{i_j\} \\ T_0 &= T, T_j = T_{j-1} \cup \{i_j\} \end{aligned}$$

上の式の j は $j = 1, \dots, m$ とする。 $S_m = S, T_m = S \cup T$ が成立する。また、1.2 より、 $f(S_j) - f(S_{j-1}) \geq f(T_j) - f(T_{j-1}) (j = 1, \dots, m)$ が成立する。この式を足し合わせることで証明できる。

$$\begin{aligned} f(S_m) - f(S_0) &\geq f(T_m) - f(T_0) \\ \implies f(S) - f(S \cap T) &\geq f(S \cup T) - f(T) \\ \implies f(S) + f(T) &\geq f(S \cup T) + f(S \cap T) \end{aligned}$$

例 1.1.4 (カバー関数)

例 1.1.5 (グラフのカット関数)

例 1.1.6 (凹関数が生成する関数)

例 1.1.7 (Matroid rank functions)

例 1.1.8 (Entropy functions)

1.2 劣モジュラ多面体と基多面体

$V = \{1, \dots, n\}, f: 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ で、 f は正規化された劣モジュラ関数とする（正規化とは $f(\{\}) = 0$ が成り立つ関数のこと）。 f を使って、 \mathbb{R}^n に二つの凸多面体 $P(f), B(f)$ を定義できる。

定義 1.2.1 (劣モジュラ多面体、基多面体) $x = (x_1, \dots, x_n)$ を n 次元の変数ベクトルとし、 V の各部分集合を S とする。 $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ として、劣モジュラ多面体 (submodular polyhedron) $P(f)$ を次のように定義する。

$$P(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(S) \leq f(S), S \subset V\} \quad (1.3)$$

また、基多面体 (base polytope) $B(f)$ は次のように定義する。

$$P(f) = \{x \in P(f) \mid x(V) = f(V)\} \quad (1.4)$$

命題 1.2.2 $B(f)$ は有界

(証明)

$$\begin{aligned}x_i &\leq f(\{i\}) \\x(V - \{i\}) &\leq f(V - \{i\}) \iff x(V) - x_i \leq f(V - \{i\}) \\x(V) &= f(V) \\\implies f(V) - f(V - \{i\}) &\leq x_i \leq f(\{i\})\end{aligned}$$

命題 1.2.3 $B(f)$ の端点と $P(f)$ の端点は一致する。

集合 V を並び替えた線形順序 (linear ordering) $L = (i_1, \dots, i_n)$ を考える。 $n!$ 通りある。この時、 L に対応する基多面体 $B(f)$ の端点 x^L を定めることができる。

1.3 ロヴァース拡張

第 2 章

劣モジュラ最適化

第 3 章

実装

- <https://github.com/OptMist-Tokyo/SubmodularFunctionMinimization>
- <https://github.com/joschout/SubmodularMaximization>

第 4 章

参考文献

- <https://proceedings.mlr.press/v119/breuer20a.html>
- <https://fujiiik.github.io/>
- <https://viterbi-web.usc.edu/~shanghua/teaching/Fall2021-670/krause12survey.pdf>
- <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1634.pdf>
- <http://papers.neurips.cc/paper/6652-continuous-dr-submodular-maximization-structure-and-algorithms.pdf>