劣モジュラ最適化

2023 年 2 月 4 日

目次

第 1 章

基礎

1.1　劣モジュラ関数の定義と具体例

定義 1.1.1（劣モジュラ関数　その１） n 個の要素からなる有限集合 $V = \{1, \ldots, n\}$ と、V を台集合とする集合関数 $f : 2^V \to \mathbb{R}$ を考える。V の任意の部分集合 $S, T \subset V$ について次の不等式が成立するとき、f を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T) \tag{1.1}$$

定義 1.1.2（劣モジュラ関数　その２） f と V は先ほどと同じものとする。$S \subset T$ を満たす V の任意の部分集合 $S, T \subset V$ と T に含まれない任意の要素 $i \in V - T$ について次の不等式が成立するとき、f を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S \cup \{i\}) - f(S) \geq f(T \cup \{i\}) + f(T) \tag{1.2}$$

1.2 を限界効用逓減と言う。

命題 1.1.3（二つの定義の等価性） 劣モジュラ関数の二つの定義 1.1.1 と 1.1.2 は等価である。

(証明) 1.1 $\Longrightarrow$ 1.2 について。$S \subset T, i \in V - T$ とする。

$$\begin{aligned}
&f(S \cup \{i\}) + f(T) \geq f((S \cup \{i\}) \cup T) + f((S \cup \{i\}) \cap T) \\
\Longrightarrow\ &f(S \cup \{i\}) + f(T) \geq f(T \cup \{i\}) + f(S) \\
\Longrightarrow\ &f(S \cup \{i\}) - f(S) \geq f(T \cup \{i\}) - f(T)
\end{aligned}$$

1.2 $\Longrightarrow$ 1.1 について。S, T を V の任意の部分集合とする。$S \subset T$ の場合、1.1 は自明である。$S \not\subset T$ の場合を考える。$\{i_1, \ldots, i_m\} = S - T$ とする。集合の増加列を考え

る：$S_j, T_j (j = 0, \dots, m)$。

$$
\begin{aligned}
S_0 &= S \cap T, S_j = S_{j-1} \cup \{i_j\} \\
T_0 &= T, T_j = T_{j-1} \cup \{i_j\}
\end{aligned}
$$

上の式の j は $j = 1, \dots, m$ とする。$S_m = S, T_m = S \cup T$ が成立する。また、 1.2 より、$f(S_j) - f(S_{j-1}) \geq f(T_j) - f(T_{j-1}) (j = 1, \dots, m)$ が成立する。この式を足し合わせることで証明できる。

$$
\begin{aligned}
& f(S_m) - f(S_0) \geq f(T_m) - f(T_0) \\
\Longrightarrow\ & f(S) - f(S \cap T) \geq f(S \cup T) - f(T) \\
\Longrightarrow\ & f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T)
\end{aligned}
$$

例 1.1.4（カバー関数）

例 1.1.5（グラフのカット関数）

例 1.1.6（凹関数が生成する関数）

第 2 章

劣モジュラ最適化