

劣モジュラ最適化

2023 年 2 月 4 日

目次

第 1 章	基礎	2
1.1	劣モジュラ関数の定義と具体例	2
第 2 章	劣モジュラ最適化	4

第 1 章

基礎

1.1 劣モジュラ関数の定義と具体例

定義 1.1.1 (劣モジュラ関数 その1) n 個の要素からなる有限集合 $V = \{1, \dots, n\}$ と、 V を台集合とする集合関数 $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 V の任意の部分集合 $S, T \subset V$ について次の不等式が成立するとき、 f を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T) \quad (1.1)$$

定義 1.1.2 (劣モジュラ関数 その2) f と V は先ほどと同じものとする。 $S \subset T$ を満たす V の任意の部分集合 $S, T \subset V$ と T に含まれない任意の要素 $i \in V - T$ について次の不等式が成立するとき、 f を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S \cup \{i\}) - f(S) \geq f(T \cup \{i\}) - f(T) \quad (1.2)$$

1.2 を限界効用逓減と言う。

命題 1.1.3 (二つの定義の等価性) 劣モジュラ関数の二つの定義 1.1.1 と 1.1.2 は等価である。

(証明) 1.1 \implies 1.2 について。 $S \subset T, i \in V - T$ とする。

$$\begin{aligned} f(S \cup \{i\}) + f(T) &\geq f((S \cup \{i\}) \cup T) + f((S \cup \{i\}) \cap T) \\ \implies f(S \cup \{i\}) + f(T) &\geq f(T \cup \{i\}) + f(S) \\ \implies f(S \cup \{i\}) - f(S) &\geq f(T \cup \{i\}) - f(T) \end{aligned}$$

1.2 \implies 1.1 について。 S, T を V の任意の部分集合とする。 $S \subset T$ の場合、1.1 は自明である。 $S \not\subset T$ の場合を考える。 $\{i_1, \dots, i_m\} = S - T$ とする。集合の増加列を考え

る： $S_j, T_j (j = 0, \dots, m)$ 。

$$\begin{aligned} S_0 &= S \cap T, S_j = S_{j-1} \cup \{i_j\} \\ T_0 &= T, T_j = T_{j-1} \cup \{i_j\} \end{aligned}$$

上の式の j は $j = 1, \dots, m$ とする。 $S_m = S, T_m = S \cup T$ が成立する。また、1.2 より、 $f(S_j) - f(S_{j-1}) \geq f(T_j) - f(T_{j-1}) (j = 1, \dots, m)$ が成立する。この式を足し合わせることで証明できる。

$$\begin{aligned} f(S_m) - f(S_0) &\geq f(T_m) - f(T_0) \\ \implies f(S) - f(S \cap T) &\geq f(S \cup T) - f(T) \\ \implies f(S) + f(T) &\geq f(S \cup T) + f(S \cap T) \end{aligned}$$

例 1.1.4 (カバー関数)

例 1.1.5 (グラフのカット関数)

例 1.1.6 (凹関数が生成する関数)

第 2 章

劣モジュラ最適化