

# 劣モジュラ最適化

2023 年 2 月 4 日

# 目次

第 1 章	基礎	2
1.1	劣モジュラ関数の定義と具体例 . . . . .	2
第 2 章	劣モジュラ最適化	4

# 第 1 章

## 基礎

### 1.1 劣モジュラ関数の定義と具体例

**定義 1.1.1 (劣モジュラ関数 その1)**  $n$  個の要素からなる有限集合  $V = \{1, \dots, n\}$  と、 $V$  を台集合とする集合関数  $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$  を考える。 $V$  の任意の部分集合  $S, T \subset V$  について次の不等式が成立するとき、 $f$  を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T) \quad (1.1)$$

**定義 1.1.2 (劣モジュラ関数 その2)**  $f$  と  $V$  は先ほどと同じものとする。 $S \subset T$  を満たす  $V$  の任意の部分集合  $S, T \subset V$  と  $T$  に含まれない任意の要素  $i \in V - T$  について次の不等式が成立するとき、 $f$  を劣モジュラ関数と呼ぶ。

$$f(S \cup \{i\}) - f(S) \geq f(T \cup \{i\}) - f(T) \quad (1.2)$$

1.2 を限界効用逓減と言う。

**命題 1.1.3 (二つの定義の等価性)** 劣モジュラ関数の二つの定義 1.1.1 と 1.1.2 は等価である。

(証明) 1.1  $\implies$  1.2 について。 $S \subset T, i \in V - T$  とする。

$$\begin{aligned} f(S \cup \{i\}) + f(T) &\geq f((S \cup \{i\}) \cup T) + f((S \cup \{i\}) \cap T) \\ \implies f(S \cup \{i\}) + f(T) &\geq f(T \cup \{i\}) + f(S) \\ \implies f(S \cup \{i\}) - f(S) &\geq f(T \cup \{i\}) - f(T) \end{aligned}$$

1.2  $\implies$  1.1 について。 $S, T$  を  $V$  の任意の部分集合とする。 $S \subset T$  の場合、1.1 は自明である。 $S \not\subset T$  の場合を考える。 $\{i_1, \dots, i_m\} = S - T$  とする。集合の増加列を考え

る： $S_j, T_j (j = 0, \dots, m)$ 。

$$\begin{aligned} S_0 &= S \cap T, S_j = S_{j-1} \cup \{i_j\} \\ T_0 &= T, T_j = T_{j-1} \cup \{i_j\} \end{aligned}$$

上の式の  $j$  は  $j = 1, \dots, m$  とする。 $S_m = S, T_m = S \cup T$  が成立する。また、1.2 より、 $f(S_j) - f(S_{j-1}) \geq f(T_j) - f(T_{j-1}) (j = 1, \dots, m)$  が成立する。この式を足し合わせることで証明できる。

$$\begin{aligned} f(S_m) - f(S_0) &\geq f(T_m) - f(T_0) \\ \implies f(S) - f(S \cap T) &\geq f(S \cup T) - f(T) \\ \implies f(S) + f(T) &\geq f(S \cup T) + f(S \cap T) \end{aligned}$$

例 1.1.4 (カバー関数)

例 1.1.5 (グラフのカット関数)

例 1.1.6 (凹関数が生成する関数)

## 第 2 章

# 劣モジュラ最適化