Interpolacja I

Metody numeryczne

dr inż. Robert Perliński
rperlinski@icis.pcz.pl

26 stycznia 2020

Plan prezentacji

Spis treści

1 Interpolacja

Definicja interpolacji

1.1 Definicja interpolacji

Interpolacja

Zagadnienie interpolacji można sformułować następująco:

w przedziale $\langle a, b \rangle$ danych jest $n+1$ różnych punktów $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, które nazywamy *węzłami interpolacji*, oraz wartości pewnej funkcji $y = f(x)$ w tych punktach:

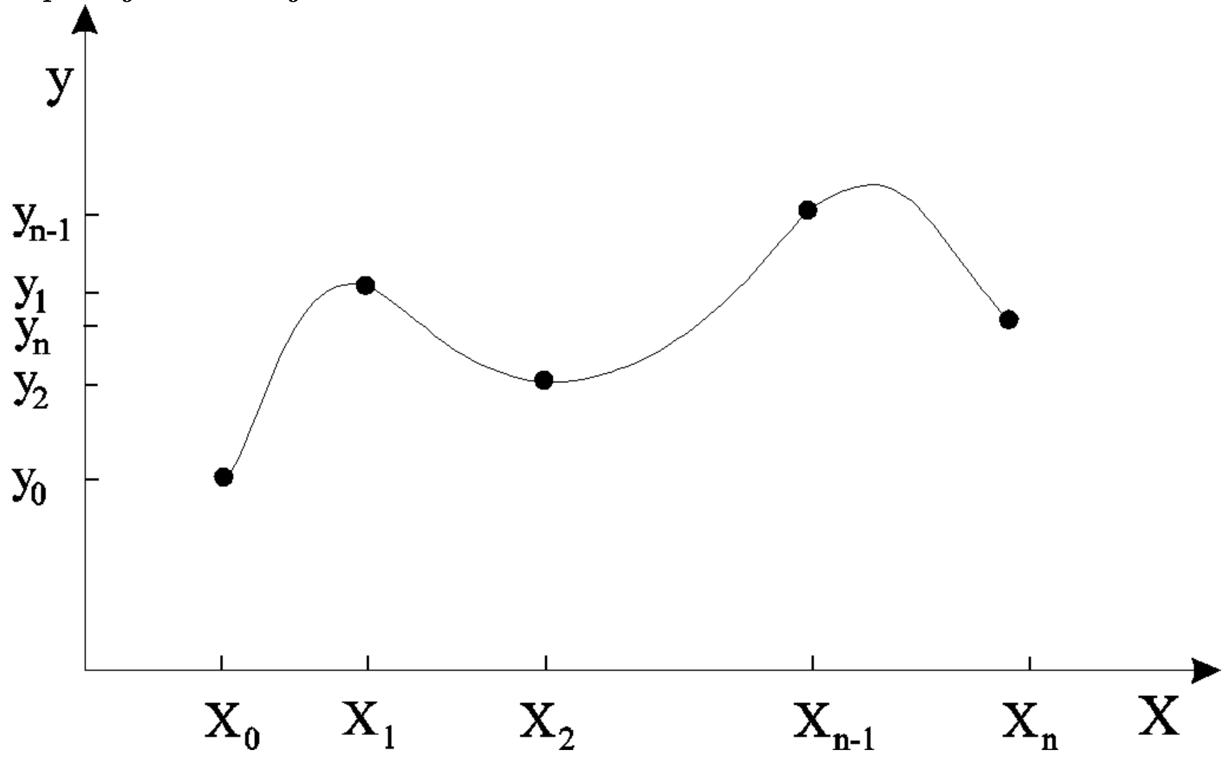
$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_n = f(x_n)$$

Należy wyznaczyć funkcję $W(x)$ (funkcję interpolacyjną), taką aby

$$W(x_0) = y_0, \qquad W(x_1) = y_1, \qquad \ldots, \qquad W(x_n) = y_n$$

- Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami
- oraz na oszacowaniu błędu tych przybliżonych wartości.
- Funkcja $W(x)$ w węzłach interpolacji przyjmuje takie same wartości jak funkcja $y = f(x)$.

Interpolacja - definicja zadania



Definicja interpolacji

Stosowaną metodą jest dobór funkcji $W(x)$ w postaci kombinacji liniowej $n+1$ funkcji bazowych $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Wielomian $W(x)$ w postaci ogólnej przedstawia się następująco:

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{1}$$

albo

$$W(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) \tag{2}$$

gdzie:

- $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ - funkcje bazowe, od rodzaju tych funkcji w dużej mierze zależny rodzaj interpolacji,
- $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - współczynniki, czyli niewiadome do wyznaczenia z układu równań

Definicja interpolacji

Wprowadzając macierz bazową (wektor funkcji bazowych):

$$\mathbf{\Phi} = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

i wektor wpsółczynników:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

mamy:

$$W(x) = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \mathbf{A} \tag{3}$$

co można zapisac w postaci układu równań liniowych:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Y}$$

Definicja interpolacji

Zadanie interpolacji dla $n+1$ punktów tworzy nam układ $n+1$ równań z $n+1$ niewiadomymi:

$$W(x_0) = a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \ldots + a_n\varphi_n(x_0) = y_0$$
$$W(x_1) = a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \ldots + a_n\varphi_n(x_1) = y_1$$
$$\ldots$$
$$W(x_n) = a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \ldots + a_n\varphi_n(x_n) = y_n$$

Definicja interpolacji

W zapisie macierzowym:

$$\begin{array}{ccccc} X & & A & & Y \\ \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{array}$$

gdzie:

- X - macierz główna układu, $det(X)$ musi być różne od 0
- A - wektor współczynników, niewiadomych
- Y - wektor z wartościami funkcji

Definicja interpolacji

Jeśli macierz $\mathbf{X}$ nie jest osobliwa (wartości x_i różnią sie między sobą), to

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$

czyli

$$W(x) = \mathbf{\Phi}(x) \cdot \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y} \tag{4}$$

Wielomian interpolacyjny jest iloczynem:

- macierzy bazowej,
- macierzy interpolacyjnej $\mathbf{X}^{-1}$ zależnej od przyjętej bazy
- oraz węzłów i wektora wartości funkcji w węzłach.

Interpolacja - charakterystyka

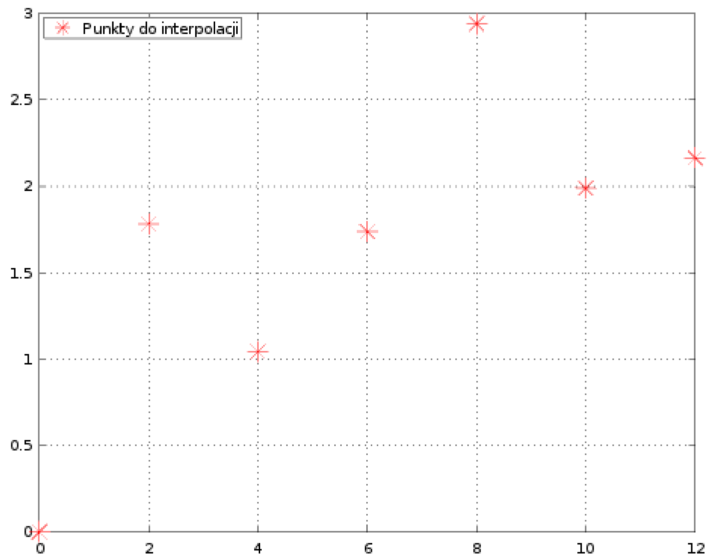
- Interpolacja jest w pewnym sensie zadaniem odwrotnym do tablicowania funkcji.
- Tablicowanie polega na budowie tablicy wartości mając analityczną postać funkcji.
- Interpolacja polega natomiast na określeniu analitycznej postaci funkcji na podstawie tablicy wartości funkcji.

- Najczęściej poszukuje się funkcji interpolacyjnej określonej postaci, np.: wielomianu algebraicznego czy trygonometrycznego.

Definicja interpolacji

Danych jest 7 punktów:

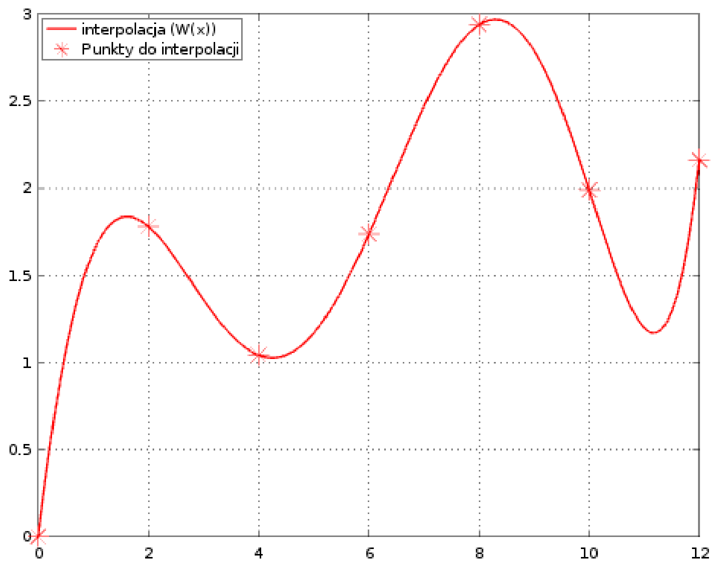
1. $p_1(0, 0.00000)$
2. $p_2(2, 1.78059)$
3. $p_3(4, 1.04184)$
4. $p_4(6, 1.73635)$
5. $p_5(8, 2.93924)$
6. $p_6(10, 1.98988)$
7. $p_7(12, 2.16252)$



Definicja interpolacji

Danych jest 7 punktów:

1. $p_1(0, 0.00000)$
2. $p_2(2, 1.78059)$
3. $p_3(4, 1.04184)$
4. $p_4(6, 1.73635)$
5. $p_5(8, 2.93924)$
6. $p_6(10, 1.98988)$
7. $p_7(12, 2.16252)$

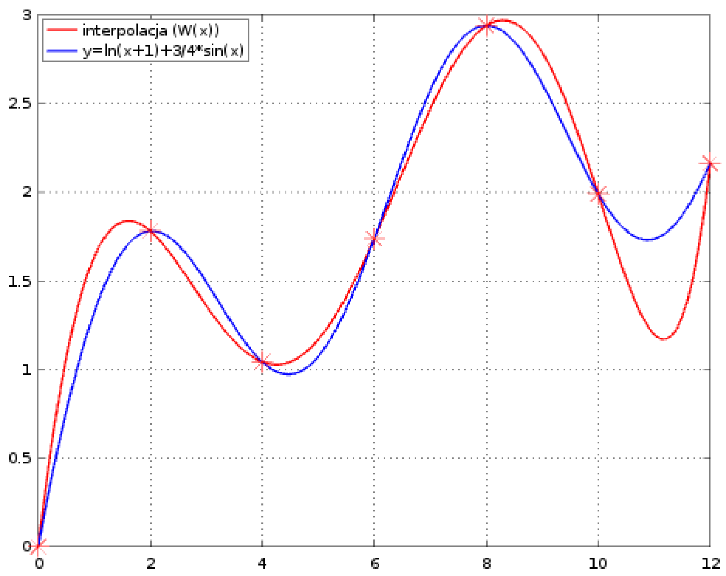


Znaleziony wielomian interpolacyjny:

$$W(x) = 2.73x - 1.26x^2 + 0.17x^3 + 0.004x^4 - 0.002x^5 + 9.83 * 10^{-5}x^6$$

Definicja interpolacji

Wielomian interpolacyjny i funkcja, dla której znaliśmy podane punkty



Rzeczywista funkcja: $f(x) = ln(x+1) + \frac{3}{4}sin(x)$

1.2 Rodzaje interpolacji

Interpolacja - podział

- liniowa
  - wielomianowa
    - wielomiany w postaci naturalnej
    - metoda Lagrange'a
    - wzór interpolacyjny Newtona
    - wzór Neville'a
    - metoda Hermite'a
  - trygonometryczna
  - funkcje sklejane (splajny, najczęściej wielomiany trzeciego stopnia)
- nieliniowa
  - wymierna
  - wykładnicza

1.3 Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianowa

wielomiany w postaci naturalnej

Interpolacja wielomianowa

W praktyce inżynierskiej często używaną bazą jest baza złożona z jednomianów:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = x^n$$

- Baza dla funkcji ciągłych na odcinku skończonym $[x_0, x_n]$ jest bazą zamkniętą
- tzn. że każda funkcja tej klasy może być przedstawiona w postaci szeregu złożonego z funkcji bazowych.

Interpolacja wielomianowa

Wielomian funkcyjny ma w tym przypadku postać:

$$W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \tag{5}$$

i musi wpełniać warunek:

$$\begin{aligned} W(x_0) &= a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n = y_0 \\ W(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_1^n = y_1 \\ &\ldots \\ W(x_n) &= a_0 + a_1x_n + \ldots + a_nx_n^n = y_n \end{aligned} \tag{6}$$

Układ (6) posiada jedno rozwiązanie względem a_i, jeżeli wartości $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są między sobą różne. Wynika to z faktu, że wyznacznik główny macierzy X jest wyznacznikiem Vandermonde'a.

Interpolacja wielomianowa

Wartość wyznacznika macierzy głównej X, macierzy Vandermonde'a wynosi:

$$detX = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_2^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Macierz $\mathbf{X}^{-1}$ dla bazy wielomianowej bywa nazywana macierzą Lagrange'a.

Interpolacja wielomianowa

- Ten sposób podejscia do interpolacji nie jest zbyt efektywny.
- Macierz $\mathbf{X}$ jest macierzą pełną, nie zawsze dobrze uwarunkowaną, jej numeryczne obracanie może być obarczone bardzo dużym błędem.

Funkcje interpolacyjne

- Podstawową rolę w modelowaniu matematycznym odgrywa funkcja jako środek do opisu zależności między poszczególnymi wielkościami.
- Wraz z wykorzystaniem funkcji w obliczeniach numerycznych pojawia się problem ich przybliżonego przedstawienia, tak, aby za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych i logicznych obliczyć wartość funkcji $f(x)$ dla dowolnego argumentu $x \in \langle a, b \rangle$ (zbioru wartości argumentu).

Funkcje interpolacyjne

- Wybór funkcji $\tilde{f}$, przybliżającej funkcję f, może być uwarunkowany wieloma, zasadniczo różniącymi się czynnikami.
- Funkcja przybliżająca $\tilde{f}$ powinna zapewniać łatwe obliczenie jej wartości.
- Dlatego jako funkcje przybliżające najczęściej stosuje się wielomiany algebraiczne

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

Przydatność wielomianu algebraicznego wynika ponadto z tego,

- że można go łatwo określić za pomocą skończonej liczby jego współczynników,
- oraz obliczyć jego wartość za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych.

Interpolacja za pomoca wielomianów

- Wartość $W_n(x)$ dla x nie będącego węzłem, jest pewnym przewidywaniem wartości y.
- Za pomocą wielomianu algebraicznego można skonstruować przybliżone przedstawienie dowolnej funkcji.
- Odległość między funkcjami przybliżaną i przybliżającą (błąd przybliżenia) określa się na podstawie porównania wartości obu funkcji w skończonej liczbie punktów nie będących węzłami interpolacji.

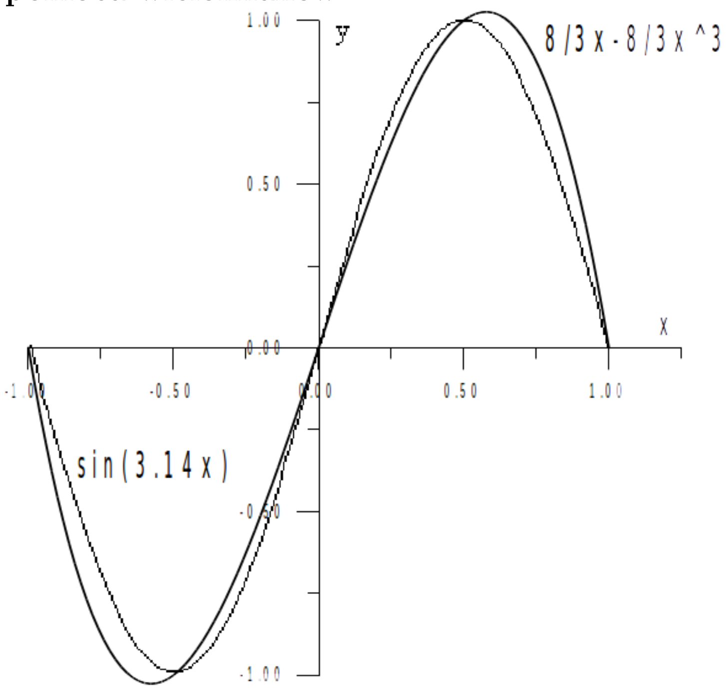
Interpolacja za pomoca wielomianów

Przykład

Funkcję $f(x) = sin(\pi x)$ w przedziale $< -1, 1 >$ interpoluje wielomian stopnia trzeciego

$$W_3(x) = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}x^3$$

Interpolacja za pomoca wielomianów



Wykresy funkcji przybliżanej ($sin\pi x$) i przybliżającej ($\frac{8}{3}x - \frac{8}{3}x^3$)

Interpolacja za pomoca wielomianów

Dla $x = \frac{1}{6}$ mamy

$$W_3(\frac{1}{6}) \approx 0.432$$

$$sin(\frac{1}{6}\pi) = 0.5$$

$$Blad\, proc. = \frac{E}{wart.\, dokl.} = \frac{0.5 - 0.432}{0.5} \approx 13.6\%$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Twierdzenie:

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \neq 0$), który w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Dowód:

Załóżmy, że węzły interpolacyjne są dowolnie rozmieszczone w przedziale $< a, b >$. Danych jest $n + 1$ węzłów, w których znane są wartości pewnej funkcji $y = f(x)$

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n) \tag{7}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Szukany wielomian ma postać daną zależnością (5):

$$W_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

Otrzymujemy zatem układ $n + 1$ równań z $n + 1$ niewiadomymi współczynnikami $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n &= y_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots &= \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n &= y_n \end{aligned} \tag{8}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Macierz główna tego układu równań jest następująca

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \tag{9}$$

Wyznacznik D macierzy **X** jest **wyznacznikiem Vandermonde'a**.

Macierz Vandermode'a

Macierz Vandermode'a - macierz kwadratowa n x n postaci:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy nazywany jest **wyznacznikiem Vandermonde'a** i jest wielomianem postaci:

$$D = det\ X = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Macierz Vandermonde'a pozwala udowodnić następujące twierdzenie o jednoznaczności wielomianu interpolacyjnego:

Dla dowolnego zbioru różnych punktów: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ istnieje dokładnie jeden wielomian W(x) o stopniu mniejszym niż $n+1$ i taki, że dla każdego $k \quad y_k = W(x_k)$.

Interpolacja za pomoca wielomianów

Zgodnie z przyjętymi założeniami, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$ wartość wyznacznika D wynosi

$$D = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0 \tag{10}$$

Stąd układ równań (8) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wartości a_i oblicza się ze wzoru wynikającego z twierdzenia Cramera

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^{n} y_j X_{j+1 i+1} \tag{11}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

gdzie X_{j+1i+1} $(j = 0, 1, \dots, n)$ są kolejnymi dopełnieniami algebraicznymi elementów i+1-tej kolumny macierzy głównej $\mathbf{X}$ układu równań

- Z twierdzenia Cramera wynika, że istnieje wielomian postaci (5) spełniający warunki (7), oraz że jest on wyznaczony jednoznacznie.
- Stopień wielomianu nie jest większy niż n.
- Gdy $a_n = 0$, to stopień wielomianu jest odpowiednio niższy.

Interpolacja za pomoca wielomianów

Przykład:

Oblicz wartość wyznacznika Vandermonde'a, w którym $x_0 = 2,\ x_1 = 3,\ x_2 = 4$.

Wyznacznik Vandermonde'a ma następującą postać

$$D = det\ X = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Zgodnie ze wzorem (10)

$$D = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$D = (3 - 2)(4 - 2)(4 - 3) = 2$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Przykład:

Obliczyć współczynniki wielomianu interpolującego funkcję $sin(\pi x)$ w przedziale $< -1, 1 >$.

W rozpatrywanym przedziale istnieje pięć węzłów interpolacji, dla których znane są dokładne wartości funkcji interpolowanej

$$\begin{array}{ll} x_0 = -1 & y_0 = 0 \\ x_1 = -0.5 & y_1 = -1 \\ x_2 = 0 & y_2 = 0 \\ x_3 = 0.5 & y_3 = 1 \\ x_4 = 1 & y_4 = 0 \end{array}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Zgodnie z wzorem (8), dla $n = 4$, otrzymujemy następujący układ równań

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + a_4 x_0^4 = y_0$$
$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4 = y_1$$
$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + a_4 x_2^4 = y_2$$

$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + a_4x_3^4 = y_3$$
$$a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 + a_3x_4^3 + a_4x_4^4 = y_4$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

którego macierz ze współczynnikami wynosi:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{bmatrix}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Wyznacznik Vandermonde'a tej macierzy, po podstawieniu wartości x dla węzłów interpolacji, ma postać

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Na podstawie wzoru (10) obliczamy

$$\begin{aligned} D = \;& (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)(x_4 - x_0)\cdot \\ & (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\cdot \\ & (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdot \\ & (x_4 - x_3) \end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości x otrzymuje się

$$D = \frac{9}{32}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Poszukiwane wartości współczynników wielomianu interpolacyjnego oblicza się ze wzoru (11), który po rozpisaniu ma następującą postać

$$a_i = \frac{1}{D}(y_0 X_{1,i+1} + y_1 X_{2,i+1} + y_2 X_{3,i+1} + y_3 X_{4,i+1} + y_4 X_{5,i+1})$$

Podstawiając zadane wartości y otrzymuje się

$$a_i = \frac{1}{D}(-X_{2,i+1} + X_{4,i+1})$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Obliczamy kolejno ze wzoru (11)

$$\begin{array}{ll}
X_{21} = 0 & X_{41} = 0 \\
X_{22} = -\frac{3}{8} & X_{42} = \frac{3}{8} \\
X_{23} = -\frac{3}{4} & X_{43} = -\frac{3}{4} \\
X_{24} = \frac{3}{8} & X_{44} = -\frac{3}{8} \\
X_{25} = \frac{3}{4} & X_{45} = \frac{3}{4}
\end{array}$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Stąd

$$a_0 = \frac{-X_{21} + X_{41}}{D} = \frac{0 - 0}{\frac{9}{32}} = 0$$

$$a_1 = \frac{-X_{22} + X_{42}}{D} = \frac{\frac{3}{8} + \frac{3}{8}}{\frac{9}{32}} = \frac{6}{8} \cdot \frac{32}{9} = \frac{8}{3}$$

$$a_2 = \frac{-X_{23} + X_{43}}{D} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{9}{32}} = 0$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

$$a_3 = \frac{-X_{24} + X_{44}}{D} = \frac{-\frac{3}{8} - \frac{3}{8}}{\frac{9}{32}} = -\frac{6}{8} \cdot \frac{32}{9} = -\frac{8}{3}$$

$$a_4 = \frac{-X_{25} + X_{45}}{D} = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{9}{32}} = 0$$

Interpolacja za pomoca wielomianów

Ostateczna postać wielomianu interpolacyjnego jest następująca

$$W_3(x) = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}x^3$$

2 Źródła

Źródła

W wykładzie wykorzystano materiały:

- Majchrzak E., Michnacki B., Metody numeryczne, Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne i algorytmy, WPŚ, Gliwice 2004
- Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J., Metody numeryczne, WNT, Warszawa 2017
- T. Markiewicz, R. Szmurło, S. Wincenciak, Metody numeryczne, Wykłady na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej, OWPW, Warszawa 2014