3. Interpolacja

Interpolacja w sensie Lagrange'a (3.1)

Dana jest funkcja $y=f(x)$ określona i ciągła w przedziale $[a;b]$, która przyjmuje wartości $y_1, y_2, \ldots, y_n$, dla skończonego zbioru argumentów $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tzn. $y_i=f(x_i)$ dla $i=0,1,\ldots,n$.

Zbiór argumentów $\{x_i\}, i=0,1,\ldots,n$, nazywany jest *węzłami interpolacji*, przy czym zakłada się, że: $a\leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant b$.

Powyższą funkcję nazywa się *funkcją tabelaryczną* ponieważ można ją określić podając tabelę:

Tabelaryczna postać funkcji interpolowej

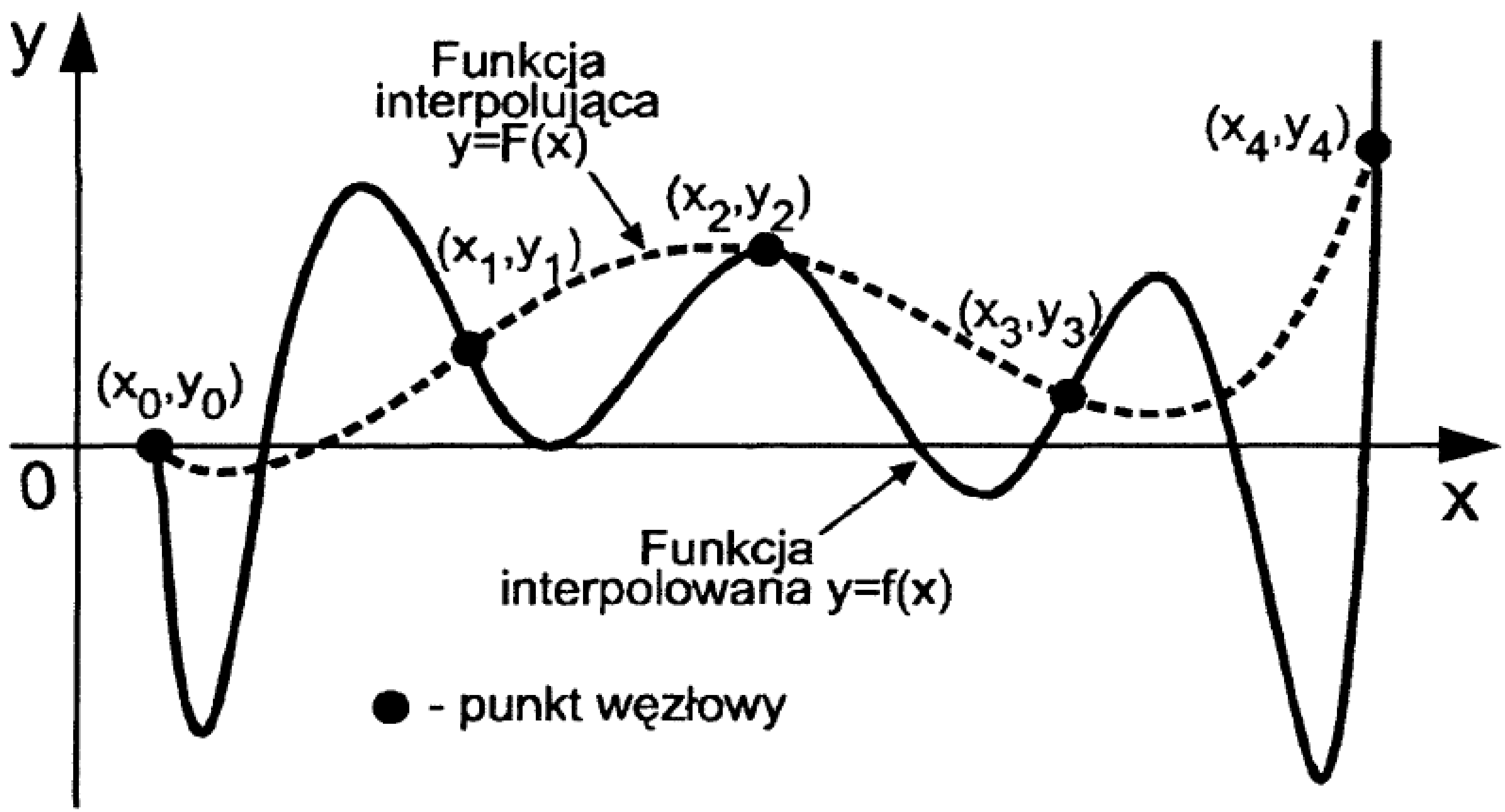
x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Interpolacja w sensie Lagrange'a (3.1.1)

Zagadnienie interpolacji w sensie Lagrange'a polega na znalezieniu funkcji $y=F(x)$ należącej do pewnej określonej klasy funkcji, która w węzłach interpolacji przyjmuje te same wartości co funkcja $y=f(x)$, tj.

$$F(x_i)=y_i \quad \text{dla} \quad i=0,1,\ldots,n.$$

Funkcję $y=F(x)$ nazywa się funkcją interpolującą, a $y=f(x)$ - funkcją interpolowaną.



Interpolacja w sensie Lagrange'a (3.1.2)

Zagadnienie interpolacji wykorzystuje się najczęściej do wyznaczania przybliżonych wartości funkcji $y=f(x)$ dla argumentów x leżących pomiędzy węzłami interpolacji. W związku z tym funkcję interpolującą $y=F(x)$ dobra się tak, aby jeśli to możliwe, dobrze przybliżała funkcję $y=f(x)$ a następnie oblicza się wartość $F(x)$ przyjmując, że

$$f(x)\approx F(x).$$

Wyznaczona ocena wartości $f(x)$ obarczona jest błędem $R(x)=f(x)-F(x)$ zwanym *błędem interpolacji* (*błędem metody*), który (jeśli istnieją ku temu możliwości) powinien również zostać oszacowany.

W zależności od wybranej klasy funkcji, zagadnienie interpolacji może mieć jedno rozwiązanie, wiele rozwiązań (nawet nieskończenie wiele) lub nie mieć rozwiązań wcale.

W dlalszej części przyjęto, że funkcja interpolująca jest *wielomianem uogólnionym*, tzn, funkcją postaci:

$$F(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+...+a_n\varphi_n(x).$$

Gdzie: $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ... \varphi_n(x)$ są funkcjami określonymi na przedziale $[a;b]$, w którym tworzą układ liniowo niezależny nazywany *bazą*.

Interpolacja w sensie Lagrange'a (3.1.3)

Aby wielomian uogólniony stał się funkcją interpolującą, muszą zachodzić równości:

$$
\begin{aligned}
F(x_0) &= a_0\varphi_0(x_0)+a_1\varphi_1(x_0)+\ldots+a_n\varphi_n(x_0)=y_0\,,\\
F(x_1) &= a_0\varphi_0(x_1)+a_1\varphi_1(x_1)+\ldots+a_n\varphi_n(x_1)=y_1\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
F(x_n) &= a_0\varphi_0(x_n)+a_1\varphi_1(x_n)+\ldots+a_n\varphi_n(x_n)=y_n\,.
\end{aligned}
$$

Równania powyższe tworzą układ $n+1$ równań liniowych z niewiadomymi $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Jeśli wyznacznik główny układu jest różny od zera tj.:

$$
\begin{vmatrix}
\varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0)\\
\varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n)
\end{vmatrix} \neq 0\,,
$$

istnieje wówczas jedno rozwiazanie, którym są poszukiwane współczynniki funkcji interpolującej $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Wzór Lagrange'a (3.2)

Niech bazę funkcji interpolujących stanowi zbiór jednomianów:

$$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \dots, \varphi_n(x)=x^n$$

które tworzą układ liniowo niezależny dla $-\infty < x < +\infty$, wówczas funkcja przyjmuje postać zwykłego wielomianu

$$F(x)=a_0+a_1 x+\dots+a_n x^n$$

a układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
&a_0+a_1 x_0+a_2 x_0^2+\dots+a_n x_0^n=y_0, \\
&a_0+a_1 x_1+a_2 x_1^2+\dots+a_n x_1^n=y_1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&a_0+a_1 x_n+a_2 x_n^2+\dots+a_n x_n^n=y_n .
\end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy głównej układu jest wyznacznikiem Vandermonda ------>

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$$

W praktyce metoda powyższa jest rzadko stosowana ze wzgędu na czesto występujące złe uwarunkowanie zadania.

Wzór Lagrange'a (3.2.1)

Do częściej stosowanych funkcji interpolacyjnych należy wielomian interpolacyjny Lagrange'a

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)} .$$

W praktyce wykorzystuje się inną postać wielomianu, wymagającą mniejszej liczby operacji arytmetycznych:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)} ,$$

gdzie $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ \ldots \ \cdot (x - x_n).$

Można pokazać, że wielomian Lagrange'a jest wielomianem stopnia conajwyżej n i że błąd uzyskiwany przy jego wykorzystaniu do interpolacji spełnia nierówność

$$\left| f(x) - L_n(x) \right| \le \left| \omega_{n+1}(x) \right| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} ,$$

gdzie $M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right| .$

Wzór Lagrange'a (3.2.2)

Przykład: Odczytane wartości temperatury zestawiono w tabeli:

Czas t [godz.]	12	13	14	15	16
Temperatura T [° C]	24	25	23	20	16

Należy okereślić temperaturę o godzinie 14:30.

Rozwiązanie: Do obliczenia $T(14{,}5)$ zastosowano drugi wzór Lagrange'a.

$$L_4(t) = (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)\left\{\frac{T_0}{(t-t_0)(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)(t_0-t_4)}\right.$$

$$+\frac{T_1}{(t-t_1)(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}+\frac{T_2}{(t-t_2)(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}$$

$$\left.+\frac{T_3}{(t-t_3)(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}+\frac{T_4}{(t-t_4)(t_4-t_0)(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}\right\}.$$

Stąd otrzymano:

Wzór Lagrange'a (3.2.3)

$$L_4(14.5) = (14.5-12)(14.5-13)(14.5-14)(14.5-15)(14.5-16)\cdot$$

$$\left\{\frac{24}{(14.5-12)(12-13)(12-14)(12-15)(12-16)}+\right.$$

$$\frac{25}{(14.5-13)(13-12)(13-14)(13-15)(13-16)}+$$

$$+\frac{23}{(14.5-14)(14-12)(14-13)(14-15)(14-16)}+$$

$$\frac{20}{(14.5-15)(15-12)(15-13)(15-14)(15-16)}+$$

$$\left.+\frac{16}{(14.5-16)(16-12)(16-13)(16-14)(16-15)}\right\}=$$

Wzór Lagrange'a (3.2.4)

$$= (2.5)(1.5)(0.5)(-0.5)(-1.5)$$

$$\left\{\frac{24}{(2.5)(-1.0)(-2.0)(-3.0)(-4.0)}+\frac{25}{(1.5)(1.0)(-1.0)(-2.0)(-3.0)}+\right.$$

$$+\frac{23}{(0.5)(2.0)(1.0)(-1.0)(-2.0)}+\frac{20}{(-0.5)(3.0)(2.0)(1.0)(-1.0)}+$$

$$\left.+\frac{16}{(-1.5)(4.0)(3.0)(2.0)(1.0)}\right\}=$$

$$= (1.40625)\cdot\left\{\frac{24}{60}-\frac{25}{9}+\frac{23}{2}+\frac{20}{3}-\frac{16}{36}\right\}=$$

$$1.40625\cdot\{0.40000-2.77778+11.50000+6.66667-0.44444\}=$$

$$= 1.40625\cdot 15.34444 = 21.57813 \approx 21.6.$$

Odpowiedź: O godzinie 14:30 temperatura była w przybliżeniu równa 21,6 °C. Nie można ocenić błędu wyznaczonej temperatury, ponieważ nie jest znana 5 pochdna funkcji $T(t)$ czyli $T^{(5)}(t)$.

<u>**Wzór Lagrange'a (3.2.5)**</u>

<u>Uwaga:</u> Chcąc zminimalizować błąd interpolacji w przedziale $[a\,;b]$, węzły interpolacji $x_1, x_2, \dots, x_n$ powinny być zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju i wyrażać się wzorami:

$$x_k = \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi + \frac{b+a}{2} \qquad k = 0, 1, \dots, n \, .$$

W tym przypadku błąd interpolacji jest równy:

$$\left| f(x) - L_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \, .$$

Interpolacja Czebyszewa (3.3)

Jeśli za zbiór funkcji bazowych przyjmie się *wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju* określone wzorami:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$
$$T_k(x) = 2 \cdot x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots ,$$

funkcja interpolująca przyjmie postać

$$F(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x).$$

Wspólczynniki $a_0, a_1, \dots, a_n$ wyznacza się rozwiązując układ równań

$$F(x_0) = T_0(x_0)a_0 + T_1(x_0)a_1 + \dots + T_n(x_0)a_n = y_0,$$
$$F(x_1) = T_0(x_1)a_0 + T_1(x_1)a_1 + \dots + T_n(x_1)a_n = y_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$F(x_n) = T_0(x_n)a_0 + T_1(x_n)a_1 + \dots + T_n(x_n)a_n = y_n.$$

Uogólniony wielomian interpolacyjny $F(x)$ z obliczonymi współczynnikami $a_0, a_1, \dots, a_n$ nosi nazwę *wielomianu interpolacjnego Czebyszewa*.

Interpolacja Czebyszewa (3.3.1)

Uwagi: Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju są określone na przedziale $[-1;1]$. Jeśli interpoluje się funkcję $y=f(t)$ w przedziale $[a;b]$ to trzeba dokonać podstawienia $t=(a+b)/2+[(b-a)/2]x$. Interpolacji poddana zostanie funkcja $f_1(x)$ powiązana z funkcją $f(t)$ zależnością:

$$f_1(x)=f((a+b)/2+[(b-a)/2]x)$$

Interpolacja Czebyszewa jest mniej wrażliwa na błędy zaokrągleń od interpolacji z użyciem wzoru Lagrange'a.

Przykład: Odczytane wartości temperatury zestawiono w tabeli:

Czas t [godz.]	12	13	14	15	16
Temperatura T [° C]	24	25	23	20	16

Korzystając z wielomianu interpolacyjnego Czebyszewa określić temperaturę o godzinie 14:30.

Interpolacja Czebyszewa (3.3.2)

Rozwiązanie: Ponieważ w przykładzie występuje 5 węzłów interpolacyjnych ($n+1=5$), należy wyznaczyć pięć wielomianów bazowych o rzędach od 0 do 4:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1, \\
T_1(x) &= x, \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1,
\end{aligned}
$$

gdzie $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Funkcja interpolowana określona jest w przedziale $[a; b] = [12; 16]$ zatem wielomian interpolacyjny musi zostać przeskalowany za pomocą zależności:

$$x = \frac{2}{b-a} \cdot t - \frac{a+b}{b-a} = \frac{2}{16-12} \cdot t - \frac{12+16}{16-12} = \frac{1}{2} \cdot t - 7 .$$

(jest to wyrażenie odwrotne do omawianego na poprzedniej stronie). Funkcja $T = T(t)$ będzie więc interpolowana wielomianem,

$$F(x(t)) = a_0 T_0\left(\frac{t}{2} - 7\right) + a_1 T_1\left(\frac{t}{2} - 7\right) + a_2 T_2\left(\frac{t}{2} - 7\right) + a_3 T_3\left(\frac{t}{2} - 7\right) + a_4 T_4\left(\frac{t}{2} - 7\right).$$

<u>Interpolacja Czebyszewa (3.3.3)</u>

Współczyniki $a_0, a_1, \ldots, a_n$ należy obliczyć rozwiązując układ równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} T_0(t_0) & T_1(t_0) & T_2(t_0) & T_3(t_0) & T_4(t_0) \\ T_0(t_1) & T_1(t_1) & T_2(t_1) & T_3(t_1) & T_4(t_1) \\ T_0(t_2) & T_1(t_2) & T_2(t_2) & T_3(t_2) & T_4(t_2) \\ T_0(t_3) & T_1(t_3) & T_2(t_3) & T_3(t_3) & T_4(t_3) \\ T_0(t_4) & T_1(t_4) & T_2(t_4) & T_3(t_4) & T_4(t_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix},$$

Układ ten po podstawieniu danych przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 1.0 & -0.5 & -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.5 & -0.5 & -1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.0 \\ 25.0 \\ 23.0 \\ 20.0 \\ 16.0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem układu równań są wspólczynniki wielomianu

$$a_0 = 21.66667,\ a_1 = -4.33333,\ a_2 = -1.50000,\ a_3 = 0.33333,\ a_4 = -0.16667.$$

Ponieważ dla $(t = 14{,}5) \rightarrow (x = 14{,}5/2 - 7 = 0{,}25)$ stąd

$$F(0.25) = 21.66667\cdot(1) - 4.33333\cdot(0.25) - 1.50000\cdot(2\cdot0.25^2 - 1) + \\ + 0.33333\cdot(4\cdot0.25^3 - 3\cdot0.25) - 0.16667\cdot(8\cdot0.25^4 - 0.25^2 + 1) = 21.57813$$

<u>Odpowiedź:</u> O godz. 14:30 temperatura była w przybliżenu równa 21,6 °C.

Interpolacja trygonometryczna (3.4)

W wielu przypadkach konieczna jest interpolacja funkcji okresowej $y=f(t)$. O funkcji takiej zakłada się, że jest okresowa o okresie głównym $[0;2\pi]$ lub w przypadku ogólniejszym $[a;b]$. Ponieważ jako bazę funkcji stosuje się funkcje trygonometryczne postaci

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos mx, \sin mx$$

których okresem głównym jest przedział $[0;2\pi]$ (lub jego całkowite "wielokrotności") w przypadku okresu głownego $[a;b]$ konieczne jest przeskalowanie przedziału za pomocą zależności

$$t = a + \frac{b-a}{2\pi} x \qquad (a \le t \le b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } 0 \le x \le 2\pi).$$

Funkcja interpolująca jest wielomianem trygonometrycznym o postaci

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$

Przy czym $n=2\mathrm{m}$ (liczba węzłów interpolacji jest równa $n+1$). Współczynniki $a_0, a_1, b_1 \ldots, a_m, b_m$ wyznacza się rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= a_0 + a_1 \cos x_0 + b_1 \sin x_0 + \ldots + a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0 &&= y_0, \\
F(x_1) &= a_0 + a_1 \cos x_1 + b_1 \sin x_1 + \ldots + a_m \cos mx_1 + b_m \sin mx_1 &&= y_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
F(x_{2m}) &= a_0 + a_1 \cos x_{2m} + b_1 \sin x_{2m} + \ldots + a_m \cos mx_{2m} + b_m \sin mx_{2m} &&= y_{2m}.
\end{aligned}$$

Interpolacja trygonometryczna (3.4.1)

W praktyce najważniejszy jest przypadek, gdy węzły interpolacji są równoodległe tj.

$$x_i = \frac{2i}{2m+1}\pi, \qquad \text{dla} \quad i = 0, 1, \dots, 2m.$$

W tym przypadku macierz główna układu równań pomnożona przez $\sqrt{2/2\mathrm{m}+1}$ staje się macierzą ortogonalną. Dzięki temu można podać bezpośrednie wzory na obliczanie współczynników $a_0, a_1, b_1 \dots, a_m, b_m$.

$$a_0 = \frac{2}{2m+1} \cdot \sum_{i=0}^{2m} y_i$$

$$a_k = \frac{2}{2m+1} \cdot \sum_{i=0}^{2m} y_i \cos kx_i = \frac{2}{2m+1} \cdot \sum_{i=0}^{2m} y_i \cos k \frac{2i}{2m+1}\pi \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

$$b_k = \frac{2}{2m+1} \cdot \sum_{i=0}^{2m} y_i \sin kx_i = \frac{2}{2m+1} \cdot \sum_{i=0}^{2m} y_i \sin k \frac{2i}{2m+1}\pi \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych (3.5)

Obecnie analizowany będzie przypadek, gdy argumenty funkcji dyskretnej

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

są rozmieszczone w równych odstępach, tzn.

$$x_{i+1} - x_i = h = const \quad dla \quad i = 0,1, \dots, n-1.$$

Omówione poniżej wzory interpolacyjne wykorzystują pojęcie różnicy skończonej.

Różnicą skończoną progresywną rzędu pierwszego dla argumentu x_i

nazywa się różnicę

$$\Delta y_i = f(x_i + h) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i \quad dla \quad i = 0,1, \dots, n-1.$$

Różnice skończone progresywne rzędu $k+1$ definiuje się rekurencyjnie

$$\Delta^{k+1} y_i = \Delta(\Delta^k y_i) = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i \quad dla \quad i = 0,1, \dots, n-k.$$

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych (3.5.1)

Wzór Stirlinga

Numerując węzły interpolacji $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_{0,} x_{1,} x_{2,} \ldots$ oraz oznaczając

$$q=\frac{x-x_0}{h}.$$

Wzór interpolacyjny Stirlinga rozpięty na węzłach $x_{-m}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_{0,} x_{1,} x_{2,} \ldots x_m$

wyraża zależność:

$$S_{2\mathrm{m}}(x)=y_0+q\cdot\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}+\frac{q^2}{2!}\cdot\Delta^2 y_{-1}+\frac{q(q^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\ldots+$$
$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(q^2-(m-1)^2)}{(2m-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2m-1}y_{-m}+\Delta^{2m-1}y_{-m+1}}{2}$$
$$+\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(q^2-(m-1)^2)}{(2m)!}\cdot\Delta^{2m}y_{-m}.$$

Błąd interpolacji wynikający z użycia wzoru Stirlinga jest w przybliżeniu równy:

$$R_{2\mathrm{m}}(x)=f(x)-S_{2\mathrm{m}}(x)=$$
$$=\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(q^2-m^2)}{(2m+1)!}\cdot\frac{\Delta^{2m+1}y_{-m-1}+\Delta^{2m+1}y_{-m}}{2}.$$

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych (3.5.2)

Przykład: Znane są nastepujące wartości funkcji $y=f(x)$:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$y_i=f(x_i)$	1.00000	1.14870	1.31951	1.51572	1.74110	2.00000	2.29740	2.63902	3.03143

Obliczyć $y=f(0{,}5)$ z dokładnością $\varepsilon=10^{-5}$.

Tabela: Różnice skończone funkcji $y=f(x)$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
-3	0,0	1,00000						
			0,14870					
-2	0,2	1,14870		0,02211				
			0,17081		0,00329			
-1	0,4	1,31951		0,02540		0,00048		
			0,19621		**0,00377**		**0,00010**	
0	**0,6**	**1,51572**		**0,02917**		**0,00058**		**-0,00005**
			0,22538		**0,00435**		**0,00005**	
1	0,8	1,74110		0,03352		0,00063		0,00006
			0,25890		0,00498		0,00011	
2	1,0	2,00000		0,03850		0,00074		0,00000
			0,29740		0,00572		0,00011	
3	1,2	2,29740		0,04422		0,00085		
			0,34162		0,00657			
4	1,4	2,63902		0,05079				
			0,39241					
5	1,6	3,03143						

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych (3.5.3)

Rozwiązanie: Do obliczenia przybliżonej wartości $y = f(0{,}5)$ zostanie zastosowany wzor Stirlinga. Pierwszym etapem bedzie takie ponumerowanie węzłów interpolacji aby węzeł x_0 znajdował się w pobliżu argumentu $x = 0{,}5$, dla którego szukana jest przybliżona wartość funkcji. Dzięki temu współczynnik $q = (x - x_0)/h = \dfrac{0{,}5 - 0{,}6}{0{,}2} = -0{,}5$, gdzie $h = x_{i+1} - x_i = 0{,}2$, $i = -3, \ldots, 0, \ldots, 5$, przyjmie małą wartość, stąd kolejne składniki wzoru Stirlinga będą szybko malały — stąd do wyznaczenia wartości $S_{2m}(x)$ z zadaną dokładnością ε we wzorze interpolacyjnym wystarczy wziąć pod uwagę tylko kilka początkowych składników. W tabeli zamieszczonej na poprzediej stronie zestawiono różnice skończone do rzędu szóstego. Tłustym drukiem zostały wyróżnione liczby, które wystąpią we wzorze Stirlinga. W kolejnych iteracjach k algorytmu należy wyznaczać $S_{2k}(x)$ oraz sprawdzać warunek końca obliczeń $|R_{2k}(x)| < \varepsilon$.

Tabela Iteracyjne obliczanie $S_{2k}(x)$

k	$S_{2k}(x)$	$R_{2k}(x)$
0	1.515720	-0.105398
1	1.413968	0.000254
2	1.414220	-0.000001

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych, I wzór Newtona (3.5.4)

Numerując węzły interpolacji $x_{0,} x_{1,} \dots , x_n$ oraz oznaczając podobnie jak we wzorze Stirlinga $q=(x-x_0)/h$. *Pierwszy wzór interpolacyjny Newtona* rozpięty na węzłach $x_{0,} x_{1,} \dots , x_n$ wyraża zależność:

$$P'_n(x)=y_0+q\cdot\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0+\dots$$

$$+\frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0 .$$

Błąd interpolacji wynikający z użycia pierwszego wzoru Newtona jest w przybliżeniu równy:

$$R'_k(x)=f(x)-P'_k(x)=\frac{q(q-1)(q-2)\cdot\ldots\cdot(q-k)}{(k+1)!}\cdot\Delta^{k+1} y_0 .$$

Przykład: Znane są nastepujące wartości funkcji $y=f(x)$:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$y_i=f(x_i)$	1.00000	1.14870	1.31951	1.51572	1.74110	2.00000	2.29740	2.63902	3.03143

Obliczyć $y=f(0,1)$ z dokładnością $\varepsilon=10^{-5}$.

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych, I wzór Newtona (3.5.5)

Rozwiązanie: Do obliczenia przybliżonej wartości $y = f(0{,}1)$ zostanie zastosowany pierwszy wzór interpolacyjny Newtona. Węzły interpolacji należy tak ponumerować, aby węzeł x_0 znajdował się w pobliżu argumentu $x = 0{,}1$, stąd przyjmuje się $x_0 = 0, x_1 = 0{,}2, \ldots, x_8 = 1{,}6$, daje to: $q = (0{,}0 - 0{,}1)/0{,}2 = -0{,}5$. W tabeli poniżej zestawiono różnice skończone (tłustym drukiem zostały wyróżnione liczby, które wystąpią w pierwszym wzorze interpolacyjnym Newtona).

Tabela Różnice skończone funkcji $y = f(x)$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	**0.0**	**1.00000**						
			0.14870					
1	0.2	1.14870		**0.02211**				
			0.17081		**0.00329**			
2	0.4	1.31951		0.02540		**0.00048**		
			0.19621		0.00377		**0.00010**	
3	0.6	1.51572		0.02917		0.00058		**-0.00005**
			0.22538		0 00435		0.00005	
4	0.8	1.74110		0.03352		0.00063		0.00006
			0.25890		0.00498		0.00011	
5	1.0	2.00000		0.03850		0.00074		0.00000
			0.29740		0.00572		0.00011	
6	1.2	2.29740		0.04422		0.00085		
			0.34162		0.00657			
7	1.4	2.63902		0.05079				
			0.39241					
8	1.6	3.03143						

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych, I wzór Newtona (3.5.6)

Tabela Iteracyjne obliczanie $P'_k(0,1)$

k	$P'_k(0,1)$	$R'_k(0,1)$
0	1,000000	0,074350
1	1,074350	-0,002764
2	1,071586	0,000206
3	1,071792	-0,000019
4	1,071773	0,000003

Wartość $P'_k(0,1)$ obliczamy iteracyjnie sprawdzając w każdym kroku, czy spełniony jest warunek $|R'_k(0,1)| < \varepsilon$.

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych, II wzór Newtona (3.5.7)

Węzły interpolacji numerujemy podobnie jak w pierwszym wzorze interpolacyjnym Newtona $x_{0,} x_{1,} \ldots, x_n$ jednak przez q oznaczamy $q=(x-x_n)/h$.

Drugi wzór interpolacyjny Newtona rozpięty na węzłach $x_{0,} x_{1,} \ldots, x_n$ wyraża zależność:

$$P''_n(x)=y_n+q\cdot\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_{n-2}+\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_{y-3}+\ldots$$
$$+\frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+n-1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0.$$

Błąd interpolacji wynikający z użycia pierwszego wzoru Newtona jest w przybliżeniu równy:

$$R''_k(x)=f(x)-P''_k(x)=\frac{q(q+1)(q+2)\cdot\ldots\cdot(q+k)}{(k+1)!}\cdot\Delta^{k+1} y_{n-(k+1)}.$$

Przykład: Znane są nastepujące wartości funkcji $y=f(x)$:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$y_i=f(x_i)$	1.00000	1.14870	1.31951	1.51572	1.74110	2.00000	2.29740	2.63902	3.03143

Obliczyć $y=f(1,5)$ z dokładnością $\varepsilon=10^{-5}$.

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych, II wzór Newtona (3.5.8)

Rozwiązanie: Do obliczenia przybliżonej wartości $y = f(1{,}5)$ zostanie zastosowany drugi wzór interpolacyjny Newtona. Węzły interpolacji należy tak ponumerować, aby węzeł $x_n = x_8 = 1{,}6$ znajdował się w pobliżu argumentu $x = 1{,}5$, stąd przyjmuje się $x_0 = 0, x_1 = 0{,}2, \ldots, x_8 = 1{,}6$, daje to: $q = (1{,}5 - 1{,}6)/0{,}2 = -0{,}5$.

W tabeli poniżej zestawiono różnice skończone (tłustym drukiem zostały wyróżnione liczby, które wystąpią w drugim wzorze interpolacyjnym Newtona).

Tabela Różnice skończone funkcji $y = f(x)$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	0.0	1.00000						
			0.14870					
1	0.2	1.14870		0.02211				
			0.17081		0.00329			
2	0.4	1.31951		0.02540		0.00048		
			0.19621		0.00377		0.00010	
3	0.6	1.51572		0.02917		0.00058		-0.00005
			0.22538		0.00435		0.00005	
4	0.8	1.74110		0.03352		0.00063		0.00006
			0.25890		0.00498		0.00011	
5	1.0	2.00000		0.03850		0.00074		**0.00000**
			0.29740		0.00572		**0.00011**	
6	1.2	2.29740		0.04422		**0.00085**		
			0.34162		**0.00657**			
7	1.4	2.63902		**0.05079**				
			0.39241					
8	**1.6**	**3.03143**						

Interpolacja w przypadku węzłów równoodległych, II wzór Newtona (3.5.9)

Tabela Iteracyjne obliczanie $P''_k(1{,}5)$

k	$P''_k(1{,}5)$	$R''_k(1{,}5)$
0	3,031430	-0,196205
1	2,835225	-0,006349
2	2,828876	-0,000411
3	2,828465	-0,000033
4	2,828432	-0,000003

Wartość $P''_k(1{,}5)$ obliczamy iteracyjnie sprawdzając w każdym kroku, czy spełniony jest warunek $|R''_k(1{,}5)| < \varepsilon$.