

Interpolacja

Interpolacja może być traktowana jako szczególny przypadek aproksymacji, polegający na tym, że funkcja aproksymowana i funkcja aproksymująca przyjmują te same wartości w wybranych punktach obszaru zwanych węzłami. Jeżeli funkcja interpolująca daje się wyrazić w postaci sumy iloczynów:

$$G(x) = a_0 \cdot \varphi_0(x) + a_1 \cdot \varphi_1(x) + a_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots = \sum_{i=0}^m a_i \cdot \varphi_i(x) \quad , \quad (1)$$

których czynniki $\varphi_i(x)$ są nazywane funkcjami bazowymi i są przyjmowane a priori, natomiast czynniki a_i są współczynnikami interpolacji podlegającymi wyznaczeniu, to zadanie takie nosi nazwę interpolacji liniowej, gdyż funkcja interpolująca jest liniową kombinacją funkcji bazowych. Wprowadza się rozróżnienie pomiędzy interpolacją (obliczenia prowadzimy dla punktów leżących pomiędzy skrajnymi węzłami) i ekstrapolacją (celem obliczeń są wartości funkcji interpolowanej poza skrajnymi węzłami). Rozróżnienie jest uzasadnione faktem, że ekstrapolacja jest obciążona ryzykiem popełnienia istotnie większego błędu niż interpolacja, a przy tym błąd ten jest znacznie trudniej oszacować niż błąd interpolacji. Najczęściej stosowanym rodzajem interpolacji jest interpolacja wielomianowa, czyli interpolacja, w której funkcjami bazowymi są jednomiany (Rys. 1):

$$\varphi_i(x) = x^i \quad , \quad (2)$$

bądź wielomiany Czebyszewa (Rys. 2):

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= T_0(x) = 1 \\ \varphi_1(x) &= T_1(x) = x \\ &\vdots \\ \varphi_{i+1}(x) &= T_{i+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_i(x) - T_{i-1}(x) \quad \text{dla } i \geq 1 \end{aligned} \quad , \quad (3)$$

czy wielomiany Lagrange'a (Rys. 3):

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= L_i^{(m)}(x) = \\ &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_{m-1}) \cdot (x-x_m)}{(x_i-x_0) \cdot (x_i-x_1) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{m-1}) \cdot (x_i-x_m)} = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m (x-x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m (x_i-x_j)} \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Zaletą pierwszego zestawu funkcji bazowych jest prostota, jednakże jest ona okupiona istotną wadą, wynikającą z faktu, że parzyste bądź nieparzyste jednomiany wyższych stopni mało się różnią (Rys. 1). Prowadzi to do problemów numerycznych w trakcie wyznaczania współczynników aproksymacji a_i i może znacząco wpłynąć na dokładność obliczeń (patrz przykład poniżej).

Wadą bazy jednomianowej w dużym stopniu pozbawiona jest baza wielomianów Czebyszewa. Kosztom liniowej transformacji przedziału interpolacji $[a, b]$ na przedział $[-1, 1]$ zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned} x_{[a,b]} &= \frac{a+b}{2} + \xi_{[-1,1]} \cdot \frac{b-a}{2} \\ \xi_{[-1,1]} &= \frac{2 \cdot x_{[a,b]} - a - b}{b-a} \quad , \end{aligned} \quad (5)$$

i niewielkiego skomplikowania pracy uzyskujemy znaczącą poprawę stabilności obliczeń numerycznych, gdyż w przedziale $[-1, 1]$ wielomiany te znacząco różnią się między sobą (Rys. 2). Ponadto wielomiany Czebyszewa posiadają następujące użyteczne własności:

1. Jeżeli zmienna niezależna x należy do przedziału $[-1, 1]$, to wartość wielomianu dla tej zmiennej też należy do tego przedziału, jeżeli natomiast zmienna niezależna jest spoza przedziału $[-1, 1]$, to i wartość wielomianu do niego nie należy, czyli:

$$\begin{aligned} \text{gdy } |x| \leq 1 \text{ to } |T_i(x)| \leq 1 \\ \text{gdy } |x| > 1 \text{ to } |T_i(x)| > 1 \end{aligned} \quad (6)$$

2. Wszystkie pierwiastki wielomianów Czebyszewa należą do przedziału $[-1, 1]$ i są różne. Ich wartości można wyznaczyć z następującego wzoru analitycznego:

$$x_k = \cos\left(\frac{2 \cdot k - 1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (7)$$

w którym n oznacza stopień wielomianu.

3. Wielomiany Czebyszewa są ortogonalne w przedziale $[-1, 1]$ z wagą $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, czyli:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x) \cdot T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & \text{gdy } i = j \neq 0 \\ \pi & \text{gdy } i = j = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Wielomiany Lagrange'a natomiast posiadają inną cechę, bardzo ułatwiającą tworzenie funkcji interpolujących. Otóż wprost z definicji (4) funkcji $L_i^{(m)}(x)$ wynika, że zachodzi związek:

$$L_i^{(m)}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{gdy } i = j \end{cases}, \quad (9)$$

dzięki któremu współczynniki a_i w przypadku interpolacji Lagrange'a są wprost równe wartościom węzłowym funkcji interpolowanej $F_i = F(x_i)$.

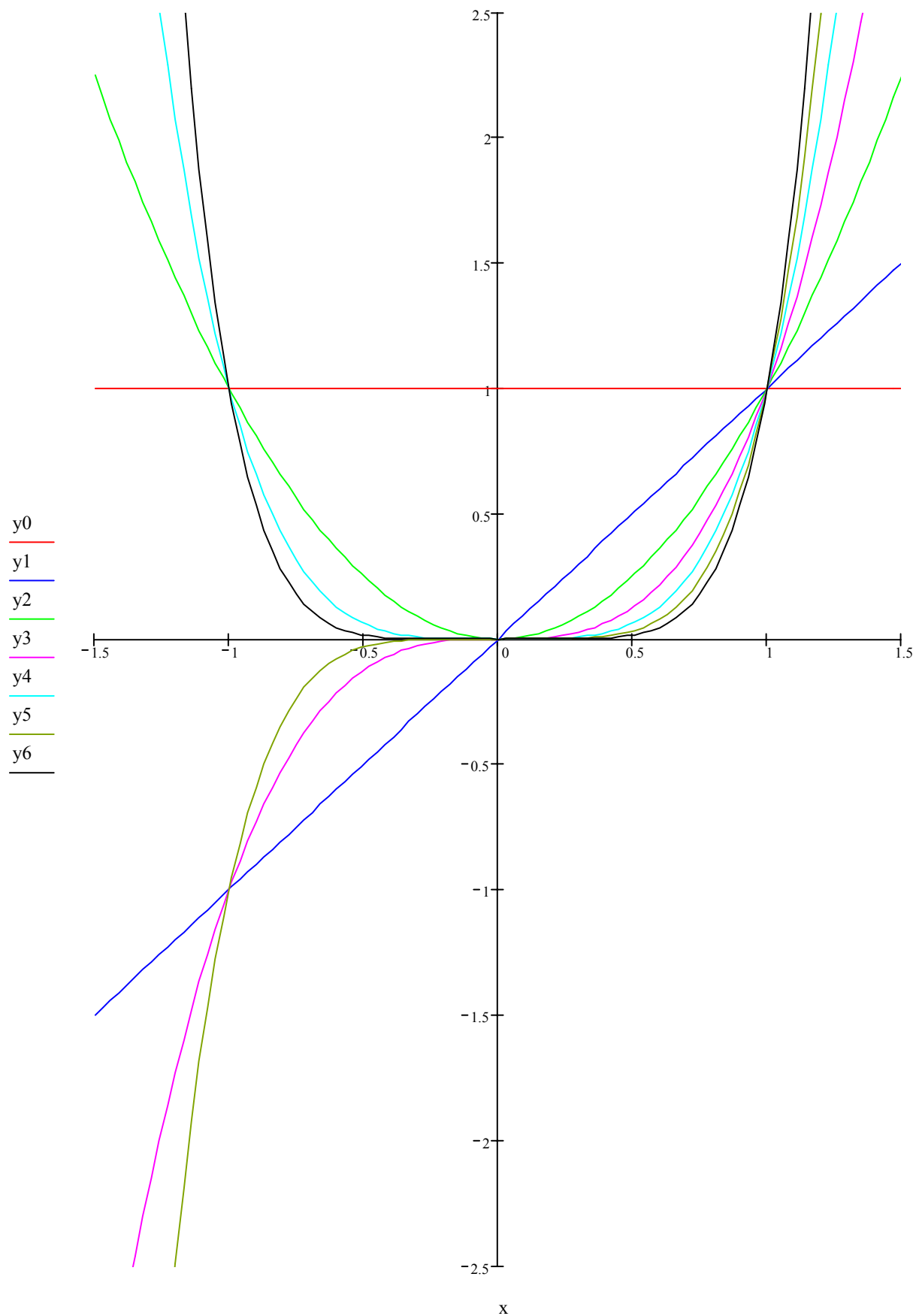
Możliwe jest jednak zastosowanie innego zestawu funkcji bazowych, na przykład funkcji trygonometrycznych (Rys. 4), dobrze odtwarzających funkcje okresowe:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 \\ \varphi_1(x) &= \cos(x), \varphi_2(x) = \sin(x) \\ &\vdots \\ \varphi_{2i-1}(x) &= \cos(i \cdot x), \varphi_{2i}(x) = \sin(i \cdot x) \end{aligned} \quad (10)$$

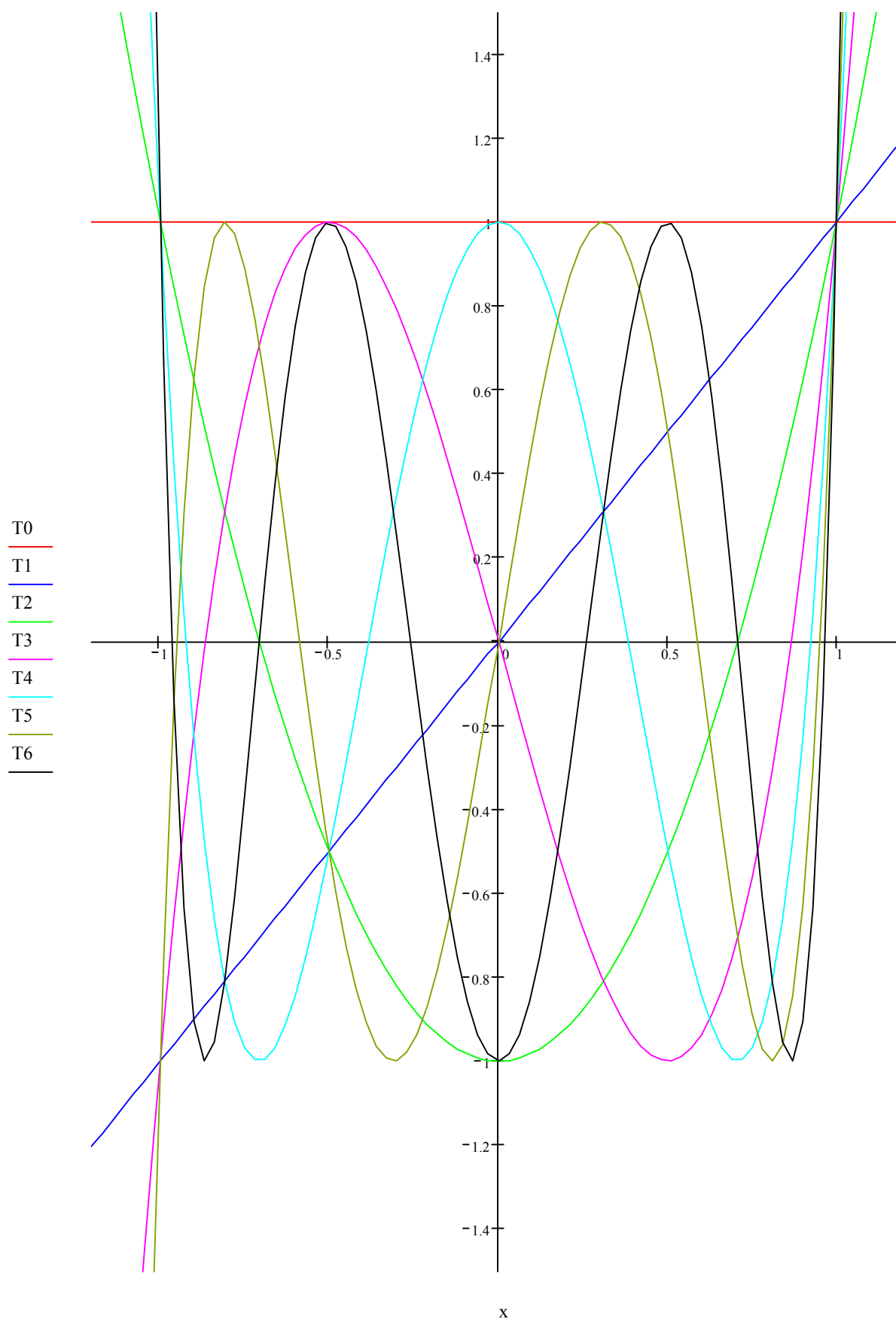
oraz funkcji wymiernych (interpolacja Pade), stosowanych w przypadku funkcji interpolowanych źle odtwarzanych przez wielomiany:

$$G(x) = \frac{a_0 \cdot \varphi_0(x) + a_1 \cdot \varphi_1(x) + a_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots}{b_0 \cdot \varphi_0(x) + b_1 \cdot \varphi_1(x) + b_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i \cdot \varphi_i(x)}{\sum_{j=0}^n b_j \cdot \varphi_j(x)}, \quad (11)$$

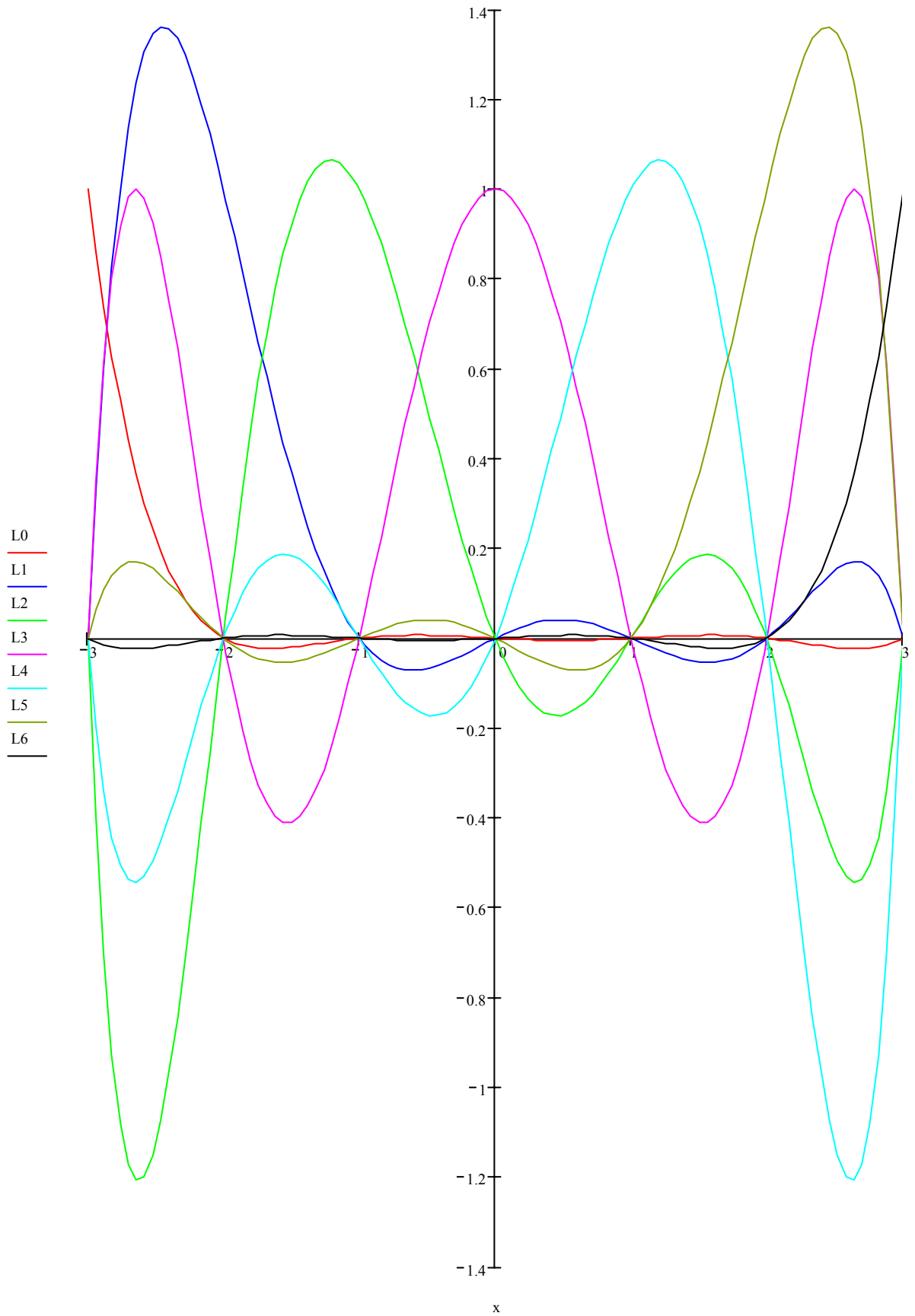
gdzie $\varphi_i(x), \varphi_j(x)$ są funkcjami określonymi równaniem (2),



Rys. 1 Baza jednomianowa, jednomiany x^0, x^1, \dots, x^6 , na rysunku oznaczone jako y_0, y_1, \dots, y_6 .



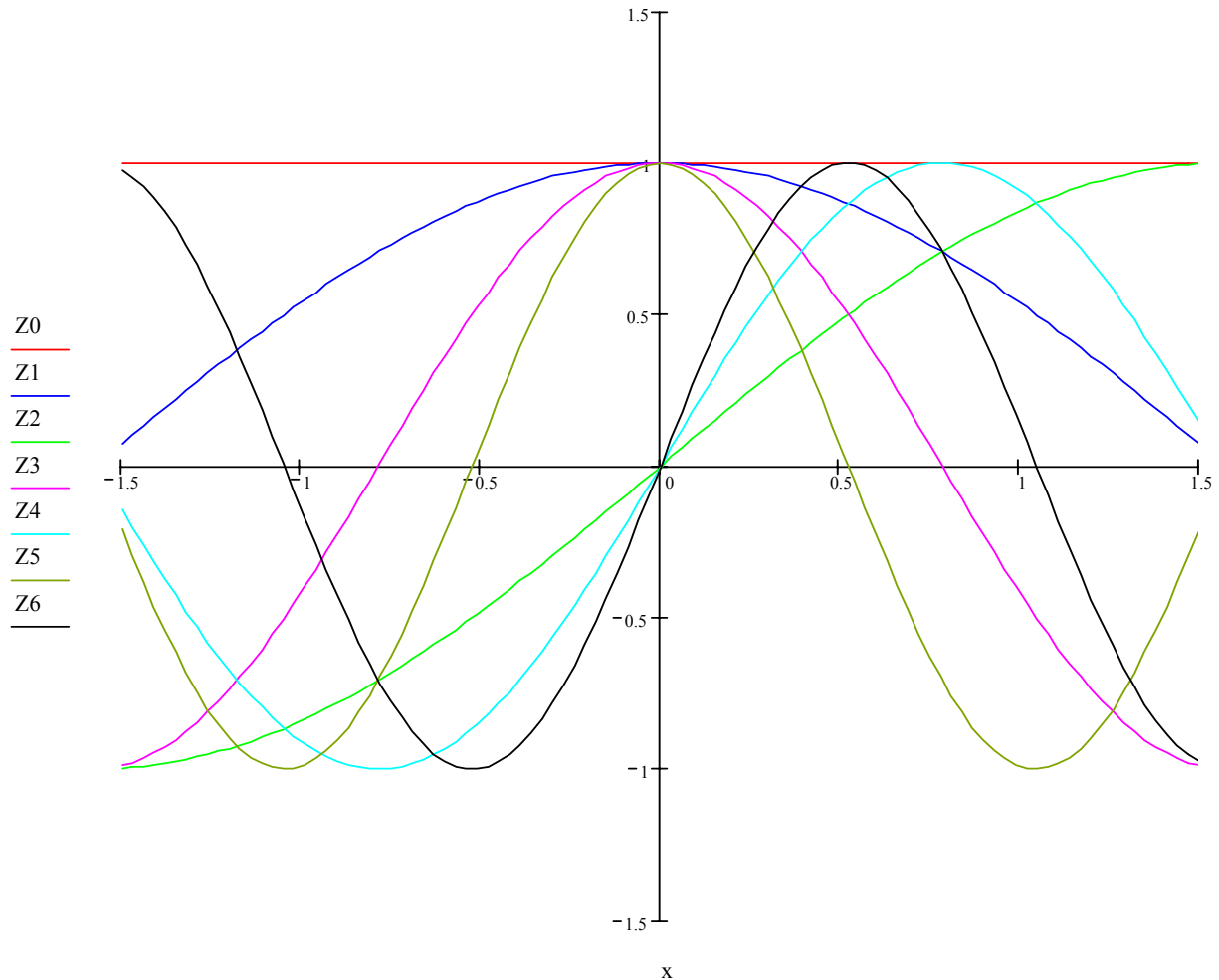
Rys. 2 Baza wielomianów Czebyszewa T_0, T_1, \dots, T_6 , na rysunku oznaczonych jako $T0, T1, \dots, T6$.



Rys. 3 Wielomiany interpolacyjne Lagrange'a $L_0^{(6)}, L_1^{(6)}, \dots, L_6^{(6)}$, na rysunku oznaczone jako $L0, L1, \dots, L6$.

czy funkcji wykładniczych:

$$G(x) = a_0 \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} + a_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + \dots = \sum_{i=0}^m a_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \quad (12)$$



Rys. 4 Funkcje trygonometryczne jako funkcje bazowe.

W dalszej części tego rozdziału ograniczymy się do rozważania interpolacji wielomianowej.

Warunkiem, z którego skorzystamy, aby wyznaczyć wartości współczynników interpolacji a_i (1) jest oczywiście żądanie, by wartości funkcji interpolującej $G(x)$ i funkcji interpolowanej $F(x)$ były sobie równe w węzłach interpolacji, czyli:

$$F(x_j) = G(x_j) \quad \text{dla } j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Postępowanie takie prowadzi do utworzenia układu liniowych równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} G(x_0) &= a_0 \cdot \varphi_0(x_0) + a_1 \cdot \varphi_1(x_0) + \dots + a_i \cdot \varphi_i(x_0) + \dots + a_m \cdot \varphi_m(x_0) = F(x_0) \\ G(x_1) &= a_0 \cdot \varphi_0(x_1) + a_1 \cdot \varphi_1(x_1) + \dots + a_i \cdot \varphi_i(x_1) + \dots + a_m \cdot \varphi_m(x_1) = F(x_1) \\ &\vdots \\ G(x_j) &= a_0 \cdot \varphi_0(x_j) + a_1 \cdot \varphi_1(x_j) + \dots + a_i \cdot \varphi_i(x_j) + \dots + a_m \cdot \varphi_m(x_j) = F(x_j) \quad \dots \\ &\vdots \\ G(x_n) &= a_0 \cdot \varphi_0(x_n) + a_1 \cdot \varphi_1(x_n) + \dots + a_i \cdot \varphi_i(x_n) + \dots + a_m \cdot \varphi_m(x_n) = F(x_n) \end{aligned} \quad (14)$$

w którym liczba równań jest równa liczbie węzłów interpolacji a liczba niewiadomych liczbie funkcji bazowych. Układ równań (14) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\Phi \cdot a = F, \quad (15)$$

gdzie:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_i(x_0) & \cdots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_i(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_j) & \varphi_1(x_j) & \cdots & \varphi_i(x_j) & \cdots & \varphi_m(x_j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_i(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_j) \\ \vdots \\ F(x_n) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Jeżeli węzły interpolacji nie pokrywają się, to poszczególne równania tego układu są liniowo niezależne, czyli warunkiem jednoznaczności jego rozwiązania jest zgodność liczby węzłów i liczby funkcji bazowych ($m = n$). W przypadku bazy jednomianowej macierz Φ przyjmuje postać macierzy Vandermonde'a, której cechą charakterystyczną jest bardzo duży wskaźnik uwarunkowania, mogący powodować problemy numeryczne z utrzymaniem dokładności rozwiązania.

Dla ilustracji sposobu postępowania w trakcie interpolacji funkcji poniżej zostanie przedstawiony przykład interpolacji funkcji niewymiernej $F(x) = \sqrt{x}$ wielomianami. Zadanie zostanie rozwiązane trzykrotnie, w bazie jednomianowej, w bazie wielomianów Czebyszewa i przy pomocy wielomianów Lagrange'a. Zadanie rozwiążemy dla pięciu węzłów interpolacji rozmieszczonych nierównomiernie. Dane zadania zestawione w postaci tabelarycznej przedstawiają się następująco:

Tablica 1. Dane dla zadania interpolacji.

i	0	1	2	3	4
x_i	0,000	1,000	4,000	9,000	16,000
$F(x_i)$	0,000	1,000	2,000	3,000	4,000

Interpolacja w bazie jednomianowej

Zgodnie z warunkami zadania funkcja interpolująca ma postać:

$$G(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 = \sum_{i=0}^4 a_i \cdot x^i, \quad (17)$$

wobec czego macierz Φ (16) będzie równa:

$$\Phi_J = \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ x_3^0 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ x_4^0 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 \\ 1 & 16 & 256 & 4096 & 65536 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

co jest zgodne z definicją macierzy Vandermonde'a, a wektor prawej strony F (16) przyjmie wartości:

$$F = \begin{bmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ F(x_2) \\ F(x_3) \\ F(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} . \quad (19)$$

Po rozwiązaniu układu równań (15) otrzymujemy zestaw współczynników interpolacji a_i :

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,000000 \\ 1,269048 \\ -0,298611 \\ 0,030556 \\ -0,000992 \end{bmatrix} . \quad (20)$$

Tak więc ostatecznie przepis funkcji interpolującej przedstawia się następująco:

$$G(x) = 1,269048 \cdot x^1 - 0,298611 \cdot x^2 + 0,030556 \cdot x^3 - 0,000992064 \cdot x^4 . \quad (21)$$

Interpolacja wielomianami Czebyszewa

Zgodnie z warunkami zadania funkcja interpolująca ma postać:

$$G(x) = a_0 \cdot T_0(x) + a_1 \cdot T_1(x) + a_2 \cdot T_2(x) + a_3 \cdot T_3(x) + a_4 \cdot T_4(x) = \sum_{i=0}^4 a_i \cdot T_i(x) , \quad (22)$$

a odpowiednie wielomiany Czebyszewa zapisane dla przedziału $[-1, 1]$ wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} T_0(\xi) &= 1 \\ T_1(\xi) &= \xi \\ T_2(\xi) &= 2 \cdot \xi^2 - 1 \\ T_3(\xi) &= 4 \cdot \xi^3 - \xi \\ T_4(\xi) &= 8 \cdot \xi^4 - 8 \cdot \xi^2 + 1 \end{aligned} . \quad (23)$$

Po wykonaniu podstawienia (5)² otrzymujemy wielomiany Czebyszewa zapisane dla oryginalnego przedziału $[0, 16]$:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= \frac{1}{8} \cdot x - 1 \\ T_2(x) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot x - 1\right)^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot x - 1\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot x - 1\right) \\ T_4(x) &= 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot x - 1\right)^4 - 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot x - 1\right)^2 + 1 \end{aligned} . \quad (24)$$

Zgodnie z (16) macierz Φ w tym przypadku przyjmie postać:

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) & T_2(x_0) & T_3(x_0) & T_4(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) & T_2(x_1) & T_3(x_1) & T_4(x_1) \\ T_0(x_2) & T_1(x_2) & T_2(x_2) & T_3(x_2) & T_4(x_2) \\ T_0(x_3) & T_1(x_3) & T_2(x_3) & T_3(x_3) & T_4(x_3) \\ T_0(x_4) & T_1(x_4) & T_2(x_4) & T_3(x_4) & T_4(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -0,875000 & 0,531250 & -0,054688 & -0,435547 \\ 1 & -0,500000 & -0,500000 & 1 & -0,500000 \\ 1 & 0,125000 & -0,968750 & -0,367188 & 0,876953 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

a wektor prawej strony F (16) będzie identyczny jak w poprzednim przypadku (19). Rozwiązując układ równań (15) wyznaczmy wartości współczynników interpolacji a_i :

$$a = \begin{bmatrix} 0,625738 \\ 1,815962 \\ 2,828427 \\ 3,564026 \\ 3,950753 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Tak więc ostatecznie przepis funkcji interpolującej przedstawia się następująco:

$$G(x) = 0,625738 \cdot T_0(x) + 1,815962 \cdot T_1(x) + 2,828427 \cdot T_2(x) + 3,564026 \cdot T_3(x) + 3,950753 \cdot T_4(x), \quad (27)$$

a po podstawieniu za wielomiany $T_0(x), T_1(x), \dots, T_4(x)$ z (24), wykonaniu wszystkich potęgowania i redukcji czynników podobnych otrzymamy ostatecznie wyrażenie (21).

Interpolacja wielomianami Lagrange'a

Zgodnie z warunkami zadania funkcja interpolująca ma postać:

$$\begin{aligned} G(x) &= F(x_0) \cdot L_0^{(4)}(x) + F(x_1) \cdot L_1^{(4)}(x) + F(x_2) \cdot L_2^{(4)}(x) + F(x_3) \cdot L_3^{(4)}(x) + F(x_4) \cdot L_4^{(4)}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^4 F(x_i) \cdot L_i^{(4)}(x) \end{aligned}, \quad (28)$$

a odpowiednie wielomiany Lagrange'a będą wyglądały następująco:

$$\begin{aligned} L_0^{(4)}(x) &= \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2) \cdot (x_0-x_3) \cdot (x_0-x_4)} \\ L_1^{(4)}(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3) \cdot (x_1-x_4)} \\ L_2^{(4)}(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3) \cdot (x_2-x_4)} \\ L_3^{(4)}(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_4)}{(x_3-x_0) \cdot (x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2) \cdot (x_3-x_4)} \\ L_4^{(4)}(x) &= \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_4-x_0) \cdot (x_4-x_1) \cdot (x_4-x_2) \cdot (x_4-x_3)} \end{aligned}, \quad (29)$$

co po podstawieniu wartości z tablicy 1 prowadzi do:

$$\begin{aligned}
 L_0^{(4)}(x) &= \frac{(x-1) \cdot (x-4) \cdot (x-9) \cdot (x-16)}{(0-1) \cdot (0-4) \cdot (0-9) \cdot (0-16)} = \frac{576 - 820 \cdot x + 273 \cdot x^2 - 30 \cdot x^3 + x^4}{576} \\
 L_1^{(4)}(x) &= \frac{(x-0) \cdot (x-4) \cdot (x-9) \cdot (x-16)}{(1-0) \cdot (1-4) \cdot (1-9) \cdot (1-16)} = \frac{-576 \cdot x + 244 \cdot x^2 - 29 \cdot x^3 + x^4}{-360} \\
 L_2^{(4)}(x) &= \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-9) \cdot (x-16)}{(4-0) \cdot (4-1) \cdot (4-9) \cdot (4-16)} = \frac{-144 \cdot x + 169 \cdot x^2 - 26 \cdot x^3 + x^4}{720} \\
 L_3^{(4)}(x) &= \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-4) \cdot (x-16)}{(9-0) \cdot (9-1) \cdot (9-4) \cdot (9-16)} = \frac{-64 \cdot x + 84 \cdot x^2 - 21 \cdot x^3 + x^4}{-2520} \\
 L_4^{(4)}(x) &= \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-4) \cdot (x-9)}{(16-0) \cdot (16-1) \cdot (16-4) \cdot (16-9)} = \frac{-36 \cdot x + 49 \cdot x^2 - 14 \cdot x^3 + x^4}{20160}
 \end{aligned} \quad (30)$$

Ostateczny przepis funkcji interpolującej przedstawia się:

$$G(x) = 0 \cdot L_0^{(4)}(x) + 1 \cdot L_1^{(4)}(x) + 2 \cdot L_2^{(4)}(x) + 3 \cdot L_3^{(4)}(x) + 4 \cdot L_4^{(4)}(x) \quad , \quad (31)$$

a po podstawieniu za wielomiany $L_0^{(4)}(x), L_1^{(4)}(x), \dots, L_4^{(4)}(x)$ z (30), wykonaniu wszystkich mnożeń i redukcji czynników podobnych otrzymamy ostatecznie wyrażenie (21).

Jak widać w każdym z rozpatrywanych przypadków otrzymaliśmy ten sam wynik, co jest zgodne z oczekiwaniami, gdyż w każdym z rozpatrywanych zadań poszukiwaliśmy wielomianu 4 stopnia przechodzącego przez podane (te same) pięć punktów. Jak wiadomo z analizy matematycznej, zadanie takie jest rozwiązywalne jednoznacznie, co znaczy, że w ogólności istnieje jeden i tylko jeden wielomian stopnia m przechodzący przez $m+1$ podanych punktów na płaszczyźnie.

Zajmijmy się teraz bliżej kwestią przewagi bazy wielomianów Czebyszewa nad bazą jednomianową. Jak widać z przedstawionego powyżej przykładu nakład pracy konieczny do wyznaczenia poszukiwanych współczynników a_i jest w obu przypadkach porównywalny. Zasadnicza różnica wiąże się z postacią macierzy Φ . Otóż, jeżeli w naszym przykładzie policzymy wskaźnik uwarunkowania tej macierzy, to okaże się, że dla obliczeń w bazie jednomianowej jest on równy:

$$k_J = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\Phi_J^T \cdot \Phi_J)}{\lambda_{\min}(\Phi_J^T \cdot \Phi_J)}} = \sqrt{\frac{4,355359 \cdot 10^9}{0,171991}} = 1,591326 \cdot 10^5 \quad , \quad (32)$$

a w bazie wielomianów Czebyszewa jest on równy:

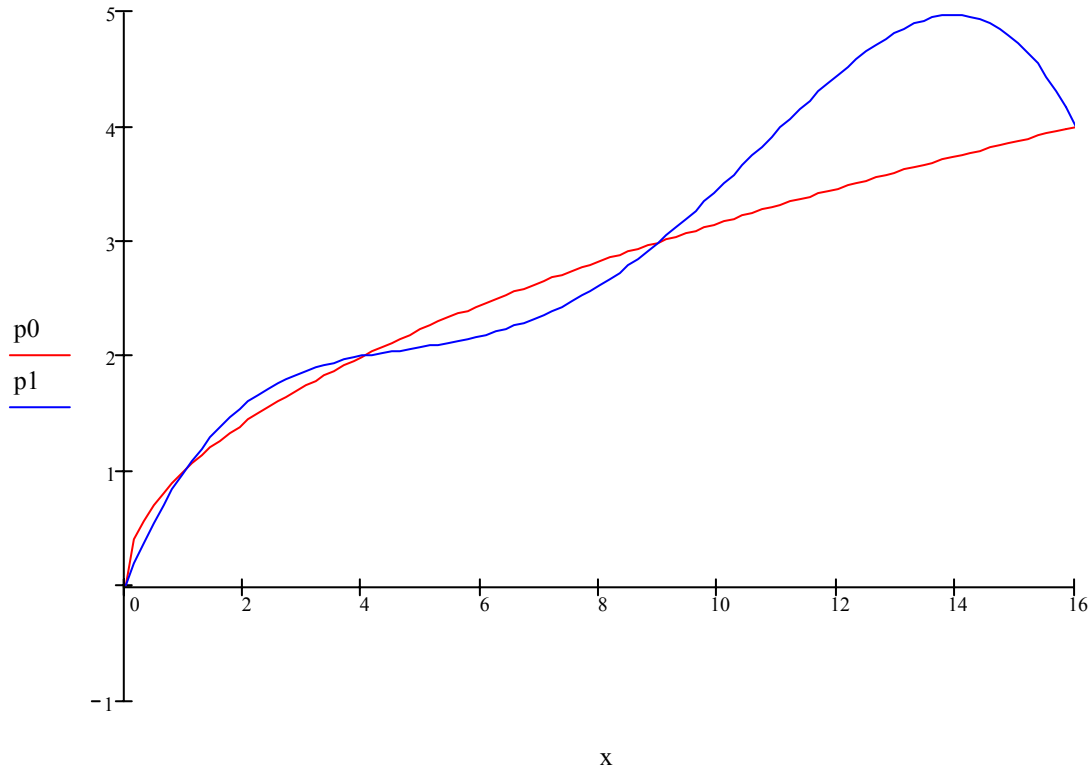
$$k_C = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\Phi_C^T \cdot \Phi_C)}{\lambda_{\min}(\Phi_C^T \cdot \Phi_C)}} = \sqrt{\frac{4,504570}{0,090618}} = 8,836361 \quad . \quad (33)$$

Wartość tego współczynnika, a ściślej mówiąc logarytmu z niego, może być bezpośrednio użyta do oszacowania utraty precyzji wyniku obliczeń numerycznych, które muszą być wykonane, aby rozwiązać układ równań (15). Z oszacowania wynika, że idealną wartością współczynnika k jest liczba 1. Im bardziej w konkretnym przypadku wartość wskaźnika uwarunkowania odbiega od jedności, tym większymi błędami obciążone będą wyniki, czyli tym mniej dokładnie wyznaczone będą współczynniki interpolacji a_i . Skoro, jak widać z (32) i (33) k_C jest ponad 18000 mniejsze niż k_J , to i współczynniki a_i obliczone dla bazy wielomianów Czebyszewa będą wyznaczone znacząco dokładniej niż odpowiadające im współczynniki a_i obliczone dla bazy jednomianowej.

Z porównania wykresów funkcji interpolowanej i interpolującej (Rys. 5) widać wyraźnie, że rozwiązanie przybliżone znacząco odbiega od wartości ścisłych, zwłaszcza w przedziale $[9, 16]$. Uzasadnione zatem będzie postawienie pytania w jaki jeszcze sposób można wpłynąć na jakość interpo-

lacji, oprócz doboru typu funkcji bazowych. Dwie możliwe ścieżki postępowania wydają się być dość oczywiste:

- właściwe rozmieszczenie węzłów interpolacji;
- zwiększenie liczby węzłów interpolacji.



Rys. 5 Funkcja interpolowana (p_0) i funkcja interpolująca (p_1) w przedziale interpolacji $[0, 16]$.

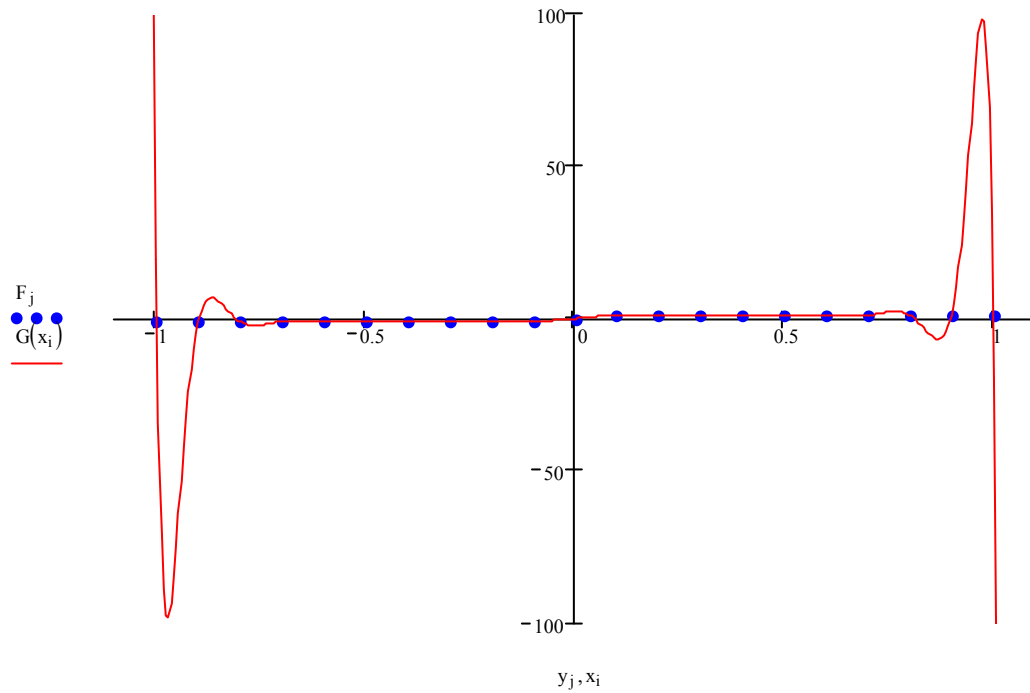
W przypadku pierwszej z tych ścieżek, można postawić pytanie, jakie jest najlepsze rozmieszczenie zadanej liczby węzłów w obszarze interpolacji, prowadzące do jak najmniejszej różnicy pomiędzy funkcjami interpolowaną i interpolującą w sensie określonej normy błędu. Dla normy:

$$\|F(x) - G(x)\|_{\infty} = \max \{ \|F(x) - G(x)\| : x \in [a, b] \} \quad (34)$$

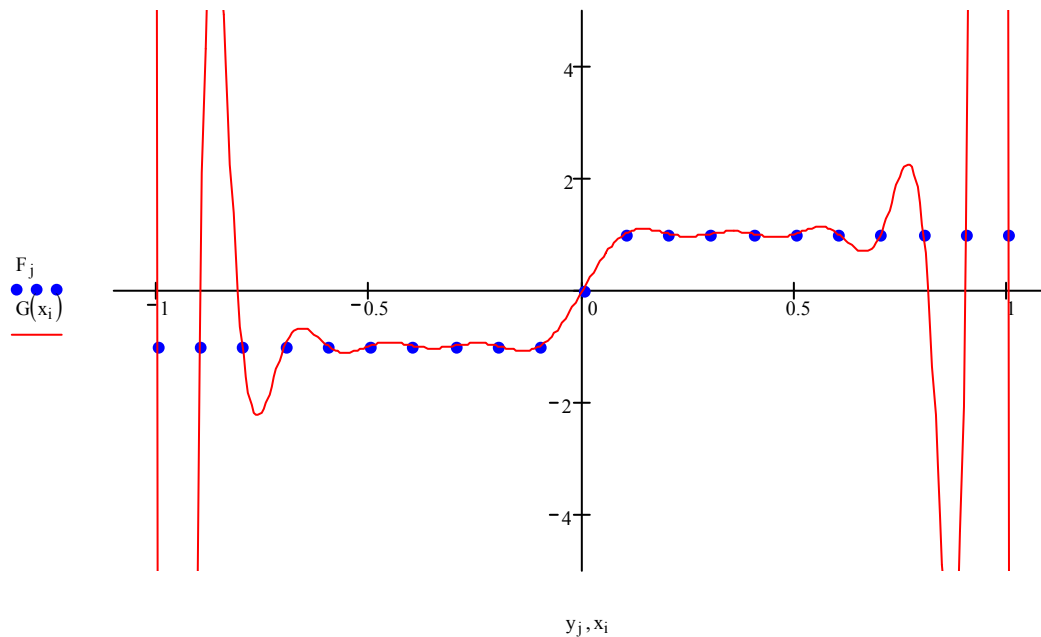
gwarantującej minimalizację największej (w całym przedziale w którym poszukujemy rozwiązania) różnicy pomiędzy tymi funkcjami, zadanie takie zostało rozwiązane (patrz np. [1]) i optymalnymi położeniami węzłów interpolacji okazały się być miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa. Jak widać na zamieszczonym poniżej przykładzie, przemyślane rozmieszczenie węzłów interpolacji, nie zmieniając nakładu pracy związanego z wyznaczeniem funkcji interpolującej, zasadniczo poprawia efekt finalny.

Druga z proponowanych ścieżek postępowania, pomimo, że wydaje się być intuicyjnie prostsza, niestety ma zasadnicze ograniczenie, wynikające ze zjawiska zwanego efektem Rungego. Polega ono na tym, że przy podnoszeniu stopnia wielomianu interpolującego (co jest bezpośrednim skutkiem zwiększania liczby węzłów interpolacji) wielomian ten w prawdzie przechodzi przez wszystkie węzły, ale pomiędzy nimi bardzo gwałtownie zmienia wartości (Rys. 6, 7), zwłaszcza przy krańcach obszaru interpolacji.

¹ R.Burden, J.D.Faires – *Numerical Analysis*, Brooks/Cole 2004.



Rys. 6 Interpolacja funkcji dyskretnej $F(x)$ danej w przedziale $[-1, 1]$ wielomianem 20 stopnia.



Rys. 7 Interpolacja funkcji dyskretnej $F(x)$ danej w przedziale $[-1, 1]$ wielomianem 20 stopnia.
Powiększenie rysunku poprzedniego.

Ze względu na występowanie efektu Rungego, znacznie lepszym sposobem wyznaczenia funkcji interpolującej w sytuacji, w której dysponujemy znaczną (czyli w praktyce większą niż 10) liczbą węzłów jest zastosowanie odcinkowej interpolacji wielomianowej. W tej interpolacji funkcje interpolujące tworzymy oddzielnie dla wybranych podzbiorów zbioru węzłów interpolacji, narzucając odpowiednie warunki ciągłości (tak zwane warunki zszycia) w punktach styku różnych funkcji interpolujących. Jest to standardowa metoda postępowania przy poszukiwaniu rozwiązań przybliżonych złożonych zadań inżynierskich, a przykładem interpolacji tego typu jest interpolacja sklejana funkcjami typu spline.

Dla ilustracji korzyści wynikających z optymalnego doboru położenia węzłów interpolacji poniżej zostanie dokonana interpolacja funkcji niewymiernej $F(x) = \sqrt{x}$ wielomianami Czebyszewa (zadanie rozpatrywane powyżej). Zadanie rozwiążemy dla pięciu węzłów interpolacji rozmieszczonych nierównomiernie, w miejscach zerowych wielomianu $T_4(\xi)$. Dane zadania zestawione w postaci tabelarycznej przedstawiają się następująco:

Tablica 2. Dane dla zadania interpolacji z optymalnym rozmieszczeniem węzłów.

i	0	1	2	3	4
x_i	0,391548	3,297718	8,000000	12,702282	15,608452
$F(x_i)$	0,625738	1,815962	2,828427	3,564026	3,950753

Położenia węzłów określono wyznaczając miejsca zerowe wielomianu $T_4(\xi)$ ze wzoru (7) i następnie dokonując ich transformacji z przedziału $[-1, 1]$ do przedziału $[0, 16]$ zgodnie z zależnością (5)¹.

Dalsze postępowanie jest identyczne jak w omówionym powyżej przykładzie, to znaczy przyjmujemy zestaw funkcji bazowych (23), zapisujemy funkcję interpolującą (22), dokonujemy transformacji funkcji bazowych do właściwego przedziału pracy, co prowadzi do funkcji (24). Ostatecznie macierz Φ przyjmie postać:

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) & T_2(x_0) & T_3(x_0) & T_4(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) & T_2(x_1) & T_3(x_1) & T_4(x_1) \\ T_0(x_2) & T_1(x_2) & T_2(x_2) & T_3(x_2) & T_4(x_2) \\ T_0(x_3) & T_1(x_3) & T_2(x_3) & T_3(x_3) & T_4(x_3) \\ T_0(x_4) & T_1(x_4) & T_2(x_4) & T_3(x_4) & T_4(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,951057 & 0,809017 & -0,587785 & 0,309017 \\ 1 & -0,587785 & -0,309017 & 0,951057 & -0,809017 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,587785 & -0,309017 & -0,951057 & -0,809017 \\ 1 & 0,951057 & 0,809017 & 0,587785 & 0,309017 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

a wektor prawej strony F będzie równy:

$$F = \begin{bmatrix} 0,625738 \\ 1,815962 \\ 2,828427 \\ 3,564026 \\ 3,950753 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Po rozwiązaniu układu równań wyznaczmy współczynniki interpolacji a_i :

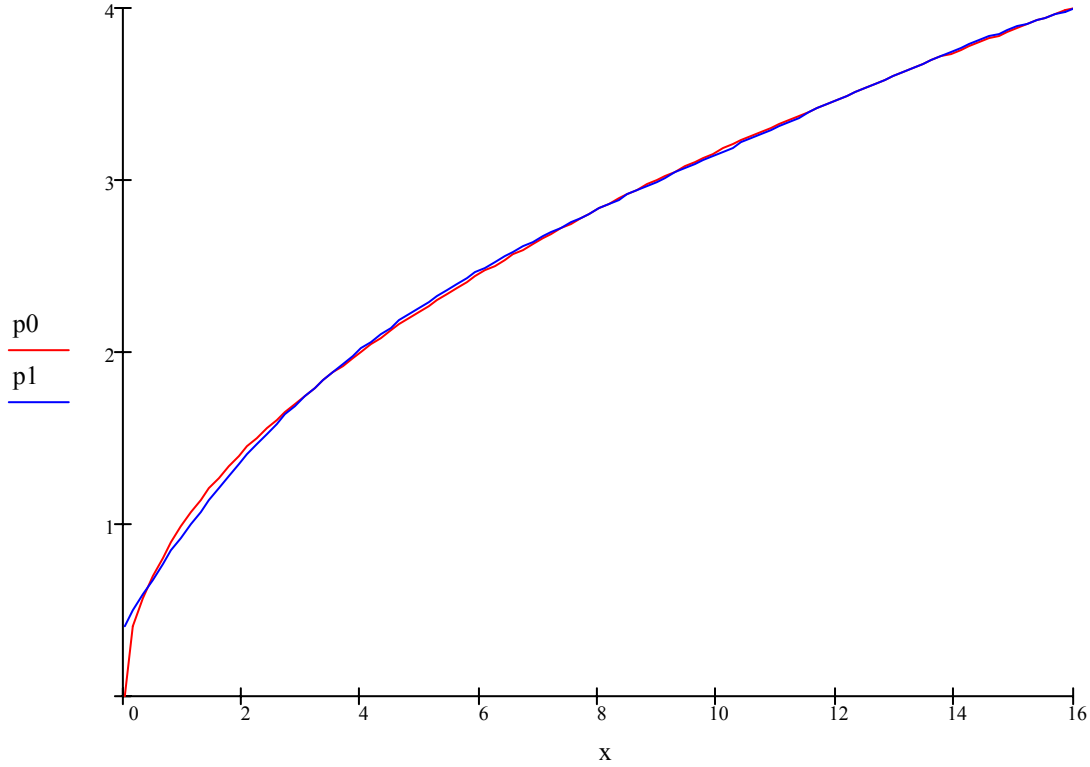
$$a = \begin{bmatrix} 2,556981 \\ 1,675906 \\ -0,315390 \\ 0,116755 \\ -0,043944 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Ostateczna funkcja interpolująca $G(x)$ przyjmie postać:

$$G(x) = 2,556981 \cdot T_0(x) + 1,675906 \cdot T_1(x) - 0,315390 \cdot T_2(x) + 0,116755 \cdot T_3(x) - 0,043944 \cdot T_4(x), \quad (38)$$

a po podstawieniu za wielomiany $T_0(x), T_1(x), \dots, T_4(x)$ z (24), wykonaniu wszystkich mnożeń i potęgowań oraz redukcji czynników podobnych otrzymamy ostatecznie:

$$G(x) = 0,404986 \cdot x^0 + 0,586421 \cdot x^1 - 0,0592127 \cdot x^2 + 0,00365867 \cdot x^3 - 0,0000858290 \cdot x^4 \quad (39)$$



Rys. 8 Funkcja interpolowana (p_0) i funkcja interpolująca (p_1) w przedziale interpolacji $[0, 16]$.

Jeżeli porównamy wykresy na rysunkach 5 i 9, to przekonamy się, że jakość interpolacji w przypadku drugim jest bardzo dobra, pomimo, że funkcja interpolowana jest funkcją niewymierną, i jako taka nie jest zbyt dobrze przybliżana wielomianami. Aby uzyskać bardziej formalną miarę jakości interpolacji porównajmy teraz, w sensie dwu norm, popelniony błąd przy pierwotnym, oznaczonym o i poprawionym, oznaczonym u rozmieszczeniu węzłów. Dla normy (34) mamy, w obu przypadkach, odpowiednio:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, 16]} |\sqrt{x} - G_o(x)| &= 1,230565 \\ \max_{x \in [0, 16]} |\sqrt{x} - G_u(x)| &= 0,404986 \end{aligned} \quad (40)$$

czyli poprawa jest ponad trzykrotna. Różnica będzie znacznie bardziej wyrazista, jeżeli porównania dokonamy w sensie normy:

$$\|F(x) - G(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b [F(x) - G(x)]^2 dx} \quad (41)$$

W obu przypadkach mamy tu bowiem odpowiednio:

$$\sqrt{\int_0^{16} [\sqrt{x} - G_o(x)]^2 dx} = 2,363009$$

$$\sqrt{\int_0^{16} [\sqrt{x} - G_u(x)]^2 dx} = 0,120727$$
(42)

czyli poprawa jest prawie dwudziestokrotna. Oczywiście należy sobie zdać sprawę z faktu, że druga rozważana norma jest normą całkową, a więc nie gwarantuje dobrej jakości wyniku w każdym punkcie rozważanego obszaru. Widać to na zamieszczonym powyżej wykresie w otoczeniu punktu początkowego, gdzie błąd względny procentowy, rozumiany jako moduł ilorazu różnicy wartości ścisłej i przybliżonej przez wartość ścisłą jest bardzo duży (a przy zbliżaniu się do punktu początkowego dąży do nieskończoności). Jednak należy pamiętać, że dołożenie należytej troski przy ustalaniu położeń węzłów interpolacji jest czynnością, która procentuje dokładnością ostatecznych wyników, i wobec tego, w każdym przypadku, w którym położenie węzłów interpolacji nie jest narzucone z góry warto poświęcić jej chwilę uwagi.

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że i wskaźnik uwarunkowania macierzy Φ , w naszym przypadku równy:

$$k_C = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\Phi_C^T \cdot \Phi_C)}{\lambda_{\min}(\Phi_C^T \cdot \Phi_C)}} = \sqrt{\frac{5,000}{2,500}} = 1,414214$$
(45)

jest znacząco lepszy niż w pierwszym przykładzie.

Interpolacja odwrotna

Do tej pory rozważaliśmy sytuację, w której mając dane położenia węzłów poszukiwaliśmy równania krzywej łączącej te węzły, po to, by móc wyznaczyć wartość zmiennej zależnej odpowiadającą dowolnej wartości zmiennej niezależnej. Jednak zadanie to można odwrócić, i dla danego zestawu węzłów interpolacji zażądać wyznaczenia wartości zmiennej niezależnej odpowiadającej podanej wartości zmiennej zależnej. Jeżeli w przedziale interpolacji funkcja interpolowana jest różnowartościowa to tak postawiony problem ma proste i jednoznaczne rozwiązanie, które nosi nazwę odwrotnej interpolacji Lagrange'a. Sposób postępowania w takim przypadku przedstawimy na przykładzie poszukiwania miejsca zerowego funkcji $\sin(x)$. Uzyskany wynik porównamy ze znanym rozwiązaniem analitycznym.

Jak więc widać z przykładu zamieszczonego poniżej, interpolacja odwrotna może być traktowana jako kolejna metoda poszukiwania pierwiastków równania nieliniowego. Jeżeli prawa strona tego równania w otoczeniu miejsca zerowego jest dobrze przybliżana wielomianem, to takie postępowanie będzie bardzo efektywne.

Tablica 3. Dane do zadania odwrotnej interpolacji

i	0	1	2	3
x_i	2,900	3,100	3,300	3,500
$F(x_i) = F_i$	0,239249	0,041581	-0,157746	-0,350783

Rozwiązania problemu poszukujemy w postaci funkcji:

$$x = \sum_{i=0}^3 x_i \cdot L_i^{(3)}(F(x_i))$$
(46)

czyli odpowiednie wielomiany Lagrange'a będą miały postać:

$$\begin{aligned} L_0^{(3)}(F(x)) &= \frac{(F - F_1) \cdot (F - F_2) \cdot (F - F_3)}{(F_0 - F_1) \cdot (F_0 - F_2) \cdot (F_0 - F_3)} \\ L_1^{(3)}(F(x)) &= \frac{(F - F_0) \cdot (F - F_2) \cdot (F - F_3)}{(F_1 - F_0) \cdot (F_1 - F_2) \cdot (F_1 - F_3)} \\ L_2^{(3)}(F(x)) &= \frac{(F - F_0) \cdot (F - F_1) \cdot (F - F_3)}{(F_2 - F_0) \cdot (F_2 - F_1) \cdot (F_2 - F_3)} \\ L_3^{(3)}(F(x)) &= \frac{(F - F_0) \cdot (F - F_1) \cdot (F - F_2)}{(F_3 - F_0) \cdot (F_3 - F_1) \cdot (F_3 - F_2)} \end{aligned} \quad (47)$$

co po podstawieniu wartości z tabeli za $F_i, i = 0, 1, 2, 3$ i uwzględnieniu, że poszukujemy takiej wartości zmiennej niezależnej, dla której zmienna zależna F przyjmuje wartość równą 0 prowadzi do:

$$\begin{aligned} L_0^{(3)}(0) &= \frac{(0 - 0,041581) \cdot (0 + 0,157746) \cdot (0 + 0,350783)}{(0,239249 - 0,041581) \cdot (0,239249 + 0,157746) \cdot (0,239249 + 0,350783)} = -0,049692 \\ L_1^{(3)}(0) &= \frac{(0 - 0,239249) \cdot (0 + 0,157746) \cdot (0 + 0,350783)}{(0,041581 - 0,239249) \cdot (0,041581 + 0,157746) \cdot (0,041581 + 0,350783)} = 0,856358 \\ L_2^{(3)}(0) &= \frac{(0 - 0,239249) \cdot (0 - 0,041581) \cdot (0 + 0,350783)}{(-0,157746 - 0,239249) \cdot (-0,157746 - 0,041581) \cdot (-0,157746 + 0,350783)} = 0,228449 \\ L_3^{(3)}(0) &= \frac{(0 - 0,239249) \cdot (0 - 0,041581) \cdot (0 + 0,157746)}{(-0,350783 - 0,239249) \cdot (-0,350783 - 0,041581) \cdot (-0,350783 + 0,157746)} = -0,035115 \end{aligned} \quad (48)$$

Ostatecznie zależność (46) po podstawieniu wartości obliczonych w (48) i wartości z Tablicy 3 pozwala nam wyznaczyć poszukiwane miejsce zerowe jako:

$$x_0 = -0,049692 \cdot 2,900 + 0,856358 \cdot 3,100 + 0,228449 \cdot 3,300 - 0,035115 \cdot 3,500 = 3,141582 \quad (49)$$

Ponieważ wartość ścisła poszukiwanego miejsca zerowego jest równa $\pi = 3,141592$ to błąd względny, z jakim ją wyznaczyliśmy będzie równy:

$$\varepsilon = \frac{|\pi - x_0|}{\pi} = 3,307500 \cdot 10^{-6} \quad (50)$$

Wysoka dokładność, z jaką wyznaczyliśmy miejsce zerowe jest skutkiem przede wszystkim trzech czynników:

- węzły interpolacji obramowują miejsce zerowe, czyli mamy do czynienia z interpolacją a nie z ekstrapolacją, która z natury obciążona jest większym błędem,
- długość przedziału interpolacji jest niewielka, co oznacza, że wyznaczone węzły, stanowiące niejako przybliżenie początkowe poszukiwanego rozwiązania stanowią dobre oszacowanie miejsca zerowego,
- funkcja interpolowana jest w rozważanym przedziale dobrze przybliżana wielomianem, nawet niskiego stopnia.

Interpolacja sklejana

Kolejnym rodzajem interpolacji, który zostanie omówiony jest interpolacja sklejana, polegająca na tym, że wielomian interpolujący jest tworzony oddzielnie dla każdego odcinka pomiędzy dwoma kolejnymi węzłami. Współczynniki wielomianów obowiązujących na poszczególnych odcinkach są wyznaczane tak, aby w węzłach zapewnić ciągłość nie tylko funkcji interpolującej ale także jej pochodnych do stopnia $n - 1$ włącznie, jeżeli stopień wielomianu interpolującego jest równy n . Jedną z możliwych definicji wielomianu interpolacyjnego typu splajn jest:

$$S(x) = P_k(x) + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \cdot (x - x_i)_+^k, \quad (51)$$

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^k a_j \cdot x^j,$$

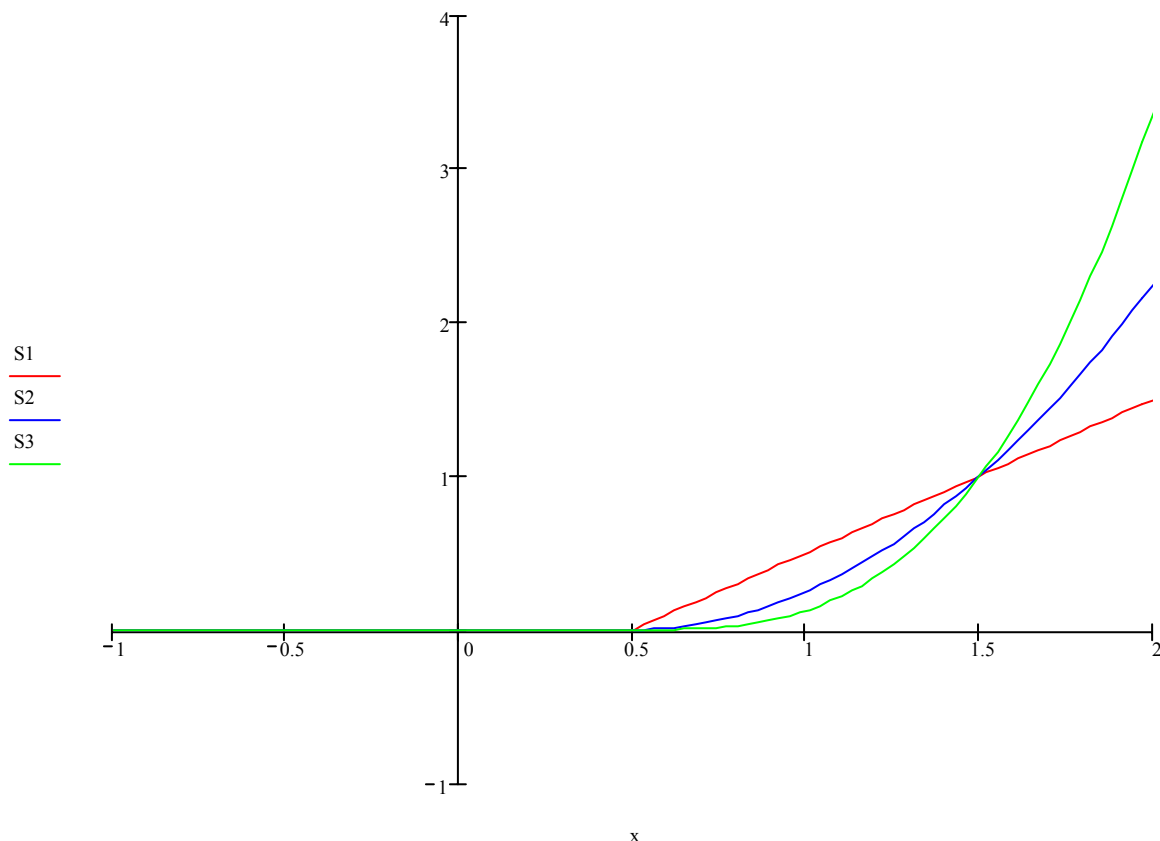
przy czym dodatkowo definiuje się:

$$(x - x_i)_+^k = \begin{cases} (x - x_i)^k & \text{dla } x - x_i \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x - x_i < 0 \end{cases}. \quad (52)$$

Wartość wykładnika k występującego we wzorach (51), (52) przyjmuje się jako równą:

- $k = 1$ – interpolacja odcinkami linii prostej, funkcja interpolująca jest łamana,
- $k = 2$ – interpolacja odcinkami parabol, funkcja interpolująca ma pierwszą pochodną ciągłą w całym obszarze interpolacji,
- $k = 3$ – interpolacja odcinkami wielomianu trzeciego stopnia, funkcja interpolująca ma pierwszą i drugą pochodną ciągłą w całym obszarze interpolacji.

Wielomianów wyższych stopni w interpolacji sklepanej raczej nie stosuje się, chociaż jest to wykonalne, a wzory przedstawione powyżej są ogólne.



Rys. 9 Wykresy funkcji (52) dla $k = 1, 2, 3$ i $x_i = 0,500$, oznaczone jako $S1, S2, S3$.

Jak łatwo się przekonać robiąc bilans liczby niewiadomych występujących we wzorach (51) i (52) i podanych ograniczeń, do jednoznacznego określenia zadania interpolacji sklepanej musimy zadać dodatkowo (oprócz położeń węzłów których jest m) $n-1$ warunków pomocniczych (n oznacza tu, jak poprzednio stopień wielomianu). Tak więc, jeżeli mamy do czynienia z:

- splajnem pierwszego stopnia ($k = 1$) , nie musimy narzucać żadnych dodatkowych warunków na funkcję interpolującą,
- splajnem drugiego stopnia ($k = 2$) , musimy narzucić jeden dodatkowy warunek na pierwszą pochodną,
- splajnem trzeciego stopnia ($k = 3$) , musimy narzucić dwa dodatkowe warunki na pierwszą pochodną lub jeden dodatkowy warunek na pierwszą a jeden na drugą pochodną,
- każdy kolejny stopień splajnu skutkuje koniecznością dołożenia jednego warunku dodatkowego.

Warunki dodatkowe, o których mowa powyżej nie muszą być narzucane w tym samym węźle, jeżeli jest ich więcej niż jeden, jednakże problem wyznaczenia współczynników a_j i b_i znacząco się upraszcza, jeżeli wszystkie warunki dodatkowe są narzucone na kolejne pochodne w skrajnym lewym węźle obszaru interpolacji (tak zwane warunki naturalne). W takim przypadku najpierw wyznaczamy współczynniki a_j wielomianu $P_k(x)$ w pierwszym przedziale interpolacji, rozwiązując niewielki układ liniowych równań algebraicznych, wynikający z żądania:

$$\begin{aligned} P_k(x_0) &= F_0 \\ P_k(x_1) &= F_1 \\ P'_k(x_0) &= F'_0 \\ &\vdots \\ P_k^{''\dots'}(x_0) &= F_0^{''\dots'} \end{aligned} \quad , \quad (53)$$

a następnie możemy posłużyć się zależnością:

$$b_i = \frac{F_{i+1} - P_k(x_{i+1}) - \sum_{h=1}^{i-1} b_h \cdot (x_{i+1} - x_h)_+^k}{(x_{i+1} - x_i)_+^k} \quad , \quad (54)$$

do wyznaczenia kolejnych współczynników b_i . W każdym innym przypadku, żeby wyznaczyć komplet współczynników a_j i b_i musimy rozwiązać jeden duży układ liniowych równań algebraicznych o wymiarze $m + n - 1$ (m i n opisano powyżej).

Poniżej przedstawiono rozwiązanie przykładowego problemu interpolacji sklejanej przy pomocy splajnu sześciennego. Przyjęto warunki naturalne i wartości pochodnych równe:

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= 1 \\ F''(x_0) &= 8 \end{aligned} \quad . \quad (55)$$

W tablicy 4 podano położenia węzłów interpolacji.

Tablica 4. Wartości zmiennej zależnej i niezależnej w węzłach interpolacji typu splajn.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)$	1	4	6	8	4	6

Przy wyznaczaniu współczynników a_j i b_i wielomianu interpolującego skorzystamy z faktu, że dodatkowe warunki na pochodne są zadane w węźle początkowym (warunki naturalne). Wobec tego najpierw wyznaczmy grupę współczynników a_j wielomianu $P_3(x)$ z układu równań (53). W naszym zadaniu ten układ równań przyjmie postać:

$$\begin{aligned} P_3(x_0) &= a_0 \cdot x_0^0 + a_1 \cdot x_0^1 + a_2 \cdot x_0^2 + a_3 \cdot x_0^3 \Rightarrow P_3(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = 1 \\ P_3(x_1) &= a_0 \cdot x_1^0 + a_1 \cdot x_1^1 + a_2 \cdot x_1^2 + a_3 \cdot x_1^3 \Rightarrow P_3(2) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 4 \\ P_3'(x_0) &= a_1 \cdot x_0^0 + 2 \cdot a_2 \cdot x_0^1 + 3 \cdot a_3 \cdot x_0^2 \Rightarrow P_3'(1) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot 1 + 3 \cdot a_3 \cdot 1^2 = 1 \\ P_3''(x_0) &= 2 \cdot a_2 \cdot x_0^0 + 6 \cdot a_3 \cdot x_0^1 \Rightarrow P_3''(1) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot 1 = 8 \end{aligned} \quad (56)$$

Rozwiązaniem są następujące wartości współczynników a_j :

$$a_0 = 6, a_1 = -13, a_2 = 10, a_3 = -2 \quad , \quad (57)$$

czyli ostateczna postać wielomianu $P_3(x)$ dana jest zależnością:

$$P_3(x) = 6 - 13 \cdot x^1 + 10 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 \quad . \quad (58)$$

W drugim etapie wyznaczmy kolejno wartości współczynników b_1, b_2, b_3, b_4 stosując formułę (54) do kolejnych przedziałów interpolacji. Tak więc kolejno mamy, dla drugiego przedziału:

$$b_1 = \frac{F_2 - P_3(x_2)}{(x_2 - x_1)^3} = \frac{6 - P_3(3)}{(3 - 2)^3} = 3 \quad , \quad (59)$$

dla przedziału trzeciego:

$$b_2 = \frac{F_3 - P_3(x_3) - b_1 \cdot (x_3 - x_1)^3}{(x_3 - x_2)^3} = \frac{8 - P_3(4) - 3 \cdot (4 - 2)^3}{(4 - 3)^3} = -2 \quad , \quad (60)$$

przedziału czwartego:

$$b_3 = \frac{F_4 - P_3(x_4) - b_1 \cdot (x_4 - x_1)^3 - b_2 \cdot (x_4 - x_2)^3}{(x_4 - x_3)^3} = \frac{4 - P_3(5) - 3 \cdot (5 - 2)^3 + 2 \cdot (5 - 3)^3}{(5 - 4)^3} = -2 \quad , \quad (61)$$

i wreszcie dla ostatniego przedziału piątego:

$$\begin{aligned} b_4 &= \frac{F_5 - P_3(x_5) - b_1 \cdot (x_5 - x_1)^3 - b_2 \cdot (x_5 - x_2)^3 - b_3 \cdot (x_5 - x_3)^3}{(x_5 - x_4)^3} = \\ &= \frac{6 - P_3(6) - 3 \cdot (6 - 2)^3 + 2 \cdot (6 - 3)^3 + 2 \cdot (6 - 4)^3}{(6 - 5)^3} = 28 \end{aligned} \quad (62)$$

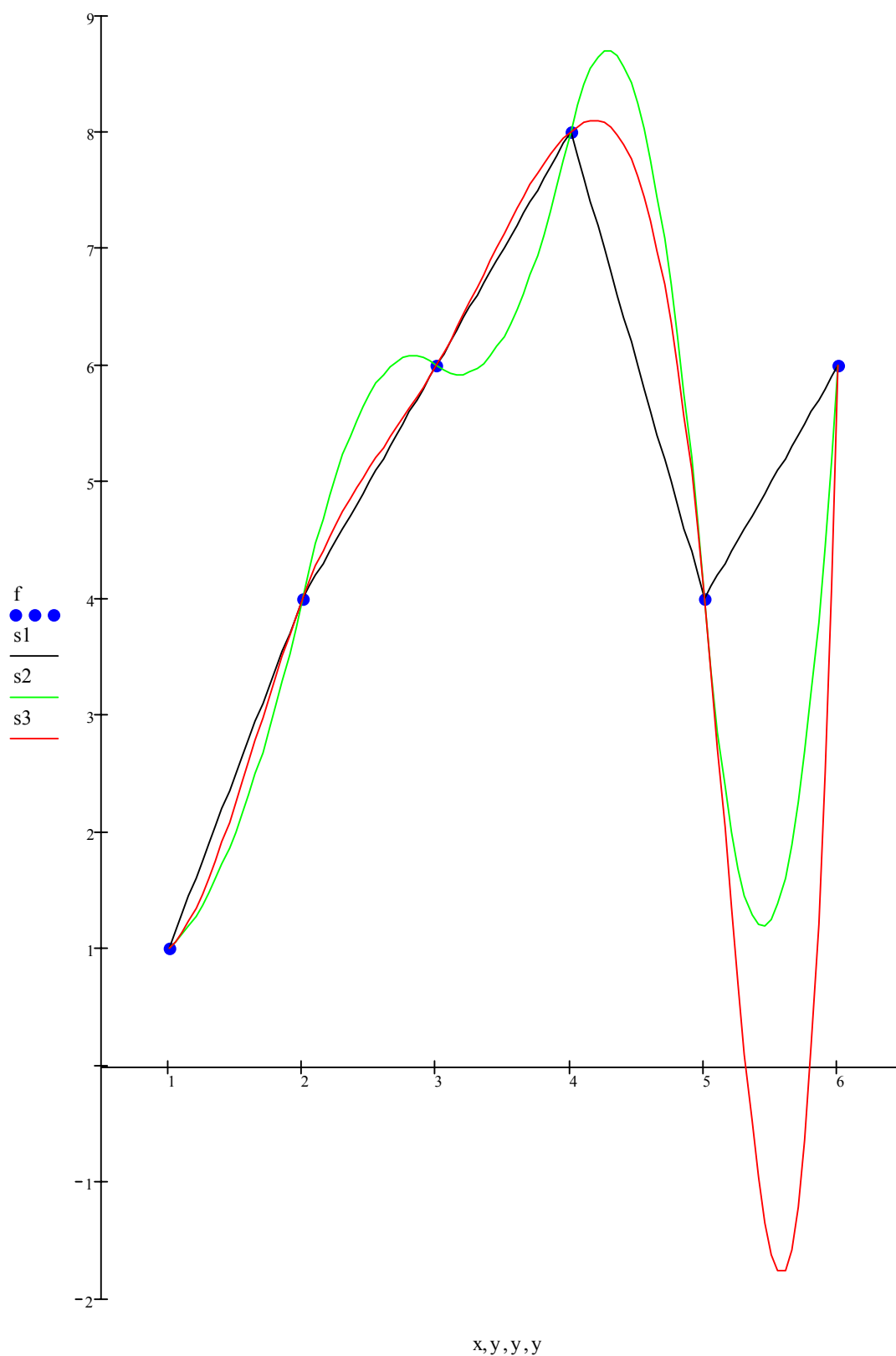
Ostateczna postać splajnu sześciennego interpolującego funkcję daną w Tablicy 4 przy dodatkowych warunkach (55) jest następująca:

$$S_3(x) = 6 - 13 \cdot x^1 + 10 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 + 3 \cdot (x - x_1)_+^3 - 2 \cdot (x - x_2)_+^3 - 2 \cdot (x - x_3)_+^3 + 28 \cdot (x - x_4)_+^3 \quad . \quad (63)$$

To samo zadanie rozwiązano jeszcze dwukrotnie, używając splajnu kwadratowego z warunkiem naturalnym (55)¹ i splajnu liniowego. Ostatecznie uzyskano:

$$\begin{aligned} S_2(x) &= 2 - 3 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 - 5 \cdot (x - x_1)_+^2 + 6 \cdot (x - x_2)_+^2 - 12 \cdot (x - x_3)_+^2 + 24 \cdot (x - x_4)_+^2 \\ S_1(x) &= -2 + 3 \cdot x^1 - 1 \cdot (x - x_1)_+^1 + 0 \cdot (x - x_2)_+^1 - 6 \cdot (x - x_3)_+^1 + 6 \cdot (x - x_4)_+^1 \end{aligned} \quad (64)$$

Ponieważ obliczenia w tych przypadkach przebiegają analogicznie do zaprezentowanych powyżej, nie zostaną tu zamieszczone, gdyż dociekliwy czytelnik łatwo przeprowadzi je sam. Wykresy wszystkich trzech funkcji zamieszczono dla porównania na rysunku 10.



Rys. 10 Interpolacja sklejana wielomianami typu splajn pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia.

Interpolacja w obszarze wielowymiarowym

Procedurę interpolacji Lagrange'a jest bardzo łatwo uogólnić na zadanie dwu lub więcej wymiarowe. Wystarczy w tym celu zwrócić uwagę na to, jakie są zasady interpolacji wielomianami Lagrange'a i jakie warunki mają spełniać wielomiany bazowe L . W zadaniu dwuwymiarowym ma być spełniona zależność:

$$F(x, y) \cong G(x, y) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m F(x_i, y_j) \cdot L_{ij}^{(m,n)}(x, y) \quad , \quad (65)$$

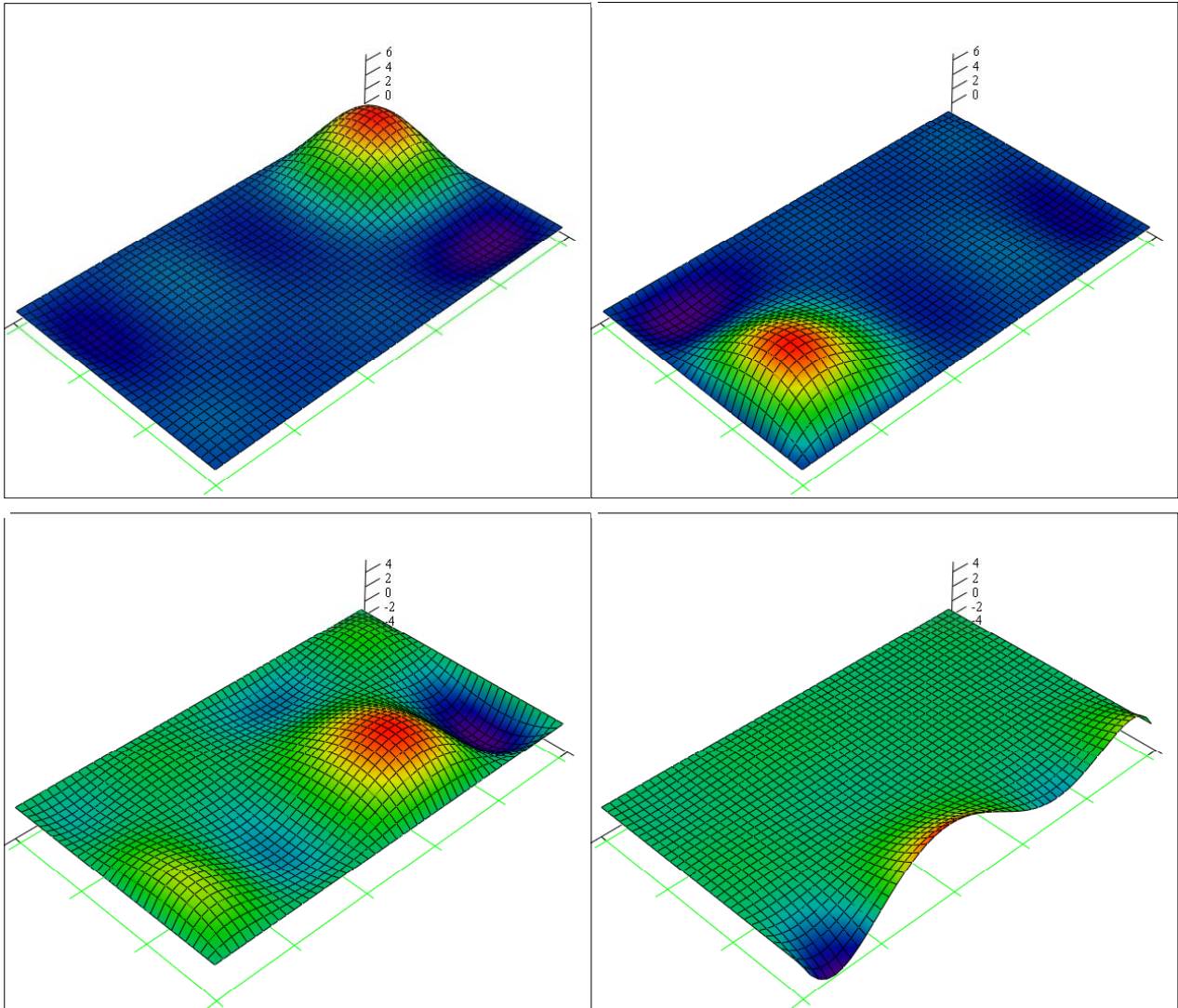
co oznacza oczywiście, że musi zachodzić:

$$L_{ij}^{(m,n)}(x_k, y_l) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq k \text{ lub } j \neq l \\ 1 & \text{gdy } i = k \text{ i } j = l \end{cases} \quad . \quad (66)$$

Dla obszaru prostokątnego funkcję taką jest bardzo łatwo skonstruować, gdyż wystarczy przyjąć:

$$L_{ij}^{(m,n)}(x, y) = L_i^{(m)}(x) \cdot L_j^{(n)}(y) \quad , \quad (67)$$

co na mocy definicji (4) gwarantuje spełnienie warunku (66). Wykresy przykładowych funkcji bazowych zostały zaprezentowane na rysunku 11.



Rys. 11 Wykresy funkcji bazowych $L_{11}^{(5,3)}(x, y)$, $L_{42}^{(5,3)}(x, y)$, $L_{22}^{(5,3)}(x, y)$, $L_{33}^{(5,3)}(x, y)$.

Oczywiście na tej samej zasadzie można utworzyć wielomiany interpolacyjne Lagrange'a w trzech i więcej wymiarach, jako iloczyn odpowiedniej liczby wielomianów interpolacyjnych utworzonych dla każdego wymiaru z osobna.

Sytuacja nieco się komplikuje, gdy mamy do czynienia nie z prostokątem a z dowolnym wypukłym obszarem czworokątnym o wierzchołkach $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$. Można wówczas postąpić następująco:

1. Tworzymy tak zwany element wzorcowy o wierzchołkach 1,1, -1,1, -1,-1, 1,-1.
2. Dla elementu wzorcowego, umieszczonego w układzie współrzędnych ξ, η w taki sposób, aby jego środek ciężkości pokrywał się z początkiem układu współrzędnych budujemy funkcje interpolujące, np.:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \cdot (\xi + 1) \cdot (\eta + 1) \\ N_2 &= \frac{1}{4} \cdot (\xi - 1) \cdot (\eta + 1) \\ N_3 &= \frac{1}{4} \cdot (\xi - 1) \cdot (\eta - 1) \\ N_4 &= \frac{1}{4} \cdot (\xi + 1) \cdot (\eta - 1) \end{aligned} \quad ; \quad (68)$$

3. Tworzymy odwzorowanie wiążące każdy punkt elementu wzorcowego z odpowiadającym mu punktem obszaru czworokątnego:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \end{aligned} \quad . \quad (69)$$

Wówczas wartość funkcji interpolowanej $F(x, y)$ w dowolnym punkcie x_0, y_0 czworokąta będzie można obliczyć jako:

$$F(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_0, \eta_0) \cdot F(x_i, y_i) \quad , \quad (70)$$

gdzie ξ_0, η_0 są współrzędnymi obrazu punktu x_0, y_0 w obszarze elementu wzorcowego.

Jeżeli mamy do czynienia z interpolacją w dowolnym obszarze dwuwymiarowym, to procedurę powyższą możemy zastosować dopiero po podzieleniu obszaru wyjściowego na wypukłe czworokąty, których suma topologiczna daje obszar wyjściowy.

Postępowanie takie jest podstawą metod przybliżonego rozwiązywania zagadnień inżynierskich (Metoda Elementów Skończonych).