Problem chińskiego listonosza

Martyna Skiwniewska i Klaudia Stępień

Wyobraźmy sobie sytuację - musimy przejść przez wszystkie ulice miasta jednocześnie dostarczając listy do każdego z odbiorców, a następnie wrócić do punktu początkowego jakim jest poczta. Chcemy pokonać jak najkrótszą drogę, nie omijając żadnej z ulic. Znalezieniem takiej trasy zainteresował się w roku 1962 chiński matematyk Mei-Ko Kwan. Idea jego rozwiązania opiera się na stworzeniu analogicznego modelu w języku grafów. Każda krawędź grafu odpowiada konkretnej ulicy, jej waga długości ulicy, zaś wierzchołki to skrzyżowania ulic.

Rozpatrzmy najprostszy model jakim jest spójny graf nieskierowany. Wówczas zachodzi jedna z dwóch opcji: graf zawiera cykl Eulera bądź go nie zawiera. W pierwszym przypadku rozwiązanie jest oczywiste - cykl Eulera oznacza, że do każdego z wierzchołków docieramy tylko raz, zatem droga jaką pokonamy jest minimalna. Brak cyklu Eulera komplikuje rozwiązanie. Musimy wówczas doprowadzić do sytuacji, w której każdy z wierzchołków jest stopnia parzystego, gdyż jest to warunek konieczny istnienia takiego cyklu. W tym celu dublujemy krawędzie wchodzące w skład najkrótszej ścieżki łączącej wierzchołki o nieparzystych stopniach i otrzymujemy w ten sposób multigraf. Przebiegnięcie przez zdublowaną krawędź jest równoważne dwóm krokom. Zatem suma wag całego cyklu jest równa wagom wszystkich pojedynczych krawędzi powiększonych o krawędzie zdublowane.

Jak się okazuje znalezienie takiej ścieżki wcale nie jest proste. Spróbujmy w tym celu rozpatrzeć problem kombinatorycznie. Oczywiste jest, że istnieje tylko jedna możliwość bezpośredniego połączenia dwóch wierzchółków A i B poprzez krawędź [A–B]. Cztery wierzchołki mogą już być połączone poprzez 2 krawędzie na 3 różne sposoby [A–B,C–D], [A–C,B–D] i [A–D,B–C]. Przypadek 5 wierzchołków jest niemożliwy, gdyż liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest zawsze parzysta. Dla 6 wierzchołków A,B,C,D,E,F problem zaczyna się już powoli komplikować. Wierzchołek A może być połączony z jednym z pozostałych pięciu: B,C,D,E,F. Czyli jest 5 sposobów na otrzymanie pierwszej pary: [A–B], [A–C], [A–D], [A–E] lub [A–F]. Spośród pozostałych czterech wierzchołków ponownie wybieramy jeden, tym razem juz tylko na cztery sposoby i łączymy w pary z innym wierzchołkiem na 3 sposoby. Po tym połączeniu pozostanie nam już tylko jednoznaczna możliwość dla pozostałych dwóch wierzchołków. Zatem istnieje $5 \cdot 3 = 15$ sposobów na skojarzenie ze sobą 6 wierzchołków w rozłączne pary. Analogiczne dla 8 wierzchółków mamy 7 sposobów na utworzenie I pary, 5 dla II i 3 dla III, czyli ostatecznie $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ możliwości. W ten sposób wyprowadziliśmy wzór ogólny na liczbę możliwych połączeń dla k wierzchołków, gdzie k jest liczbą parzystą:

$$S = (k-1) \cdot (k-3) \cdot (k-5) \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{k/2} (2i-1) =$$

$$= \text{iloczyn kolejnych liczb nieparzystych mniejszych od } k$$

Iloczyn S bardzo szybko rośnie i przykładowo dla $k = 20$ otrzymujemy $S \approx$ 655 milionów, co bardzo spowalnia czas obliczeń dla dużych grafów. Zatem podejście kombinatoryczne jest opłacalne jedynie dla małych wartości k, przykładowo $k < 20$, natomiast dla większych k można zastosować algorytm Edmonsa. Wymaga on niestety dobrej znajomości programowania liniowego i teorii grafów. Jego klasa złożoności to $O(n^3)$.

Poniżej przedstawiony został schematyczny algorytm dla problemu chińskiego listonosza:

1. Sprawdzamy spójność grafu. W przypadku, gdy graf jest niespójny kończymy algorytm.

2. Znajdujemy wszystkie wierzchołki o nieparzystych stopniach.

3. Jeśli liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest równa 0, to przechodzimy do kroku 7, w przeciwnym przypadku do kroku 4.

4. Wykorzystujemy algorytm Dijkstry'ego do znalezienia najkrótszych ścieżek łączących ze sobą wszystkie wierzchołki z kroku 2.

5. Znajdujemy połączenie tych wierzchołków w pary o najmniejszej sumie wag krawędzi.

6. Dublujemy krawędzie z kroku 5 w grafie początkowym.

7. Wyznaczamy w otrzymanym grafie cykl Eulera.

8. Wyprowadzamy wynik i kończymy algorytm.

W trakcie implementacji problemu chińskiego listonosza pojawiają się problemy typu: jak dublować krawędzie, jak zapamiętać wierzchołki o nieparzystych stopniach, jak wskazać i zapamiętać wszystkie połączenia między wierzchołkami o nieparzystych stopniach, jak znaleźć połączenie o minimalnej sumie wag i wiele innych.

Przykład zastosowania z implementacją w Sage

Zaplanujmy najkrótszą trasę dla samochodu dostawczego rozwożącego produkty do 8 odbiorców z różnych ulic miasta: A, B, C, D, E, F, G, H. Łatwo zauważyć, że zadanie sprowadza się do wykorzystania algorytmu chińskiego listonosza, gdzie wagi krawędzi grafu oznaczają odległości pomiędzy ulicami, zaś wierzchołki to nazwy miast. Do rozwiązania problemu możemy wykorzystać kod źródłowy napisany w języku Python znajdujący się pod linkiem `http://sagecell.sagemath.org/?q=jujlmx`.

Problem chińskiego listonosza ma wiele zastosowań praktycznych: np. przy szukaniu optymalnego uszeregowania operacji procesu technologicznego w sposób zapewniający minimalny czas transportu między operacjami. Podobnie optymalizacja drogi manipulatora spawalniczego, który musi wykonać określoną liczbę szwów spawanych w nadwoziu samochodu, a po ich wykonaniu wrócić do punktu wyjścia sprowadza się do rozpatrywanego zadania.