Hry v normální formě

Tomáš Vlk (vlktoma5@fit.cvut.cz)

May 26, 2019

Úvod

Hry v normální formě jsou tvořeny maticí. Konečná hra v normální formě pro n hráčů je trojice (N, A, u), kde:

1. $N = \{N_1, \ldots, N_n\}$ je konečná množina hráčů
2. $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, kde A_i je množina akcí, které má k dispozici hráč N_i. $\boldsymbol{a} \in A$ je takzvaný akční profil, vyjadřující jednu konkrétní volbu akcí provedenou nezávisle všemi hráči ve hře.
3. $u = (u_1, \ldots, u_n)$ je posloupnost utilitních akci pro jednotlivé hráče. $u_i : A \to \mathbb{R}$ a $u_i(\boldsymbol{a})$ vyjadřuje utilitu hráče N_i z akčního profilu $\boldsymbol{a} \in A$.

Utilitní funkce hráče udává výhodnot/nevýhodnost danné situace pro svého hráče.

Kanonické hry v normální formě

Ve hrách v normální jsou hráči rovnocení a nezáleží na tom který z nich vyhraje. Hlavním využitím je hledání optimálních akčních profilů.

Common-payoff hra

Pokud uvažujeme hru v normální formě $G = (N, A, u)$, pak je common-payoff hrou právě v případě, že $\forall \boldsymbol{a} \in A : u_1(\boldsymbol{a}) = u_2(\boldsymbol{a}) = \cdots = u_n(\boldsymbol{a})$. Příkladem common-payoff hry může například být "Po které straně silnice jezdit", viz. Obrázek 1.

N_1 \ N_2	L	R
L	1, 1	0, 0
R	0, 0	1, 1

Figure 1: "Po které stané silnice jezdit"

Constant-sum hra

Pokud uvažujeme hru v normální formě $G = (N, A, u)$, pak je constant-sum hrou právě tehdy, když $\exists c \in \mathbb{R} : \forall \boldsymbol{a} \in A : \sum_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{a}) = c$. Speciální případ, kdy $c = 0$ se nazývá zero-sum hrou. Příkladem takovéto hry je například kámen-nůžky-papír, viz. Obrázek 2.

N_1 \ N_2	K	N	P
K	**0, 0**	**1, -1**	**-1, 1**
N	**-1, 1**	**0, 0**	**1, -1**
P	**1, -1**	**-1, 1**	**0, 0**

Figure 2: Kámen-Nůžky-Papír

Akční profily

Mezi akční profily patří například:

- **Paretovo optimum** - Žádnou změnou akčního profilu již hráč nemůže zvýšit svou utilitu, aniž by se snížila utilita jiných hráčů.
- **Nashovo equlibrium** - Žádný hráč nemůže žádnou akcí zvýšit svou utilitu, akční profil je tedy stabilní. Žádný hráč není motivován změnit své rozhodnutí.

Paretovo optimum

Mějme hru v normální formě (N, A, u), kde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, pak akční profil $\boldsymbol{a'} = (a'_{N_1}, a'_{N_2}, \ldots, a'_{N_n}) \in A$ je **paretovsky dominantní** nad akčním profilem $\boldsymbol{a} = (a_{N_1}, \ldots, a_{N_n}) \in A$, pokud platí následující podmínky:

1. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : u_i(\boldsymbol{a'}) \geq u_i(\boldsymbol{a})$
2. $\exists i \in \{1, \ldots, n\} : u_i(\boldsymbol{a'}) > u_i(\boldsymbol{a})$

Pokud tedy máme hru v normální formě (N, A, u), pak je akční profil $\boldsymbol{a}* \in A$ je paretovsky optimální, jestliže neexistuje akční profil $\boldsymbol{a'} \in A$, který jej paretovsky dominuje. Ukázka v Obrázku 3.

Nashovo equlibrium

Hry v normální formě mají omezenou pozorovatelnost, jelikož hráči volí své akce nezávisle na ostatních. Pokud by hráč věděl, jaké akce zvolili ostatní hráči, mohl by snadno zvolit optimální akci. Tato volba optimální akce se nazývá **Best Response**.

Formálně pokud máme hru v normální formě (N, A, u), akční profil $\boldsymbol{a} = (a_{N_1}, a_{N_2}, \ldots, a_{N_n})$, hráče $N_i \in N$ a jeho utilitní funkci u_i. Potom je $\boldsymbol{a}_{-i} = (a_{N_1}, \ldots, a_{N_{i-1}}, a_{N_{i+1}}, \ldots, a_{N_n})$ je redukovaný akční profil všech hráčů krom hráče N_i.

$N_1 \backslash N_2$	A	B	C	D
E	6, 3	8, 2	8, 3	7, 1
F	3, 2	4, 5	6, 4	6, 5
G	4, 5	0, 8	5, 7	6, 1

Figure 3: Paretovo optimum

Best response na $\boldsymbol{a}_{-i}$ pak je množina $BR(\boldsymbol{a_{-i}}) = \arg\max_{\hat{a}_{N_i} \in A_i} u_i((a_{N_i}, \ldots, a_{N_{i-1}}, \hat{a}_{N_i}, a_{N_{i+1}}, \ldots, a_{N_n}))$.

Mějme hru v normální formě (N, A, u) a akčním profilu $\boldsymbol{a} = (a_{N_1}, a_{N_2}, \ldots, a_{N_n})$. Pak akční profil $\boldsymbol{a}$ je **Nashovým equalibriem**, pokud

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_{N_i} \in BR(\boldsymbol{a}_{-i})$$

Nashovo equalibrium je tedy takový akční profil, kde akce každého hráče představuje best response na akce všech ostatních hráčů. Ukázka v Obrázku 4.

$N_1 \backslash N_2$	A	B	C	D
E	6, 3	8, 2	8, 3	9, 8
F	7, 9	4, 5	6, 4	6, 5
G	4, 5	9, 9	5, 7	6, 1

Figure 4: Nashovo equlibrium