PROCESY MARKOWA

LISTA 1 ZADANIE 4

Niech $\{Z_n\}$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennyhch losowych o tym samym rozkładzie $\mathrm{P}(Z_n = l) = a_k$, gdzie $k \geqslant 0$, natomiast $\{X_n\}$ ciągiem zdefiniowanym przez:

$$X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + Z_{n+1} \text{ dla n} \geqslant 0 \text{ dla n} \geqslant 0 \text{ dla n} \geqslant 0 \text{ dla n} \geqslant 0$$

gdzie X_0 jest zmienną losową o wartościach całkowitych nieujemnych, niezależną z ciągiem $\{Z_n\}$, a $(x)_+ = \max(0, x)$. Pokazać, że $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństwa przejścia:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Interpretacja: Łańcuch Markowa $\{X_n\}$ nazywany jest czasem modelem konserwatora. W modelu tym zmienna losowa Z_n jest interpretowana jako liczba zepsutych maszyn (elementów) w n-tym dniu, a konserwator może zreperować w ciągu dnia tylko jedną maszynę (element).

- Pokazać, że $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa:

$$\begin{aligned}
L &= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \mathrm{P}((X_n - 1)_+ + Z_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \mathrm{P}((i - 1)_+ + Z_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \frac{\mathrm{P}((i-1)_+ + Z_{n+1} = j)\,\mathrm{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathrm{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} \\
&= \mathrm{P}((i-1)_+ + Z_{n+1} = j) \\
&= \frac{\mathrm{P}((i-1)_+ + Z_{n+1} = j)\,\mathrm{P}(X_n = i)}{\mathrm{P}(X_n = i)} \\
&= \frac{\mathrm{P}((i-1)_+ + Z_{n+1} = j, X_n = i)}{\mathrm{P}(X_n = i)} \\
&= \mathrm{P}((X_n - 1)_+ + Z_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = P
\end{aligned}$$

Powyższe (chyba) wystarcza, ale możemy też pokazać jednorodność następująco:

$$
\begin{aligned}
L &= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= \mathrm{P}((X_n - 1)_+ + Z_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= \mathrm{P}((i - 1)_+ + Z_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= \mathrm{P}(Z_{n+1} = j - (i-1)_+ | X_n = i) \\
&= \mathrm{P}(Z_{n+1} = j - (i-1)_+) = a_{j-(i-1)_+}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= \mathrm{P}(X_1 = j | X_0 p = i) \\
&= \mathrm{P}((X_0 - 1)_+ + Z_1 = j | X_= i) \\
&= \mathrm{P}((i - 1)_+ + Z_1 = j | X_0 = i) \\
&= \mathrm{P}(Z_1 = j - (i-1)_+ | X_0 = i) \\
&= \mathrm{P}(Z_1 = j - (i-1)_+) = a_{j-(i-1)_+}
\end{aligned}
$$

$L = P$ czyli łańcuch Markowa jest jednorodny.

- Wyznaczmy macierz prawdopodobieństw przejść.
  Skoro łańcuch jest jednrodny, to:

$$
\begin{aligned}
p_{i,j} &= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= \mathrm{P}(X_1 = j | X_0 = i) \\
&= \mathrm{P}(Z_1 = j - (i-1)_+) \\
&= a_{j-(i-1)_+} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } j < (i-1)_+ \\ \mathrm{a}_{j-(i-1)_+} & \text{gdy } j \geqslant (i-1)_+ \end{cases}
\end{aligned}
$$

Zatem:

$$
\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.
$$