# PROCESY MARKOWA

LISTA 2 ZADANIE 6

Niech macierz prawdopodobieństw przejść dwu-stanowego jednorodnego łańcucha Markowa będzie równa:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Metodą diagonalizacji pokazać, że:

$$\mathbb{P}^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(2p-1)^n}{2} & \frac{1-(2p-1)^n}{2} \\ \frac{1-(2p-1)^n}{2} & \frac{1+(2p-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1-p & p-\lambda \end{vmatrix} = (p-\lambda)^2 - (1-p)^2 = \lambda^2 - 2p\lambda + 2p - 1$$

$$\Delta_\lambda = 4p^2 - 8p + 4 = (2p-2)^2 \geqslant 0$$

1) Jeżeli $(2p-2)^2 > 0$ :

$$\lambda_1 = \frac{2p - 2p + 2}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{2p + 2p - 2}{2} = 2p - 1$$

$1^\circ$ Dla $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} p-1 & 1-p \\ 1-p & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = x$$

$\mathrm{W}_1 = (1,1)^T$

$2^\circ$ Dla $\lambda = 2p - 1$

$$\begin{pmatrix} 1-p & 1-p \\ 1-p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x$$

$\mathrm{W}_2 = (1,-1)^T$

Wówczas:

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & (2p-1)^n \\ 1 & -(2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2p-1)^n & 1-(2p-1)^n \\ 1-(2p-1)^n & 1+(2p-1)^n \end{pmatrix}$$