PROCESY MARKOWA

LISTA 1 ZADANIE 3

Niech $\{Z_n\}$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (iid), $\mathrm{P}(Z_1 = 1) = p$, $\mathrm{P}(Z_1 = -1) = 1 - p$, gdzie $p \in (0,1)$, natomiast $\{X_n\}$ procesem zdefiniowanym przez:

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1} \text{ gdzie } n \geqslant 0$$

gdzie X_0 jest zmienną losową przyjmującą wartości całkowite i niezależną z ciągiem $\{Z_n\}$. Pokazać, że $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i znaleźć jego macierz prawdopodobieństwa przejscia.

Zdefiniowany proces $\{X_n\}$ nazywa się błądzeniem losowym. Rozważyć sytuację, w której zmienne losowe Z_n przyjmują wartości całkowite z prawdopodobieństwami $\mathrm{P}(Z_n = k) = a_k$, gdzie $|k| < \infty$. Napisać macierz prawdopodobieństwa przejścia.

- Pokazać, że $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa:

  Jednorodny Łańcuch Markowa
  Proces stochastyczny nazywamy jednorodnym łańcuchem Markowa, jeżeli

  $$\mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{i,j}$$

  dla wszystkich stanow $i_{n-1}, \ldots, i_0, i, j \in J$, oraz $n = \{0, 1, \ldots\}$. Prawdopodobieństwo warunkowe $p_{i,j}$ nazywamy prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do j.

  $$\begin{aligned} L &= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\ &= \mathrm{P}(X_n + Z_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\ &= \frac{\mathrm{P}(X_n + Z_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathrm{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(Z_{n+1} = j - i, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathrm{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} \end{aligned}$$

  korzystając z niezależnosci $\{X_n\}$ i $\{Z_n\}$

  $$\begin{aligned} &= \frac{\mathrm{P}(Z_{n+1} = j - i)\,\mathrm{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathrm{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} \\ &= \mathrm{P}(Z_{n+1} = j - i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= \mathrm{P}(X_n + Z_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= \frac{\mathrm{P}(X_n + Z_{n+1} = j, X_n = i)}{\mathrm{P}(X_n = i)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(Z_{n+1} = j - i, X_n = i)}{\mathrm{P}(X_n = i)} \\
&= \mathrm{P}(Z_{n+1} = j - i)
\end{aligned}$$

Jak widać $L = P$, zatem jest to jednorodny łańcuch Markowa.

- Znaleźć macierz prawdopodobieństwa przejścia tego łańcucha Markowa

  Rekurencyjna postać łańcucha Markowa
  Niech $\{Z_n\}$ będzie ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o wartościach w przestrzeni S_1 z pewnym σ-ciałem $\sigma(S_1)$, X_0 zmienną losową o wartościach w przestrzeni J niezależną z ciągiem $\{Zn\}$, $f : J \times S_1 \to J$ funkcją odpowiednio mierzalną, a $\{X_n\}$ niech będzie procesem o wartościach w J zdefiniowanym następującym równaniem rekurencjjnym:

  $$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1}.)$$

  Wtedy $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa z macierzą prawdopodobieństw przejść $\mathbb{P} = (p_{i,j})$ gdzie:

  $$p_{i,j} = \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathrm{P}(f(i, Z_1) = j).$$

  Zatem:

  $$\begin{aligned}
  p_{i,j} &= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathrm{P}(Z_1 = j - i) \\
  &= \begin{cases} \mathrm{P}(Z_1 = 1) = p & \text{gdy } \ j = i + 1 \\ \mathrm{P}(Z_1 = -1) = 1 - p & \text{gdy } \ j = i - 1 \end{cases}
  \end{aligned}$$

  Stąd macierz prawdopodobieństw przejść jest równa:

  $$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \text{p} & 0 & \cdots \\ \text{1-p} & 0 & \text{p} & \cdots \\ 0 & \text{1-p} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Jeżeli zmienne losowe Z_n przyjmują wartości całkowite z prawdopodobieństwami $\mathrm{P}(Z_n = k) = a_k$, gdzie $|k| < \infty$, to macierz prawdopodobieństw przejść jest rowna:

  $$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_0 & \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \cdots \\ \mathrm{a}_{-1} & 0 & \mathrm{a}_1 & \cdots \\ \mathrm{a}_{-2} & \mathrm{a}_{-1} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$