PROCESY MARKOWA

LISTA 1 ZADANIE 5

Pewien towar jest magazynowany aby zaspakajać ciągłe zapotrzebowanie na niego. Niech $Z_n,\ n \geqslant 1$ będzie ciągiem wzajmnie niezależnych zmiennych losowych, o tym samym rozkładzie i niezależnych z początkową zawartością magazynu X_0.. Uzupełnianie magazynu odbywa się w chwilach $n+0$; tzn. bezpośrednio po czasie $n \geqslant 1$. Popularna strategia uzupełniania zapasów $(s-S)$, gdzie s i S są liczbami całkowitymi, $0 < s < S$, mówi: Jeżeli poziom zapasów w chwili n jest mniejszy niż s to powinien być on uzupełniony do poziomu S w chwili $n+0$. W przeciwnym wypadku nie uzupełnia się zapasów. Przyjmuje się, że $X_0 \leqslant S$. Wtedy poziom zapasów w chwili n jest równy X_n i proces ten spełnia równanie rekurencyjne:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - Z_{n+1} & \text{jeżeli } \ s < X_n \leqslant S \\ S - Z_{n+1} & \text{jeżeli } \ X_n \leqslant s. \end{cases}$$

Pokazać, że $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa oraz znaleźć jego macierz prawdopodobieństw przejścia.

- Pokazać, że $\{X_n\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa:

$$\begin{aligned}
L &= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \mathrm{P}([(X_n - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j | X_n = i, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \frac{\mathrm{P}([(X_n - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j, X_n = i, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathrm{P}(X_n = i, \ldots, X_0 = i_0)} \\
&= \frac{\mathrm{P}([(i - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j, X_n = i, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathrm{P}(X_n = i, \ldots, X_0 = i_0)} \\
&= \frac{\mathrm{P}([(i - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j)\,\mathrm{P}(X_n = i, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathrm{P}(X_n = i, \ldots, X_0 = i_0)} \\
&= \mathrm{P}([(i - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \\
&= \mathrm{P}([(X_n - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j | X_n = i) \\
&= \frac{\mathrm{P}([(X_n - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j, X_n = i}{\mathrm{P}(X_n = i)} \\
&= \frac{\mathrm{P}([(i - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j, X_n = i)}{\mathrm{P}(X_n = i)} \\
&= \frac{\mathrm{P}([(i - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j)\,\mathrm{P}(X_n = i)}{\mathrm{P}(X_n = i)} \\
&= \mathrm{P}([(i - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j)
\end{aligned}
$$

- Znaleźć macierz prawdopodobieństw przejść:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}([(i - Z_{n+1})\mathbf{1}_{(s,S]}(X_n) + (S - Z_{n+1})\mathbf{1}_{[0,s]}(X_n)] = j) \\
&= \begin{cases} \mathrm{P}(i - Z_1 = j) = \mathrm{P}(Z_1 = i - j) & \text{dla } \ s < i \leqslant S \\ \mathrm{P}(S - Z_1 = j) = \mathrm{P}(Z_1 = S - j) & \text{dla } \ i \leqslant s \end{cases}
\end{aligned}
$$

Przestrzeń stanów $J = \{0, 1, \ldots\}$. Prawdopodobieństwo kupienia k towaru $- \mathrm{P}(Z_n = k) = c_k$.

Pierwszy wiersz:
$0 \to 0$ - poprzedniego dnia mielismy pusty magazyn, uzupełniamy więc go do S i klient wykupuje wszystko
$0 \to 1$ - poprzedniego dnia mielismy pusty magazyn, uzupełniamy więc go do S i klient wykupuje $S - 1$

$$\ldots$$

$0 \to S$ - poprzedniego dnia mielismy pusty magazyn, uzupełniamy więc go do S i klient wykupuje 0

Drugi wiersz:
$1 \to 0$ - poprzedniego dnia mielismy 1 w magazynie, uzupełniamy więc go do S i klient wykupuje wszystko
$1 \to 1$ - poprzedniego dnia mielismy 1 w magazynie, uzupełniamy więc go do S i klient wykupuje $S - 1$

$$\ldots$$

$1 \to S$ - poprzedniego dnia mielismy 1 w magazynie, uzupełniamy więc go do S i klient wykupuje 0

Wiersz s:
$s \to 0$ - poprzedniego dnia mielismy s w magazynie i klient wykupuje wszystko, czyli s
$s \to 1$ - poprzedniego dnia mielismy s w magazynie i klient wykupuje $s - 1$

$$\ldots$$

$s \to s$ - poprzedniego dnia mielismy s w magazynie i klient wykupuje 0
$s \to s + 1$ - niemożliwe

$$\ldots$$

$s \to S$ - niemożliwe

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} c_S & c_{S-1} & c_{S-2} & \cdots & c_{S-s} & c_{S-s-1} & \cdots & c_0 \\ c_S & c_{S-1} & c_{S-2} & \cdots & c_{S-s} & c_{S-s-1} & \cdots & c_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_s & c_{s-1} & c_{s-2} & \cdots & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{s+1} & c_s & c_{s-1} & \cdots & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_S & c_{S-1} & c_{S-2} & \cdots & c_{S-s} & c_{S-s-1} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$