WSTĘP DO MATEMATYKI UBEZPIECZENIOWEJ

LISTA 3 ZADANIE 4

Pokaż (najlepiej wykonując odpowidnie rysunki), że:

i) $a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{k}|} + v^k a_{\overline{n}|} = v^n a_{\overline{k}|} + a_{\overline{n}|}$

ii) ${}_{k|}a_{\overline{n}|} = v^k a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|}$

iii) $\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n = a_{\overline{n}|} + 1$

Renty pewne
Renty skończone wypłacane do ustalonej z góry chwili są nazywane rentami pewnymi.

Obecne wartości rent pewnych wynoszą:

- przy wypłatach po 1 przez n lat, dokonywanych od chwili 0, nazywanych rentą pewną z góry:
$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}$$
- przy wypłatach po 1 przez n lat, dokonywanych od końca pierwszego roku, nazywanych rentą pewną z dołu:
$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}$$
- przy wypłatach po $1/m$ przez n lat, dokonywanych od chwili 0, nazywanych m-krotną rentą pewną z góry:
$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} \ldots \frac{1}{m}v^{(nm-1)/m} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}$$
- przy wypłatach po $1/m$ przez n lat, dokonywanych od chwili $1/m$, nazywanych m-krotną rentą pewną z dołu:
$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} \ldots \frac{1}{m}v^{(nm)/m} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

gdzie miara odsetek dobieranych z góry $d = 1 - v$, a czynnik dyskonta $v = \frac{1}{1+i}$ przy efektywnej stopie procentowej i.

i)

$$a_{\overline{n+k}|} = \frac{1-v^{n+k}}{i}, \quad a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}, \quad a_{\overline{k}|} = \frac{1-v^k}{i},$$

$$a_{\overline{k}|} + v^k a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^k}{i} + \frac{v^k(1-v^n)}{i} = \frac{1-v^{n+k}}{i}$$

$$v^n a_{\overline{k}|} + a_{\overline{n}|} = \frac{v^n(1-v^k)}{i} + \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-v^{n+k}}{i}$$

ii)

$$_{k|}a_{\overline{n}|} = v^k + v^{k+1} + \ldots + v^{n+k} = \frac{v^k(1-v^n)}{i}$$

$$v^k a_{\overline{n}|} = \frac{v^k(1-v^n)}{i}$$

$$a_{\overline{n+k}|} - a_{\overline{k}|} = \frac{1-v^{n+k}}{i} - \frac{1-v^k}{i} = \frac{v^k(1-v^n)}{i}$$

iii)

$$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n &= \frac{1 - v^n + dv^n}{d} \\
&= \frac{1 - v^n + \frac{i}{1+i}v^n}{\frac{i}{1+i}} \\
&= \frac{1 + i + (i - 1 - i)v^n}{1+i} \cdot \frac{1+i}{i} \\
&= \frac{1 + i - v^n}{i} \\
&= \frac{1 - v_n}{i} + 1 \\
&= a_{\overline{n}|} + 1
\end{aligned}$$