1　計算体系とカルテシアン閉圏の対応

1.1　システムと圏の対応

論理体系を特殊なグラフとして形式的に定義し、それらが圏と対応することをみる。

<u>Definition</u> 1.1. グラフ [2, p.47]
グラフ $\mathscr{G}$ とは対象 (又は頂点とも言う) の集合 $\mathrm{obj}\mathscr{G}$ と射 (又は辺とも言う) の集合 $\mathrm{arr}\mathscr{G}$ からなり、各射に対してドメインとコドメインと呼ばれる対象が割り当てられているものとする。射 $f \in \mathrm{arr}\mathscr{G}$ のドメインが $A \in \mathrm{obj}\mathscr{G}$、コドメインが $B \in \mathrm{obj}\mathscr{G}$ のとき、$f : A \longrightarrow B$ などと書く。このドメインとコドメインの対応をそれぞれ $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ と書く。

また、対象 $A, B \in \mathrm{obj}\mathscr{G}$ について A から B への射の集合を $\mathscr{G}(A,B)$ で書き表す。

グラフ $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ の間の射 $h : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H}$ とは、対応 $h : \mathrm{obj}\mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{obj}\mathscr{H}$ と $h : \mathrm{arr}\mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{arr}\mathscr{H}$ の組であって、各射 $f \in \mathrm{arr}\mathscr{G}$ について $h(\mathrm{dom} f) = \mathrm{dom}(h(f))$ かつ $h(\mathrm{cod} f) = \mathrm{cod}(h(f))$ を満たすもののことである。

対象をグラフ、射をグラフの射とする圏を Graph とかく。 □

以降「対象 $A \in \mathscr{G}$」などのように、誤解がない限り arr や obj といった表記を省略する。

<u>Definition</u> 1.2. 推論システム. [2, p.47]
推論システム、または単にシステムとは次の条件を満たすグラフ $\mathscr{L}$ のことである。

(1) 各対象 $A \in \mathscr{L}$ に対して射 $1_A : A \longrightarrow A$ が存在する。
(2) 二つの射 $f : A \longrightarrow B, g : C \longrightarrow D \in \mathscr{L}$ について、もし $B = C$ ならば、つまり f のコドメインと g のドメインが一致していれば必ず合成 $gf : A \longrightarrow D$ が存在する。

二つのシステム $\mathscr{L}, \mathscr{M}$ の間の射とはグラフの射 $h : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{M}$ であって、各対象 $A \in \mathscr{L}$ に対して $h(1_A) = 1_{h(A)}$ であり、かつ合成可能な射 $f, g \in \mathscr{L}$ に対して $h(gf) = h(g)h(f)$ を満たすもののことである。

これらからなる圏を System で表す。

□

システムは可換性や結合法則などを持たない「圏もどき」である。これは計算体系の形式化である。

ここにおける射 $A \longrightarrow B$ は論理における導出 $A \vdash B$ を想定している。ここで恒等射 1_A は $A \vdash A$、合成はカット:「$A \vdash B$ かつ $B \vdash C$ ならば $A \vdash C$」に対応している。小さい圏は自然

にシステムであるから、小さい圏と函手からなる圏 Cat から System への忘却函手が定義出来る。

これを圏に対応させることがこの節の目的である。[2] ではシステムの中の射のクラスに同値関係をいれ、それで剰余をとることでシステムから圏を構成している。しかしそのような同値関係がどのようにして得られるのかについては触れられていなかったため、ここではそれを詳述することにする。

まずシステムではなく一般のグラフから圏を得る操作について考え、それを参考にシステムの圏化を定める。

1.1.1 Graph と Cat の随伴と可換性条件付きグラフ

この小節の内容は [1] に基づく。まずはグラフ $\mathscr{G}$ に対して標準的に生成される圏 $\mathrm{PCat}(\mathscr{G})$ を定義し、その普遍性をみる。

Definition 1.3. パス, パスの圏. [1, p.176]
グラフ $\mathscr{G}$ に対してパス p とは $p=(A_0,(f_1,A_1),\cdots,A_n)\in \mathrm{obj}\mathscr{G}\times(\mathrm{arr}\mathscr{G}\times\mathrm{obj}\mathscr{G})^*$ という元であって各 $i=1,\cdots,n$ について $\mathrm{dom}\, f_i=A_{i-1}$ かつ $\mathrm{cod}\, f_i=A_i$ を満たすもののことである。これらパス全体を $\mathrm{Path}_{\mathscr{G}}$ と書く。ただし集合 X に対して X^* は X の元の有限列から成る集合とし、X のスター閉包 (star closure) などと呼ぶ。

パス $p:=(A_0,(f_1,A_1),\cdots,(f_n,A_n))\in\mathrm{Path}_{\mathscr{G}}$ について、$\mathrm{dom}\, p=A_0$、$\mathrm{cod}\, p=A_n$ としてドメインとコドメインを定める。

パス p,q について $\mathrm{cod}\, p=\mathrm{dom}\, q$ であるとき、パスの連結 $q\circledcirc p$ を以下で定義する。$p:=(A_0,(f_1,A_1),\cdots,(f_m,A_m))$、$q:=(B_0,(g_1,B_1),\cdots,(g_n,B_n))$ であって $A_m=B_0$ であるとする。このとき

$$q\circledcirc p:=(A_0,(f_1,A_1),\cdots,(f_m,A_m),(g_1,B_1),\cdots,(g_n,B_n))$$

このとき、すぐ分かるよう $\mathscr{G}$ に対して以下の圏 $\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ が定まる。

- ▷ $\mathrm{obj}\,\mathrm{PCat}\mathscr{G}=\mathrm{obj}\mathscr{G}$
- ▷ $\mathrm{arr}\,\mathrm{PCat}\mathscr{G}=\mathrm{Path}_{\mathscr{G}}$

ここで $\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ の合成はパスの連結、各対象 $A\in\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ の恒等射は $1_A:=(A)$ として $\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ は圏をなす。これをグラフ $\mathscr{G}$ から生成するパスの圏と呼ぶ。 □

Proposition 1.4. [1, p.178] グラフから圏への対応 PCat は函手を成し、それは忘却函手 $\mathrm{Cat}\longrightarrow\mathrm{Graph}$ の左随伴である。 □

Proof. グラフから圏へのグラフの射があれば、それはパスの圏からの函手に拡張される。よって

グラフから生成するパスの圏に対してパスの間の同値関係を定めることによって可換性を与えることを考える。

Definition 1.5. 可換性条件付きグラフ. [1, p.177]
グラフ $\mathscr{G}$ について、これの可換性条件とは

$$R = \left\{ R_{A,B} \subset \mathrm{Path}_{\mathscr{G}}(A,B)^2 \right\}_{A,B \in \mathscr{G}}$$

のことである。ただし対象 $A, B \in \mathscr{G}$ に対して $\mathrm{Path}_{\mathscr{G}}(A,B)$ とはドメインを A、コドメインを B とするパス全体の集合とする。

可換性条件付きのグラフは $(\mathscr{G}, R)$(ただし R は $\mathscr{G}$ の可換性条件) などと書く。

二つの可換性条件付きグラフ $(\mathscr{G}, R), (\mathscr{H}, S)$ の間の射 F とはグラフの射 $F : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H}$ であって、以下の条件を満たすものである。

▷ F をパスに拡張した射を同じ様に F と書いて以下で定める。

$$F(A_0, (f_1, A_1), \ldots, (f_n, A_n)) := (F(A_0), (F(f_1), F(A_1)), \ldots, (F(f_n), F(A_n)))$$

このとき $p, q \in \mathrm{Path}_{\mathscr{G}}(A,B)$ が $(p,q) \in R$ ならば、$(F(p), F(q)) \in S$ である。

可換性条件付きグラフとその射からなる圏は CondGraph と書く。 □

圏は合成に関しての可換性を持った可換性条件付きグラフであるから、Cat から CondGraph への忘却函手が存在する。これは圏 $\mathscr{C} \in \mathrm{Cat}$ に対して可換性条件 $R = R^{\mathscr{C}}$ を以下の様に定めることで得られる。

$\mathscr{C}$ をグラフとして見たときに、そのパスを $\mathscr{C}$ における合成に写す写像 comp を以下の様に与える。

$$\mathrm{comp}(A_0, (f_1, A_1), \ldots, (f_n, A_n)) := f_n \ldots f_1$$

ただし右辺は $\mathscr{C}$ における通常の合成である。また $\mathrm{comp}((A)) = 1_A$ と定める。なおこのとき comp はパスの連結を射の合成に写す。つまり $\mathrm{comp}(q \circledcirc p) = \mathrm{comp}(q)\,\mathrm{comp}(p)$ である。

さて、$R = R^{\mathscr{C}}$ は各対象 $A, B \in \mathscr{C}$ に対して

$$R_{A,B} := \left\{ (p,q) \in \mathrm{Path}_{\mathscr{C}}(A,B)^2 \,|\, \mathrm{comp}(p) = \mathrm{comp}(q) \right\}$$

として $R = \{R_{A,B}\}$ と定める。

この忘却函手は勿論 Cat から CondGraph への函手となる。この忘却函手の左随伴はグラフから生成されるパスの圏にその可換性条件から生成される合同関係を以て各 hom 集合を割ることによって出来る圏を構成することによって得られる。ここで射の合同関係とは合成演算と両立するような同値関係のことを指し、与えられた可換性条件を含む最小の合同関係を「可換性条件から生成された」という。ただし関係 R が演算と両立するとは $(g_1,g_2)\in R$ であるとき g_1 と合成可能な f,h について $(g_1 f, g_2 f)\in R$ かつ $(hg_1,hg_2)\in R$ となることをいう。

以下に具体的な構成を述べる。$(\mathscr{G},R)$ を可換性条件付きグラフとする。次のような条件を満たす圏 $\mathscr{S}\subset \mathrm{PCat}\mathscr{G}\times\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ を考える。

- ▷ $\mathrm{obj}\,\mathscr{S}=\{(A,A)\,|A\in\mathrm{obj}\,\mathrm{PCat}\mathscr{G}\}$。以下 (A,A) を A と表記する。
- ▷ 各 $A,B\in\mathscr{G}$ に対して $R_{A,B}\subset\mathscr{S}(A,B)$。
- ▷ 各 hom 集合 $\mathscr{S}(A,B)$ が $\mathrm{PCat}\mathscr{G}(A,B)$ の上の同値関係となっている。

このような部分圏は $\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ の上に合同関係を定める。逆に $\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ の上の合同関係は上のような部分圏を定める。このような部分圏 $\mathscr{S}$ 全体の共通部分をとりこれを $\mathscr{R}_{(\mathscr{G},R)}$ と書く。

これが定める合同関係は R で生成されたものである。つまり R を含む合同関係で最小である。実際、これは各 hom 集合が同値関係となっておりかつ $\mathrm{PCat}\mathscr{G}\times\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ の部分圏だから合成と両立する。また R を含む $\mathrm{PCat}\mathscr{G}$ の合同関係があれば、それは上の条件を満たすから定義より $\mathscr{R}_{(\mathscr{G},R)}$ を含む。よって $\mathscr{R}_{(\mathscr{G},R)}$ は R から生成されるものである。

これによって次のような圏 $\mathscr{D}=\mathrm{CCat}(\mathscr{G},R)$ を定義出来る。

- ▷ $\mathrm{obj}\,\mathscr{D}=\mathrm{obj}\,\mathscr{G}$
- ▷ 各対象 $A,B\in\mathscr{D}$ について、hom 集合は $\mathscr{D}(A,B)=\frac{\mathrm{Path}_{\mathscr{G}}(A,B)}{\mathscr{R}_{(\mathscr{G},R)}\left(A^2,B^2\right)}$

$\mathscr{R}_{(\mathscr{G},R)}$ が連結と両立する同値関係だから、$\mathrm{CCat}(\mathscr{G},R)$ では代表元を $\mathrm{Path}_{\mathscr{G}}$ で定まる合成で写す演算が well-defined に定まる ($\overline{g}\overline{f}:=\overline{gf}$ が well-defined)。

また CCat は CondGraph$\longrightarrow$Cat の函手となる。

Proposition 1.6. [1, p.178]

CCat は上で定義した忘却函手の左随伴となる。即ち可換性条件付きグラフ $(\mathscr{G},R)$ と圏 $\mathscr{C}$ が与えられて、グラフの射 $F:\mathscr{G}\longrightarrow\mathscr{C}$ が $(f,g)\in R$ ならば $F(f)=F(g)$ を満たすとき、函

手 $G:\mathrm{CCat}(\mathscr{G},R)\longrightarrow\mathscr{C}$ が一意に定まって

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{G} \arrow[dl, "\text{proj.}"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathrm{CCat}(\mathscr{G},R) \arrow[rr, "G"'] & & \mathscr{C}
\end{tikzcd}$$

を可換にする。 □

Proof. $\mathscr{G}$ のパスの圏から自然に函手が定まり、この上の射の合同関係が $\mathscr{C}$ において等号となるから剰余の圏から図式を満たすような函手を得る。一意性も自明である。 □

1.1.2 System と Cat の随伴

上で得られた可換性条件付きグラフから圏への函手の構成を参考に忘却函手の左随伴 $\mathrm{System}\longrightarrow\mathrm{Cat}$ を構成する。

Definition 1.7. システム上の可換性条件.
システム $\mathscr{L}$ の可換性条件 R とは

$$R=\left\{R_{A,B}\subset\mathscr{L}(A,B)^2\right\}_{A,B\in\mathscr{G}}$$

のことである。可換性条件付きのシステムから成る圏を CondSystem と書く。この射 $F:(\mathscr{L},R)\longrightarrow(\mathscr{K},S)$ はシステムの射であってかつ各 $(f,g)\in R$ に対して $(F(f),F(g))\in S$ となるもののことである。 □

Definition 1.8. 部分システム, システム積.
システム $\mathscr{L}$ の部分システムとは $\mathscr{L}$ の部分グラフであって、各対象の恒等射を含み、かつ $\mathscr{L}$ の合成で閉じているものである。

次にシステム $\mathscr{L},\mathscr{K}$ について、これらの積 $\mathscr{L}\times\mathscr{K}$ を $(A,B)\in\mathrm{obj}\,\mathscr{L}\times\mathrm{obj}\,\mathscr{K}$ を対象とし $(f,g)\in\mathrm{arr}\,\mathscr{L}\times\mathrm{arr}\,\mathscr{K}$ を射とするグラフとする。このとき $\mathscr{L}\times\mathscr{K}$ は各対象 (A,B) について恒等射を $1_{(A,B)}:=(1_A,1_B)$、合成を各成分ごとの合成として定めることでシステムを成す。 □

可換性条件付きシステム $(\mathscr{L},R)$ について R から生成される合同関係を構成し、その関係で剰余をとった新しいシステムを与える。

Proposition 1.9. $\mathscr{L}\times\mathscr{L}$ の部分システムとして $\mathscr{S}$ で以下のようなものを考える。

▷ $\mathrm{obj}\,\mathscr{S}=\{A\,|A\in\mathrm{obj}\,\mathscr{L}\}$。ただし $(A,A)\in\mathscr{L}\times\mathscr{L}$ を A として見ている。

▷ 各 $A,B \in \mathscr{L}$ に対して $R_{A,B} \subset \mathscr{S}(A,B)$。
▷ 各射集合 $\mathscr{S}(A,B)$ が $\mathscr{L}(A,B)$ の上の同値関係となっている。

このようなものは $\mathscr{L} \times \mathscr{L}$ の部分システムと考えてよいから、これを満たすような $\mathscr{L} \times \mathscr{L}$ の部分システム全体の共通部分をとり、$\mathscr{R}_{(\mathscr{L},R)}$ とおく。このシステムは $\mathscr{L}$ の各射集合に合成と両立する同値関係を与える。

$\mathrm{CSys}(\mathscr{L},R)$ を

▷ $\mathrm{obj}\,\mathrm{CSys}(\mathscr{L},R) = \mathrm{obj}\,\mathscr{L}$
▷ 各対象 $A,B \in \mathrm{CSys}(\mathscr{L},R)$ について $\mathrm{CSys}(\mathscr{L},R)(A,B) = \frac{\mathscr{L}(A,B)}{\mathscr{R}_{(\mathscr{L},R)}(A,B)}$

と定める。

(1) $\mathrm{CSys}(\mathscr{L},R)$ はシステムを成し、射影 $\mathscr{L} \longrightarrow \mathrm{CSys}(\mathscr{L},R)$ はシステムの射となる。即ち恒等射と合成を保存する。
(2) この射影は次の普遍性を持つ。システム $\mathscr{K}$ とシステムの射 $F : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{K}$ が与えられたとする。もし F が各 $(f,g) \in R$ について $F(f) = F(g)$ を満たすならば一意的なシステムの射 $G : \mathrm{CSys}(\mathscr{L},R) \longrightarrow \mathscr{K}$ が存在して次を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{L} \arrow[dl, "\text{proj.}"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathrm{CSys}(\mathscr{L},R) \arrow[rr, "G"'] & & \mathscr{K}
\end{tikzcd}$$

□

証明は可換性条件付きグラフの時とほぼ同じである。

圏はその恒等射と合成を以て自然にシステムである。逆に、各恒等射 1_A が合成可能な f,g に対して $f1_A = f$、$1_A g = g$ をなし、かつ合成について結合的なシステムは自然に圏をなす。つまり Cat は System の部分圏である (圏の間のシステムの射は自然に函手とみなせる)。

与えられたシステムについて、このような同値関係を生成すれば CSys によって普遍性をもつ函手 System$\longrightarrow$Cat を構成出来る。

Corollary 1.10. 与えられたシステム $\mathscr{L}$ に対して条件 $R = (=_{\mathscr{L}})$ を次のように定める。

▷ 各対象 $A \in \mathscr{L}$ と $\mathrm{dom}\, f = A$ なる射 f について $(f1_A, f) \in R$
▷ 各対象 $A \in \mathscr{L}$ と $\mathrm{cod}\, g = A$ なる射 g について $(1_A g, g) \in R$

▷ 合成可能な射 $* \xrightarrow{f} * \xrightarrow{g} * \xrightarrow{h} *$ について $(h(gf),(hg)f) \in R$

このとき $\mathrm{CSys}(\mathscr{L},(=_{\mathscr{L}}))$ は圏を成す。更にこれは次の普遍性を満たす。

<u>Proposition</u> 1.11. 与えられた圏 $\mathscr{C}$ とシステムの射 $F:\mathscr{L}\longrightarrow\mathscr{C}$ について射 $f,g\in\mathscr{L}$ が $f=_{\mathscr{L}} g$ であるならば $F(f)=F(g)$ であるとき一意的な函手 $G:\mathrm{CSys}(\mathscr{L},(=_{\mathscr{L}}))\longrightarrow\mathscr{C}$ が次を可換にする。

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{L} \arrow[dl, "\mathrm{proj.}"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathrm{CSys}(\mathscr{L},(=_{\mathscr{L}})) \arrow[rr, "G"'] & & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

□

従ってこのシステム $\mathscr{L}$ から $\mathrm{CSys}(\mathscr{L},(=_{\mathscr{L}}))$ への対応は忘却函手 $\mathrm{Cat}\longrightarrow\mathrm{System}$ の左随伴函手となる。

1.1.3 積と冪

論理体系の一般化であるシステムについて積や冪を導入してそれに対応する圏を考える。

<u>Definition</u> 1.12. [2, p.47]
システム $\mathscr{L}$ が積を持つとは、各対象 $A,B\in\mathscr{L}$ について $A\times B\in\mathscr{L}$ が存在して以下を満たすことである。

▷ $\pi^{\ell}_{A,B}:A\times B\longrightarrow A$ と $\pi^{r}_{A,B}:A\times B\longrightarrow B$ が存在する。
▷ $f:C\longrightarrow A$ と $g:C\longrightarrow B$ があるとき、必ず $\langle f,g\rangle:C\longrightarrow A\times B$ が定まる。即ち各 $A,B,C\in\mathscr{L}$ について、射の関数
$$\langle -,-\rangle:\mathscr{L}(A,B)\times\mathscr{L}(A,C)\longrightarrow\mathscr{L}(A,B\times C)$$
が備えられている。

また $\mathscr{L}$ が更に冪を持つとは、各対象 $A,B\in\mathscr{L}$ に対して $A^B\in\mathscr{L}$ が存在し、次を満たすことである。

▷ $\varepsilon^B_A:B\times A^B\longrightarrow A$ が存在する。
▷ $A\times B\xrightarrow{h}C$ という形の射に対して $\overline{h}:B\longrightarrow C^A$ が定まる。即ち各 $A,B,C\in\mathscr{L}$ について射の関数
$$\overline{\ }:\mathscr{L}(A\times B,C)\longrightarrow\mathscr{L}\left(B,C^A\right)$$

が備えられている。

□

$\mathscr{L}$ に対して上で定めた $(=_{\mathscr{L}})$ を更に以下のように拡張して、積と冪をもつシステムをカルテシアン閉圏に対応させられる。

- ▷ $\pi^{\ell}_{A,B}\langle f,g\rangle =_{\mathscr{L}} f$
- ▷ $\pi^{r}_{A,B}\langle f,g\rangle =_{\mathscr{L}} g$
- ▷ $\left\langle \pi^{\ell}_{A,B}h, \pi^{r}_{A,B}h \right\rangle =_{\mathscr{L}} h$
- ▷ $f_1 =_{\mathscr{L}} f_2$ かつ $g_1 =_{\mathscr{L}} g_2$ ならば $\langle f_1, g_1\rangle =_{\mathscr{L}} \langle f_2, g_2\rangle$
- ▷ 各 $h : A\times B \longrightarrow C$ とそれに対応する $\overline{h} : B \longrightarrow C^A$ について $h =_{\mathscr{L}} \varepsilon^A_C \left\langle \pi^{\ell}_{A,B}, \overline{h}\pi^{r}_{A,B} \right\rangle$
- ▷ 各 $k : B \longrightarrow C^A$ に対して $k =_{\mathscr{L}} \overline{\varepsilon^A_C \left\langle \pi^{\ell}_{A,B}, k\pi^{r}_{A,B} \right\rangle}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, equal] & A\times B \arrow[l, "\pi^{\ell}_{A,B}"'] \arrow[r, "\pi^{r}_{A,B}"] \arrow[d, "\left\langle \pi^{\ell}, \overline{h}\pi^{r}\right\rangle"] \arrow[dd, bend right, "h"'] & B \arrow[d, "\overline{h}"] \\
A & A\times C^A \arrow[l, "\pi^{\ell}"] \arrow[r, "\pi^{r}"'] \arrow[d, "\varepsilon"] & C^A \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, equal] & A\times B \arrow[l, "\pi^{\ell}_{A,B}"'] \arrow[r, "\pi^{r}_{A,B}"] \arrow[d, "\left\langle \pi^{\ell}, k\pi^{r}\right\rangle"] & B \arrow[d, "k"] \\
A & A\times C^A \arrow[l, "\pi^{\ell}"] \arrow[r, "\pi^{r}"'] \arrow[d, "\varepsilon"] & C^A \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

実際、この条件から積が圏論的な積の性質を満たすこと、冪がその右随伴となることが確かめられる。$\mathscr{L}$ をこの可換性条件で圏にしたものを $\mathscr{C} := \mathrm{CSys}(\mathscr{L}, (=_{\mathscr{L}}))$ とおくと、$\mathscr{C}$ の射 $f : A \longrightarrow B$ と $g : A \longrightarrow C$ に対して $\langle f,g\rangle : A \longrightarrow B\times C$ が以下の図式を満たす。

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
B & B\times C \arrow[l, "\pi^{\ell}"] \arrow[r, "\pi^{r}"'] & C
\end{tikzcd}$$

またこの図式を満たすような $h : A \longrightarrow B \times C$ があれば、$\pi^\ell h = f$ かつ $\pi^r h = g$ であるから

$$h = \left\langle \pi^\ell h, \pi^r h \right\rangle = \langle f, g \rangle$$

となり $\langle f, g \rangle$ の一意性が分かる。

同様に、$h : A \times B \longrightarrow C$ に対して $\overline{h} : B \longrightarrow C^A$ が

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "1\times\overline{h}"] \arrow[dr, "h"'] & & A \times C^A \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

を満たすように得られる。ただし一般に $\alpha : X_1 \longrightarrow X_2$、$\beta : Y_1 \longrightarrow Y_2$ に対して $\alpha \times \beta := \left\langle \alpha \pi^\ell_{X_1,Y_1}, \beta \pi^r_{X_1,Y_1} \right\rangle$ である。

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "\alpha"'] & X_1 \times Y_1 \arrow[l, "\pi^\ell"'] \arrow[r, "\pi^r"] \arrow[d, "\alpha\times\beta"] & Y_1 \arrow[d, "\beta"] \\
X_2 & X_2 \times Y_2 \arrow[l, "\pi^\ell"] \arrow[r, "\pi^r"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

また、$\varepsilon^A_C (1 \times k) = h$ を満たすような $k : B \longrightarrow C^A$ が得られれば、

$$k = \overline{\varepsilon^A_C (1 \times k)} = \overline{h}$$

であるからこのような k は $\overline{h}$ に限る。よって自然同型 $\mathscr{C}(A \times B, C) \simeq \mathscr{C}\left(B, C^A\right)$ を得る。

積, 冪をもつシステム $\mathscr{L}, \mathscr{K}$ の間の射 $F : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{K}$ を、積, 冪を保つシステムの射として System の部分圏 PosSystem を与える。即ち次のようなシステムの射で出来る部分圏である。

- ▷ $F(A \times B) = F(A) \times F(B)$
- ▷ $F(\langle f, g \rangle) = \langle F(f), F(g) \rangle$
- ▷ $F\left(\pi^\ell_{A,B}\right) = \pi^\ell_{F(A),F(B)}$
- ▷ $F\left(\pi^r_{A,B}\right) = \pi^r_{F(A),F(B)}$
- ▷ $F\left(A^B\right) = F(A)^{F(B)}$
- ▷ $F\left(\varepsilon^B_A\right) = \varepsilon^{F(B)}_{F(A)}$
- ▷ $h : A \times B \longrightarrow C$ に対して $F\left(\overline{h}\right) = \overline{F(h)}$

またカルテシアン閉圏 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ の間の函手 $F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$ でこのような等式を満たすものをカルテシアン閉函手と呼び、カルテシアン閉圏とその間のカルテシアン閉函手からなる圏を Cart と書く。

次が成り立つ。

Proposition 1.13. [2, p.52] 積, 冪を持つシステム $\mathscr{L}$ に上で拡張した $(=_{\mathscr{L}})$ によって与えられる圏 $\mathrm{CSys}(\mathscr{L},(=_{\mathscr{L}}))$ はカルテシアン閉圏、即ち有限積とその随伴である冪を持つ圏となる。この対応は忘却函手 $\mathrm{Cart}\longrightarrow\mathrm{PosSystem}$ の左随伴函手となる。 □

Proof. カルテシアン閉性はすでに示した。積、冪付きのシステム $\mathscr{L}$ からカルテシアン閉圏 $\mathscr{C}$ へのシステムの射で積、冪を保つもの $F:\mathscr{L}\longrightarrow\mathscr{C}$ が与えられたとすると、上で拡張された $\mathscr{L}$ の可換性条件は全て F で写されると $\mathscr{C}$ で等号となるから、カルテシアン閉函手 $\mathrm{CSys}(\mathscr{L},(=_{\mathscr{L}}))\longrightarrow\mathscr{C}$ があって F を一意的に分解する。よって普遍性からこの対応は忘却函手の左随伴である。 □

後に詳述するが、型付き λ 計算の体系はシステムと見做せる。型全体からなるクラスを対象とし、射については自由変数 $x\in A$ をもつ項 $\varphi(x)\in B$ を $\varphi(x):A\longrightarrow B$ と見做す。このとき自由変数を含まない項 $t\in B$ は射 $t:1\longrightarrow B$ と対応し、システムの射の合成は自由変数への代入と対応する。

1.1.4 グラフからの生成

与えられたグラフからシステムを自由生成することを考える。

グラフ $\mathscr{G}$ から次のように積、冪を持つシステム $\mathscr{D}$ を生成出来る。

(1) 対象:
- ▷ $V_0 := \mathrm{obj}\mathscr{G}\cup\{1\}$ とする。
- ▷ $V_{i+1} := V_i\cup\left\{A\times B, B^A \mid A,B\in V_i\right\}$
- ▷ $V := \bigcup_{i\geq 0} V_i$

(2) 射:

▷

$$\begin{aligned}R_0 :=\ & \mathrm{arr}\,\mathscr{G}\\ & \cup \{1_A : A \longrightarrow A \mid A \in V\}\\ & \cup \{t_A : A \longrightarrow 1 \mid A \in V\}\\ & \cup \left\{\pi^{\ell}_{A,B} : A \times B \longrightarrow A \mid A, B \in V\right\}\\ & \cup \left\{\pi^{r}_{A,B} : A \times B \longrightarrow A \mid A, B \in V\right\}\\ & \cup \left\{\varepsilon^{B}_{A} : B \times A^{B} \longrightarrow A \mid A, B \in V\right\}\end{aligned}$$

▷

$$\begin{aligned}R_{i+1} :=\ & R_i\\ & \cup \{\langle f, g\rangle : A \longrightarrow B \times C \mid f, g \in R_i, \mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}\, g = A, \mathrm{cod}\, f = B, \mathrm{cod}\, g = C\}\\ & \cup \left\{\overline{f} : A \longrightarrow B^{C} \mid f \in R_i, f : C \times A \longrightarrow B\right\}\\ & \cup \{gf : A \longrightarrow C \mid f, g \in R_i, \mathrm{cod}\, f = \mathrm{dom}\, g\}\end{aligned}$$

▷ $R := \bigcup_{i \geq 0} R_i$

以上によって $\mathrm{obj}\,\mathscr{D} := V$、$\mathrm{arr}\,\mathscr{D} := R$ とすればよい。

このとき $\mathscr{D}$ は積と冪付きのシステムをなす。これは普遍性を持つ。つまり、グラフから積と冪付きシステムへのグラフ射 $\mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{S}$ が与えられたとき、これは積、冪付きのシステムの射 $\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{S}$ へと一意的に拡張できる。

この方法で積、冪付きのシステム $\mathscr{L}$ に対して自由変数 (論理における仮定)$x : 1 \longrightarrow A$ を付け加えたシステム $\mathscr{L}(x)$ を生成出来る ($\mathscr{L}$ と x からなるグラフからシステムを自由生成し、それが $\mathscr{L}$ の拡張となるように可換性条件を定めて割ってやればよい)。

この拡張はカルテシアン閉圏においての多項式圏と対応する。

1.2 型付き λ 計算とシステム

1.2.1 型付き λ 計算

ここでは以下のような型付き λ 計算を考え、それをシステムに対応させる。

Definition 1.14. [2, p.72]
型付き λ 計算は以下で構成される。

1. 型のクラスで次をみたすもの
   ▷ 二つの型 $1, N$ がある

- ▷ A, B が型ならば $A \times B, B^A$ も型である。

2. 各型 A の項 $t \in A$ のクラスであって与えられた定数項と以下で自由生成されるもの
   - ▷ 可算個の自由変数 $\left\{x_i^A\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ が型 A の変数として認められている
   - ▷ $a \in A, b \in B$ に対して $\langle a, b\rangle \in A \times B$ となるペアリングの演算 $\langle -, - \rangle$ が備えられている。
   - ▷ 各型 A, B に対して射影の演算 $\pi_{A,B}^{\ell}, \pi_{A,B}^{r}$ が備えられており、$c \in A \times B$ に対して $\pi_{A,B}^{\ell}(c) \in A$、$\pi_{A,B}^{r}(c) \in B$ である。
   - ▷ $a \in A, f \in B^A$ に対して $\varepsilon_B^A(a, f) \in B$ となるような適用の演算 ε_B^A が備えられている。
   - ▷ 変数 $x^A \in A$ と項 $\varphi \in B$ について $\lambda x^A . \varphi \in B^A$ となるような抽象の演算 λ が備えられている。
   - ▷ 型 1 の項 $* \in 1$ が存在する
   - ▷ $0 \in N$ と、各項 $n \in N$ に対して $S(n) \in N$ となる演算 S が備えられている。
   - ▷ 各型 A について、$a \in A, h \in A^A, n \in N$ に対して $I_A(a, h, n) \in A$ となる再帰関数演算 I_A が備えられている。

3. 項に関する変数付きの等号 $a_1 \underset{X}{=} a_2$ で次を満たすもの。ただしここで a_1, a_2 は同じ型の項、X は変数の集合であって、a_1, a_2 において自由に出現する変数は全て X に含まれているとする。ここでいう変数の自由な出現、束縛された出現はよく知られた λ 計算のそれと同じ意味であるからここでは割愛する。また、項 t に自由に出現する変数全体を $\mathrm{FV}(t)$ で表す。
   - ▷ この等号は a_1, a_2 について同値関係である。
   - ▷ $X \subset Y$ のとき $a_1 \underset{X}{=} a_2$ ならば $a_1 \underset{Y}{=} a_2$ である。
   - ▷ $a_1, a_2 \in A$ が $a_1 \underset{X}{=} a_2$ であるとき、任意の $f \in B^A$ について $\varepsilon(a_1, f) \underset{X \cup \mathrm{FV}(f)}{=} \varepsilon(a_2, f)$ である。
   - ▷ 変数 x について、$\varphi_1(x) \underset{X}{=} \varphi_2(x)$ であるならば $\lambda x . \varphi_1(x) \underset{X \setminus \{x\}}{=} \lambda x . \varphi_2(x)$ である。
   - ▷ 型 1 の項 a については全て $a \underset{X}{=} *$ である。

▷ ペアリングと射影について、

$$\pi^{\ell}(\langle a,b\rangle) \underset{X}{=} a$$
$$\pi^{r}(\langle a,b\rangle) \underset{X}{=} b$$
$$\left\langle \pi^{\ell}(c), \pi^{r}(c) \right\rangle \underset{X}{=} c$$

が成り立つ。

▷ 適用と抽象について以下が成り立つ。

- 自由変数 $x \in A$ と項 $\varphi(x) \in B, a \in A$ について a の自由変数が $\varphi(x)$ で束縛されていないとき、$\varepsilon(\lambda x.\varphi(x), a) \underset{X}{=} \varphi[a/x]$ である。ただし $\varphi[a/x]$ は φ における x の自由な出現に a を代入したものとする。
- 変数 $x \in A$ と項 $f \in B^A$ について、$\lambda x.\varepsilon(x, f) \underset{X}{=} f$ である。ただし $x \notin X$ であり、特に x は f に自由な出現を持たないものとする。

▷ 再帰関数について次が成り立つ。

- $I_A(a,h,0) \underset{X}{=} a$。
- $I_A(a,h,Sx) \underset{X}{=} \varepsilon(I_A(a,h,x), h)$。ただし x は N の変数である。

▷ 変数 $x \in A$ と項 $\varphi(x)$ について、異なる変数 $x' \in A$ が $\varphi(x)$ に束縛された出現を持たないならば $\lambda x.\varphi(x) \underset{X}{=} \lambda x'.\varphi[x'/x]$ である。

□

<u>Definition</u> 1.15. [2, p.75]
型付き λ 計算の体系 $\mathscr{L}, \mathscr{S}$ の間の射 $F : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{S}$ とは $\mathscr{L}$ の型から $\mathscr{S}$ の型へ対応と、$\mathscr{L}$ の項から $\mathscr{S}$ の項へ対応で次を満たすものである。

▷ 型の演算を保つ。

$$F(1) = 1$$
$$F(N) = N$$
$$F(A \times B) = F(A) \times F(B)$$
$$F\left(B^A\right) = F(B)^{F(A)}$$

▷ 各 $t \in A$ について $F(t) \in F(A)$

▷ 項の演算子を保つ。

▷ 変数付きの等号を保つ。

□

λ 計算の体系とその間の射からなる圏が定まる。これを λ-Calc と表記する。

1.2.2　システムとしての型付き λ 計算

λ 計算の体系 $\mathscr{L}$ は次のようにして積、冪付きのシステムとして扱える。

▷ 対象は $\mathscr{L}$ の型 A

▷ 射集合 $\mathscr{L}(A,B)$ は変数 $x \in A$ と自由変数が高々 x のみの項 $\varphi(x)$ の組 (x,φ) であって α 変換で写り合うものを同一視した集合。つまり $(x,\varphi(x)),(x',\psi(x')) : A \longrightarrow B$ について、φ でも ψ でも束縛されていないある変数 $z \in A$ があって $\varphi[z/x] \underset{[z]}{=} \psi[z/x']$ であるときに $(x,\varphi(x)) = (x',\psi(x'))$ である。

▷ $1_A : A \longrightarrow A$ として $\left(x^A, x^A\right)$ をとる。

▷

$$A \xrightarrow{(x,\varphi(x))} B \xrightarrow{(y,\psi(y))} C$$

の合成は $(x, \psi[\varphi(x)/y])$ として定める。

▷ $(x,\varphi) : A \longrightarrow B$、$(x,\psi) : A \longrightarrow C$ に対して $\langle (x,\varphi),(x,\psi) \rangle := (x, \langle \varphi,\psi \rangle) : A \longrightarrow B \times C$ と定める。

▷ システムとしての $\pi^\ell : A \times B \longrightarrow A$ は、λ 計算の射影演算を用いて $\left(z^{A\times B}, \pi^\ell\left(z^{A\times B}\right)\right)$ で定める。π^r についても同様。

▷ $\left(z^{A\times B^A}, \varepsilon\left(\pi^\ell\left(z^{A\times B^A}\right), \pi^r\left(z^{A\times B^A}\right)\right)\right) : A \times B^A \longrightarrow B$ によって ε^A_B を定める。

▷ $\left(z^{A\times B}, \varphi\left(z^{A\times B}\right)\right) : A \times B \longrightarrow C$ に対して $\overline{\left(z^{A\times B}, \varphi(z)\right)} = \left(y^B, \lambda x^A \,.\, \varphi\left[\left\langle x^A, y^B \right\rangle / z^{A\times B}\right]\right) : B \longrightarrow C^A$ と定める。

▷ 各型 A について $t_A = (x,*) : A \longrightarrow 1$ を定める。

形式的には自由変数を高々一つだけもつ項を射としているが、実際には二つの自由変数を持つ項 $\varphi\left(x^A, x^B\right)$ は新しい変数 $z \in A \times B$ を用いて $\varphi\left(\pi^\ell(z), \pi^r(z)\right)$ と表せるのでこれらの項も何らかの射の形に表せる。また逆に自由変数を持たない項 $f \in A$ があれば、型 1 の変数を用いて $\left(x^1, f\right) : 1 \longrightarrow A$ の射を得る。ここで $x^1 \underset{X}{=} *$ に注意。

このとき λ 計算の射はシステムの射であって自然数型とその演算を保つものとして考えられる。

システムとしての構造を持つからこのような型付き λ 計算 $\mathscr{L}$ はカルテシアン閉圏 $\mathscr{C}(\mathscr{L})$ に対応させることができる。このとき自由変数を持たない閉項 $\varphi \in A$ が射として $\left(x^1, \varphi\right) : 1 \longrightarrow A$ に対応することになる。特に全ての射 $f : A \longrightarrow B$ は $\overline{f} : 1 \longrightarrow B^A$ を通して何らかの閉項として与えられる。

Proposition 1.16. この $\mathscr{C}(\mathscr{L})$ において

$$1 \xrightarrow{\left(x^1, \alpha\right)} A \xleftarrow{\left(x^A, \varphi\left(x^A\right)\right)} A$$

が与えられたとき、ある $h : N \longrightarrow A$ があって

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\left(x^1,0\right)"] \arrow[d, equal] & N \arrow[d, "h"] & N \arrow[l, "\left(x^N,S\left(x^N\right)\right)"'] \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "\left(x^1,\alpha\right)"'] & A & A \arrow[l, "\left(x^A,\varphi\left(x^A\right)\right)"]
\end{tikzcd}$$

が可換となる。 □

Proof. λ 計算における再帰関数定義演算子 I によって $h = \left(x^N, I_A\left(\alpha, \varphi, x^N\right)\right) : N \longrightarrow A$ とすれば上の図式を満たす。実際

$$\begin{aligned}
h\left(x^1, 0\right) &= \left(x^N, I_A\left(\alpha, \varphi, x^N\right)\right)\left(x^1, 0\right) \\
&= \left(x^1, I_A\left(\alpha, \varphi, 0\right)\right) \\
&= \left(x^1, \alpha\right)
\end{aligned}$$

である。また同様に

$$\begin{aligned}
h\left(x^N, S\left(x^N\right)\right) &= \left(x^N, I_A\left(\alpha, \varphi, x^N\right)\right)\left(x^N, S\left(x^N\right)\right) \\
&= \left(x^N, I_A\left(\alpha, \varphi, S\left(x^N\right)\right)\right) \\
&= \left(x^N, \varphi\left(I_A\left(\alpha, \varphi, x^N\right)\right)\right) \\
\left(x^A, \varphi\left(x^A\right)\right) h &= \left(x^A, \varphi\left(x^A\right)\right)\left(x^N, I_A\left(\alpha, \varphi, x^N\right)\right) \\
&= \left(x^N, \varphi\left(I_A\left(\alpha, \varphi, x^N\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

であったから可換となる。 □

このような対象は弱自然対象と呼ばれる。

1.3 多項式圏

この後の目標として、これまでとは逆に与えられたカルテシアン閉圏から言語を構成することを考える。

λ 計算から圏への対応をみる限りでは射が閉項と対応することになるが、一方で変数やそれを使う項、λ 抽象などはどのように扱えばよいか (どのように定義すればよいか) という問題が残る。多項式圏はその問題の解決策であり、新しく変数となる射 $x : 1 \longrightarrow A$ を付け加えて圏を構成することでそこの閉項をもって変数付きの項と見做す。つまり多項式圏の射 $\varphi(x) : 1 \longrightarrow B$ を自由変数つきの項 $\varphi(x) \in B$ である。

システム $\mathscr{L}$ ににおいては仮定 $x : A_0 \longrightarrow A$ を付け加えて新たなシステムを得ることで変数を扱ったのだった。これに対応する操作としてカルテシアン閉圏 $\mathscr{A}$ とその対象 A_0, A を選び $\mathscr{A}$ に含まれない射 $x : A_0 \longrightarrow A$ を付け加えて新たにカルテシアン閉圏を得ることを考える。これを $\mathscr{A}$ 上の多項式圏 ([2]) と呼ぶ。

まずカルテシアン閉圏 $\mathscr{A}$ に変数の射 x を付け加えてそこからカルテシアン閉圏を自由生成する。これは $\mathscr{A}$ をグラフと見做して x を付け加え、それから自由生成したシステムの圏化を考えることで得られる。これが $\mathscr{A}$ の拡張となるように圏の剰余を定めることで多項式圏を構成する (圏はシステムであるからシステムの場合と同じ要領で圏の上に合同関係を生成出来る) 。

纏めると、多項式圏は以下のように生成出来る。

$\mathscr{A}[x]$ を以下で定める。

- ▷ 対象は $\operatorname{obj}\mathscr{A}[x] := \operatorname{obj}\mathscr{A}$
- ▷ 射について

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}_0 &:= \operatorname{arr}\mathscr{A} \cup \{x\} \\
\mathscr{R}_{i+1} &:= \mathscr{R}_i \\
&\quad \cup \left\{ \psi \circ^{\mathrm{new}} \varphi : A \longrightarrow C \;\middle|\; A \xrightarrow{\varphi} B, B \xrightarrow{\psi} C \in \mathscr{R}_i \right\} \\
&\quad \cup \left\{ \langle \varphi, \psi \rangle^{\mathrm{new}} : A \longrightarrow B \times C \;\middle|\; A \xrightarrow{\varphi} B, A \xrightarrow{\psi} C \in \mathscr{R}_i \right\} \\
&\quad \cup \left\{ \overline{\varphi}^{\mathrm{new}} : B \longrightarrow C^A \;\middle|\; A \times B \xrightarrow{\varphi} C \in \mathscr{R}_i \right\} \\
\mathscr{R} &:= \bigcup_{i \geq 0} \mathscr{R}_i
\end{aligned}
$$

とし、$\mathscr{R}$ 上に次で定まる合同関係 $(\sim)$ を入れる。

- $\mathscr{A}$ 内で $gf = h$ ならば $g \circ^{new} f \sim h$。即ち $\mathscr{A}$ の合成はそのまま $\mathscr{A}[x]$ の合成である。
- 各 $\varphi : A \longrightarrow B$ について $\varphi \circ^{\mathrm{new}} 1_A \sim \varphi$、$1_B \circ^{\mathrm{new}} \varphi \sim \varphi$ である。即ち $\mathscr{A}$ の恒等写像は $\mathscr{A}[x]$ の恒等写像である。
- $(\psi \circ^{\mathrm{new}} \xi) \circ^{\mathrm{new}} \varphi \sim \psi \circ^{\mathrm{new}} (\xi \circ^{\mathrm{new}} \varphi)$ である。つまり合成は結合的である。
- $A \xrightarrow{f} B, A \xrightarrow{g} C \in \mathscr{A}$ について $\langle f, g \rangle^{\mathrm{new}} \sim \langle f, g \rangle$ である。ただし右辺は $\mathscr{A}$ での積。つまり $\mathscr{A}$ の積は $\mathscr{A}[x]$ の積である。
- $\pi^{\ell} \langle \varphi, \psi \rangle^{\mathrm{new}} \sim \varphi$、$\pi^{r} \langle \varphi, \psi \rangle^{\mathrm{new}} \sim \psi$
- $\left\langle \pi^{\ell} \varphi, \pi^{r} \varphi \right\rangle^{\mathrm{new}} \sim \varphi$
- $\varphi_1 \sim \varphi_2$ かつ $\psi_1 \sim \psi_2$ ならば $\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle^{\mathrm{new}} \sim \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle^{\mathrm{new}}$ である。
- $h : A \times B \longrightarrow C \in \mathscr{A}$ とすると、$\overline{h}^{\mathrm{new}} \sim \overline{h}$ である。
- $\varphi : A \times B \longrightarrow C$ について $\varepsilon_C^A (1 \times \overline{\varphi}^{\mathrm{new}}) \sim \varphi$
- $\psi : B \longrightarrow C^A$ について $\overline{\varepsilon_C^A (1 \times \psi)}^{\mathrm{new}} = \psi$
- $\varphi \sim \psi$ ならば $\overline{\varphi} \sim \overline{\psi}$

以上によって $\mathrm{arr}\,\mathscr{A}[x] := \frac{\mathscr{R}}{(\sim)}$

射集合の構成で得られた演算 $\psi \circ^{new} \varphi, \langle \varphi, \psi \rangle^{new}, \overline{\varphi}^{new}$ は合同関係によって $\mathscr{A}$ のそれを拡張したものとしてみなせるから、特に区別する必要がない場合には表記を $\mathscr{A}$ のそれと特に区別せず、$\psi\varphi, \langle \varphi, \psi \rangle, \overline{\varphi}$ と表記する。

このとき、埋め込み $I : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}[x]$ を定義できる。定義より $\mathscr{A}[x]$ はカルテシアン閉圏であり、I はカルテシアン閉函手である。

Proposition 1.17. [2, p.58]

$F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ はカルテシアン閉函手、$A_0, A \in \mathscr{A}$、$b : F(A_0) \longrightarrow F(A)$ は $\mathscr{B}$ の射とする。このとき $HI = F$ かつ $H(x) = b$ となるようなカルテシアン閉函手 $H : \mathscr{A}[x] \longrightarrow \mathscr{B}$ がただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{A} \arrow[dl, "I"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathscr{A}[x] \arrow[rr, "H"'] & & \mathscr{B}
\end{tikzcd}$$

□

この操作は λ 計算における代入操作に相当する。

Proof. そのような H は

- ▷ $f \in \mathscr{A}$ について $H(f) = F(f)$
- ▷ $H(x) = b$
- ▷ $H(\psi\varphi) = H(\psi)H(\varphi)$
- ▷ $H(\langle\varphi,\psi\rangle) = \langle H(\varphi), H(\psi)\rangle$
- ▷ $H(\overline{\varphi}) = \overline{H(\varphi)}$

を満たす。逆に $\mathscr{A}[x]$ の構成から、この条件によって $\mathscr{R}$ 上の関数 H を帰納的に定めることができる。これが $\mathscr{A}[x]$ 上の函手として定義できる (即ち $\varphi \sim \psi$ ならば $H(\varphi) = H(\psi)$ である) ことを示せばよい。

$(\sim)$ の構成についての帰納法で示す。

$\mathscr{A}$ において $gf = h$ であるときに $g \circ^{\text{new}} f \sim h$ となるケースでは

$$\begin{aligned}
H(g \circ^{\text{new}} f) &= H(g)H(f) \\
&= F(g)F(f) \\
H(h) &= F(h) \\
&= F(gf) \\
&= F(g)F(f)
\end{aligned}$$

であるから $H(gf) = H(h)$ である。

$\varphi \in \mathscr{A}[x]$ について $1\varphi \sim \varphi$、$\varphi 1 \sim \varphi$ であった。このケースでは

$$\begin{aligned}
H(1\varphi) &= H(1)H(\varphi) \\
&= F(1)H(\varphi) \\
&= 1H(\varphi) \\
&= H(\varphi)
\end{aligned}$$

であるから、よって $H(1\varphi) = H(\varphi)$ である。

$(\psi\xi)\varphi \sim \psi(\xi\varphi)$ のケースについて考える。

$$\begin{aligned}
H((\psi\xi)\varphi) &= H(\psi\xi)H(\varphi) \\
&= H(\psi)H(\xi)H(\varphi) \\
H(\psi(\xi\varphi)) &= H(\psi)H(\xi)H(\varphi)
\end{aligned}$$

よって $H((\psi\xi)\varphi) = H(\psi(\xi\varphi))$ である。

$\mathscr{A}$ の射 f,g について $\langle f,g\rangle^{\text{new}} \sim \langle f,g\rangle$ であるケースについて、

$$\begin{aligned}H\left(\langle f,g\rangle^{\text{new}}\right) &= \langle H(f), H(g)\rangle \\ &= \langle F(f), F(g)\rangle \\ H(\langle f,g\rangle) &= F(\langle f,g\rangle) \\ &= \langle F(f), F(g)\rangle\end{aligned}$$

であるから $H\left(\langle f,g\rangle^{\text{new}}\right) = H(\langle f,g\rangle)$ である。

$\pi^{\ell}\langle\varphi,\psi\rangle \sim \varphi$ については

$$\begin{aligned}H\left(\pi^{\ell}\langle\varphi,\psi\rangle\right) &= \pi^{\ell}\langle H(\varphi), H(\psi)\rangle \\ &= H(\varphi)\end{aligned}$$

である。$\pi^{r}\langle\varphi,\psi\rangle \sim \psi$ についても同様。

$\left\langle \pi^{\ell}\varphi, \pi^{r}\varphi\right\rangle \sim \varphi$ のケースについては

$$\begin{aligned}H\left(\left\langle \pi^{\ell}\varphi, \pi^{r}\varphi\right\rangle\right) &= \left\langle \pi^{\ell}H(\varphi), \pi^{r}H(\varphi)\right\rangle \\ &= H(\varphi)\end{aligned}$$

となる。

$\varphi_1 \sim \varphi_2$ かつ $\psi_1 \sim \psi_2$ であって $\langle\varphi_1,\psi_1\rangle \sim \langle\varphi_2,\psi_2\rangle$ となるケースについて考える。ただし帰納法の仮定から $H(\varphi_1) = H(\varphi_2)$、$H(\psi_1) = H(\psi_2)$ である。

$$\begin{aligned}H(\langle\varphi_1,\psi_1\rangle) &= \langle H(\varphi_1, H(\psi_1))\rangle \\ &= \langle H(\varphi_2, H(\psi_2))\rangle \\ &= H(\langle\varphi_2,\psi_2\rangle)\end{aligned}$$

である。

$h : A\times B \longrightarrow C \in \mathscr{A}$ のとき $\overline{h}^{\text{new}} \sim \overline{h}$ であるケースについて、

$$\begin{aligned}H\left(\overline{h}^{\text{new}}\right) &= \overline{H(h)} \\ &= \overline{F(h)} \\ H\left(\overline{h}\right) &= F\left(\overline{h}\right) \\ &= \overline{F(F)}\end{aligned}$$

である。

$\varphi : A \times B \longrightarrow C$ について $\varepsilon(1 \times \overline{\varphi}) \sim \varphi$ であった。このケースについては

$$
\begin{aligned}
H(\varepsilon(1 \times \overline{\varphi})) &= \varepsilon\left(1 \times \overline{H(\varphi)}\right) \\
&= H(\varphi)
\end{aligned}
$$

である。

$\psi : B \longrightarrow C^A$ について $\overline{\varepsilon(1 \times \psi)} \sim \psi$ であった。このとき

$$
\begin{aligned}
H\left(\overline{\varepsilon(1 \times \psi)}\right) &= \overline{\varepsilon(1 \times H(\psi))} \\
&= H(\psi)
\end{aligned}
$$

である。

最後に $\varphi \sim \psi$ であるとき $\overline{\varphi} \sim \overline{\psi}$ である。帰納法の仮定より $H(\varphi) = H(\psi)$ である。

$$
\begin{aligned}
H(\overline{\varphi}) &= \overline{H(\varphi)} \\
&= \overline{H(\psi)}.
\end{aligned}
$$

従って $\varphi \sim \psi$ ならばいつでも $H(\varphi) = H(\psi)$ である。

以上より函手 $H : \mathscr{A}[x] \longrightarrow \mathscr{B}$ が定まって $HI = F$、$H(x) = b$ を満たす。このような H は初めに見た通りこのように定義されるものしかない。よって一意的である。 □

1.4 カルテシアン閉圏における演繹定理

論理体系における演繹定理に対応することがカルテシアン閉圏で成り立つ。即ち仮定 A を認めた証明 B があれば $A \Rightarrow B$ が仮定なしで成立することが、多項式圏から元の圏への射の対応として現れる。

Theorem 1.18. カルテシアン閉圏における演繹定理. [2, P.59].
$\mathscr{A}$ はカルテシアン閉圏、$A \in \mathscr{A}$ とする。変数 $x : 1 \longrightarrow A$ による $\mathscr{A}$ 上の多項式圏 $\mathscr{A}[x]$ の任意の射 $\varphi : B \longrightarrow C$ に対して $\mathscr{A}$ の射 $f : A \times B \longrightarrow C$ が一意に存在して $f\langle xt_B, 1_B \rangle = \varphi$ が成り立つ。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "x"'] & B \arrow[l, "t_B"'] \arrow[r, "1_B"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\varphi"'] & B \arrow[d, equal] \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi^\ell"] \arrow[r, "\pi^r"'] \arrow[d, "f"] & B \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

$\mathscr{A}[x]$ の射の集合の構成に従って、φ に対して $\underset{x\in A}{\kappa}\varphi : A\times B \longrightarrow C \in \mathscr{A}$ を次のように帰納的に定める。これらは与えられた仮定付きの証明から演繹定理によって新しい証明を導く操作と同じである。射が証明に対応している。

- $\varphi = k : B \longrightarrow C \in \mathscr{A}$ であるとき $\kappa k := k\pi^r_{A,B}$

$$A\times B \xrightarrow{\pi^r_{A,B}} B \xrightarrow{k} C$$

- $\varphi = x : 1 \longrightarrow A$ のとき $\kappa x := \pi^\ell_{A,1}$

$$A\times 1 \xrightarrow{\pi^\ell_{A,1}} A$$

- $\varphi = \psi_2\psi_1 : B \longrightarrow C$、ただし $\psi_1 : B \longrightarrow M$、$\psi_2 : M \longrightarrow C$ のとき $\kappa(\psi_2\psi_1) := \kappa\psi_2\left\langle \pi^\ell_{A,B}, \kappa\psi_1 \right\rangle$

$$\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "\pi^\ell"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\kappa\psi_1"] & \\
A & A\times M \arrow[l, "\pi^\ell"] \arrow[r, "\pi^r"'] \arrow[d, "\kappa\psi_2"] & M \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

- $\varphi = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle : B \longrightarrow C_1\times C_2$、ただし $\psi_i : B \longrightarrow C_i$ のとき、$\kappa(\langle \psi_1, \psi_2 \rangle) := \langle \kappa\psi_1, \kappa\psi_2 \rangle$

$$\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "\kappa\psi_1"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\kappa\psi_2"] & \\
C_1 & C_1\times C_2 \arrow[l, "\pi^\ell"] \arrow[r, "\pi^r"'] & C_2
\end{tikzcd}$$

- $\varphi = \overline{\psi} : B \longrightarrow D^E$、ただし $\psi : E\times B \longrightarrow D$ のとき、$\kappa\overline{\psi} := \overline{(\kappa\psi)(1\times\beta_{B,E})\,\alpha_{(A,B),E}\,\beta_{E,A\times B}}$。ただし $\alpha_{(X,Y),Z} : (X\times Y)\times Z \longrightarrow X\times(Y\times Z)$、$\beta_{X,Y} : X\times Y \longrightarrow Y\times X$ は標準的な同型で、

$$\alpha_{(X,Y),Z} = \left\langle \pi^\ell_{X,Y}\pi^\ell_{X\times Y,Z}, \pi^r_{X,Y}\times 1_Z \right\rangle$$
$$\beta_{X,Y} = \left\langle \pi^r_{X,Y}, \pi^\ell_{X,Y} \right\rangle$$

である。

$$E\times(A\times B) \xrightarrow{\beta_{E,A\times B}} (A\times B)\times E \xrightarrow{\alpha_{(A,B),E}} A\times(B\times E) \xrightarrow{1\times\beta_{B,E}} A\times(E\times B) \xrightarrow{\kappa\psi} D$$

それぞれが $\kappa\varphi\langle xt_B, 1_B\rangle = \varphi$ を満たすことを示そう。

$\varphi = k : B \longrightarrow C \in \mathscr{A}$ の場合について

$$
\begin{aligned}
\kappa k \langle xt_B, 1_B\rangle &= k\pi^r \langle xt_B, 1_B\rangle \\
&= k1_B \\
&= k
\end{aligned}
$$

$\varphi = x : 1 \longrightarrow A$ の場合について

$$
\begin{aligned}
\kappa x \langle xt_1, 1_1\rangle &= \pi^\ell \langle xt_1, 1_1\rangle \\
&= xt_1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

$\varphi = \psi_2\psi_1 : B \longrightarrow C$ の場合について

$$
\begin{aligned}
\kappa(\psi_2\psi_1)\langle xt_B, 1_B\rangle &= \kappa\psi_2 \left\langle \pi^\ell, \kappa\psi_1 \right\rangle \langle xt_B, 1_B\rangle \\
&= \kappa\psi_2 \left\langle \pi^\ell \langle xt_B, 1_B\rangle, \kappa\psi_1 \langle xt_B, 1_B\rangle \right\rangle \\
&= \kappa\psi_2 \langle xt_B, \psi_1\rangle \\
&= \kappa\psi_2 \langle xt_M, 1_M\rangle \psi_1 \\
&= \psi_2\psi_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "t_B"'] \arrow[d, "\psi_1"] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
1 \arrow[d, "x"'] & M \arrow[l, "t_M"'] \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "\langle xt_M, 1_M\rangle"] & M \arrow[d, equal] \\
A & A \times M \arrow[l, "\pi^\ell"'] \arrow[r, "\pi^r"'] \arrow[d, "\kappa\psi_2"] & M \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

$\varphi = \langle\psi_1, \psi_2\rangle : B \longrightarrow C_1 \times C_2$ の場合について

$$
\begin{aligned}
\kappa(\langle\psi_1, \psi_2\rangle)\langle xt_B, 1_B\rangle &= \langle \kappa\psi_1, \kappa\psi_2\rangle \langle xt_B, 1_B\rangle \\
&= \langle \kappa\psi_1 \langle xt_B, 1_B\rangle, \kappa\psi_2 \langle xt_B, 1_B\rangle\rangle \\
&= \langle\psi_1, \psi_2\rangle
\end{aligned}
$$

$\varphi = \overline{\psi} : B \longrightarrow D^E$ の場合について考える。$\overline{\psi}$ は $\varepsilon(1 \times \overline{\psi}) = \psi$ を満たすような唯一の射だから $\kappa\overline{\psi}\langle xt_B, 1_B\rangle = \overline{\psi}$ を示すには、$\varepsilon(1 \times \kappa\overline{\psi}\langle xt_B, 1_B\rangle) = \psi$ を確かめればよい。

$$\begin{aligned}
\varepsilon^E_D(1_E \times \kappa\overline{\psi}\langle xt_B, 1_B\rangle) &= \varepsilon^E_D(1_E \times \kappa\overline{\psi})(1_E \times \langle xt_B, 1_B\rangle) \\
&= \varepsilon^E_D\left(1_E \times \overline{(\kappa\psi)(1_A \times \beta_{B,E})\alpha_{(A,B),E}\beta_{E,A\times B}}\right)(1_E \times \langle xt_B, 1_B\rangle) \\
&= (\kappa\psi)(1_A \times \beta_{B,E})\alpha_{(A,B),E}\beta_{E,A\times B}(1_E \times \langle xt_B, 1_B\rangle) \\
&= (\kappa\psi)(1_A \times \beta_{B,E})\alpha_{(A,B),E}\left\langle \pi^r_{E,A\times B}, \pi^\ell_{E,A\times B}\right\rangle(1_E \times \langle xt_B, 1_B\rangle) \\
&= (\kappa\psi)(1_A \times \beta_{B,E})\alpha_{(A,B),E}\left\langle \langle xt_B, 1_B\rangle\pi^r_{E,B}, \pi^\ell_{E,B}\right\rangle \\
&= (\kappa\psi)(1_A \times \beta_{B,E})\left\langle \pi^\ell_{A,B}\pi^\ell_{A\times B,E}, \pi^r_{A,B} \times 1_E\right\rangle\left\langle \langle xt_B, 1_B\rangle\pi^r_{E,B}, \pi^\ell_{E,B}\right\rangle \\
&= (\kappa\psi)(1 \times \beta_{B,E})\left\langle xt_B\pi^r_{E,B}, \left\langle \pi^r_{E,B}, \pi^\ell_{E,B}\right\rangle\right\rangle \\
&= (\kappa\psi)\left\langle xt_B\pi^r_{E,B}, 1_{E\times B}\right\rangle \\
&= (\kappa\psi)\langle xt_{E\times B}, 1_{E\times B}\rangle \\
&= \psi
\end{aligned}$$

よって正しい。

κ が $\mathscr{A}[x]$ の射から $\mathscr{A}$ の射への関数であること、即ち $\varphi \sim \psi$ ならば $\kappa\varphi = \kappa\psi$ であることを示す。ただし $(\sim)$ は多項式圏の構成において定めた合同関係である。

$(\sim)$ に関する帰納法で示す。

$\mathscr{A}$ において $gf = h$ が成り立つとき、$g \circ^{\text{new}} f \sim h$ であった。このとき

$$\begin{aligned}
\kappa(g \circ^{\text{new}} f) &= \kappa g\left\langle \pi^\ell, \kappa f\right\rangle \\
&= g\pi^r\left\langle \pi^\ell, f\pi^r\right\rangle \\
&= gf\pi^r \\
\kappa h &= h\pi^r \\
&= gf\pi^r
\end{aligned}$$

であるから $\kappa(g \circ^{\text{new}} f) = \kappa h$。

$1\varphi \sim \varphi$ であった。このとき

$$\begin{aligned}
\kappa(1\varphi) &= \kappa 1\left\langle \pi^\ell, \kappa\varphi\right\rangle \\
&= \pi^r\left\langle \pi^\ell, \kappa\varphi\right\rangle \\
&= \kappa\varphi
\end{aligned}$$

である。$\varphi 1 \sim \varphi$ については

$$\begin{aligned}
\kappa(\varphi 1) &= \kappa\varphi\left\langle \pi^{\ell}, \kappa 1 \right\rangle \\
&= \kappa\varphi\left\langle \pi^{\ell}, \pi^{r} \right\rangle \\
&= \kappa\varphi
\end{aligned}$$

$(\psi\xi)\varphi \sim \psi(\xi\varphi)$ については

$$\begin{aligned}
\kappa((\psi\xi)\varphi) &= \kappa(\psi\xi)\left\langle \pi^{\ell}, \varphi \right\rangle \\
&= \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\xi \right\rangle\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\varphi \right\rangle \\
&= \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\xi\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\varphi \right\rangle\right\rangle \\
\kappa(\psi(\xi\varphi)) &= \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}, \kappa(\xi\varphi) \right\rangle \\
&= \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\xi\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\varphi \right\rangle\right\rangle
\end{aligned}$$

よってこれらは等しい。

$\mathscr{A}$ の射 f, g について $\langle f, g\rangle^{\text{new}} \sim \langle f, g\rangle$ の場合については

$$\begin{aligned}
\kappa(\langle f, g\rangle^{\text{new}}) &= \langle \kappa f, \kappa g\rangle \\
&= \langle f\pi^{r}, g\pi^{r}\rangle \\
&= \langle f, g\rangle\pi^{r} \\
\kappa(\langle f, g\rangle) &= \langle f, g\rangle\pi^{r}
\end{aligned}$$

よってこれらも等しい。

$\pi^{\ell}\langle\varphi, \psi\rangle \sim \varphi$ については

$$\begin{aligned}
\kappa\left(\pi^{\ell}\langle\varphi, \psi\rangle\right) &= \kappa\pi^{\ell}\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\langle\varphi, \psi\rangle \right\rangle \\
&= \pi^{\ell}\pi^{r}\left\langle \pi^{\ell}, \langle\kappa\varphi, \kappa\psi\rangle \right\rangle \\
&= \pi^{\ell}\langle\kappa\varphi, \kappa\psi\rangle \\
&= \kappa\varphi
\end{aligned}$$

である。$\pi^{r}\langle\varphi, \psi\rangle \sim \psi$ についても同様。

$\left\langle \pi^{\ell}\varphi, \pi^{r}\varphi \right\rangle \sim \varphi$ については

$$\begin{aligned}
\kappa\left(\left\langle \pi^{\ell}\varphi, \pi^{r}\varphi \right\rangle\right) &= \left\langle \kappa\left(\pi^{\ell}\varphi\right), \kappa\left(\pi^{r}\varphi\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \kappa\pi^{\ell}\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\varphi \right\rangle, \kappa\pi^{r}\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\varphi \right\rangle \right\rangle \\
&= \left\langle \pi^{\ell}\pi^{r}\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\varphi \right\rangle, \pi^{r}\pi^{r}\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\varphi \right\rangle \right\rangle \\
&= \left\langle \pi^{\ell}\kappa\varphi, \pi^{r}\kappa\varphi \right\rangle \\
&= \kappa\varphi
\end{aligned}$$

となる。

$\varphi_1 \sim \varphi_2$、$\psi_1 \sim \psi_2$ であるときに $\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle \sim \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle$ である。帰納法の仮定より $\kappa\varphi_1 = \kappa\varphi_2$、$\kappa\psi_1 = \kappa\psi_2$ である。このとき

$$\begin{aligned}
\kappa\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle &= \langle \kappa\varphi_1, \kappa\psi_1 \rangle \\
&= \langle \kappa\varphi_2, \kappa\psi_2 \rangle \\
&= \kappa\langle \varphi_2, \psi_2 \rangle
\end{aligned}$$

である。

$h : E \times B \longrightarrow D$ が $\mathscr{A}$ の射であるとき $\overline{h}^{\mathrm{new}} \sim \overline{h}$ であった。

$$\begin{aligned}
\kappa\overline{h}^{\mathrm{new}} &= \overline{\kappa h\left(1 \times \beta\right)\alpha\beta} \\
&= \overline{h\pi^{r}\left(1 \times \beta\right)\alpha\beta} \\
&= \overline{h\beta\pi^{r}\alpha\beta} \\
&= \overline{h\beta\left(\pi^{r} \times 1\right)\beta} \\
&= \overline{h\beta\left\langle \pi^{r}\pi^{r}, \pi^{\ell} \right\rangle} \\
&= \overline{h\left\langle \pi^{\ell}, \pi^{r}\pi^{r} \right\rangle} \\
&= \overline{h\left(1 \times \pi^{r}\right)} \\
\kappa\overline{h} &= \overline{h}\pi^{r}
\end{aligned}$$

である。これらが等しいことを見る為に次を見る。

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\left(1\times\kappa\overline{h}^{\mathrm{new}}\right) &= \varepsilon\left(1\times\overline{h\left(1\times\pi^{r}\right)}\right)\\
&= h\left(1\times\pi^{r}\right)\\
\varepsilon\left(1\times\kappa\overline{h}\right) &= \varepsilon\left(1\times\overline{h}\pi^{r}\right)\\
&= \varepsilon\left(1\times\overline{h}\right)\left(1\times\pi^{r}\right)\\
&= h\left(1\times\pi^{r}\right)
\end{aligned}
$$

よって $\kappa\overline{h}^{new}=\kappa\overline{h}$ である。

$\varepsilon\left(1\times\overline{\varphi}\right)\sim\varphi$ の場合をみる。ただし $\varphi : E\times B\longrightarrow D$ である。

$$
\begin{aligned}
\kappa\left(\varepsilon\left(1\times\overline{\varphi}\right)\right) &= \kappa\varepsilon\left\langle\pi^{\ell},\kappa\left(1\times\overline{\varphi}\right)\right\rangle\\
&= \varepsilon\pi^{r}\left\langle\pi^{\ell},\kappa\left(1\times\overline{\varphi}\right)\right\rangle\\
&= \varepsilon\left(\kappa\left\langle\pi^{\ell},\overline{\varphi}\pi^{r}\right\rangle\right)\\
&= \varepsilon\left\langle\kappa\pi^{\ell},\kappa\left(\overline{\varphi}\pi^{r}\right)\right\rangle\\
&= \varepsilon\left\langle\pi^{\ell}\pi^{r},\kappa\overline{\varphi}\left\langle\pi^{\ell},\kappa\pi^{r}\right\rangle\right\rangle\\
&= \varepsilon\left\langle\pi^{\ell}\pi^{r},\kappa\overline{\varphi}\left\langle\pi^{\ell},\pi^{r}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle\\
&= \varepsilon\left(1\times\kappa\overline{\varphi}\right)\left\langle\pi^{\ell}\pi^{r},\left\langle\pi^{\ell},\pi^{r}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle
\end{aligned}
$$

最後の行への遷移は次の図式をみればよい。ただし $\left\langle\pi^{\ell},\pi^{r}\pi^{r}\right\rangle=1\times\pi^{r}$ に注意。

$$
\begin{tikzcd}
E\times B \arrow[r, "\pi^{\ell}"] & E \arrow[r, equal] & E & \\
A\times(E\times B) \arrow[u, "\pi^{r}"] \arrow[d, "1\times\pi^{r}"'] \arrow[r, "\left\langle\pi^{\ell}\pi^{r},1\times\pi^{r}\right\rangle"'] & E\times(A\times B) \arrow[u, "\pi^{\ell}"'] \arrow[d, "\pi^{r}"] \arrow[r, "1\times\kappa\overline{\varphi}"'] & E\times D^{E} \arrow[u, "\pi^{\ell}"'] \arrow[d, "\pi^{r}"] \arrow[r, "\varepsilon"] & D \\
A\times B \arrow[r, equal] & A\times B \arrow[r, "\kappa\overline{\varphi}"'] & D^{E} &
\end{tikzcd}
$$

いま、$\kappa\overline{\varphi}=\overline{\kappa\varphi\left(1\times\beta\right)\alpha\beta}$ であったから、

$$
\begin{aligned}
\kappa\left(\varepsilon\left(1\times\overline{\varphi}\right)\right) &= \varepsilon\left(1\times\kappa\overline{\varphi}\right)\left\langle\pi^{\ell}\pi^{r},\left\langle\pi^{\ell},\pi^{r}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle \\
&= \kappa\varphi\left(1\times\beta\right)\alpha\beta\left\langle\pi^{\ell}\pi^{r},\left\langle\pi^{\ell},\pi^{r}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle \\
&= \kappa\varphi\left(1\times\beta\right)\alpha\left\langle\left\langle\pi^{\ell},\pi^{r}\pi^{r}\right\rangle,\pi^{\ell}\pi^{r}\right\rangle \\
&= \kappa\varphi\left(1\times\beta\right)\left\langle\pi^{\ell},\left\langle\pi^{r}\pi^{r},\pi^{\ell}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle \\
&= \kappa\varphi\left\langle\pi^{\ell},\left\langle\pi^{\ell}\pi^{r},\pi^{r}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle \\
&= \kappa\varphi\left\langle\pi^{\ell},\left\langle\pi^{\ell},\pi^{r}\right\rangle\pi^{r}\right\rangle \\
&= \kappa\varphi\left\langle\pi^{\ell},\pi^{r}\right\rangle \\
&= \kappa\varphi
\end{aligned}
$$

以上よりこの場合も正しい。

$\psi : B \longrightarrow D^E$ として $\overline{\varepsilon(1\times\psi)} \sim \psi$ の場合をみる。

$$
\begin{aligned}
\kappa\left(\overline{\varepsilon(1\times\psi)}\right) &= \kappa(\varepsilon(1\times\psi))(1\times\beta)\alpha\beta \\
&= \kappa\varepsilon\left\langle \pi^{\ell}, \kappa(1\times\psi)\right\rangle(1\times\beta)\alpha\beta \\
&= \varepsilon\pi^{r}\left\langle \pi^{\ell}, \left\langle \kappa\pi^{\ell}, \kappa(\psi\pi^{r})\right\rangle\right\rangle(1\times\beta)\alpha\beta \\
&= \varepsilon\left\langle \kappa\pi^{\ell}, \kappa(\psi\pi^{r})\right\rangle(1\times\beta)\alpha\beta \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{\ell}\pi^{r}, \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}, \pi^{r}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle(1\times\beta)\alpha\beta \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{\ell}\pi^{r}(1\times\beta), \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}(1\times\beta), \pi^{r}\pi^{r}(1\times\beta)\right\rangle\right\rangle\alpha\beta \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{r}\pi^{r}, \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}, \pi^{\ell}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle\alpha\beta \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{r}\pi^{r}\alpha, \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}\alpha, \pi^{\ell}\pi^{r}\alpha\right\rangle\right\rangle\beta \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{r}\pi^{r}\left\langle \pi^{\ell}\pi^{\ell}, \pi^{r}\times 1\right\rangle, \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}\left\langle \pi^{\ell}\pi^{\ell}, \pi^{r}\times 1\right\rangle, \pi^{\ell}\pi^{r}\left\langle \pi^{\ell}\pi^{\ell}, \pi^{r}\times 1\right\rangle\right\rangle\right\rangle\beta \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{r}, \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}\pi^{\ell}, \pi^{r}\pi^{\ell}\right\rangle\right\rangle\beta \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{r}\beta, \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}\pi^{\ell}\beta, \pi^{r}\pi^{\ell}\beta\right\rangle\right\rangle \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}\pi^{r}, \pi^{r}\pi^{r}\right\rangle\right\rangle \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\psi\left\langle \pi^{\ell}, \pi^{r}\right\rangle\pi^{r}\right\rangle \\
&= \varepsilon\left\langle \pi^{\ell}, \kappa\psi\pi^{r}\right\rangle \\
&= \varepsilon(1\times\psi) \\
&= \psi
\end{aligned}
$$

よって等しい。

最後に $\varphi \sim \psi$ であるときに $\overline{\varphi} \sim \overline{\psi}$ の場合をみる。ただし帰納法の仮定から $\kappa\varphi = \kappa\psi$ である。

$$
\begin{aligned}
\kappa\overline{\varphi} &= \overline{\kappa\varphi(1\times\beta)\alpha\beta} \\
&= \overline{\kappa\psi(1\times\beta)\alpha\beta} \\
&= \kappa\overline{\psi}
\end{aligned}
$$

以上より $\varphi \sim \psi$ ならば $\kappa\varsigma = \kappa\psi$ となる。すなわち κ は $\mathscr{A}[x]$ の射から $\mathscr{A}$ の射への関数である。

以上によって $\varphi : B \longrightarrow C$ に対して $f\langle xt_B, 1_B\rangle = \varphi$ なる $f : A \times B \longrightarrow C \in \mathscr{A}$ が一意的であることを示そう。

$\varphi = f\langle xt_B, 1_B\rangle$ であることと κ が $\mathscr{A}[x]$ 上の関数になることから $\kappa\varphi = \kappa(f\langle xt_B, 1_B\rangle)$ が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\kappa\varphi &= \kappa(f\langle xt_B, 1_B\rangle) \\
&= \kappa f \left\langle \pi^\ell, \kappa\langle xt_B, 1_B\rangle \right\rangle \\
&= f\pi^r \left\langle \pi^\ell, \langle \kappa(xt_B), \kappa 1_B\rangle \right\rangle \\
&= f \left\langle \kappa x \left\langle \pi^\ell, \kappa t_B \right\rangle, \pi^r \right\rangle \\
&= f \left\langle \pi^l \left\langle \pi^\ell, t_B \pi^r \right\rangle, \pi^r \right\rangle \\
&= f \left\langle \pi^\ell, \pi^r \right\rangle \\
&= f
\end{aligned}
$$

以上より $f = \kappa\varphi$ であることがわかった。よって $\kappa\varphi$ は $\kappa\varphi\langle xt_B 1_B\rangle = \varphi$ を満たす一意的な $\mathscr{A}$ の射である。 □

元々、カルテシアン閉圏から言語を構成するときに自由変数の取り扱いを形式化する目的で多項式圏を導入したのであったが、この演繹定理によれば自由変数 $x : 1 \longrightarrow A$ を持つ項 $\varphi(x) : 1 \longrightarrow B \in \mathscr{A}[x]$ は $\underset{x\in A}{\kappa}\varphi : A \longrightarrow B \in \mathscr{A}$ と対応しており、$\varphi = (\kappa\varphi)x$ が成り立つから、実はカルテシアン閉圏から生成する言語の中の項は全て (多項式圏ではなく) 元々の圏の射だと考えてもよい、ということになる。自由変数付きの項とその λ 抽象項の関係であるとも言える (同じ変数について λ 抽象すると等しくなるような二つの項は元々等価である)。つまりこの $\underset{x\in A}{\kappa}$ という射の対応は λ 抽象の一般化のようなものとして考えられる。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\langle xt_1, 1_1\rangle"] \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[rrr, bend right, "\varphi"'] & A \times 1 \arrow[r, "\simeq"] & A \arrow[r, "\kappa\varphi"] & B
\end{tikzcd}
$$

1.5 カルテシアン閉圏における自然数対象

再帰関数は帰納的な構造を持つ集合の上でその構造に沿った関数定義により得られる関数であり、計算体系において重要である。本稿で扱う型付き λ 計算の体系ではそれらを

一部公理的に認める。つまり自然数型 N、N 上の後者演算 S と次のような演算 I を認めている。

▷ 型 B に対して $b \in B$ と B から B への関数型 $h \in B^B$、及び $n \in N$ に対して $I_B(b,h,n) \in B$ であって
▷ $I_B(b,h,0) = b$
▷ $I_B(b,hSx) = h(I_B(b,h,x))$ を満たす

これらのカルテシアン閉圏への翻訳として、カルテシアン閉圏における自然数対象を導入する。

Definition 1.19. [2, p.68] カルテシアン閉圏 $\mathscr{A}$ において、対象 $N \in \mathscr{A}$、射 $0 : 1 \longrightarrow N, S : N \longrightarrow N$ からなる組

$$1 \xrightarrow{0} N \xleftarrow{S} N$$

について考える。$\mathscr{A}$ における任意の組

$$1 \xrightarrow{a} X \xleftarrow{f} X$$

に対してただ一つの $\mathscr{A}$ の射 $h : N \longrightarrow X$ が定まり

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[d, "h"] & N \arrow[l, "S"'] \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "a"'] & X & X \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

が可換になるとき、この組 $(N,0,S)$ は $\mathscr{A}$ の自然数対象であるという。

h についての一意性を外した条件を満たすものは弱自然数対象と呼ぶ。即ち任意の (X,a,f) に対して上の図式が可換になるような $h : N \longrightarrow X$ が少なくとも一つ存在するとき、$(N,0,S)$ は $\mathscr{A}$ の弱自然数対象と呼ばれる。 □

例として集合と写像からなる圏では自然数 $\mathbb{N}$ と $0 \in \mathbb{N}$ を指す写像 $0 : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$、通常の後者関数 $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ が自然数対象となる。

Proposition 1.20. [2, p.69]
$\mathscr{A}$ はカルテシアン閉圏、$(N,0,S)$ はその中の弱自然対象とする。変数 $x : 1 \longrightarrow A$ とする多項式圏 $\mathscr{A}[x]$ においても $(N,0,S)$ は弱自然対象である。 □

Proof. $\mathscr{A}[x]$ における組

$$1 \xrightarrow{\beta(x)} B \xleftarrow{\varphi(x)} B$$

を任意に一つとる。

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[d, "\gamma"] & N \arrow[l, "S"'] \arrow[d, "\gamma"] \\
1 \arrow[r, "\beta"'] & B & B \arrow[l, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

が可換となるような $\gamma : N \longrightarrow B$ が存在すればよい。

このような γ が存在すれば、圏における演繹定理によって $\mathscr{A}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1\times 0"] \arrow[d, equal] & A\times N \arrow[d, "\kappa\gamma"] & A\times N \arrow[l, "1\times S"'] \arrow[d, "\langle \pi^{\ell}, \kappa\gamma\rangle"] \\
A \arrow[r, "\kappa\beta"'] & B & A\times B \arrow[l, "\kappa\varphi"]
\end{tikzcd}$$

が導かれる[*1]。

ここで冪の普遍性より $\kappa\gamma : A\times N \longrightarrow B$ は

$$\begin{tikzcd}
A\times N \arrow[rr, "1\times\overline{\kappa\gamma}"] \arrow[dr, "\kappa\gamma"'] & & A\times B^{A} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

と分解される。よって γ は

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1\times 0"] \arrow[d, equal] & A\times N \arrow[d, "1\times\overline{\kappa\gamma}"] & A\times N \arrow[l, "1\times S"'] \arrow[d, "1\times\overline{\kappa\gamma}"] \\
A \arrow[d, equal] & A\times B^{A} \arrow[d, "\varepsilon"] & A\times B^{A} \arrow[d, "\langle \pi^{\ell}, \varepsilon\rangle"] \\
A \arrow[r, "\kappa\beta"'] & B & A\times B \arrow[l, "\kappa\varphi"]
\end{tikzcd}$$

を満たす。

---

*1 合成について $\kappa(\xi\psi) = \kappa\xi\langle \pi^{\ell}, \kappa\psi\rangle$、$\mathscr{A}$ の射 f について $\kappa f = f\pi^{r}$ であったこと等に注意。特にここでは $\kappa(\gamma S) = \kappa\gamma(1\times S)$ である。

更に再び冪の普遍性から

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1\times 0"] \arrow[d, equal] & A\times N \arrow[d, "1\times\overline{\kappa\gamma}"] & A\times N \arrow[l, "1\times S"'] \arrow[d, "1\times\overline{\kappa\gamma}"] \\
A \arrow[r, "1\times\overline{\kappa\beta}"'] \arrow[d, equal] & A\times B^A \arrow[d, "\varepsilon"] & A\times B^A \arrow[l, "1\times\overline{\kappa\varphi\langle\pi^\ell,\varepsilon\rangle}"'] \arrow[d, "\langle\pi^\ell,\varepsilon\rangle"] \\
A \arrow[r, "\kappa\beta"'] & B & A\times B \arrow[l, "\kappa\varphi"]
\end{tikzcd}$$

であることがわかる。

今、弱自然対象の性質から

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[d, "h"] & N \arrow[l, "S"'] \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[r, "\overline{\kappa\beta}"'] & B^A & B^A \arrow[l, "\overline{\kappa\varphi\langle\pi^\ell,\varepsilon\rangle}"]
\end{tikzcd}$$

となる $h:N\longrightarrow B^A$ が得られるから、可換図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1\times 0"] \arrow[d, equal] & A\times N \arrow[d, "1\times h"] & A\times N \arrow[l, "1\times S"'] \arrow[d, "1\times h"] \\
A \arrow[r, "1\times\overline{\kappa\beta}"'] \arrow[d, equal] & A\times B^A \arrow[d, "\varepsilon"] & A\times B^A \arrow[l, "1\times\overline{\kappa\varphi\langle\pi^\ell,\varepsilon\rangle}"'] \arrow[d, "\langle\pi^\ell,\varepsilon\rangle"] \\
A \arrow[r, "\kappa\beta"'] & B & A\times B \arrow[l, "\kappa\varphi"]
\end{tikzcd}$$

が導かれる。この h を用いて γ を得ればよい。

即ち γ を $\kappa\gamma=\varepsilon(1\times h)$ となるようにとればこれが求めるものである。従って $(N,0,S)$ は $\mathscr{A}[x]$ でも再び弱自然数対象となる。 □

$(N,0,S)$ が自然数対象であるときは上の証明における $h:N\longrightarrow B^A$ が一意的であるから γ の必要条件から導かれる $\overline{\kappa\gamma}:N\longrightarrow B^A$ は h に等しくなければならない。よって γ も一意的である。従って $\mathscr{A}$ の自然数対象は $\mathscr{A}[x]$ の自然数対象でもある。

定義より弱自然数対象を固定すると、$X\in\mathscr{A}, a:1\longrightarrow X$、$f:X\longrightarrow X$ にについての族

$\{I_X(a,f):N\longrightarrow X\}_{X,a,f}$ を

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[d, "I_X(a,f)"] & N \arrow[l, "S"'] \arrow[d, "I_X(a,f)"] \\
1 \arrow[r, "a"'] & X & X \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

が可換となるようにとれる。特に $n:1\longrightarrow N$ についてこれについて $I_X(a,f)Sn = fI_X(a,f)n$ が成り立つからこの性質から演算 $I_X(a,f,n)$ を考えることができる。

1.6　カルテシアン閉圏の内部言語

弱自然数対象付きのカルテシアン閉圏 $(\mathscr{A},(N,0,S))$ が一つ与えられたとき、それによって型付き λ 計算の体系 $\mathscr{L}(\mathscr{A},(N,0,S))$ を定義出来る。これを $\mathscr{A}$ の内部言語と呼ぶ ([2, p.75])。

内部言語は以下のように定義される。

- ▷ 型は各対象 $A\in\mathscr{A}$ であって各種型演算は $\mathscr{A}$ の積や冪を使う。
- ▷ 各対象 A について、型 A の項は $\varphi(x_1,\cdots,x_n):1\longrightarrow A\in\mathscr{A}[x_1,\cdots,x_n]$。ただしこのとき φ は $\left\{x_i=x^{A_i}:1\longrightarrow A_i\right\}_{i=1,\cdots,n}$ を変数とする多項式圏の射で、このとき x_i を自由変数と見做す。
- ▷ $c\in A\times B$ に対して演算 $\pi^\ell(c)\in A$ は $\pi^\ell c:1\longrightarrow A$ によって定める。

  $$1\xrightarrow{c} A\times B\xrightarrow{\pi^\ell} A$$

  π^r や $\langle -,-\rangle$、ε などの各種演算についても同様に定める。
- ▷ 項 $\varphi:1\longrightarrow B$ と変数 $x:1\longrightarrow A$ について、抽象演算 $\lambda x.\varphi:1\longrightarrow B^A$ を演繹定理による射 $\underset{x\in A}{\kappa}\varphi:A\times 1\longrightarrow B$ の冪を取ったもの $\overline{\underset{x\in A}{\kappa}\varphi}:1\longrightarrow B^A$ で定める。
- ▷ 項 $a:1\longrightarrow A, h:1\longrightarrow A^A$ について、h を $A\longrightarrow A$ の射と同一視すると弱自然数対象の定義より

  $$\begin{tikzcd}
  1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[d, "J_A(a,h)"] & N \arrow[l, "S"'] \arrow[d, "J_A(a,h)"] \\
  1 \arrow[r, "a"'] & A & A \arrow[l, "h"]
  \end{tikzcd}$$

  となる射 $J_A(a,h):N\longrightarrow A$ を得られるのであった。これによって型 N の各項 $n:1\longrightarrow N$ について $J_A(a,h)n:1\longrightarrow A$ が存在するからこれを $I_A(a,h,n)$ として定める。

<u>Definition</u> 1.21. [2, p.76]
弱自然数対象を保つようなカルテシアン閉函手 $F:(\mathscr{A},(N,0,S))\longrightarrow(\mathscr{B},(N',0',S'))$ とはカルテシアン閉函手 $F:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{B}$ であって丁度 $(F(N),F(0),F(S))=(N',0',S')$ となるもののこととする。これらはカルテシアン閉圏とその弱自然数対象の組を対象に圏を成す。これを Cart_N と書く。以降、特に誤解のない限り弱自然数対象についての表記は省略する。 □

Cart_N の射 $F:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{B}$ があるとき、その内部言語の間の射が引き起こされる。実際、まず型についての対応は函手としての対象の対応のそれでよい。また自由変数 $x:1\longrightarrow A$ を含む項については多項式圏の普遍性より $F_x:\mathscr{A}[x]\longrightarrow\mathscr{B}[x]$ を $F_x(x)=x:1\longrightarrow F(A)$ となるように F から拡張できるから、B の項を $F(B)$ の項に写す、変数を変数に写す、各種演算を保つことなどが直ぐに分かる。

1.7 型付き λ 計算とカルテシアン閉圏の対応

ここまで型付き λ 計算からカルテシアン閉圏を構成する函手 $\mathscr{C}:\lambda\text{-Calc}\longrightarrow\mathrm{Cart}_N$ とカルテシアン閉圏からその内部言語を対応させる函手 $\mathrm{Cart}_N\longrightarrow\lambda\text{-Calc}$ を見てきた。

これらが圏同値を与えることをみる。

$\mathscr{A}$ は弱自然数対象付きのカルテシアン閉圏であるとする。

このとき函手 $E=E_{\mathscr{A}}:\mathscr{C}\mathscr{L}(\mathscr{A})\longrightarrow\mathscr{A}$ が次のように定まる。

対象については $E(A)=A$ である (圏の対象と計算体系の型は同一視している)。

射の対応について考える。$\mathscr{C}\mathscr{L}(\mathscr{A})$ の射は $(x,\varphi(x)):A\longrightarrow B$ という形をしている。ここで $x\in A$ は変数、$\varphi(x)\in B$ は $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ の項であり、内部言語の定義から $\varphi(x)$ は $x:1\longrightarrow A$ を変数とする多項式圏 $\mathscr{A}[x]$ の射 $\varphi(x):1\longrightarrow B$ である。

圏の演繹定理から $\underset{x\in A}{\kappa}\varphi(x):A\times 1\longrightarrow B\in\mathscr{A}$ を得る。$A\times 1\simeq A$ は同一視することにして、これによって $E((x,\varphi(x)))=\underset{x\in A}{\kappa}\varphi:A\longrightarrow B$ を対応させる。

E がカルテシアン閉函手となることを示そう。まず恒等射を恒等射に写すことをみる。恒等射は内部言語の定義より $\left(x^A,x^A\right):A\longrightarrow A$ であった。$\underset{x\in A}{\kappa}x=\pi^l_{A,1}:A\times 1\longrightarrow A$ であり、上の同一視においてこれは A の上の恒等射に等しい。よって $E((x,x))=1_A$ である。

次に合成可能な射について E が合成を保つことをみる。

$$B\xrightarrow{(x,\varphi)}C\xrightarrow{(y,\psi(y))}D$$

とすると

$$
\begin{aligned}
E\left(\left(y^{C},\psi\left(y\right)\right)\left(x^{B},\varphi\left(x\right)\right)\right) &= E\left(\left(x,\psi\left[\varphi\left(x\right)/y\right]\right)\right)\\
&= \underset{x\in B}{\kappa}\psi\left[\varphi\left(x\right)/y\right]
\end{aligned}
$$

ここで $\psi\left[\varphi\left(x\right)/y\right]$ は $y : 1 \longrightarrow C$ を $\varphi\left(x\right) : 1 \longrightarrow C \in \mathscr{A}\left[x\right]$ に写す代入射の函手 $\mathscr{A}\left[x,y\right] \longrightarrow \mathscr{A}\left[x\right]$ の像である。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "y"'] & 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\langle y,1\rangle"] & 1 \arrow[d, "1"] \\
C & C\times 1 \arrow[l, "\pi^{\ell}"] \arrow[r, "\pi^{r}"'] \arrow[d, "\underset{y\in C}{\kappa}\psi"] & 1 \\
& D &
\end{tikzcd}
$$

演繹定理から

$$
\psi\left(y\right) = \underset{y\in C}{\kappa}\psi\left\langle y,1\right\rangle
$$

であるから、これに $\varphi\left(x\right)$ を代入すれば

$$
\psi\left[\varphi\left(x\right)/y\right] = \underset{y\in C}{\kappa}\psi\left\langle \varphi\left(x\right),1\right\rangle
$$

である。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi(x)"'] & 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\langle \varphi(x),1\rangle"] & 1 \arrow[d, "1"] \\
C & C\times 1 \arrow[l, "\pi^{\ell}"] \arrow[r, "\pi^{r}"'] \arrow[d, "\underset{y\in C}{\kappa}\psi"] & 1 \\
& D &
\end{tikzcd}
$$

これをさらに $x:1 \longrightarrow B$ で抽象すれば

$$\begin{aligned}
\underset{x\in B}{\kappa}\left(\psi\left[\varphi(x)/y\right]\right) &= \underset{x\in B}{\kappa}\left(\underset{y\in C}{\kappa}\psi\left\langle\varphi(x),1\right\rangle\right) \\
&= \underset{x\in B}{\kappa}\left(\underset{y\in C}{\kappa}\psi\right)\left\langle\pi^{\ell},\underset{x\in B}{\kappa}\left\langle\varphi(x),1\right\rangle\right\rangle \\
&= \left(\underset{y\in C}{\kappa}\psi\right)\pi^{r}\left\langle\pi^{\ell},\underset{x\in B}{\kappa}\left\langle\varphi(x),1\right\rangle\right\rangle \\
&= \left(\underset{y\in C}{\kappa}\psi\right)\left\langle\underset{x\in B}{\kappa}\varphi,\pi^{r}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
B\times 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\underset{x\in B}{\kappa}\varphi"'] & B\times 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\left\langle\underset{x\in B}{\kappa}\varphi,\pi^{r}\right\rangle"] & B\times 1 \arrow[d, "\pi^{r}"] \\
C & C\times 1 \arrow[l, "\pi^{\ell}"] \arrow[r, "\pi^{r}"'] \arrow[d, "\underset{y\in C}{\kappa}\psi"] & 1 \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

$\pi^{\ell}:C\times 1\simeq C$ で同一視すれば結局 $E\left(\left(y,\psi(y)\right)\left(x,\varphi(x)\right)\right)=\left(\underset{y\in C}{\kappa}\psi\right)\left(\underset{x\in B}{\kappa}\varphi\right)$ ということになる。よって E は合成も保つ。

E は各種演算や自然数対象を保つ。

また、圏における演繹定理から κ による対応は一対一であるから E は射について全単射である。

$\mathscr{S}\in\lambda$-Calc と弱自然数対象を保存するカルテシアン閉函手 $F:\mathscr{C}(\mathscr{S})\longrightarrow\mathscr{A}$ があるとする。このとき下の図式を可換にするコンパイラ $H:\mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{L}(\mathscr{A})$ が一意に存在する。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(\mathscr{S}) \arrow[rr, "\mathscr{C}H"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathscr{C}\mathscr{L}(\mathscr{A}) \arrow[dl, "E"] \\
 & \mathscr{A} &
\end{tikzcd}$$

実際には $\mathscr{S}$ の項 $\varphi\left(x^{A}\right)\in B$ に対して $F\left(\left(x,\varphi\right)\right):F(A)\longrightarrow F(B)\in\mathscr{A}$ が対応する $\mathscr{A}[x]$ 内の ($\mathscr{A}$ の内部言語としての) 項[*2]が $H\left(\varphi(x)\right)$ である (自由変数が増えても同じである)。

よって $\mathscr{C}$ は $\mathscr{L}$ の左随伴となる。

[*2] 演繹定理を利用して $F\left(\left(x,\varphi\right)\right)$ を $\mathscr{A}[x]$ の多項式 $1\longrightarrow F(B)$ と同一視している。$\mathscr{A}$ の内部言語ではこれらが項として定義されていた。

よって $\mathscr{S} \in \lambda$-Calc についての自然変換 $Y = Y_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathscr{S})$ を得る。

ここで $\mathscr{S}$ の項 $\varphi\left(x^A\right) \in B$ について、上で言及した E の普遍性から $Y(\varphi)$ は $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ の射 $(x, \varphi(x)) : A \longrightarrow B$ の多項式 $1 \longrightarrow B \in \mathscr{C}(\mathscr{S})[x]$ に対応する項である。

同じ変数を λ 抽象した時に等価な二つの項は元々等価であるから (つまり演繹定理より) この対応は単射であり、かつ任意の多項式に対して (定義より) それは $\mathscr{S}$ の項で表せるから Y は全単射である。

従って E, Y は随伴をなす自然同型だから以下が示された。

<u>Theorem</u> 1.22. [2, p.79]
$\mathscr{C} : \lambda$-Calc $\longrightarrow$ Cart$_N$ と $\mathscr{L}$ Cart$_N \longrightarrow \lambda$-Calc は圏同値を与える随伴対である □

参考文献

[1] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra volume. 1*. Cambridge University Press, 1994.

[2] P. J. Scott J. Lambek. *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge University Press, 1986.