dammy [2]

1 Associated Prime Ideals

1.1 Associated Prime Ideals

<u>Definition</u> 1.1. 素因子 (随伴素イデアル、associated prime).
R : 可換環、M : R 加群とする。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ が M の素因子であるとは、$R/\mathfrak{p}$ から M への単射な線型射が存在することである。 □

<u>Remark</u>. このことを、$\mathfrak{p}$ は M に随伴 (associate) する素イデアルであるなどともいう。また、これら全体の集合を $\operatorname{Ass}_R M$ で表す。

<u>N.B.</u> R のイデアル I に対して、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R R/I$ であることも I に随伴するという。これは誤解を招く表現ではあるが、「イデアルの素因子」と言ったらこっちを指す。

また、記法として環 R を自身の上の加群としてみなしたときの素因子集合は添字をつけずに $\operatorname{Ass} R$ とかく。

<u>Proposition</u> 1.2. 素因子であることの言い換え.
R : 可換環、M : R 加群とする。素イデアル $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について、$\mathfrak{p}$ が M の素因子であることと、ある $x \in M$ に対して $\mathfrak{p} = (0) : x$ であることは同値である。(もちろんこのとき $x \neq 0$ である) □

<u>Proof</u>. $R/\mathfrak{p}$ から M への単射があるとする。$1 \in R/\mathfrak{p}$ がこの射によって $x \in M$ に写されるとすれば、このとき $R/\mathfrak{p} \simeq Rx$ であるから $R - \mathfrak{p}$ の元は x に対して単射に作用し、かつ $\mathfrak{p}$ の元は x を消す。従って $\mathfrak{p} = (0) : x$ である。

逆に $\mathfrak{p} = (0) : x$ となるような $x \in M$ が存在するとしよう。このとき $R \longrightarrow M$ を 1 が x に写されるように定めればこの核は $\mathfrak{p}$ である。よって $R/\mathfrak{p} \longrightarrow M$ の単射が得られる。 □

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "\text{canon.}"'] & \\ 0 \arrow[r] & R/\mathfrak{p} \arrow[r, "\bar{1} \mapsto x"'] & M \end{tikzcd}$$

<u>Proposition</u> 1.3. 素因子の存在.
R : 可換環、M : R 加群とする。R のイデアルの族 $\mathfrak{F} := \{(0) : x \mid 0 \neq x \in M\}$ を考える。$\mathfrak{F}$ の極大元は素イデアルである。従って、R が Noether 環かつ $M \neq (0)$ ならば ($\mathfrak{F}$ は必ず極

大元をもつから)$\mathrm{Ass}_R M \neq \emptyset$ である。 □

Proof. $I = (0) : x \in \mathfrak{F}$ が極大元であるとする。ただし $0 \neq x \in M$ である。$a, b \in R$ があって $ab \in I$ であるとすると、$a(bx) = 0$ であるから $a \in (0) : bx$ であるが、I の極大性より $I = (0) : bx$ であり、従って $a \in I$。I は素イデアルである。 □

Corollary 1.4. Noether 環上では $\mathrm{Ass} M = \emptyset$ と $M = (0)$ が同値である。 □

Proof. 上の $\mathfrak{F}$ は Noether 環のイデアルの族だから、空でなければ極大元を持つ。

Proposition 1.5. 短完全列と素因子.
R : 可換環、

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

を R 加群の完全列とする。このとき

$$\mathrm{Ass} X \subseteq \mathrm{Ass} Y \subseteq \mathrm{Ass} X \cup \mathrm{Ass} Z$$

が成り立つ。 □

Proof. X に単射があればそれは Y への単射に合成できるから $\mathrm{Ass} X \subseteq \mathrm{Ass} Y$ は自明。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \\ & R/\mathfrak{p} \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass} Y$ をとって X に随伴しないとしよう。$0 \neq y \in Y$ があって、$Ry \simeq R/\mathfrak{p}$ である。この時、$Ry \cap X = (0)$ である。なぜならば、左辺は $R/\mathfrak{p}$(整域) のイデアルであるが、もしこれが (0) でないとすると自分自身の中への単射をもつ[*1]。すると $R/\mathfrak{p}$ から X への単射があることになり、$\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass} X$ に矛盾する。よって Ry と X は直和をなす。よって $R/\mathfrak{p} \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ は単射である。よって $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass} Z$、$\mathrm{Ass} Y \subseteq \mathrm{Ass} X \cup \mathrm{Ass} Z$ である。 □

特に $N \subseteq M$ を部分加群とすれば $\mathrm{Ass} N \subseteq \mathrm{Ass} M \subseteq \mathrm{Ass} N \cup \mathrm{Ass} M/N$ である。

[*1] $0 \neq a \in R/\mathfrak{p}$ をとってこれをかけ算する線型射を考えればよい。a は非零因子だからこれは単射である。

Proposition 1.6. R : 可換環、M : R 加群、$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M の R 部分加群の族とする。もし

$$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

であれば

$$\operatorname{Ass} M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Ass} M_\lambda$$

である。 □

Proof. $(\supseteq)$ は自明。M の素因子をとって $(0):x$ とあらわせば、ある $\lambda\in\Lambda$ にたいして $x\in M_\lambda$ である。よって $(0):x\in\operatorname{Ass} M_\lambda$ であり、逆の包含も成り立つ。 □

Remark. 特に部分加群の昇鎖などに適用できる。また、$M=\bigcup_{x\in M} Rx$ にも使える。一番大事なのは、M は自身の有限生成部分加群全体の和集合に等しいということである。これによって M の素因子を考えるとき、M を有限生成の場合に帰着させて良いという状況が多い。

Proposition 1.7. R : 可換環、$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: R 加群の族とする。

$$\operatorname{Ass} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Ass} M_\lambda$$

である。 □

Proof. 素イデアル $P\in\operatorname{Ass}\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ に対して R/P と同型な $M=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の部分加群は有限生成であるから、高々有限個の添字からなる部分集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ があって $P\in\operatorname{Ass}\bigoplus_{\lambda\in\Lambda'} M_\lambda$ である。

よって $\Lambda=\{1,2\}$ の場合に帰着する。

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1\oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0 \qquad \text{(exact)}$$

という自明な完全列からすぐに示せる。 □

Proposition 1.8. Bourbaki filtration [*2].
R : Noether 環、M : 有限生成 R 加群、$M\neq(0)$ とする。M の部分加群の列 $M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_n=(0)$ で、次の性質を満たすものが存在する:

ある $\mathfrak{p}_0,\cdots\mathfrak{p}_{n-1}\in\operatorname{Spec} R$ があって、各 $0\leq i\lneq n$ に対して $M_i/M_{i+1}\simeq R/\mathfrak{p}_i$ である。

[*2] [1] で紹介されているため、便宜的にこう呼ぶことにする。

$\square$

この性質は次のような完全列があるということである。

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow R/\mathfrak{p}_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow R/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow R/\mathfrak{p}_{n-1} \longrightarrow 0$$

Proof. $\mathfrak{F} := \{N | M$ の部分加群で、上記性質を満たす部分加群列を持つもの$\}$ と定める。$M \neq (0)$ であるから、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass} M \neq \emptyset$ がとれて $R/\mathfrak{p} \subset M$ でありこれは自明にこの性質を満たす部分加群である[*3]。よって $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ である。

さて、M は部分加群についての昇鎖条件を満たすから、$\mathfrak{F}$ に極大元が存在する。それを N とし、その部分加群列を $N = N_0 \supset \cdots \supset N_m = (0)$ としよう。$N = M$ をいいたい。もし、$N \neq M$ であれば、$\mathrm{Ass} M/N \neq \emptyset$ であるから、ある $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass} M/N$ をとって M/N 内に $R/\mathfrak{p}$ の同型像をとれる。それに対応する M の部分加群を F とすると、$M \supseteq F \supsetneq N$ であって、$F/N \simeq R/\mathfrak{p}$ であるから、$F = N_{-1} \supsetneq N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_m = (0)$ が性質を満たす。つまり、$F \in \mathfrak{F}$ である。これは N の極大性に反する。よって $N = M$ である。 $\square$

さて、この性質から表れる短完全列によって次がわかる。

Corollary 1.9. R : Noether 環、M : 有限生成 R 加群とする。上の命題で得られる素イデアル $\{\mathfrak{p}_i\}_{i=0}^{n-1}$ について、

$$\mathrm{Ass} M \subset \{\mathfrak{p}_0, \cdots, \mathfrak{p}_{n-1}\} \subset \mathrm{Supp} M$$

である。特に $\mathrm{Ass} M$ は有限集合である。 $\square$

[*3] $R/\mathfrak{p} = N_0 \supset N_1 = (0)$ に取っている。

Proof.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ass}\,M &\subset \mathrm{Ass}\,R/\mathfrak{p}_0 \cup \mathrm{Ass}\,M_1\\ &\subset \{\mathfrak{p}_0\} \cup \mathrm{Ass}\,R/\mathfrak{p}_1 \cup \mathrm{Ass}\,M_2\\ &\subset \{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1\} \cup \mathrm{Ass}\,R/\mathfrak{p}_2 \cup \mathrm{Ass}\,M_3\\ &\subset \cdots\\ &\subset \{\mathfrak{p}_0, \ldots \cdots, \mathfrak{p}_{n-1}\}\end{aligned}$$

であるから一つ目の包含関係が成り立つ。

また、各 $\mathfrak{p}_i$ で短完全列を局所化してやれば、$(R/\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i} \neq (0)$ であるから、少なくとも M_i をサポートしていることがわかる。よって M をサポートしている。これで二つ目の包含関係がわかる。 $\square$

Noether 環上の有限生成加群の理論では $\mathrm{Ass}\,M$ が有限集合であることによって prime avoidance theorem が幅を効かせる[*4]。

一般に、加群は素因子についてある意味で' 都合の良い' 部分加群を持つ。

Proposition 1.10. R : 可換環、M : R 加群とする。$\Phi \subset \mathrm{Ass}\,M$ を部分集合とする。このとき、ある部分加群 $N \subset M$ があって、

$$\begin{aligned}\mathrm{Ass}\,N &= \Phi\\ \mathrm{Ass}\,M/N &= \mathrm{Ass}\,M - \Phi\end{aligned}$$

が成り立つ。つまり $\mathrm{Ass}\,M$ を適当に分割するような短完全列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

がとれる。 $\square$

Proof. まず M の部分加群の族

$$\mathfrak{G} := \{N \subset M | \mathrm{Ass}\,N \subset \Phi\}$$

とおく。$(0) \in \mathfrak{G}$ であるから $\mathfrak{G} \neq \emptyset$。

[*4] あとで記述するが、Noether 環上では $\bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\,M} P = \{M$ の零因子全体$\}$ である。

包含関係について全順序な空でない部分集合 $\emptyset \neq \mathscr{C} \subset \mathfrak{G}$ をとって

$$F := \bigcup_{N \in \mathscr{C}} N$$

とおく。F は M の部分加群であり、$\mathrm{Ass}\, F \subset \Phi$ である。よって $F \in \mathfrak{G}$ となり、$\mathfrak{G}$ には Zorn の補題が適用できることがわかる。

いま、$\mathfrak{G}$ の極大元をひとつとり、改めて F とおく。このとき $\mathrm{Ass}\, F = \Phi$ である。実際、$\mathrm{Ass}\, F \subsetneq \Phi$ ならば $P \in \Phi - \mathrm{Ass}\, F$ に対して M 内に F と直和をなす R/P の同型像 G があるから、

$$F \subsetneq F \oplus G$$

かつ

$$\mathrm{Ass}\, F \subsetneq \mathrm{Ass}\,(F \oplus G) = \mathrm{Ass}\, F \cup \{P\} \subset \Phi$$

であり、$F \oplus G \in \mathfrak{G}$ で F の極大性に反する。よって $\mathrm{Ass}\, F = \Phi$。

短完全列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow M/F \longrightarrow 0$$

をみる。

$$\mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Ass}\, F \cup \mathrm{Ass}\, M/F$$

であるから、$\mathrm{Ass}\, M - \Phi \subseteq \mathrm{Ass}\, M/F$ はよい。

$\mathrm{Ass}\, M/F \subseteq \mathrm{Ass}\, M - \Phi$ をみる。$Q \in \mathrm{Ass}\, M/F$ を任意にとろう。M/F 内に R/Q の同型像 $F'/F \subset M/F$ が存在する (ただし F' は M の部分加群)。このとき、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r] & F' \arrow[r] & F'/F \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ & & & R/Q & \end{tikzcd}$$

であるから、$\mathrm{Ass}\, F \subset \mathrm{Ass}\, F' \subset \mathrm{Ass}\, F \cup \{Q\}$ である。$F \neq F'$ と F の $\mathfrak{G}$ における極大性から $\mathrm{Ass}\, F \subsetneq \mathrm{Ass}\, F'$、よって $\mathrm{Ass}\, F' = \mathrm{Ass}\, F \cup \{Q\}$ である。もちろん $F' \subset M$ より $Q \in \mathrm{Ass}\, M$ でかつ今の議論より $Q \notin \Phi$ である。以上より $\mathrm{Ass}\, M/F \subseteq \mathrm{Ass}\, M - \Phi$ である。

よって $\mathrm{Ass}\, F = \Phi$、$\mathrm{Ass}\, M/F = \mathrm{Ass}\, M - \Phi$ となるような部分加群 F を得る。 $\square$

1.2 Localization and Associated Primes

局所化による素因子の変化を見る。

Proposition 1.11. R : 可換環、M : R 加群、$S \subset R$: 積閉集合、$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ とする。

(1) $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ かつ $\mathfrak{p}$ が M に随伴するなら、$S^{-1}\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}M$ である。$\operatorname{Spec} S^{-1}R$ を $\operatorname{Spec} R$ の部分集合と同一視するなら、$\operatorname{Ass} S^{-1}M \supseteq \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M \,|\, \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\}$ である。

(2) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について、$\mathfrak{p}$ が有限生成かつ $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} S^{-1}M$ ならば $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ である。

□

Proof. $P \in \operatorname{Ass} M$ が $P \cap S = \emptyset$ を満たすならば、$S^{-1}P$ は

$$0 \longrightarrow R/P \longrightarrow M$$

を局所化して

$$0 \longrightarrow S^{-1}R/S^{-1}P \longrightarrow S^{-1}M$$

となるような $S^{-1}R$ の素イデアルである。よって $S^{-1}P \in \operatorname{Ass} S^{-1}M$。

次に $P \in \operatorname{Spec} R$ が有限生成であり、かつ $S^{-1}P \in \operatorname{Ass} S^{-1}M$ であるとする。

$P = (a_1, \ldots, a_n)$ (ただし $a_1, \ldots, a_n \in R$)、$S^{-1}P = (0) : \frac{x}{s}$ (ただし $x \in M, s \in S, \frac{x}{s} \neq 0$) とする。

各 a_i について、$\frac{a_i}{1} \in S^{-1}P$ より $\frac{a_i x}{s} = 0$、即ちある $t_i \in S$ があって、$t_i a_i x = 0$ が成り立つ。$t = t_1 \cdot \cdots \cdot t_n$ とおくと、各 $i = 1 \ldots n$ にたいして $a_i \in (0) : tx$ である (ここで x は $S^{-1}R$ 内で $\frac{x}{1} \neq 0$ より $tx \neq 0$ である)。よって $P \subseteq (0) : tx$ である。逆に $a \in (0) : tx$ をとると

$$\begin{aligned} \frac{a}{1} \cdot \frac{x}{s} &= \frac{a}{1} \cdot \frac{tx}{ts} \\ &= \frac{tax}{ts} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より $\frac{a}{1} \in (0) : \frac{x}{s} = S^{-1}P$、つまり $a \in P$ である。

$P = (0) : tx$ であるから P は M の素因子である。 □

上記より、特に Noether 環上では、局所化された加群の素因子は

$$\operatorname{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}M \underset{\text{1 to 1}}{\longleftrightarrow} \{P \in \operatorname{Ass} M \,|\, P \cap S = \emptyset\}$$

である。

Remark. Noether 環上では

$$\mathrm{Ass}_R S^{-1}M = \{P \in \mathrm{Ass}\, M \,|\, P \cap S = \emptyset\}$$

である[*5]。

実際、$P \in \mathrm{Ass}_R S^{-1}M$ とすると R/P から $S^{-1}M$ への単射があるが、それは $S^{-1}R/S^{-1}P$ からの単射に拡張される。

また、R/P の同型像が $S^{-1}R$ 加群の内部で (0) でないということは、S の元は R/P に対して単射に作用することになる。よって $P \cap S = \emptyset$ である。$S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}M$ であるから、上記より $P \in \mathrm{Ass}\, M$ で、かつ $P \cap S = \emptyset$。

逆に P が $P \cap S = \emptyset$ となるような M の素因子である場合、$S^{-1}M$ は $S^{-1}R/S^{-1}P$ の同型像であるような部分加群をもつが、$S^{-1}R/S^{-1}P$ は R/P を部分環として含む。よって P は R 加群としての $S^{-1}M$ の素因子である。

Proposition 1.12. R を環、M は R 加群とする。積閉集合 $S \subset R$ について、$K := \mathrm{Ker}\left(M \xrightarrow[\text{canon.}]{} S^{-1}M\right)$ とおくと

$$\mathrm{Ass}\, K = \{P \in \mathrm{Ass}\, M \,|\, P \cap S \neq \emptyset\}$$
$$\mathrm{Ass}\, M/K = \{P \in \mathrm{Ass}\, M \,|\, P \cap S = \emptyset\}$$

を満たす。また、$\Phi = \{P \in \mathrm{Ass}\, M \,|\, P \cap S \neq \emptyset\}$ とおくと (1.10) から

$$\mathrm{Ass}\, N = \Phi$$
$$\mathrm{Ass}\, M/N = \mathrm{Ass}\, M - \Phi$$

となるような M の部分加群 N が存在するが、このとき $K = N$ である。つまり、標準射の核 K はこの性質を満たす唯一の部分加群である。 □

Proof. snake lemma より次を得る。ただし $C = \mathrm{Coker}\left(M \xrightarrow[\text{canon.}]{} S^{-1}M\right)$、$C' = \mathrm{Coker}\left(M/N \xrightarrow[\text{canon.}]{} S^{-1}(M/N)\right)$ としている。

[*5] この事実は後に紹介する (1.36) でも説明できる

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\simeq"'] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^{-1}N \arrow[r] \arrow[d, equal] & S^{-1}M \arrow[r, "\simeq"'] \arrow[d] & S^{-1}(M/N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\simeq"'] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$N \xrightarrow[\simeq]{} K$ は包含写像だから $N = K$ である。

□

Proposition 1.13. R を環、M は R 加群とする。

(1) $P \in \operatorname{Spec} R$ に対して、$Q \subset P$ となるような $Q \in \operatorname{Ass} M$ が存在するならば、このとき P は M をサポートする。

(2) $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$ である。

(3) R が Noether 環ならば、逆も成り立つ。即ち $P \in \operatorname{Spec} R$ に対して

$$P \in \operatorname{Supp} M \Leftrightarrow \exists Q \in \operatorname{Ass} M, P \supset Q$$

□

Proof. $Q \in \operatorname{Ass} M$ をとれば R/Q と同型な部分加群を M が持つから Q は M をサポートする。よって $P \in \operatorname{Spec} R$ に対して $P \supset Q$ となるような M の素因子 Q があれば、P は M をサポートする。

特に $Q \in \operatorname{Ass} M$ とすると、Q は M の (R/Q と同型な) 部分加群をサポートするから M もサポートする。よって $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Supp} M$。

環が Noether 的であればその上の加群について、素因子が存在することと (0) でないことが同値であり、また局所化された加群の素因子は (1.11) のような対応を持つ。従って

$P \in \mathrm{Supp} M$ とすると、(定義から)$M_P \neq (0)$ であり、よって $\mathrm{Ass} M_P \neq \emptyset$ である。よって $QR_P \in \mathrm{Ass} M_P$ となるような $Q \in \mathrm{Ass} M$ があって、このとき $Q \subset P$ である。 □

Corollary 1.14. Noether 環上の加群は、その素因子集合とサポート集合が極小元を共有する。即ち

$$\mathrm{Min}_R M := \{P \in \mathrm{Supp}_R M \mid \mathrm{Supp}_R M \text{ 内で極小}\}$$

と表すと、$\mathrm{Min}_R M \subset \mathrm{Ass}_R M$ であり、さらに $\mathrm{Ass}_R M$ 内の極小元は $\mathrm{Min}_R M$ の元に限る。 □

Proof. M を Noether 環 R 上の加群とする。$Q \in \mathrm{Min}_R M$ とすると $\mathrm{Supp} M_Q = \{QR_Q\}$ である。$\emptyset \neq \mathrm{Ass} M_Q \subset \mathrm{Supp} M_Q$ より $QR_Q \in \mathrm{Ass} M_Q$、(1.11) より $Q \in \mathrm{Ass} M$ である。よって $\mathrm{Supp} M$ の極小元は全て M の素因子である。よって $\mathrm{Min}_R M$ を極小素因子の集合と呼ぶ[*6]。

また、$Q \in \mathrm{Ass} M$ を M で極小な元とすると、同様に $\mathrm{Ass} M_Q = \{QR_Q\}$ であり、上の定理から、M_Q をサポートする素イデアルは全て QR_Q を含む。よって QR_Q は $\mathrm{Supp} M_Q$ の極小元である (よって $\mathrm{Supp} M_Q = \{QR_Q\}$ である)。よって Q は $\mathrm{Supp} M$ の極小元である。

1.3 Associated Prime Ideals and Zero Divisors

この小節の目的は Noether 環上の加群の零因子の様子を素因子を通して把握することである。具体的には、いづれかの素因子に含まれる元は零因子であり、全ての素因子に含まれる元は (局所) 冪零元であるということである。

零因子について次が成り立つ。

Proposition 1.15. Noether 環 R 上の加群 M(ただし $M \neq (0)$) において、M の零因子全体と M の素因子全体の和集合が一致する。

$$\begin{aligned}\bigcup_{P \in \mathrm{Ass} M} P &= \{M \text{ の零因子全体}\} \\ &= \{a \in R \mid \text{ある } 0 \neq x \in M \text{ に対して } ax = 0\}\end{aligned}$$

Proof. $Z := \{M \text{ の零因子全体}\}$ と定めておこう。

素因子の定義から $\bigcup P \subset Z$ は自明である[*7]。

[*6] しばしば $\mathrm{Min}_R M$ を $\mathrm{Ass} M$ の極小元全体として定義することがあるが Noether 環では違いはない。

[*7] $P = (0) : x$ となる $x \neq 0$ の存在が素因子の定義なのであった。

一方で、$a \in R$ を M の零因子とし、$0 \neq x \in M$ を $ax = 0$ となるもの、$I := (0) : x$ と定めておこう。$x \neq 0$ より $1 \notin I$ であり $R/I \neq (0)$ である。従って $\mathrm{Ass}\, R/I \neq \emptyset$(ここで Noether 性が必要である)。さて、$R/I \simeq Rx \subset M$ より、$\emptyset \neq \mathrm{Ass}\, R/I = \mathrm{Ass}\, Rx \subset \mathrm{Ass}\, M$。もちろん $a \in I$ だから、a はある $P \in \mathrm{Ass}\, Rx \subset \mathrm{Ass}\, M$ に含まれる。 □

この定理は

$$R - \left(\bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, M} P \right) = \{M \text{ の非零因子全体}\}$$

ということでもある。

prime avoidance によって得られる次の系は頻繁に使う。

Corollary 1.16. R を Noether 環、$I \subset R$ はイデアル、M は有限生成 R 加群とする。次が同値である。

(1) I は M の零因子のみからなる。
(2) ある $P \in \mathrm{Ass}\, M$ があって $I \subset P$ である。

□

Proof. この場合 $^{\#}\mathrm{Ass}\, M < \infty$ であったから prime avoidance が使える。 □

また Davis の補題から、次のようなことも可能である。

Corollary 1.17. R は Noether 環、$I \subset R$ はイデアルとする。もし I が R の非零因子を一つでも含むならば、I の生成系をすべて非零因子にとることができる。 □

Proof. $I = (a_1, \cdots, a_n)$ かつ I は R の非零因子を含むとする。

$$(a_1) + (a_2, \cdots, a_n) \not\subset \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, R} P$$

であるから、Davis の補題よりある $x \in (a_2, \cdots, a_n)$ があって

$$a_1 + x \notin \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, R} P$$

である。もちろんこれは $a_1 + x$ が R の非零因子であるということである。$I = (a_1 + x, a_2, \cdots, a_3)$ が成り立つから、I の生成元の一つを非零因子に取り替えることができた。同様にして I の生成系をすべて非零因子にとることができる。 □

Example 1.18. 特に素因子は零因子のみからなる素イデアルとなっているが、逆は成り立たない。つまり、零因子のみからなる (ある素因子に含まれる) 素イデアルであっても素

因子であるとは限らない。

体 k 上の多項式環 $R := k[X,Y,Z]$ を考える。イデアル $I = \left(X^3, X^2Y, X^2Z\right)$ は

$$I = \left(X^2\right) \cap \left(X^3, Y, Z\right)$$

という準素分解を持つ。このとき

$$\operatorname{Ass} R/I = \{(X), (X,Y,Z)\}$$

であり、(X,Y) は R/I の零因子のみからなる素イデアルだが素因子ではない。 □

次に、加群に対して冪零に作用する元のことを紹介する。

Noether 環上有限生成加群 M において、$\operatorname{Ass} M$ と $\operatorname{Supp} M$ が極小元を共有するから

$$\begin{aligned}\bigcap_{P \in \operatorname{Ass} M} P &= \bigcap_{P \in \operatorname{Supp} M} P \\ &= \sqrt{(0) : M} \\ &= \{M \text{ に対して冪零に作用する元全体}\}\end{aligned}$$

が成り立つ。

これによって有限生成でない加群についても次のようなことがわかる。

<u>Theorem</u> 1.19. Noether 環上の加群 M に対して、

$$\bigcap_{P \in \operatorname{Ass} M} P = \{a \in R \,|\, \text{任意の } x \in M \text{ に対して、ある } n > 0 \text{ があって } a^n x = 0\}$$

□

<u>Definition</u> 1.20. locally nilpotent (almost nilpotent).

$a \in R$ について、a が M の局所的冪零元である (M に殆ど冪零に作用する、etc.) とは上の性質をみたすこと、すなわち

$$\forall x \in M, \exists n > 0, a^n x = 0$$

となることである。 □

言い換えると、Noether 環 R 上の加群 M に対して

$$\bigcap_{P \in \operatorname{Ass} M} P = \{M \text{ に対して殆ど冪零に作用する元全体}\}$$

Proof.

$$M = \bigcup_{x \in M} Rx$$
$$\operatorname{Ass} M = \bigcup_{x \in M} \operatorname{Ass} Rx$$

であった。$a \in R$ が局所的冪零元なら、M の全ての有限生成部分加群に対して冪零に作用するから、a は M の全ての素因子に含まれる。逆に M の全ての素因子に含まれるような元は、任意の $0 \neq x \in M$ について全ての Rx の素因子の共通部分に含まれる。それは x に冪零に作用するということだったから、すなわち局所的冪零元である。 □

1.4 Primary Module

Proposition 1.21. R を Noether 環、M を R 加群、$P \in \operatorname{Spec} R$ とする。次が同値:

(1) $\operatorname{Ass} M = \{P\}$
(2) P は M に殆ど冪零に作用し、$R - P$ は M に単射に作用する

□

Proof. (1) を仮定すると先の定理から $\bigcap_{Q \in \operatorname{Ass} M} Q = P$ は M に殆ど冪零に作用し、$R - \bigcup_{Q \in \operatorname{Ass} M} Q = R - P$ は M に単射に作用する。

(2) を仮定すると $\bigcap_{Q \in \operatorname{Ass} M} Q = P$ かつ $\bigcup_{Q \in \operatorname{Ass} M} Q = P$ であるから P は M の唯一の素因子である。 □

上の命題の同値な条件を満たす加群は作用の様子がとても分かりやすい。

Definition 1.22. Primary Module.
R は Noether 環、M は R 加群とする。

▷ 部分加群 $N \subset M$ が $^{\#}\operatorname{Ass} M/N = 1$ を満たすとき、N は M の準素部分加群である (primary submodule of M, primary with respect to M [*8]) という。特に $P \in \operatorname{Spec} R$ について $\operatorname{Ass} M/N = \{P\}$ であることをいう時は P 準素であるなどという。

[*8] 'with respect to' は'wrt.' と略されることが多い

▷ ${}^{\#}\mathrm{Ass}\,M = 1$ であるとき、すなわち (0) が M 内で準素であるとき、M を余準素加群 (coprimary module) という。

Noether 環上の有限生成加群 (特にイデアル) は次で定義される準素分解を持つ。

Proposition 1.23. R を Noether 環、$M \neq (0)$ を R 加群、$N \subsetneq M$ を R 部分加群とする。このとき、M 内の準素部分加群の族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で

$$N = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$$

となるものが存在する。 □

Definition 1.24. Primary Decomposition.
Noether 環上の有限生成加群 M においては、特に上の Λ を有限集合に取ることができる。このとき、この共通部分による表現を N の M 内での準素分解 (primary decomposition) と呼ぶ。 □

Proof. M/N を通して、$N = (0)$ の場合に帰着する。実際 $E \supset N$ に対して $\dfrac{M/N}{E/N} \simeq M/E$ という標準的な同型から E が M 内で準素であることは E/N は M/N 内で準素であることに等しく、また $N = \bigcap E_\lambda$ という分解は対応定理により M/N における $(0) = \bigcap E_\lambda/N$ という分解に等しい。

以下、$N = (0)$ とする。$P \in \mathrm{Ass}\,M$ に対して M の R 部分加群 $E(P)$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{Ass}\,E(P) &= \mathrm{Ass}\,M - \{P\}\\ \mathrm{Ass}\,M/E(P) &= \{P\}\end{aligned}$$

となるように取れる。$E(P)$ はもちろん M 内で P 準素である。

Claim. $\displaystyle\bigcap_{P\in\mathrm{Ass}\,M} E(P) = (0)$ である。 □

$L = \displaystyle\bigcap_{P\in\mathrm{Ass}\,M} E(P)$ とおく。各 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\,M$ に対して、

$$L \subset E(\mathfrak{q})$$

であるから、

$$\mathrm{Ass}\,L \subset \mathrm{Ass}\,E(\mathfrak{q}) = \mathrm{Ass}\,M - \{\mathfrak{q}\}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\operatorname{Ass} L &\subset \bigcap_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass} M} (\operatorname{Ass} M - \{\mathfrak{q}\}) \\ &= \operatorname{Ass} M - \bigcup_{\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass} M} \{\mathfrak{q}\} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

である。Noether 環上の加群では素因子が存在しないことと (0) であることは同じことであった。よって $L = (0)$ である。

特に M が有限生成なら ${}^{\#}\operatorname{Ass} M < \infty$ より、(0) は有限個の準素部分加群の共通部分で表せる。 □

1.5 Associated Primes of Finite-Length Modules

Lemma 1.25. R は環、$M \neq (0)$ は単純 R 加群とする。即ち、M は自明な部分加群しか持たない。このとき M はある極大イデアルによる剰余体と R 加群として同型である。特に $\operatorname{Ass} M$ は極大イデアルの一点集合である。 □

Proof. M の生成元 $x \in M$ をとる。$x \neq 0$ であって $(0) : x \neq R$ である。このとき

$$\frac{R}{(0) : x} \simeq M$$

であるからこの剰余環も R 単純である。それは $(0) : x$ が極大イデアルということである。 □

Theorem 1.26. R は Noether 環、M は有限生成 R 加群とする。次が同値である。

(1) M は長さ有限である。
(2) $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Max} R$ である。
(3) $\operatorname{Supp} M \subset \operatorname{Max} R$ である[*9]。

□

Proof. M が長さ有限ならば組成列 $M = M_0 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = (0)$ が取れる。各 M_i/M_{i+1} が R

[*9] 後に導入する Krull 次元の言葉を借りれば $\dim M = 0$ である。

単純であることから、極大イデアル $\mathfrak{m}_i$ があって

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow R/\mathfrak{m}_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow R/\mathfrak{m}_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_2 \longrightarrow R/\mathfrak{m}_2 \longrightarrow 0$$

$$\cdots$$

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow R/\mathfrak{m}_{n-1} \longrightarrow 0$$

となる。もちろん $\operatorname{Ass} M \subset \{\mathfrak{m}_0, \ldots, \mathfrak{m}_{n-1}\}$ だから M の素因子はすべて極大イデアルである。

次に、M の素因子が全て極大イデアルだとしよう。R の Noether 性より、M のサポートは必ずある素因子を含む。よってそれらは極大イデアルに限る。

最後に M のサポートが全て極大イデアルならば、Bourbaki のフィルトレーション $M = M_0 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = (0)$ は各 M_i/M_{i+1} が極大イデアルの剰余体に同型だから R 単純である。よってこれは組成列であり、M は有限の長さをもつことになる。 □

Proposition 1.27. R は Noether 環、M は有限生成 R 加群とする。$(0) = \bigcap_{P \in \operatorname{Ass} M} E(P)$ は M 内での準素分解とする。標準的な射を張り合わせることで、単射 $M \longrightarrow \bigoplus_{P \in \operatorname{Ass} M} \dfrac{M}{E(P)}$ を得る。更に M が長さ有限な場合、この射は同型である。 □

Proof. 各 $M \longrightarrow \frac{M}{E(P)}$ を貼り合わせた射の kernel は $E(P)$ の共通部分だから (0) に等しい。短完全列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_{P \in \operatorname{Ass} M} \frac{M}{E(P)} \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

を考える。$Q \in \operatorname{Supp} M = \operatorname{Ass} M$ で局所化すると、各 $P \in \operatorname{Ass} M$ について $\operatorname{Ass} M/E(P) = \{P\}$ だから

$$\left(\bigoplus_{P \in \operatorname{Ass} M} \frac{M}{E(P)} \right)_Q \simeq \frac{M_Q}{E(P)_Q}$$

となり、上記短完全列にこの局所化を施せば $C_Q = (0)$ が分かる。よって $C = (0)$ である。 $\square$

上記命題は加群における Artin 環の構造定理のようなものである。標語的に言えば、Noether 環上長さ有限の加群は、有限個の長さ有限な余準素加群の直和に分解する。

長さ有限な余準素加群についてもう一つ述べておく。

Proposition 1.28. R は Noether 環、L は長さ有限な余準素 R 加群、すなわちある極大イデアル $\mathfrak{m} \subset R$ について $\mathrm{Ass}\, L = \{\mathfrak{m}\}$ であるとする。このとき $R \setminus \mathfrak{m}$ の元は L に対して全単射に作用する。すなわち L は自然に $R_{\mathfrak{m}}$ 加群の構造を持つ。 $\square$

Proof. $\mathrm{Ass}\, L = \{\mathfrak{m}\}$ より $R \setminus \mathfrak{m}$ が L に単射に作用する。各 $s \in R \setminus \mathfrak{m}$ が L に対して全射に作用することを示そう。$x \in L$ について降鎖

$$(x) \supset (ax) \supset \cdots \supset (a^n x) \supset \cdots$$

を考えると L が長さ有限だからある $N > 0$ について $\left(a^N x\right) = \left(a^{N+1} x\right)$ である。すなわちある $b \in R$ があって $a^N x = b a^{N+1} x$ である。ここで a は L の非零因子であったから、$x = abx$ が成り立つ。よって x は a の作用の像となる。以上より $R \setminus \mathfrak{m}$ は L に全単射に作用するから $L \simeq L_{\mathfrak{m}}$ である。 $\square$

Proposition 1.29. R を Noether 環、M は有限生成 R 加群とする。$(0) = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}\, M} E(P)$ を M 内での準素分解とする。

(1) $P \in \mathrm{Min}\, M \subset \mathrm{Ass}\, M$ について、$E(P)$ は一意に定まり、それは $\mathrm{Ker}(M \longrightarrow M_P)$ に等しい。

(2)

環が既約 (reduced) であるとは $\sqrt{(0)} = (0)$ となることであった。一般に $\sqrt{(0)} = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}\, R} P = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}\, R} P$ である。これは $\sqrt{(0)}$ の準素分解であり、その分解は $\mathrm{Ass}\, R$ で添字付けられる。$\mathrm{Min}\, R \subset \mathrm{Ass}\, R$ を考えるとこの分解は既約であることが分かる。既約な環においてはこれは (0) の既約分解であるから、$\mathrm{Ass}\, R = \mathrm{Min}\, R$ である。すると R の全商環 $Q(R)$ は Artin 環である。

1.6 Associated Prime and Flat Base Change

以下、$A \longrightarrow B$ を環の準同型とする。

この射が平坦であるとき (B が A 平坦であるとき)B による係数拡大を'flat base change' と呼ぶことがある。例としては B が A の局所化、Noether 環の完備化、A 係数の多項式環などである場合が重要である。

ここではもう少し一般に A 平坦な B 加群をテンソルして得られる係数拡大について紹介する。

Lemma 1.30. A は Noether 環、E は A 加群で $P \in \mathrm{Spec} A$ に対して $\mathrm{Ass} E = \{P\}$ とする。このとき、A 平坦な B 加群 F に対して $E \otimes_A F$ の (B 加群としての) 素因子は A に引き戻すと P に等しい。

$$Q \cap A = P \qquad\qquad \text{for all } Q \in \mathrm{Ass}_B E \otimes_A F.$$

□

Proof. Q の元はすべて $E \otimes F$ の零因子である。よって $Q \cap A$ の元が E に単射に作用することは (下の図式より) 不可能である。

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\ a\ } E \qquad \text{ならば } F \text{ が平坦より}$$

$$0 \longrightarrow E \otimes F \xrightarrow{\ a\ } E \otimes F \qquad \text{より } a \text{ は } E \otimes F \text{ の非零因子}$$

よって $Q \cap A \subseteq P$ である。また、P の元は E に対して殆ど冪零に作用する。よって $E \otimes F$ に対してもそうである。よって PB は $E \otimes F$ の全ての素因子に含まれる。よって $P \subseteq Q \cap A$、つまり $P = Q \cap A$ である。 □

Example 1.31. A, B がともに Noether 環で環の射が整であるようなとき、(上昇定理から) 一つの A の素イデアルに落ちてくる B の素イデアルは互いに包含関係を持たない。従ってこの補題より余準素加群の平坦な係数拡大において異なる素因子は包含関係を持たない。Noether 環上では加群の素因子集合とサポート集合は極小元を共有するのであったから、よってこのとき $\mathrm{Ass}_B E \otimes F = \mathrm{Min}_B E \otimes F$ である (ただし記号は上の補題のものを流用している)。 □

Proposition 1.32. A は Noether 環、E は A 加群、F は A 平坦な B 加群とする。このとき

$$\mathrm{Ass}_B E \otimes F \supset \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}_A E} \mathrm{Ass}_B (A/P) \otimes F$$

である。更に B が Noether 環であれば等号が成立する。 □

Proof. $P \in \mathrm{Ass}\, E$ を取る。

$$0 \longrightarrow A/P \longrightarrow E$$

$$0 \longrightarrow (A/P) \otimes F \longrightarrow E \otimes F$$

より $\mathrm{Ass}_B (A/P) \otimes F \subset \mathrm{Ass}_B E \otimes F$ である。よって $\bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, E} \mathrm{Ass}_B (A/P) \otimes F \subset \mathrm{Ass}_B E \otimes F$ である。

B が Noether 環であるときに等号が成り立つことを示す。E の任意の部分加群 $E' \subset E$ に対して F の平坦性から $E' \otimes F \subset E \otimes F$ である。また、$\mathscr{S} := \{E' \subset E \,|\, E \text{ の有限生成部分加群}\}$ とすると

$$\left(\bigcup_{E' \in \mathscr{S}} E' \right) \otimes F = \bigcup_{E' \in \mathscr{S}} \left(E' \otimes F \right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \mathrm{Ass}_B \left(\bigcup_{E' \in \mathscr{S}} E' \right) \otimes F &= \mathrm{Ass}_B \left(\bigcup_{E' \in \mathscr{S}} \left(E' \otimes F \right) \right) \\ &= \bigcup_{E' \in \mathscr{S}} \mathrm{Ass}_B \left(E' \otimes F \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって E は有限生成であると仮定してよい。

このとき E 内での準素分解 $(0) = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}\, E} N(P)$ (ただし $N(P)$ は E の P 準素加群) とすると、

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \bigoplus_{P \in \mathrm{Ass}\, E} \left(\frac{E}{N(P)} \right)$$

$$0 \longrightarrow E \otimes F \longrightarrow \bigoplus_{P \in \mathrm{Ass}\, E} \left(\frac{E}{N(P)} \otimes F \right)$$

であるから、各 $P \in \mathrm{Ass}\, E$ に対して

$$\mathrm{Ass}_B \left(\left(\frac{E}{N(P)} \right) \otimes F \right) \subset \mathrm{Ass}_B (A/P) \otimes F$$

を示せばよい。つまり

$$\mathrm{Ass}_B E = \{P\}$$

を仮定してよい。

整理すると、E は有限生成な P 余準素加群である。

E の Bourbaki Filtration をとる[*10]。

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow A/P_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow A/P_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow E_3 \longrightarrow E_2 \longrightarrow A/P_2 \longrightarrow 0$$

$$\cdots$$

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow A/P_{n-1} \longrightarrow 0$$

ただし、

$$E = E_0 \supset \cdots \supset E_n = (0)$$

かつ $P_0, \cdots, P_{n-1} \in \operatorname{Spec} A$ である。ここで

$$\operatorname{Ass} E = \{P\} \subset \{P_0, \cdots, P_{n-1}\}$$

は極小元を共有するから、全ての $i = 0, \cdots, n-1$ に対して $P \subseteq P_i$ である。F は A 平坦だから次の完全列を得る。

$$0 \longrightarrow E_1 \otimes F \longrightarrow E_0 \otimes F \longrightarrow (A/P_0) \otimes F \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow E_2 \otimes F \longrightarrow E_1 \otimes F \longrightarrow (A/P_1) \otimes F \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow E_3 \otimes F \longrightarrow E_2 \otimes F \longrightarrow (A/P_2) \otimes F \longrightarrow 0$$

$$\cdots$$

$$0 \longrightarrow E_n \otimes F \longrightarrow E_{n-1} \otimes F \longrightarrow (A/P_{n-1}) \otimes F \longrightarrow 0$$

[*10] この為に有限生成のケースに帰着させた

よって

$$\operatorname{Ass}_B E\otimes F\subset\bigcup_{i=0}^{n-1}\operatorname{Ass}_B(A/P_i)\otimes F$$

である。

ところが今、$\operatorname{Ass}E=\{P\}$ より、$\operatorname{Ass}_B E\otimes F$ の元は A に引き戻すと P に等しい[*11]。同様に $P\neq P_i$ なる P_i に関して任意の $Q\in\operatorname{Ass}_B(A/P_i)\otimes F$ は $Q\cap A=P_i\neq P$ であるから、$Q\notin\operatorname{Ass}_B E\otimes F$ である。よって上記の包含は $P_i\neq P$ なる i について $\operatorname{Ass}_B(A/P_i)\otimes F$ を除いてよいから

$$\operatorname{Ass}_B E\otimes F\subset\operatorname{Ass}_B(A/P)\otimes F$$

である。これで $\operatorname{Ass}E=\{P\}$ についての等式が示された。

以上より一般の E について

$$\operatorname{Ass}_B E\otimes F=\bigcup_{P\in\operatorname{Ass}E}\operatorname{Ass}_B(A/P)\otimes F$$

が示された。 □

Example 1.33. Noether 環の局所化 $R\longrightarrow S^{-1}R$ について、

$$\begin{aligned}\operatorname{Ass}_{S^{-1}R}M\otimes S^{-1}R&=\bigcup_{P\in\operatorname{Ass}M}\operatorname{Ass}_{S^{-1}R}(R/P)\otimes S^{-1}R\\&=\left\{S^{-1}P\,|\,P\in\operatorname{Ass}M\text{ かつ }P\cap S=\emptyset\right\}\end{aligned}$$

である。これは、局所化された加群の素因子についての定理に他ならない。

Example 1.34. Noether 環 R 上の多項式環 $S:=R[X]$ は R 平坦な拡大環である。このとき、

$$\begin{aligned}\operatorname{Ass}S&=\bigcup_{P\in\operatorname{Ass}R}\operatorname{Ass}_S(R/P)\otimes S\\&=\bigcup_{P\in\operatorname{Ass}R}\operatorname{Ass}_S S/PS\end{aligned}$$

であり、ここで $PS=P[X]$ は各係数が P にある多項式全体である。$\frac{R[X]}{P[X]}\simeq(R/P)[X]$ は整域より PS は S の素イデアルであるから、$\operatorname{Ass}_S S/PS=\{PS\}$ である。よって $\operatorname{Ass}S=\{PS\,|\,P\in\operatorname{Ass}R\}$ であり、したがって S の零因子全体は $\bigcup_{P\in\operatorname{Ass}R}P[X]$ である。これは、零因

[*11] この為に E の素因子が一点の場合に帰着した。

子であるような多項式はある R の素因子 $P \in \operatorname{Ass} R$ について全ての係数が P に属するということである。 $\square$

Proposition 1.35. Hom 集合の素因子.
R は環、M,N は零でない R 加群とする。もし M が有限生成ならば、

$$\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(M,N) = \operatorname{Supp}_R M \cap \operatorname{Ass}_R N$$

が成り立つ。 $\square$

Proof. M は有限生成だから有限生成自由加群からの全射をもつ。

$$R^{\oplus n} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

よって $\operatorname{Hom}_R(-,N)$ で双対をとると、

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,N) \longrightarrow N^{\oplus n}$$

であり、よって $\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(M,N) \subset \operatorname{Ass} N^{\oplus n} = \operatorname{Ass} N$ である。また、$P \in \operatorname{Ass}\operatorname{Hom}(M,N)$、$P = (0) : f = (0) : \operatorname{Im} f$ とする。ただし $0 \neq f \in \operatorname{Hom}(M,N)$ である。このとき、f を P で局所化してみよう。

$$\begin{CD} M @>{f}>> N \\ @VVV @VVV \\ M_P @>>{f_P}> N_P \end{CD}$$

M が有限生成より $\operatorname{Im} f$ も有限生成である。よって $\operatorname{Supp}\operatorname{Im} f = V((0) : \operatorname{Im} f)$ であるから、$(\operatorname{Im} f)_P \neq (0)$ である。上の図式の可換性から $(\operatorname{Im} f)_P = \operatorname{Im} f_P$ であるから、よって $f_P \neq 0$、特に $M_P \neq (0)$ である。

以上より $\operatorname{Ass}\operatorname{Hom}(M,N) \subseteq \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Ass} N$ が示された。逆の包含を調べよう。

$Q \in \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Ass} N$ とする。$M_Q \neq (0)$ が有限生成より、$M_Q \to R_Q/QR_Q \simeq (R/Q)_Q$ の全射であるような R_Q 線型射が存在する。$M \to M_Q \to (R/Q)_Q$ の像 M' は R 有限生成加群だから、R/Q 分数イデアルでもある。よって M' の生成元の共通分母を $a \in R$ とおくと $a : M' \to R/Q$ の単射を得る。仮定から、$R/Q \to N$ の単射が存在した。これらを合成したものを g とする。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "g"] & M' \arrow[r] & R/Q \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

g は R/Q を経由するから Q はもちろん g を消す。一方で、$a \in R-Q$ をとると、a は R/Q の非零因子だから $M \to M' \to R/Q$ が零でない以上、g を消すことはない。よって $Q = (0):g$ となり、$Q \in \operatorname{Ass}\operatorname{Hom}(M,N)$ が示された。

以上より $\operatorname{Ass}_R \operatorname{Hom}_R(M,N) = \operatorname{Supp}_R M \cap \operatorname{Ass}_R N$ である。 □

1.7 Some useful lemmata

いずれ使う素因子についての補題をいくつか示す。

Lemma 1.36. $A \longrightarrow B$: 環の射、ただし B は Noether 環とする。B 加群 M について、

$$\operatorname{Ass}_A M = \{Q \cap A \,|\, Q \in \operatorname{Ass}_B M\}$$

となる。 □

Proof. まず、$\operatorname{Ass}_A M \supseteq \{Q \cap A \,|\, Q \in \operatorname{Ass}_B M\}$ は次の図式から自明。

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B/Q & \longrightarrow & M \\ & & \uparrow & & \\ & & A/(Q \cap A) & & \\ & & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

$\operatorname{Ass}_A M \subseteq \{Q \cap A \,|\, Q \in \operatorname{Ass}_B M\}$ を示す。$P \in \operatorname{Ass}_A M$ を一つとる。M 内に A/P と同型な単項生成部分 A 加群 $Ax \subset M (0 \neq x \in M)$ が存在する。よって $P \in \operatorname{Ass}_A Bx \subset \operatorname{Ass}_A M$ であるから、Bx を通して M は単項生成であるとしてよい。

M を準素分解する。

$$(0) = \bigcap_{Q \in \operatorname{Ass}_B M} E(Q) \qquad \text{ただし各 } E(Q) \text{ は } Q \text{ 準素部分加群}$$

また、

$$M \hookrightarrow \bigoplus_{Q \in \operatorname{Ass}_B M} M/E(Q)$$

よって $P \in \bigcup_{Q \in \operatorname{Ass}_B M} \operatorname{Ass}_A M/E(Q)$ であるから、この式を通して、M は $\operatorname{Ass}_B M = \{Q\}$ $(Q \in \operatorname{Spec} B)$ であると仮定してよい。つまり M は B の Q 準素イデアル I による商 B/I に同型であるとしている。

よってある $0 \neq x \in B$ について $P = I :_A x$ である。

任意の $a \in P$ について $ax \in I$ であり、かつ $x \notin I$ であるから、$a \in Q \cap A$ である。

一方で任意の $b \in Q \cap A$ をとる。B が Noether 環であるから $Q^n \subset I$ が十分大きい $n > 0$ について成り立ち、従って $b^n \in I$ である。$b^n x \in I$ であるから $b^n \in P$、よって $b \in P$ である。よって $P = Q \cap A$ であり、$P \in \{Q \cap A \,|\, Q \in \mathrm{Ass}_B M\}$ である。

以上より、$\mathrm{Ass}_A M = \{Q \cap A \,|\, Q \in \mathrm{Ass}_B M\}$ である。 □

Lemma 1.37. R は Noether 環、M は有限生成 R 加群とする。部分集合 $\mathscr{A} \subset \mathrm{Ass}\, M$ をとり、$I := \bigcap_{P \in \mathscr{A}} P$ とおく。$f \in R$ を M 正則元とする[*12]。このとき

$$\mathrm{Min}\left(\frac{R}{I + (f)}\right) \subset \mathrm{Ass}\, M/fM$$

である。特に $P \in \mathrm{Ass}\, M$ に対して $V(P + (f))$ の極小元は M/fM の素因子である。 □

Proof.

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

を $\mathrm{Ass}\, L = \mathscr{A}$、$\mathrm{Ass}\, N = \mathrm{Ass}\, M - \mathscr{A}$ となるようにとる。このとき、$f \notin \bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}\, M} Q \supset \bigcup_{Q \in \mathrm{Ass}\, N} Q$ より、f は N に対して単射に作用する。よって次が完全列になる[*13]。

$$0 \longrightarrow L/fL \longrightarrow M/fM \longrightarrow N/fN \longrightarrow 0$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathrm{Supp}\, L/fL &= \mathrm{Supp}\, L \cap \mathrm{Supp}\, R/(f) \\ &= V((0):L) \cap V(f) \\ &= V(I) \cap V(f) && (I = \sqrt{(0):L} \text{ であるから}) \\ &= V(I + (f)) \end{aligned}$$

であり、環が Noether だから $\mathrm{Ass}\, L/fL \mathrm{Supp}\, L/fL$ は極小元を共有する。$\mathrm{Ass}\, L/fL \subset \mathrm{Ass}\, M/fM$ でもあるから、$V(I + (f))$ の極小元は M/fM の素因子である。 □

[*12] つまり M 非零因子かつ $M \neq fM$。

[*13] 図式追跡すれば分かる。

参考文献

[1] Nicolas Bourbaki. *Elementary of mathematics, Commutative Algebra*. Springer, 1989.

[2] M.F.Atiyah and I.G.MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.