dammy [1]

1 Depth of Modules

この節では正則列、加群の深さについて導入する。

1.1 Regular Sequence

Definition 1.1. 正則列 (regular sequence).
R : 可換環、M : R 加群、とする。$x_1, \cdots, x_n \in R$ が M 正則列 (または M 列) であるとは、次の二つを満たすことである。

(1) $M/(x_1, \cdots, x_n)M \neq (0)$
(2) 各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、x_i は $M/(x_1, \cdots, x_{i-1})M$ に単射に作用する。

また、一つ目を満たさない列を弱い正則列 (weakly regular sequene) ということがある。 □

Proposition 1.2. R : 可換環、

$$N_2 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_{-1} \longrightarrow 0$$

を R 完全列とする。$\underline{x} = x_1, \cdots, x_n \in R$ が N_{-1} 正則列[*1]であれば、$- \otimes_R R/\underline{x}R$ を施しても再びこの列は完全である。つまり、

$$N_2/\underline{x}N_2 \longrightarrow N_1/\underline{x}N_1 \longrightarrow N_0/\underline{x}N_0 \longrightarrow N_{-1}/\underline{x}N_{-1} \longrightarrow 0$$

は完全である。 □

Proof. N_{-1} 非零因子 $x \in R$ についてこれを示せれば十分である。$n = 1$ としてよい。また、テンソルの右完全性から N_1/xN_1 における完全性のみ確かめればよい。図式追跡すれ

[*1] 弱い正則列でもよい。

ばわかる。

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_0 \arrow[r] \arrow[d] & N_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "x"] & 0 \\
N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_0 \arrow[r] \arrow[d] & N_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
N_2/xN_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_1/xN_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_0/xN_0 \arrow[r] \arrow[d] & N_{-1}/xN_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

□

Proposition 1.3. R : 可換環、

$$\cdots \longrightarrow N_3 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_{-1} \longrightarrow 0$$

を R 完全列とする。$\underline{x} = x_1, \cdots, x_n \in R$ が全ての N_i に対して正則列[*2]であれば、$- \otimes_R R/\underline{x}R$ を施しても再びこの列は完全である。 □

Proof. 図式追跡が面倒になっただけで基本的に先の命題と変わらない。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & N_3 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_0 \arrow[r] \arrow[d] & N_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "x"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & N_3 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_0 \arrow[r] \arrow[d] & N_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & N_3/xN_3 \arrow[r] \arrow[d] & N_2/xN_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_1/xN_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_0/xN_0 \arrow[r] \arrow[d] & N_{-1}/xN_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

[*2] これも弱い正則列でよい。

$\square$

準正則性について述べる。

有限生成イデアル $I=(a_1,\cdots,a_n)$ について、I の随伴次数環 $\mathrm{gr}_I R = R/I[It]$ は自然に多項式環からの全射 $(X_i \mapsto \overline{a_i}t)$ をもつ。

$$R/I[X_1,\cdots,X_n] \longrightarrow \mathrm{gr}_I R$$

M 係数の多項式全体は $M[X_1,\cdots,X_n]=M\otimes R[X_1,\cdots,X_n]$ と表される[*3]。M をテンソルすることで次の全射が得られる。

$$M/IM[X_1,\cdots,X_n] \longrightarrow \mathrm{gr}_I M$$

これらは $R/I[X_1,\cdots,X_n]$ の次数付き射である (もちろん total degree での次数付けを考えている)。

Definition 1.4. 準正則列.
R は可換環、M は R 加群とする。$\underline{a}=a_1,\cdots,a_n\in R$ が M 準正則列 (quasi sequence) であるとは、この列が生成するイデアル $I=(\underline{a})$ に対して $M\neq IM$ であって, この次数射

$$M/IM[X_1,\cdots,X_n] \longrightarrow \mathrm{gr}_I M$$

が同型であることをいう。 $\square$

Remark. この定義は次の条件と同値である:

> $F\in M[X_1,\cdots,X_n]$ を d 次の斉次多項式とする。もし $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in I^{d+1}M$ であるならば、F の各係数は全て IM に含まれる。

実際、d 次斉次多項式 $F\in M[X_1,\cdots,X_n]$ について、

$$F(\overline{a_1}t,\cdots,\overline{a_n}t)=\overline{F(a_1,\cdots,a_n)}t^d$$

であることから $F(a_1t,\cdots,a_nt)=0\in \mathrm{gr}_I M$ となるのは $F(a_1,\cdots,a_n)\in I^{d+1}M$ となるときであり、このとき必ず $F\in IM[X_1,\cdots,X_n]$ であるということは、斉次部分加群 $IM[X_1,\cdots,X_n]$ が次数射

$$M[X_1,\cdots,X_n] \longrightarrow \mathrm{gr}_I M$$

の核に等しいということである。

[*3] $M\otimes$(単項式) で生成されるので、M 係数多項式と呼ばれる。$m\otimes X$ を mX で表す。

Proposition 1.5. 準正則性は局所的な性質である。即ち環 R、R 加群 M、$\overline{a} = a_1, \cdots, a_n \in R$、$I = (\overline{a})$、$M \neq IM$ であるとすると、これらに対して以下が同値である:

1. $\overline{a}$ は M 準正則である。
2. 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R R/I$ に対して $\overline{a}$ は $M_{\mathfrak{p}}$ 準正則である。
3. 任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}_R R/I$ に対して $\overline{a}$ は $M_{\mathfrak{m}}$ 準正則である。

□

Proof. $M/IM\left[\overline{X}\right] \longrightarrow \mathrm{gr}_I M$ が単射であることは R/I 加群の射として局所的な性質である。 □

Theorem 1.6. 正則列は準正則である。 □

Proof. R : 可換環、M : R 加群、$\underline{a} = a_1, \cdots, a_n \in R$ が M 正則列であるとする。$I := \underline{a}R$ とおく。d 次斉次多項式 $F \in M[X_1, \cdots, X_n]$ が $F(a_1, \cdots, a_n) \in I^{d+1}M$ を満たすとする。n についての帰納法を使う。

$n = 1$ のとき、$m \in M$ があって $F = mX_1^d$ と書き表せる。さて、このとき $F(a_1) = a_1^d m \in a_1^{d+1}M$ であるならば、$m' \in M$ があって $a_1^d m = a_1^{d+1}m'$ である。a_1 の正則性から $m = a_1 m' \in a_1 M$ である。即ち F の各項の係数は全て $a_1 M (= IM)$ に属する。よって正しい。

$n > 1$ とする。さらに d についての帰納法を使う。$d = 0$ の場合、F は定数である。よって $F \in IM$ ならばその係数 (F それ自体) は IM に属する。

$d > 0$ とする。

Claim. $F(a_1, \cdots, a_n) = 0$ を仮定してよい。即ちある d 次斉次多項式 $F' \in M[X_1, \cdots, X_n]$ があって、$F'(a_1, \cdots, a_n) = 0$ かつ

$$F \text{ の各係数が } IM \text{ に属する} \Leftrightarrow F' \text{ の各係数が } IM \text{ に属する}$$

を満たす。 □

$F(a_1, \cdots, a_n) \in I^{d+1}M$ であった。よってある $d+1$ 次斉次多項式 $G \in M[X_1, \cdots, X_n]$ が存在して

$$F(a_1, \cdots, a_n) = G(a_1, \cdots, a_n)$$

を満たす。さて、G は $d+1$ 次斉次多項式だから、適切な d 次斉次多項式 $G_1, \cdots, G_n \in$

$M[X_1,\cdots,X_n]$ によって

$$G=\sum_{i=1}^{n}X_iG_i$$

と表せる[*4]。よって新たな d 次斉次多項式 G' を

$$G':=\sum_{i=1}^{n}a_iG_i$$

とおくことで、$G'(a_1,\cdots,a_n)=G(a_1,\cdots,a_n)\in I^{d+1}M$ を得られる。この時、明らかに G' の各係数は IM に属する。$F-G'$ は $\underline{a}$ を代入すると 0 になる上に、その係数は F の係数と G' の係数の差となっている。よって F の係数が IM に属するならば $F-G'$ の係数もそうであり、かつ逆も成り立つ。

以降、F は $\underline{a}$ を代入すると 0 になる d 次斉次多項式とする。F は、$X_1,\cdots,X_{n-1}$ の d 次多項式 $G\in M[X_1,\cdots,X_{n-1}]$ と $d-1$ 次斉次多項式 $H\in M[X_1,\cdots,X_n]$ によって

$$F=G+X_nH$$

と表される。即ち F の単項式のうち $X_1,\cdots,X_{n-1}$ のみからなる項の和を G、それ以外の項の和 (必ず X_n で割れる) を X_n で割ったものを H としている。$J:=(a_1,\cdots,a_{n-1})$ とおけば、

$$a_nH(a_1,\cdots,a_n)=-G(a_1,\cdots,a_{n-1})\in J^dM$$

である。次の主張より、a_n は M/J^dM に対して単射に作用するから、$H(a_1,\cdots,a_n)\in J^dM$ が分かる。

Claim. 任意の $l>0$ について a_n は M/J^lM の非零因子である。 □

$y\in M$ が $a_ny\in J^lM$ を満たすとする。$l=1$ の場合は a_n の正則性から $y\in JM$ である。$l>1$ としよう。l に関する帰納法の仮定から $y\in J^{l-1}M$ がわかる。このとき、$X_1,\cdots,X_{n-1}$ のある $l-1$ 次多項式 $K\in M[X_1,\cdots,X_{n-1}]$ があって $y=K(a_1,\cdots,a_{n-1})\in J^lM$ である。従って n に関する帰納法の仮定から、$a_ny=a_nK(a_1,\cdots,a_{n-1})\in J^lM$ より $a_nK(X_1,\cdots,X_{n-1})$ は各係数が JM に属する。従って $l=1$ の結果から K の各係数は JM に属する。よって $y=K(a_1,\cdots,a_{n-1})\in J^lM$ である。従って a_n は M/J^lM の非零因子である。

さて、$H(a_1,\cdots,a_n)\in J^dM\subset I^dM$ が分かったのであった。d に関する帰納法の仮定から、$d-1$ 次斉次多項式 H の各係数はすべて IM に属する。

[*4] もちろん $G_1,\cdots,G_n$ の取り方は一通りとは限らない。

$H(a_1,\cdots,a_n) \in J^d M$ より、ある d 次斉次多項式 $H' \in M[X_1,\cdots,X_{n-1}]$ があって

$$H'(a_1,\cdots,a_{n-1}) = H(a_1,\cdots,a_n)$$

である。

$X_1,\cdots,X_{n-1}$ からなる d 次斉次多項式 $G + a_n H'$ は

$$\begin{aligned}(G + a_n H')(a_1,\cdots,a_{n-1}) &= G(a_1,\cdots a_{n-1}) + a_n H(a_1,\cdots,a_n) \\ &= F(a_1,\cdots,a_n) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。n についての帰納法の仮定から $G + a_n H'$ の係数は全て JM に属する。$a_n H'$ の係数は (a_n がかけられているため) 明らかにすべて IM に属しているから、G の各係数も全て IM の元である。

以上より、G, H ともに係数がすべて IM に属する多項式だから、F もそうである。よって $a_1,\cdots,a_n$ が M 準正則列としての要件を満たす。 □

また、Noether 環の上では準正則列が正則であるような条件も知られている。

Lemma 1.7. R は環、M は R 加群、$a_1,\cdots,a_n \in R$ は M 準正則とする。このとき各 $0 < i \le n$ について、$a_i,\cdots,a_n$ は $\frac{M}{(a_1,\cdots,a_{i-1})M}$ 準正則である。 □

Proof. $N := M/(a_1)M$、$J := (a_2,\cdots,a_n)$ とおく。$a_2,\cdots,a_n$ が N 準正則であることを示せばよい。$N[X_2,\cdots,X_n]$ 内の d 次斉次多項式をとる。これは $M[X_2,\cdots,X_n]$ の元の像であるから、ある d 次斉次多項式 $F \in M[X_2,\cdots,X_n]$ で以て $\overline{F}$ と表してよい。もし $\overline{F}(a_2,\cdots,a_n) \in J^{d+1}N$ ならば $\overline{F}$ の各係数は全て JN に属することを示す。

$\overline{F}(a_2,\cdots,a_n) = 0$ を仮定してよいのだった。よって $F(a_2,\cdots,a_n) \in a_1 M$ であるから、$m \in M$ を $a_1 m = F(a_2,\cdots,a_n)$ となるようにとろう。

Claim. $m \in I^{d-1}M$ である。 □

$m \in I^\ell M$ ($\ell < d-1$) であるとしよう。このとき、ある ℓ 次斉次多項式 $L \in M[X_1,\cdots,X_n]$ があって $m = L(\overline{a})$ となる。いま、F が d 次の斉次式だから

$$a_1 L(\overline{a}) = F(\overline{a}) \in I^d M$$

であり、($\ell + 1 < d$ だから)$\overline{a}$ の準正則性から $\ell + 1$ 次斉次多項式 $X_1 L$ は $IM[X_1,\cdots,X_n]$ に含まれる。よって $L \in IM[X_1,\cdots,X_n]$ でもある。従って $m = L(\overline{a}) \in I^{\ell+1}M$ である。

この議論は $\ell < d-1$ である限り成り立つので、$m \in I^{d-1}M$ であることがわかる。

従って、ある $d-1$ 次斉次式 $G \in M[X_1, \cdots, X_n]$ があって $m = G(\overline{a})$ である。よって d 次斉次式 $F(X_2, \cdots, X_n) - X_1 G(X_1, \cdots, X_n)$ について、

$$(F - X_1 G)(\overline{a}) = F(a_2, \cdots, a_n) - a_1 m = 0$$

が成り立つ。よって $F - X_1 G \in IM[X_1, \cdots, X_n]$ である。F は X_1 を含むの単項式を持たないから、これは $F \in IM[X_2, \cdots, X_n]$ を意味する。

よって $\overline{F} \in JN[X_1, \cdots, X_n]$ である。

従って、$a_2, \cdots, a_n$ は N 準正則である。 □

Proposition 1.8. R は Noether 環、M は R 加群、$\underline{a} = a_1, \cdots, a_n \in R$ は M 準正則列であるとする。イデアル $I := (\underline{a})$ について

$$M, \frac{M}{a_1 M}, \cdots, \frac{M}{(a_1, \cdots, a_{n-1}) M}, \frac{M}{IM}$$

が全て I 進位相で Hausdorff [*5]ならば、このとき $\underline{a}$ は M 正則である。 □

Proof. 上の補題から、a_1 が M 正則であることを示せば十分である。$x \in M$ は $a_1 x = 0$ であると仮定しよう。準正則性から $x \in IM$ である。

$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$ であるとしよう。ただし $x_i \in M$ である。いま、

$$0 = a_1 x = \sum_{i=1}^{n} a_1 a_i x_i$$

である。準正則性から、各 i について $x_i \in IM$ である。よって $x \in I^2 M$ である。

同様にして任意の $\ell > 0$ に対して $x \in I^\ell M$ であることが示せる。よって $x \in \bigcap_{\ell > 0} I^\ell M = (0)$、よって $x = 0$ である。従って a_1 は M 正則である。 □

特に R が Noether 局所環、M は有限生成 R 加群であるとき、M は任意のイデアル $I \subsetneq R$ について I 進 Hausdorff だから、準正則性は正則性に等しい。(また、R が Noether$\mathbb{N}$ 次数環、M がその次数加群で、準正則列がそれぞれ正次数の斉次元である時も成り立つ。)

1.2 Depth of Moudles

イデアル I の中に存在する M 正則列について考える。I に含まれる M 正則列 $\underline{a}$ で、I のどの元も $M/\underline{a}M$ 正則でないとき (それ以上列を延ばせないとき)、この $\underline{a}$ を I 内の極大

[*5] R 加群 X が I 進位相で Hausdorff であるのは $\bigcap_{\ell > 0} I^\ell M = (0)$ のときであった。

M 列と呼ぶことにする。極大 M 列の長さは I と M にのみ依存し、列の取り方に依らない。この長さを M の I 深度 (I-depth) と呼ぶ。ここではこの量を定義する。

Lemma 1.9. R は可換環、M,N は R 加群、$\mathfrak{a} = (0):M$ とする。

(1) もし $\mathfrak{a}$ が N 非零因子を含めば $\mathrm{Hom}_R(M,N) = (0)$ である。
(2) さらに R が Noether 環で M,N が有限生成なら逆も成り立つ。

□

Proof. $a \in \mathfrak{a}$ が N 非零因子であるとする。任意の $f : M \to N$ に対して

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle \hat{a}=0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{a}} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

が可換であり、単射の性質から $f = 0$ である。よって $\mathrm{Hom}_R(M,N) = (0)$。

もし R が Noether で M が有限生成ならば随伴素イデアルは次のようになっている。

$$\mathrm{Ass}_R \mathrm{Hom}_R(M,N) = \mathrm{Supp}_R M \cap \mathrm{Ass}_R N$$

$\mathrm{Hom}_R(M,N) = (0)$ は上の等式の左辺が空集合であることと同値だから任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R N$ は M をサポートしない。つまり $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ である。$^{\#}\mathrm{Ass}_R N < \infty$ より、prime avoidance で $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R N} \mathfrak{p}$ が成り立つ (ここで N が有限生成であることをつかってる)。よって $\mathfrak{a}$ は N 非零因子を含む。 □

これを用いて正則列によって Ext を次のように書き表せる。

Lemma 1.10. R は環、M,N は R 加群、$\mathfrak{a} = (0):M$ とする。

(1) $\underline{a} = a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{a}$ が N 正則列であるとせよ。各 $i \geq 0$ について

$$\mathrm{Ext}_R^{i+n}(M,N) \simeq \mathrm{Ext}_R^i(M, N/\underline{a}N)$$

特に

$$\mathrm{Ext}_R^n(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, N/\underline{a}N)$$

である。

(2) $\mathfrak{a}$ が長さ n の N 正則列を持つならば、

$$\mathrm{Ext}^{<n}(M,N) = (0)$$

である。

(3) 更に R が Noether 環かつ M,N が有限生成であるとせよ。このとき逆も成り立つ。即ち、ある $n \geq 0$ について

$$\mathrm{Ext}^{<n}(M,N) = (0)$$

が成り立つならばこのとき $\mathfrak{a}$ は少なくとも長さ n の N 正則列を持つ。

□

Proof. n についての帰納法を行う。$n=1$ のとき、

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{a_1} N \longrightarrow N/a_1N \longrightarrow 0$$

である。Ext の長完全列から

$$\mathrm{Hom}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,N/a_1N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,N) \xrightarrow{a_1} \mathrm{Ext}^1(M,N)$$

を得る。今、$a_1M=0$ より $\mathrm{Hom}(M,N)$ かつ $a_1\,\mathrm{Ext}^1(M,N)=(0)$ である[*6]。よって

$$\mathrm{Hom}(M,N/a_1N) \simeq \mathrm{Ext}^1(M,N)$$

が分かる。

$n>1$ についても、帰納法の仮定から

$$\mathrm{Ext}^{i+n}(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^{i+n-1}(M,N/a_1N) \simeq \mathrm{Ext}^i\left(M, \frac{N}{(a_1,\cdots,a_n)N}\right)$$

である。

よって $\mathfrak{a}$ に長さ n の N 正則列が含まれていれば、各 $0 \leq i < n$ について

$$\mathrm{Ext}^i(M,N) \simeq \mathrm{Hom}\left(M, \frac{N}{(a_1,\cdots,a_i)N}\right) = (0)$$

である。

Noether 環上の有限生成加群においては、$\mathrm{Hom}(M,N)=(0)$ は $\mathfrak{a}$ が N 正則元を含むことと同値であった。従って、$\mathrm{Ext}^{<n}(M,N)=(0)$ であるならば、長さ i の N 正則列 $\underline{a} \in \mathfrak{a}$ (ただし $0 \leq i < n$) がとれるとき

$$(0) = \mathrm{Ext}^i(M,N) \simeq \mathrm{Hom}(M,N/\underline{a}N)$$

より $\mathfrak{a}$ は $N/\underline{a}N$ 正則元を含む。よって N 正則列を長さ n まで拡張できる。 □

[*6] 射 $X \xrightarrow{f} Y$ が零ホモトープならば $\mathrm{Ext}^i(Y,N) \xrightarrow{f} \mathrm{Ext}^i(X,N)$ は零射に写るのだった。

Corollary 1.11. Noether 環上有限生成加群 M とイデアル I について、$M \neq IM$ であるならば I 内に存在する極大 M 正則列の長さは

$$\min\{n > 0 \mid \operatorname{Ext}^n(R/I, M) \neq (0)\}$$

に等しい。 □

Remark. もし $M = IM$ ならば、Cayley-Hamilton の定理から $a \in I$ があって各 $x \in M$ に対して $ax = x$ である。

極大 M 正則列の長さは列の取り方に依らず Ext 加群によって調べられることが分かった。以上より次を定義する。

Definition 1.12. イデアルのグレード、加群の深度.
R は Noether 環とする。

(1) イデアル $I \subsetneq R$ について、I 内に存在する R 正則列の長さを $\operatorname{grade}_R I$ で表し、I のグレード (grade of I) と呼ぶ。上記定理より、

$$\operatorname{grade}_R I := \min\{n > 0 \mid \operatorname{Ext}^n_R(R/I, R) \neq (0)\}$$

である。

(2) イデアル I と有限生成 R 加群 M について、I 内に存在する M 正則列の長さ

$$\min\{n > 0 \mid \operatorname{Ext}^n_R(R/I, M) \neq (0)\}$$

を M に対する I のグレード (grade of I on M) と呼び $\operatorname{grade}_R(I, M)$、$\operatorname{grade}_M I$ 等と表す。またこれを M の I 深度 (I-depth) *7 とも呼び、$\operatorname{depth}_R(I, M)$ と書く。

(3) 特に R が局所環で I が極大イデアルのときは $\operatorname{depth}_R M$ と書く。

N.B. 本によっては $\operatorname{grade} M$ で M の零化イデアルのグレード ($(0) : M$ に存在する R 正則列の長さ) を表すこともある。上記の定義での $\operatorname{grade} I$ とこの表記での $\operatorname{grade} R/I$ は同じものを表していることになる。この他にも似たような、しかし微妙に異なる様々な記法が用いられており、これらの記法の混在は非常に紛らわしいので注意すること。強いて言えば、

- ▷ 作用するものとしてのイデアルの性質に着目したときの言い方が grade
- ▷ 作用域としての加群の構造に着目した言い方が depth

---

*7 I デプスと呼ばれることが多い。

である[*8]。

イデアル I のグレードはそのサポート $\mathrm{Supp}R/I$ に関わるところが大きい。

Proposition 1.13. R は Noether 環、$I,J \subset R$ はイデアル、M は有限生成 R 加群とする。次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{depth}_R(I,M) &= \inf\left\{\mathrm{depth}_{R_P} M_P \mid P \in \mathrm{Supp}R/I\right\}\\
\mathrm{depth}_R(I,M) &= \mathrm{depth}_R\left(\sqrt{I},M\right)\\
\mathrm{depth}_R(I\cap J,M) &= \min\{\mathrm{depth}_R(I,M),\mathrm{depth}_R(J,M)\}
\end{aligned}
$$

□

Corollary 1.14. 特に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grade}\, I &= \inf\{\mathrm{grade}\, P \mid P \in \mathrm{Supp}R/I\}\\
\mathrm{grade}\, I &= \mathrm{grade}\sqrt{I}\\
\mathrm{grade}(I\cap J) &= \min\{\mathrm{grade}\, I,\mathrm{grade}\, J\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。 □

Proof. I 内の極大 M 正則列をとって $\underline{a}$ とおく。任意の $P \in \mathrm{Supp}R/I$ について $\underline{a}$ はそのまま IR_P 内の M_P 正則列であるから、明らかに $\mathrm{depth}_R(I,M) \leq \mathrm{depth}_{R_P} M_P$ である。一方で I は $M/\underline{a}M$ の正則元を持たないから、ある $Q \in \mathrm{Ass}M/\underline{a}M$ に含まれる (もちろん $Q \in \mathrm{Supp}R/I$ である)。$\underline{a}$ は M_Q 正則列でもあって、かつ $QR_Q \in \mathrm{Ass}(M/\underline{a}M)_Q$ よりさらに極大正則列であることもわかるから、$\mathrm{depth}_{R_Q} M_Q = \mathrm{depth}_R(I,M)$ である。よって $\mathrm{depth}_R(I,M) = \inf\left\{\mathrm{depth}_{R_Q} M_Q \mid Q \in \mathrm{Supp}R/I\right\}$ である。

$\mathrm{Supp}R/I = \mathrm{Supp}R/\sqrt{I} = V(I)$ であるから、上の式より I のグレードと $\sqrt{I}$ のグレードは等しい。

同様に

$$
\mathrm{Supp}\frac{R}{I\cap J} = V(I\cap J) = V(I)\cup V(J)
$$

であるから $I\cap J$ のグレードは I と J のグレードの小さい方に等しい。 □

[*8] と思う。

Corollary 1.15. $\mathrm{Supp} N = V(I)$ となるような全ての有限生成 R 加群 N について

$$\mathrm{depth}(I,M) = \min\{n > 0 \mid \mathrm{Ext}^n(N,M) \neq (0)\}$$

が成り立つ。

Proposition 1.16. 上記と同じ仮定の下、$\underline{a} = a_1, \cdots, a_\ell \in I$ を M 正則列とすると、

$$\mathrm{depth}(I, M/\underline{a}M) = \mathrm{depth}(I,M) - \ell$$

Proof. $d := \mathrm{depth}(I,M)$ とする。$\mathrm{Ext}^i(R/I, M/\underline{a}M) \simeq \mathrm{Ext}^{i+\ell}(R/I,M)$ である。よって $\mathrm{Ext}^{d-\ell}(R/I, M/\underline{a}M) \neq (0)$ であり、かつ $d-\ell$ 未満のこの Ext 加群は (0) である。従って $\mathrm{depth}(I, M/\underline{a}M) = d - \ell$ である。 □

Lemma 1.17. depth lemma.
R は Noether 環、I はイデアル。

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

は有限生成 R 加群の完全列とする。

$$\begin{aligned}
\mathrm{depth}(I,L) &\geq \min\{\mathrm{depth}(I,M), \mathrm{depth}(I,N)+1\} \\
\mathrm{depth}(I,M) &\geq \min\{\mathrm{depth}(I,L), \mathrm{depth}(I,N)\} \\
\mathrm{depth}(I,N) &\geq \min\{\mathrm{depth}(I,M), \mathrm{depth}(I,L)-1\}
\end{aligned}$$

が成り立つ。 □

Proof. Ext 長完全列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}(R/I,L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}(R/I,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}(R/I,N)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(R/I,L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(R/I,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(R/I,N)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(R/I,L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(R/I,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(R/I,N) \longrightarrow \cdots$$

をみればよい。 □

一般に、Noether 局所環 R 上の有限生成加群 M の次元について、$\mathrm{Assh}M \subset \mathrm{Ass}M$ であるから任意の $Q \in \mathrm{Ass}M$ に対して $\dim_R M \geq \dim R/Q$ が成り立つ。同様に加群の深さに対しても素因子は次のような評価をもつ。

Lemma 1.18. $(R,\mathfrak{m})$ は Noether 局所環、M は有限生成 R 加群とする。任意の $Q \in \mathrm{Ass}M$ に対して $\operatorname{depth} M \leq \dim R/Q$ である。 □

Proof. $d = \operatorname{depth} M$ による帰納法。

$d = 0$ なら明らかに正しい。

$d > 0$ とする。$a \in \mathfrak{m}$ を M 正則にとる。$Q \in \mathrm{Ass}M$ について、$a \notin Q$ である。$\mathrm{Min}\,\frac{R}{Q+(a)} \subset \mathrm{Ass}M/aM$ であるから、$P \in \mathrm{Min}\,\frac{R}{Q+(a)}$ をとれば帰納法の仮定より $\operatorname{depth} M/aM \leq \dim R/P$ である。$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} M/aM + 1$、$\dim R/P < \dim R/Q$ であるから、$\operatorname{depth} M \leq \dim R/Q$ である。 □

また正則元は素因子に含まれないから特に Assh の素イデアルに含まれず、よって巴系に拡張される。

Proposition 1.19. 正則列は部分巴系をなす。よって上と同じ仮定の下、$\operatorname{depth} M \leq \dim M$ である。 □

従って局所環では各 $Q \in \mathrm{Ass}M$ に対して

$$\operatorname{depth} M \leq \dim R/Q \leq \dim M$$

という評価式が得られる。

イデアルのグレードについて、

$$\operatorname{grade} I = \operatorname{depth}(I,R) = \inf\{\operatorname{depth} R_P \mid P \in \mathrm{Supp}\,R/I\}$$

であったから、$Q \subset P$ なる $P \in \mathrm{Supp}\,R/I$ と $Q \in \mathrm{Ass}R$ をとるとき、

$$\operatorname{grade} I \leq \dim (R/Q)_P$$

が成り立つ。

また、

$$\operatorname{grade} I \leq \operatorname{depth} R_P \leq \dim R_P = \operatorname{height} P$$

であるから、イデアルの高さの定義より

$$\operatorname{grade} I \leq \operatorname{height} I$$

でもある。

さらに Krull の標高定理から、生成系の個数の最小値を $\mu(I)$ で表すことにすると、

$$\operatorname{grade} I \leq \operatorname{height} I \leq \mu(I)$$

である。

1.3 Flat Base Change

局所環での平坦な係数拡大について、次元についての式と同様にグレードについての式も成り立つ。

Theorem 1.20. $(R,\mathfrak{m},k)\longrightarrow(S,\mathfrak{n},\ell)$ は Noether 局所環の射とする[*9]。M は有限生成 R 加群、N は有限生成 S 加群で R 平坦とする。このとき

$$\operatorname{depth}_S M\otimes N=\operatorname{depth}_R M+\operatorname{depth}_S N\otimes k$$

が成り立つ。 □

Proof. $s:=\operatorname{depth}M$、$t:=\operatorname{depth}N\otimes k$ とおく。$\underline{a}\in\mathfrak{m}$ は極大 M 正則列、$\underline{b}\in\mathfrak{n}$ は極大 $N\otimes k$ 列としよう。

Claim. 任意の有限生成 R 加群 X に対して、$\underline{b}$ は $X\otimes N$ 列である。 □

$b\in\mathfrak{n}$ を $N\otimes k$ 正則元として、b が $X\otimes N$ 正則であることを示せば十分である。

ある $0\neq x\in X\otimes N$ が $bx=0$ を満たすとせよ。いま $X\otimes N$ は S 有限生成、$\mathfrak{m}$ は局所環の射を通して $\mathfrak{n}$ に含まれているから、Krull の交叉定理から

$$\bigcap_{i>0}\mathfrak{m}^i\left(X\otimes N\right)=(0)$$

である。$x\neq 0$ であるから $x\notin\mathfrak{m}^i\left(X\otimes N\right)$ となるような $i>0$ が存在する。このような i を最小にとろう。b は $\frac{X\otimes N}{\mathfrak{m}^i(X\otimes N)}$ 零因子である。

平坦拡大した時の素因子は

$$\operatorname{Ass}_S\left(X/\mathfrak{m}^iX\right)\otimes N=\bigcup_{P\in\operatorname{Ass}X/\mathfrak{m}^iX}\operatorname{Ass}_S N/PN$$

で計算されるのであった。

$\operatorname{Supp}X/\mathfrak{m}^iX=\operatorname{Supp}X\cap\operatorname{Supp}R/\mathfrak{m}^i=\{\mathfrak{m}\}$ であるから、

$$\operatorname{Ass}_S\left(X/\mathfrak{m}^iX\right)\otimes N=\operatorname{Ass}_S N\otimes k$$

である。よって b は $N\otimes k$ の素因子に含まれることになるが、これは正則性に矛盾する。従ってこのような x は存在せず、b は $X\otimes N$ 正則元である。

よって $\underline{b}$ は $(M/\underline{a}M)\otimes N$ 正則列であるから、$\underline{a},\underline{b}$ は $M\otimes N$ の正則列である。よって $\operatorname{depth}M\otimes N\geq s+t$ である。

[*9] $\mathfrak{m}S\subset\mathfrak{n}$ の意。

Claim. $N/\underline{b}N$ は R 平坦である。 $\square$

先と同様に $b \in \mathfrak{n}$ を $N \otimes k$ 正則元として、N/bN が R 平坦であることを示せばよい。有限生成 R 加群の短完全列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

をとる。N をテンソルして b を作用させよう。先の主張から、この b の作用は正則である。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & Y \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & C \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & C \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & X \otimes (N/bN) \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes (N/bN) \arrow[r] \arrow[d] & C \otimes (N/bN) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

snake lemma から $X \otimes (N/bN) \longrightarrow Y \otimes (N/bN)$ は単射である。よって N/bN は R 平坦である。

$\overline{M} := M/\underline{a}M$、$\overline{N} := N/\underline{b}N$ とおく。$\operatorname{depth} \overline{M} \otimes \overline{N} = \operatorname{depth} M \otimes N - (s+t)$ である。素因子を見ると、

$$\operatorname{Ass} \overline{M} \otimes \overline{N} = \operatorname{Ass} \overline{N} \otimes k = \{\mathfrak{n}\}$$

であるから、$\overline{M} \otimes \overline{N}$ は正則元を持たない。よってこれはデプス 0 であり、従って

$$\operatorname{depth} M \otimes N = s + t$$

が成り立つ。 $\square$

1.4 Depth and Projective dimension

射影次元有限な加群は Auslander-Bucksbaum の式によってデプスを計算できる。

以下、特に言及しない限り $(R, \mathfrak{m}, k)$ は Noether 局所環、M は有限生成 R 加群とする。

Lemma 1.21. $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} R$ であるならば、射影次元有限な加群は全て自由加群である。また逆も成り立つ。 $\square$

Proof. M は射影次元有限であるとする。$\operatorname{proj.dim}_R M = n > 0$ を仮定する。

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を M の極小自由分解とする。ただし各射はすべて ∂ で表すことにする。

$a \in R$ を $\mathfrak{m} = (0) : a$ となるようにとる。a をこの分解に作用させる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$x \in F_n$ を任意にとる。極小自由分解の性質から $\partial x \in \mathfrak{m} F_{n-1}$ である。

$$\begin{aligned} 0 &= a\partial x \\ &= \partial a x \end{aligned}$$

であるが、$\partial : F_n \longrightarrow F_{n-1}$ は単射であるから $ax = 0$ を導く。任意の $x \in F_n$ について $ax = 0$ であるのは明らかに矛盾である。よって $n = 0$ である。

一方で射影次元有限な加群がすべて自由であるとしよう。もし $f \in \mathfrak{m}$ を R 正則に取れるならば、

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{f} R \longrightarrow R/(f) \longrightarrow 0$$

が $R/(f)$ の自由分解であるから、$\operatorname{proj.dim}_R R/(f) < \infty$、よって $R/(f)$ は自由加群である。しかし f は $R/(f)$ に正則には作用しない。これは矛盾である。よって R は正則元を持たず、$\mathfrak{m}$ は R の素因子である。 $\square$

Theorem 1.22. Auslander-Bucksbaum の式.
$\operatorname{proj.dim}_R M < \infty$ とする。このとき

$$\operatorname{proj.dim}_R M + \operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth} R$$

が成り立つ。 $\square$

Proof. $\operatorname{depth} R$ についての帰納法。

$\operatorname{depth} R = 0$ ならば $\mathfrak{m}$ は R の素因子であるから補題から M は自由である。従って $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R = 0$ であり、上の式が成り立つ。

$\operatorname{depth} R > 0$ とする。

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を M の極小自由分解、$\{K_n\}_{n \geq 1}$ を n-th syzygy としよう。つまり

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_\ell \longrightarrow F_{\ell-1} \longrightarrow K_{\ell-1} \longrightarrow 0$$

である。定義から $1 \leq \ell \leq n$ について $\operatorname{proj.dim}_R K_\ell = n - \ell$ であり、特に $K_n = F_n$ である。

$\operatorname{depth} M$ についても帰納法を使う。$\operatorname{depth} M = 0$ の場合を考えよう。このとき $\operatorname{depth} R \neq \operatorname{depth} M$ より M が自由であることはない。つまり $K_1 \neq (0)$ である。$f \in \mathfrak{m}$ を R 正則にとると、f は F_0 に正則に作用し、その部分加群である K_1 に対してもそうである。よって f は K_1 の極小自由分解

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$$

に対して正則に作用する。よってこの分解への $R/(f)$ テンソルは完全である。各 $F_\ell / f F_\ell$ は $R/(f)$ 自由加群であるから、すなわち K_1/fK_1 の極小自由分解

$$0 \longrightarrow F_n/fF_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1/fF_1 \longrightarrow K_1/fK_1 \longrightarrow 0$$

を得る。特に $\operatorname{proj.dim}_R K_1 = \operatorname{proj.dim}_{R/(f)} K_1/fK_1 = \operatorname{proj.dim}_R M - 1$ である。

$\operatorname{depth} R/(f) = \operatorname{depth} R - 1$ だから、$\operatorname{depth} R$ についての帰納法の仮定が使えて

$$\operatorname{proj.dim}_{R/(f)} K_1/fK_1 + \operatorname{depth}_{R/(f)} K_1/fK_1 = \operatorname{depth} R/(f)$$

を得る。また短完全列

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

より depth lemma から $\operatorname{depth}_R K_1 \leq 1$ である。f が K_1 正則であることを考えれば $\operatorname{depth}_R K_1 = 1$ である。よって $\operatorname{depth}_{R/(f)} K_1/fK_1 = 0$ であるから、これを先程得られた関係式に代入すれば

$$\operatorname{proj.dim}_R M = \operatorname{depth} R$$

であることが分かり、$\operatorname{depth} M = 0$ の場合は主張が正しいことが従う。

最後に $\operatorname{depth} M > 0$ の場合を考える。$\operatorname{depth} R > 0$ も仮定していたので M, R 正則元を

$$f \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{P \in \operatorname{Ass} R \cup \operatorname{Ass} M} P$$

のように取れる ($\mathfrak{m}$ は M にも R にも associate しないから)。

f は M にも R 自由加群にも正則に作用するから、M の極小自由分解への $R/(f)$ テンソルは M/fM の極小自由分解となる。帰納法の仮定より

$$\operatorname{proj.dim}_{R/(f)} M/fM + \operatorname{depth}_{R/(f)} M/fM = \operatorname{depth} R/(f)$$

であり、

$$\begin{aligned} \operatorname{proj.dim}_{R/(f)} M/fM &= \operatorname{proj.dim}_R M \\ \operatorname{depth}_{R/(f)} M/fM &= \operatorname{depth}_R M - 1 \\ \operatorname{depth} R/(f) &= \operatorname{depth} R - 1 \end{aligned}$$

より

$$\operatorname{proj.dim}_R M + \operatorname{depth}_R M = \operatorname{depth} R$$

となる。 □

Corollary 1.23. $\operatorname{proj.dim}_R M < \infty$ であって $a \in R$ が M 正則ならば

$$\operatorname{proj.dim}_R M/aM = \operatorname{proj.dim}_R M + 1$$

□

Proof. Auslander-Bucksbaum の式から求められる。特に a が R 正則でもあるならば、$\operatorname{proj.dim}_{R/(a)} M/aM = \operatorname{proj.dim}_R M \neq \operatorname{proj.dim}_R M + 1 = \operatorname{proj.dim}_R M/aM$ である。

1.5 Some useful lemmata

Proposition 1.24. R は Noether 環、$I \subset R$ はイデアル、M,N は有限生成 R 加群とする。

$$\operatorname{depth}(I, \operatorname{Hom}_R(M,N)) \geq \min\{2, \operatorname{depth}(I,N)\}$$

である。 □

この命題の示す処は、$\operatorname{Hom}_R(M,N)$ の正則列の一部となるものの例示である。N の I 内での正則列の内、長さ 2 以下のものは $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ に対しても連続的に正則に作用する。

Proof. $H := \operatorname{Hom}_R(M,N)$ とおく。$R/I \otimes H = (0)$ なら $\operatorname{depth}(I,H) = \infty$ より、上式は常に成り立つ。また、$\operatorname{depth}(I,N) = 0$ でも正しい。よって $R/I \otimes H \neq (0)$、$\operatorname{depth}(I,N) > 0$ であるとしてよい。

また、$R/I \otimes N = (0)$ であれば、N を固定する元が I 内に存在する[*10]から、それは H に対してもそのように作用するため、$\operatorname{depth}(I,H) = \infty$ を引き起こす。よってこの場合も除いてよい。つまり、$\operatorname{depth}(I,N) < \infty$ を仮定する。

$f_1 \in I$ を N 正則元とする。

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, bend right, "\operatorname{Hom}_R(M,-)"'] & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f_1"] & N \arrow[r] & N/f_1N \arrow[r] & 0 \\
{} & 0 \arrow[r] & H \arrow[r, "f_1"'] & H \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(M, N/f_1N) &
\end{tikzcd}$$

よって f_1 は H 正則元でもある。

以上より、もし $\operatorname{depth}(I,N) = 1$ ならば、$\operatorname{depth}(I,H) \geq 1$ である。

さて、$\operatorname{depth}(I,N) \geq 2$ であるとする。$\underline{f} = f_1, f_2 \in I$ を N 正則列であるとする。f_1 が H 正則であるのは先の結果である。よって次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "="'] & H \arrow[r] \arrow[d, "="'] & H/f_1H \arrow[r] \arrow[d, dashed, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "f_1"'] & H \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(M, N/f_1N) &
\end{tikzcd}$$

ただし、c は余核の性質から現れる射である。

[*10] 任意の $x \in N$ に対して $ax = x$ であるような $a \in I$ のこと。

Snake Lemma より c は単射である。よって f_2 が $\mathrm{Hom}_R(M, N/f_1N)$ に対して正則に作用するならば、H/f_1H に対してもそうである。よって前者について示せばよいが、f_2 は N/f_1N 正則だからこれは成り立つのであった。

以上より $\mathrm{depth}(I, H) \geq 2$ である。

よって

$$\mathrm{depth}(I, \mathrm{Hom}_R(M, N)) \geq \min\{2, \mathrm{depth}(I, N)\}$$

が示された。 □

Remark. この定理の証明は N の長さ 3 の正則列に対しては成立しない。実際、 Snake Lemma を適用するところで、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H/f_1H \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d] & H/f_1H \arrow[r] \arrow[d] & H/\underline{f}H \arrow[r] \arrow[d, dashed, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M, N/f_1N) \arrow[r, "f_2"'] & \mathrm{Hom}_R(M, N/f_1N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R\left(M, N/\underline{f}N\right) &
\end{tikzcd}$$

が現れるが、$H/f_1H \xrightarrow[\text{inj.}]{} \mathrm{Hom}_R(M, N/f_1N)$ の同型を示せない以上、c は単射であるとは限らない。つまり、$g \in I$ が $N/\underline{f}N$、ひいては $\mathrm{Hom}_R\left(M, N/\underline{f}N\right)$ に正則に作用するとしてもそれは $H/\underline{f}H$ に対する正則性を意味しない。

よってこれ以上正確な depth の評価には別の議論が必要である。 □

Corollary 1.25. 更に M が射影加群ならば

$$\mathrm{depth}(I, \mathrm{Hom}_R(M, N)) \geq \mathrm{depth}(I, N)$$

である。つまり I 内の N 正則列は $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 正則列である。 □

Proof. $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ が完全函手だから N 正則列 $\underline{f} = f_1, \cdots, f_n \in I$ に対して

$$\mathrm{Hom}_R\left(M, N/\underline{f}N\right) \simeq H/\underline{f}H$$

が成り立つ。ただし H は上記と同じ、$H = \mathrm{Hom}_R(M, N)$ である。 □

参考文献

[1] M.F.Atiyah and I.G.MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.