dammy [1]

0.1 Introduction, Fundermental Algebraic Variety.

$\subsetneq$ 基本的な代数多様体を定義する。ここでは体 k は特に断らない限り代数的に閉じていること $(k=\bar{k})$ とする。

0.1.1 Affine Algebraic Variety.

Definition 0.1. affine space.
整数 $n>0$ に対して $\mathbb{A}^n(=\mathbb{A}_k^n):=k^n$ とおき、k 上の n 次元アファイン空間 (疑似空間) などと呼ぶ[*1]。 □

以下、$A:=k[X_1,\cdots,X_n]$ とおく。

Definition 0.2. Zero sets and Ideals of a set.

- ▷ 部分集合 $T\subset A$ にたいして

$$\mathscr{Z}(T):=\{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{A}^n\,|\,f(a_1,\cdots,a_n)=0 \text{ for all } f\in T\}$$

  と定め T の零点集合 (zero set of T) などと呼ぶ。$T=\{f_1,\cdots,f_l\}$ のとき、$\mathscr{Z}(T)$ を $\mathscr{Z}(f_1,\cdots,f_l)$ などと書くこともある。

- ▷ 部分集合 $Y\subset\mathbb{A}^n$ に対して

$$\mathscr{I}(Y):=\{f\in A\,|\,f(a_1,\cdots,a_n)=0 \text{ for all } (a_1,\cdots,a_n)\in Y\}$$

  と定め、Y のイデアル (ideal of Y) などと呼ぶ。

□

以下、簡単のため、$f\in A=k[X_1,\cdots,X_n]$ と $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{A}^n$ に対し、$f(\alpha)=f(a_1,\cdots,a_n)$ と書き表すこととする。

Remark. 部分集合 $T\subset A$ に対して T で生成される A のイデアルを AT と書き表すと、$\mathscr{Z}(T)=\mathscr{Z}(AT)$ である。実際、T の多項式を消す点は T の元の線型結合でできた多項式を消し、逆に T の線型結合である多項式をすべて消すような点は T の多項式を消す。

Definition 0.3. Radical ideal and Algebraic set.

[*1] より抽象的な公理が別にある。有限次元ベクトル空間の代数構造を' 忘れた' 空間として定義される。らしい。

- ▷ $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ なるイデアル $\mathfrak{a}$ は根基イデアル (radical ideal) であるという。
- ▷ $Y \subset \mathbb{A}^n$ は $Y = \mathscr{Z}(T)$ となるような部分集合 $T \subset A$ を持つとき、代数的集合 (algebraic set) であるという。

□

$\mathscr{Z}(-)$ と $\mathscr{I}(-)$ はそれぞれ包含関係による順序を逆にする写像である。

Lemma 0.4. 次が成り立つ:

1. 部分集合 $T_1, T_2 \subset A$ について
$$T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow \mathscr{Z}(T_1) \supseteq \mathscr{Z}(T_2)$$
である。
2. 部分集合 $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{A}^n$ について
$$Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow \mathscr{I}(Y_1) \supseteq \mathscr{I}(Y_2)$$
である。

□

Proof. $T_1, T_2 \subset A$、$T_1 \subseteq T_2$ とする。任意に $\alpha \in \mathscr{Z}(T_2)$ をとる。全ての $f \in T_2$ について $f(\alpha) = 0$ であった。$T_1 \subset T_2$ だから、同様に全ての $g \in T_2$ についても $g(\alpha) = 0$ である。従って $\alpha \in \mathscr{Z}(T_1)$。よって $\mathscr{Z}(T_2) \subseteq \mathscr{Z}(T_1)$ である。

次に $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{A}^n$、$Y_1 \subseteq Y_2$ とする。任意に $f \in \mathscr{I}(Y_2)$ をとる。全ての $\alpha \in Y_2$ について $f(\alpha) = 0$ であり、$Y_1 \subset Y_2$ より、全ての $\beta \in Y_1$ について $f(\beta) = 0$ であるといえる。よって $f \in \mathscr{I}(Y_1)$ である。以上より $\mathscr{I}(Y_2) \subseteq \mathscr{I}(Y_1)$ である。 □

Proposition 0.5. $\mathbb{A}^n$ のすべての代数的集合の族は閉集合としての位相の公理を満たす。即ち次の三つが成り立つ:

(1) $\emptyset, \mathbb{A}^n$ は代数的集合である。
(2) 二つの代数的集合の和集合は再び代数的である。
(3) 代数的集合からなる任意の族について、その全ての共通部分は再び代数的である。

特に $T_1, T_2 \subset A$、$\{T_\lambda \subset A\}_{\lambda\in\Lambda}$ とおくと

$$\mathscr{Z}(T_1) \cup \mathscr{Z}(T_2) = \mathscr{Z}(T_1 T_2)$$
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{Z}(T_\lambda) = \mathscr{Z}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda\right)$$

である。ただし $T_1 T_2 := \{fg | f \in T_1, g \in T_2\}$ とする。また、

$$\mathbb{A}^n = \mathscr{Z}(0),\ \emptyset = \mathscr{Z}(1)$$

である。 $\square$

<u>Proof</u>. 多項式として $f = 0 \in A$ は任意の $\alpha \in \mathbb{A}^n$ に対して $f(\alpha) = 0$ である。よって $\mathscr{Z}(0) = \mathbb{A}^n$ である。同様に多項式として $g = 1 \in k \subset A$ は任意の $\alpha \in \mathbb{A}^n$ に対して $g(\alpha) = 1 \neq 0$、よって $\mathscr{Z}(1) = \emptyset$ である。

次に $T_1, T_2 \subset A$ とする。$\mathscr{Z}(T_1) \cup \mathscr{Z}(T_2) \subset \mathscr{Z}(T_1 T_2)$ である。実際、$\alpha \in \mathscr{Z}(T_1) \cup \mathscr{Z}(T_2)$ とすると、任意の $f \in T_1, g \in T_2$ にたいして $f(\alpha) = 0$ または $g(\alpha) = 0$ である。よって $f(\alpha)g(\alpha) = 0$、即ち $\alpha \in \mathscr{Z}(T_1 T_2)$ である。

逆に $\beta \in \mathscr{Z}(T_1 T_2)$ として β が T_1 または T_2 の零点であることを示そう。仮にそうでないとすると、ある多項式 $\varphi \in \mathscr{Z}(T_1), \psi \in \mathscr{Z}(T_2)$ があって $f(\beta) \neq 0$ かつ $g(\beta) \neq 0$ である。体は整域だから $f(\beta)g(\beta) \neq 0$ である。一方で $\beta \in \mathscr{Z}(T_1 T_2)$ であるから、これは矛盾である。よって $\beta \in \mathscr{Z}(T_1) \cup \mathscr{Z}(T_2)$ でなくてはならない。

最後に部分集合族 $T_\lambda \subset A (\lambda \in \Lambda)$ についての等式を示す。まず、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $T_\lambda \subset \bigcup_{\mu\in\Lambda} T_\mu$ であるから、

$$\mathscr{Z}(T_\lambda) \supset \mathscr{Z}\left(\bigcup_{\mu\in\Lambda} T_\mu\right)$$

である。よって

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{Z}(T_\lambda) \supset \mathscr{Z}\left(\bigcup_{\mu\in\Lambda} T_\mu\right)$$

となる。逆に $f \in A$ が全ての T_λ の零点となるならば (つまり $f \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{Z}(T_\lambda)$ ならば) もちろん $f \in \mathscr{Z}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda\right)$ であるから逆の包含も成り立つ。 $\square$

Definition 0.6. Zariski topology.
代数的集合を閉集合として $\mathbb{A}^n$ に定まる位相を Zariski 位相と呼ぶ。 □

Example 0.7. $\mathbb{A}^1$ の代数的集合は $k[X]$ が単項イデアル整域であることからある $f \in k[X]$ によって $\mathscr{Z}(f)$ と表されていることになる。この時 f は k 内で一次式まで分解され、その根は高々有限個であるから、$^\#\mathscr{Z}(f) < \infty$、よって $\mathbb{A}^1$ の開集合は全て $k-$ 有限個の点 という形をしており、またこのような集合は開集合である。

$\mathbb{A}^1$ は Hausdorff ではない。異なる二点 $a, b \in \mathbb{A}^1 = k$ に対して、それぞれの開近傍は上記のような形をしているから、(鳩の巣原理でもなんでもいいがとにかく) 共通部分を持つ。 □

Definition 0.8. Topological Irreducibility and Affine Algebraic Varieties.

- ▷ 位相空間 X が既約である (irreducible) であるとは、任意の閉集合 $X_1, X_2 \subseteq X$ についてもし $X = X_1 \cup X_2$ ならば $X = X_1$ または $X = X_2$ が成り立つことである。
- ▷ 位相空間 X の部分集合 $Y \subset X$ について、Y が既約であるとは Y が X の相対空間として既約であることである。つまり、閉集合 $X_1, X_2 \subset X$ がもし $Y \subset X_1 \cup X_2$ をみたすならば $Y \subset X_1$ か $Y \subset X_2$ のどちらかが成り立つ。
- ▷ アファイン空間 $\mathbb{A}^n$ の既約な閉集合をアファイン代数多様体 (affine algebraic variety)、または短くアファイン多様体 (affine variety) などと呼ぶ。
- ▷ アファイン多様体の開部分集合を準アファイン多様体 (quasi-affine variety) と呼ぶ。

□

Remark. 既約な空間とはつまり、真の有限閉被覆を持たない空間である。

Example 0.9.

- ▷ 既約な空間の空でない開部分集合は再び既約である。実際、X を既約な位相空間、$\emptyset \neq U \subset X$ を開集合として、U の有限閉被覆をとると、それらと $X - U$ が X の有限閉被覆となる。
  更にこれは稠密な部分空間である。空間が既約であるとは、空でない二つの開集合を排他的に取れないことでもあるから、任意の $x \in X$ に対して x の開近傍は必ず U と交わる。つまり x は U の触点である。
- ▷ $\mathbb{A}^1$ は既約な空間である。
- ▷ $Y \subset X$ を既約な部分集合とする。この時、Y の閉包 $\overline{Y}$ は再び既約である。$\overline{Y} \subset X_1 \cup X_2$ となる二つの閉集合 X_1, X_2 があるとすると、$Y \subset X_1 \cup X_2$ であるから、仮に $Y \subset X_1$ であるとすると、閉包の最小性から $\overline{Y} \subset X_1$ を導く。

アファイン多様体を調べるには次の一対一対応が基本的である。

<u>Theorem</u> 0.10. The One-to-One Correspondence Between Algebraic Sets and Radical Ideals.

$$\mathfrak{A} := \{Y \subset \mathbb{A}^n \,|Y \text{ is an algebraic set.}\}$$
$$\mathfrak{R} = \{\mathfrak{a} \subset A\,|\mathfrak{a} \text{ is a radical ideal.}\}$$

とおく。このとき次が一対一対応である。

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, bend left, "\mathscr{I}(-)"] & \mathfrak{R} \arrow[l, bend left, "\mathscr{Z}(-)"] \end{tikzcd}$$

□

これを示すためには次の補題を示せばよい。

<u>Lemma</u> 0.11. $\mathscr{Z}, \mathscr{I}$ の合成について次の二つが成り立つ:

(1) $Y \subset \mathbb{A}^n$ について $\mathscr{Z}\mathscr{I}(Y) = \overline{Y}$。
(2) イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ について $\mathscr{I}\mathscr{Z}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

<u>Remark</u>. (2) は Hilbelt の零点定理 (Nullsterensatz) とも呼ばれる。

<u>Proof</u>. まず、任意の $\alpha \in Y$ は定義より任意の $f \in \mathscr{I}(Y)$ を消すから $\alpha \in \mathscr{Z}\mathscr{I}(Y)$ である。よって $Y \subset \mathscr{Z}\mathscr{I}(Y)$。$V \subset \mathbb{A}^n$ を $Y \subset V$ なる閉集合とする。このときある部分集合 $T \subset A$ があって $V = \mathscr{Z}(T)$ であるが、T の多項式は Y で消えるから $T \subset \mathscr{I}(Y)$ である。よって

$$\mathscr{Z}\mathscr{I}(Y) \subset \mathscr{Z}(T) = V$$

つまり $\mathscr{Z}\mathscr{I}(Y)$ は Y を包む最小の閉集合である。よって $\overline{Y} = \mathscr{Z}\mathscr{I}(Y)$ である。

イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ について、$\sqrt{\mathfrak{a}}$ の多項式 f は十分大きい冪 $n > 0$ をとれば $f^n \in \mathfrak{a}$ であり、これは $\mathscr{Z}(\mathfrak{a})$ で消える。$f^n(\alpha) = 0$ は $f(\alpha) = 0$ を示すから、$f \in \mathscr{I}\mathscr{Z}(\mathfrak{a})$ である。よって $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathscr{I}\mathscr{Z}(\mathfrak{a})$ である。

一方で $f \in \mathscr{I}\mathscr{Z}(\mathfrak{a})$ であるとすると、$A_f = A\left[f^{-1}\right]$ において拡大が $\mathfrak{a}A_f = A_f$ となる。実際、もし $\mathfrak{a}A_f \neq A_f$ であるとすると、A_f の極大イデアルで $\mathfrak{a}A_f$ を包むものが存在する。

$P \in \operatorname{Spec} A$ が $\mathfrak{a}A_f \subset PA_f \in \operatorname{Max} A_f$ なるものであるとすると、$A_f/PA_f \simeq (A/P)_f$ は k 上の有限生成代数であるような体である ($(A/P)_f = k\left[\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}, \overline{f}^{-1}\right]$ である)。

$$\begin{tikzcd} (A/P)_f \arrow[d, dash, "\text{inc.}"] \arrow[ddd, dash, bend right=40, "\simeq"'] \\ A/P \\ A \arrow[u, "\text{canon.proj.}"'] \\ k \arrow[u, dash, "inc."'] \end{tikzcd}$$

Zariski の補題よりこの体拡大は有限次でつまり代数拡大。$k = \overline{k}$ より k 代数として $k \simeq (A/P)_f$ である。$(A/P)_f$ の $\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}$ に対応する k の元をそれぞれ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とすると、任意の $g \in \mathfrak{a}$ に対して、$0 = \overline{g} = g(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ である。

よって $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathscr{Z}(\mathfrak{a})$、仮定より $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0$ である。ところが $\overline{f} = f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は $(A/P)_f$ の単元だから、$1 = 0$ を導いてこれは矛盾である。よって $\mathfrak{a}A_f = A_f$ であり、したがって f の冪全体の積閉集合は $\mathfrak{a}$ との交わりを持つ。つまり $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ である。 □

Example 0.12. (1) 根基イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ について、$\mathscr{Z}(\mathfrak{a})$ が既約であることと $\mathfrak{a}$ が素イデアルであることが同値。

(2) $f \in A = k[X,Y]$ を既約多項式とする。(f) は A の素イデアルであり、よって $\mathscr{Z}(f) \subset \mathbb{A}^2$ はアファイン多様体である。これは $f(x,y) = 0$ によるアファイン曲線 (affine curve) と呼ばれる。この時 $\deg f$ はこの曲線の次数という。

(3) n 変数の既約多項式で生成される $\mathbb{A}^n$ 内のアファイン多様体を、$n = 2$ なら曲線、$n = 3$ なら曲面 (surface)、$n > 3$ なら超曲面 (hyper surface) と呼ぶ。

(4) A の極大イデアルが生成するアファイン多様体は一点集合 $\{(a_1, \cdots, a_n)\}$ であり、特にその極大イデアルは $(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$ となることが知られている。

Definition 0.13. Affine Coordinate Ring.
$Y \subset \mathbb{A}^n$ を代数的集合とする。$A(Y) := A/\mathscr{I}(Y)$ と定め Y の座標環と呼ぶ。 □

Y が既約ならもちろん $A(Y)$ は整域。また、座標環は有限生成 k 代数であり、逆に $\sqrt{(0)} = (0)$ である有限生成 k 代数はある座標環に同型である。特に整域であればアファ

イン多様体の座標環に同型である。

Definition 0.14. Noetherian Topological space.
位相空間が閉集合についての降鎖条件を満たす時、Noether 的な位相空間であるという。 □

$\mathbb{A}^n$ の閉集合、つまり代数的集合は A の根基イデアルと対応し、包含関係を逆に保つのであった。よって閉集合の降鎖は A の根基イデアルの昇鎖に対応し、A の環としての Noether 性からこの昇鎖は停止する。よって $\mathbb{A}^n$ は降鎖条件を満たすから Noether 的位相空間である。

Proposition 0.15. 一般に Noether 的位相空間 X の閉集合 $Y \subset X$ は既約な閉部分集合の合併による分解

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$$

をもち、かつ $i \neq j$ ならば $Y_i \not\subset Y_j$ という条件の下でこの分解は一意的である。 □

Proof. まずは分解の存在を示す。

$$\mathscr{A} := \{Y \subset X \,|\, Y \text{ は閉集合であってこのような分解を持たない}\}$$

とおく。$\mathscr{A} \neq \emptyset$ を仮定しよう。X の Noether 性から $\mathscr{A}$ は極小元をもつからそれを $Z \in \mathscr{A}$ とする。このとき Z が既約でないから[*2]ある閉部分集合 $Y_1, Y_2 \subsetneq Z$ があって $Y_1 \cup Y_2 = Z$ となる。Z の極小性から Y_1, Y_2 はそれぞれ分解をもち、これを用いて Z の分解をかけてしまう。$Z \in \mathscr{A}$ に矛盾する。よって $\mathscr{A} = \emptyset$ である。

一意性を示す。$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_m = Y'_1 \cup \cdots \cup Y'_n$ を閉集合 Y の分解とする。このとき明らかに $Y_1 \subset Y'_1 \cup \cdots \cup Y'_n$ であるから Y_1 の既約性からある Y'_j について $Y_1 \subseteq Y'_j$ である。同様にある $1 \leq i \leq m$ があって $Y'_j \subseteq Y_i$ である。$Y_1 \subset Y_i$ であるから $i = 1$ でなくてはならない。よって $Y_1 = Y'_j$ である。この議論によって m について帰納法を行えば、$m = n$ かつ分解が並び替えを除いて一意的であることがわかる。 □

$\mathbb{A}^n$ は Noether 的位相空間であった。よって全ての代数的集合はいくつかのアファイン多様体の合併による分解をもち、かつ上の意味で無駄のない分解は一意的に定まることがわかる。

Remark. イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ の素因子について

$$\mathscr{Z}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass} A/\mathfrak{a}} \mathscr{Z}(P)$$

[*2] もし既約なら Z 自身が Z の分解である。

が成り立つが、極小でない素因子が生成する多様体は $\mathscr{Z}(\mathfrak{a})$ の既約閉集合による分解の無駄な部分になっていて、つまり

$$\mathscr{Z}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{P \in \mathrm{Min} A/\mathfrak{a}} \mathscr{Z}(P)$$

が無駄の無い分解である。極小でない $\mathfrak{a}$ の素因子は、それが含む極小素因子の生成するアファイン多様体の部分多様体を生成することになる。

Remark. イデアル $I \subset A$ が $\mathrm{Ass} A/I = \mathrm{Min} A/I$ を満たす時、I は非混合的 (unmixed) であるという。非混合的なイデアル I の準素分解は一意的に定まり、これが $\mathscr{Z}(I)$ の分解と丁度対応することになる。特に根基イデアルは

$$I = \sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P = \bigcap_{P \in \mathrm{Min} A/I} P$$

であり、この式の最右辺が I の準素分解であることがわかるから非混合的である。

参考文献

[1] M.F.Atiyah and I.G.MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.