二次形式について

木村

目次

1　二次形式

k は標数が 2 ではない体とする。必要であればその都度各種性質を仮定する。ここで扱う線型空間 $V, W, \cdots$ は全て有限次元であるものとする。特に有限性を仮定しない場合は都度注記する。

1.1　双対空間についての準備

まず双対空間について必要なことを復習する。

Definition 1.1. 線型空間 V に対して、

$$V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$$

とおいて、V の双対空間と呼ぶ。 □

V の基底 $v_1, \cdots, v_n$ を固定するとき、

$$f_i(v_j) = \delta(i, j)$$

で定まる線型射 $f_i : V \longrightarrow k$ について、$f_1, \cdots, f_n$ は V^* の基底をなすことが知られている。これを $v_1, \cdots, v_n$ に関する双対基底と呼び、$f_i = v_i^*$ と表記する。

双対基底の存在から、$\dim V^* = \dim V$ である。

Proposition 1.2. V, W を k 上の線型空間、その基底をそれぞれ $v_1, \cdots, v_n \in V$、$w_1, \cdots, w_m \in W$ とする。この基底について線型写像 $f : V \longrightarrow W$ の表現行列を $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}(m, n; k)$ であるとする。

$$f\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix} A$$

ただし上の式は各 $j = 1 \cdots n$ について

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i$$

であることを意味する。

このとき双対 $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ は、双対基底 $w_1^*, \cdots, w_m^*$、$v_1^*, \cdots, v_n^*$ について A の転置行列 ${}^{\mathrm{T}}A$ を表現行列に持つ。 □

Proof.

$$
\begin{aligned}
\left(f^{*}\left(w_{i}^{*}\right)\right)\left(v_{j}\right) &= w_{i}^{*} f\left(v_{j}\right) \\
&= w_{i}^{*}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{k,j} w_{k}\right) \\
&= a_{i,j}
\end{aligned}
$$

と計算できる。よって

$$
\begin{aligned}
f^{*}\left(w_{i}^{*}\right) &= \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} v_{j}^{*} \\
&= \left[\begin{array}{ccc} v_{1}^{*} & \ldots & v_{n}^{*} \end{array}\right]\begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である。よって

$$
f\left[\begin{array}{ccc} w_{1}^{*} & \cdots & w_{m}^{*} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} v_{1}^{*} & \cdots & v_{n}^{*} \end{array}\right]\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} v_{1}^{*} & \cdots & v_{n}^{*} \end{array}\right]{}^{\mathrm{T}}A
$$

□

Definition 1.3. [1, p.19]
$W \subset V$ は部分空間とする。このとき

$$
W^{\perp} := \left\{ f \in V^{*} \,|\, \text{任意の } w \in W \text{ に対して } f(w) = 0 \right\}
$$

と定め、W の直交補空間 (orthogonal complement) と呼ぶ。 □

Proposition 1.4. [1, p.19]
$W \subset V$ は部分空間とする。

$$
\dim_{k} W^{\perp} = \dim_{k} V - \dim_{k} W
$$

が成立する。また、$W^{\perp\perp} \simeq W$ が成り立つ。 □

Proof. 包含射 $i : W \longrightarrow V$ は単射だから $i^{*} : V^{*} \longrightarrow W^{*}$ は全射である (線型空間の場合全ての mono は split してるから retraction 側も合わせて dual とってやれば $1^{*} = 1$ より単射の dual が全射であるとわかる)。ここで

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} i^{*} &= \left\{ f \in V^{*} \,|\, \text{任意の } w \in W \text{ に対して } f(w) = 0 | \right\} \\
&= W^{\perp}
\end{aligned}
$$

であるから次元定理より

$$\dim_k V^* = \dim_k W^\perp + \dim_k W^*$$

が成り立つ。よって $\dim W^\perp = \dim V - \dim W^*$ である。双対空間の次元は元の空間と等しいから、以上より $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$ であることを導く。

$W^{\perp\perp} \simeq W$ を示す。canonical な同型 $V \simeq V^{**}$ によって $W \subseteq W^{\perp\perp}$ であることがわかる。従って $\dim W^{\perp\perp} = \dim W$ が成り立つことを示せばよい。

上式より

$$\dim W^{\perp\perp} = \dim V^* - \dim W^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W)$$

従って $\dim W^{\perp\perp} = \dim W$ である。 □

1.2　二次形式と付随する諸概念

Definition 1.5. 二次形式 [1, p.20]
V を n 次元線型空間、 $v_1, \cdots, v_n \in V$ は基底とする。$Q : V \longrightarrow k$ が二次形式 (quadratic form) であるとは、ある 2 次の斉次多項式 $q \in k[X_1, \cdots, X_n]$ によって

$$Q = q(v_1^*, \cdots, v_n^*)$$

となっていることをいう。ここで右辺は V から k への関数全体の成す k 代数への代入射 $(X_i \longmapsto v_i^*)$ によって定まるものとする。 □

Lemma 1.6. n 次対称行列 $A = (a_{i,j})_{i,j}$ から 2 次の斉次多項式

$$q(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} X_i X_j$$

を構成できる。この対応は全単射となる。 □

Proof. この対応を α とおく。対称行列 A に対してこの $\alpha(A)$ が斉次多項式となるのは自明に正しい。

α が全射であることを見る。任意の 2 次斉次多項式 p に対して $B := \left(\frac{1}{2} c(p, X_i X_j)\right)_{i,j}$ とおけばこの対称行列について $\alpha(B) = p$ となる。ただし $c(p, X_i X_j)$ は p における $X_i X_j$ の係数とする。

α が単射であることを見る。また二つの対称行列 $A_1 = \left(a_{i,j}^{(1)}\right), A_2 = \left(a_{i,j}^{(2)}\right)$ に対して

$\alpha(A_1)=\alpha(A_2)=q$ であるとすると

$$\begin{aligned} c(q, X_i X_j) &= a_{i,j}^{(1)} + a_{j,i}^{(1)} \\ &= a_{i,j}^{(2)} + a_{j,i}^{(2)} \end{aligned}$$

である。ここで A_1, A_2 は対称であるから

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(1)} = a_{j,i}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(a_{i,j}^{(1)} + a_{j,i}^{(1)}\right) \\ a_{i,j}^{(2)} = a_{j,i}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(a_{i,j}^{(2)} + a_{j,i}^{(2)}\right) \end{aligned}$$

である。従って

$$a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}^{(2)}$$

となる。

よって α は全単射となる。 □

Lemma 1.7. V は n 次元線型空間とし、基底を一つ固定する。n 次対称行列 A から対称双線型写像 $B: V \times V \longrightarrow k$ を

$$B(x,y) := {}^{\mathrm{T}}xAy$$

として定められる。この対応は $V \times V$ から k への対称双線型写像全体と、n 次対称行列全体の間の全単射となる。

ただし x, y は固定した基底によるパラメタ表示での $n \times 1$ 行列と同一視している。すなわち基底 $v_1, \cdots, v_n$ に対して

$$x = \sum x_i v_i$$

$$y = \sum y_i v_i$$

(ただし $x_i, y_i \in k$) であるとするとき、

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

である。 □

Remark. $A=(a_{i,j})_{i,j}$ とする。B に対応するテンソル積からの線型射を B 自身と同一視するとして、このとき B は

$$B(v_i\otimes v_j)=a_{i,j}$$

として定まる[*1]。

$$\begin{tikzcd} & V\times V \arrow[dl, "\text{canon.}"'] \arrow[dr, "B"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ V\otimes V \arrow[rr, "\exists!\text{lin. } B"'] & & k \end{tikzcd}$$

□

Proof. この対応を β とおき、β の well-definedness、全単射性を見よう。

対称行列 A に対して $B:=\beta(A)$ とおき B が対称かつ双線型であることを見る。まず任意の $a,b\in k$、$x_1,x_2,y\in V$ について

$$\begin{aligned}B(ax_1+bx_2,y)&={}^{\mathrm{T}}(ax_1+bx_2)Ay\\&=a\,{}^{\mathrm{T}}x_1Ay+b\,{}^{\mathrm{T}}x_2Ay\\&=aB(x_1,y)+bB(x_2,y)\end{aligned}$$

であるから B は左側について線型である。

次に B が対称であることを見よう[*2]。$x,y\in V$ に対して

$$\begin{aligned}B(x,y)&={}^{\mathrm{T}}xAy\\&={}^{\mathrm{T}}\left({}^{\mathrm{T}}xAy\right)&&(s\in k\text{ に対して }{}^{\mathrm{T}}s=s\text{ だから})\\&={}^{\mathrm{T}}y\,{}^{\mathrm{T}}Ax\\&={}^{\mathrm{T}}yAx\\&=B(y,x)\end{aligned}$$

従って $B(x,y)=B(y,x)$ である。

[*1] テンソル積 $V\otimes V$ において $\left\{v_i\otimes v_j\right\}_{i,j}$ が基底をなす。

[*2] この証明は「左側が線型」「対称的」から「右側も線型」を示す腹積もりだが、別の証明として B の両側線型性を先に示すことも考えられる。対応するテンソルからの射が前述のように $B\left(v_i\otimes v_j\right)=a_{i,j}$ で定まることをみれば B の対称性は A が対称行列であることから自明である。こちらの方がスマートな気がするが「$s\in k$ については ${}^{\mathrm{T}}s=s$」が何となく忘れそうなので本文には前者のやり方を書いておく。

対称性から B が右側についても線型であるから B は対称双線型射である。

よって対応 β は対称行列から対称双線型射を定める写像として well-defined である。

β が全射であることを見よう。対称双線型射 $B: V \times V \longrightarrow k$ を任意にとる。$A := (B(v_i, v_j))_{i,j}$ と定める。B の対称性から A が対称行列であることは自明。$B' := \beta(A)$ とおく。B' が対称双線型であることはすでに確かめた。対応するテンソル積からの射と同一視するとき、

$$B'(v_i \otimes v_j) = (A \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = B(v_i, v_j)$$

である。従って $B' = B$ だから β は全射である。

β が単射であることを見よう。$A_1 = \left(a_{i,j}^{(1)}\right)_{i,j}$、$A_2 = \left(a_{i,j}^{(2)}\right)_{i,j}$ を対称行列とする。$\beta(A_1) = \beta(A_2) = B$ であると仮定する。このときテンソル積からの射 B を通して考えれば各 i, j について

$$B(v_i \otimes v_j) = a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}^{(2)}$$

であるから $A_1 = A_2$ となる。よって β は単射である。

以上より β の全単射性が分かった。 □

Corollary 1.8. 以上より 2 次の斉次多項式と対称行列、対称双線型射の間に全単射が存在することが分かった。 □

特に 2 次の斉次多項式 q から対称双線型射 $B := \beta\alpha(q)$ を構成できて、

$$B(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

である。

実際、この B は基底 $v_1, \cdots, v_n$ に対して

$$B(v_i, v_j) = \frac{1}{2}c(q, X_iX_j)$$

であり、一方で

$$\begin{aligned} q(v_i+v_j) - q(v_i) - q(v_j) &= c(q, X_iX_i) + c(q, X_jX_j) + c(q, X_iX_j) - c(q, X_iX_i) - c(q, X_jX_j) \\ &= c(q, X_iX_j) \end{aligned}$$

となる 。従って $\frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ が二次形式であることを確かめれば等式が成立することがわかる[*3]。

[*3] しかしここではその過程は省略する。この計算をするくらいなら普通に $\frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ を計算すると $B(x,y)$ に等しくなることを示した方が楽かもしれない。

Lemma 1.9. 2 次の斉次多項式 $q(X_1,\cdots,X_n)$ から二次形式 $Q:V\longrightarrow k$ を $Q:=q(v_1^*,\cdots,v_n^*)$、すなわち

$$Q(x)=q(v_1^*(x),\cdots,v_n^*(x))$$

で定める (定義から Q が二次形式であるのは自明である)。この対応は全単射である。つまり二次形式が与えられたとき、それを表す斉次多項式はただ一つだけである。 □

Proof. この対応を γ とおき、単射性を示そう。なお全射であることは定義より自明である。

γ は $k\left[\underline{X_i}\right]$ から[*4] V 上の k 値関数環への代入射を 2 次の斉次多項式の成す部分空間 $k\left[\underline{X_i}\right]_{(2)}$ に制限したものと等しい。これは線型射であるから $\mathrm{Ker}\,\gamma=(0)$ を示せばよい。

$q\in k\left[\underline{X_i}\right]_{(2)}$ が $\gamma(q)=0$ を満たすとする。対称行列 $A=(a_{i,j})$ が (一意的に) 存在して

$$q(X_1,\cdots,X_n)=\sum_{i,j}^{n}a_{i,j}X_iX_j={}^{\mathrm{T}}(X_i)_iA\,(X_j)_j$$

となることはよい。従って

$$0=q(v_1^*,\cdots,v_n^*)={}^{\mathrm{T}}(v_i^*)_iA\left(v_j^*\right)_j$$

である。

すなわち任意の $x=\sum_i c_iv_i\in V$ について、

$$0=\sum_{i,j}^{n}c_ic_ja_{i,j}$$

である。よって

$$\delta(s,t;i):=\begin{cases}1 & (i=s\text{、 または } i=t)\\ 0 & (\text{o.w.})\end{cases}$$

として $x_{s,t}:=\sum_i\delta(s,t;i)\,v_i$ とおけば、任意の $1\leq s,t\leq n$ に対して

$$\begin{aligned}0&=(q(v_1^*,\ldots,v_n^*))(x_{s,t})\\&=\sum_{i,j}^{n}\delta(s,t;i)\,\delta(s,t;j)\,a_{i,j}\\&=a_{s,t}+a_{t,s}\\&=2a_{s,t}\end{aligned}$$

[*4] 何度も出てくる列をアンダーラインで略記することがある。この場合 $k\left[\underline{X_i}\right]=k[X_1,\cdots,X_n]$ である。

が成り立つ。よって $A=0$ である。

以上より $\gamma(q)=0$ ならば $q=0$ であることが分かった。よって γ は全単射である。 □

これまでの観察より 2 次の斉次多項式、二次形式、対称行列、対称双線型射は (固定された基底の上で) α、β、γ によって一対一に対応することが分かった。

$$\begin{tikzcd}
\{2\text{ 次の斉次多項式 } q\} \arrow[r, "\gamma"'] & \{\text{二次形式 } Q\} \\
\{\text{対称行列 } A\} \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"'] & \{\text{対称双線型射 } B\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
q\left(\underline{X_i}\right) \arrow[r, mapsto] & Q=q\left(\underline{v_i^*}\right) \\
A=\left(\frac{1}{2}c\left(q,X_iX_j\right)\right)_{i,j} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & B=\sum_{i,j}^{n}\frac{1}{2}c\left(q,X_iX_j\right)v_i^*v_j^*
\end{tikzcd}$$

Definition 1.10. 有限次元線型空間 V、その基底 $v_1,\cdots,v_n\in V$ が固定されているとする。二次形式 $Q:V\longrightarrow k$ とする。

- ▷ Q 及び上記の全単射で Q と対応する対称行列 A、双線型射 $B:V\times V\longrightarrow k$、2 次の斉次多項式 q は互いに「付随する」という。
- ▷ Q に付随する双線型形式[*5] B は、tensor/covariant hom 函手の随伴で対応する線型射 $h:V\longrightarrow V^*$ を持つ。もちろん h は B に対して一意的に定まる。この h を Q(および A、B、q) に付随する線型射と呼ぶ。
- ▷ Q に付随する線型射 $h:V\longrightarrow V^*$ の rank を Q の rank と呼ぶ。

$$\operatorname{rank}Q:=\operatorname{rank}h=\dim\left(\operatorname{Im}h\right)$$

Proposition 1.11. V は n 次元線型空間で $v_1,\cdots,v_n\in V$ をその基底とする。V 上の二次形式 Q とする。Q に付随する線型射 $h:V\longrightarrow V^*$ について、h の表現行列は $\{v_i\}_i$、$\{v_i^*\}_i$ の下で付随する対称行列 A に一致する。 □

Proof. 付随する双線型形式を B とする。

$$\left(h\left(x\right)\right)\left(y\right)=B\left(x,y\right)$$

[*5] 線型射、双線型射で終域が係数体 k のものを線型形式、双線型形式 (一次形式、双一次形式) と呼ぶ。

であるから、特に $h(v_i)$ は

$$
\begin{aligned}
(h(v_i))(y) &= B(v_i, y) \\
&= B\left(v_i, \sum_{j=1}^{n} v_j^*(y) v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j^*(y) B(v_i, v_j) \\
&= \left(\begin{bmatrix} v_1^* & \cdots & v_n^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B(v_i, v_1) \\ \vdots \\ B(v_i, v_n) \end{pmatrix}\right)(y)
\end{aligned}
$$

となる。

従って h の表現行列は

$$
h\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^* & \cdots & v_n^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B(v_1, v_1) & \cdots & B(v_n, v_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B(v_1, v_n) & \cdots & B(v_n, v_n) \end{pmatrix}
$$

であり、これは付随する対称行列 A に等しい。 □

Corollary 1.12.

$$
\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} A
$$

□

1.3 基底の入れ替えと二次形式

ベクトル空間から係数体への関数としての二次形式、及び付随する双線型形式、線型射は基底に寄らないが、付随する二次の斉次多項式、対称行列は基底によって表示が異なる。大切なのは基底に寄らない部分 (不変量) ではあるものの、実際に例を計算する場合は基底の入れ替えによる影響を扱えた方が楽である。

ここでは基底の入れ替えによる対称行列の変化を考える。

Proposition 1.13. [1, p.21]
n 次元線型空間 V の基底 2 組 $\{v_i\}, \{w_i\}$ とその正則変換行列 $P = (p_{i,j})_{i,j}$ があるとする。

$$
\begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}
$$

このとき
$$\begin{bmatrix} v_1^* & \cdots & v_n^* \end{bmatrix} {}^{\mathrm{T}}P = \begin{bmatrix} w_1^* & \cdots & w_n^* \end{bmatrix}$$
となる。ただし、上の式は各 v_j, w_j^* について
$$v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} w_i$$
$$w_j^* = \sum_{i}^{n} p_{j,i} v_i^*$$
であることを意味する。

V 上の二次形式 Q について、基底 $\{v_i\}_i, \{w_i\}_i$ についての付随する対象行列をそれぞれ A_v, A_w とおくと、
$$A_w = {}^{\mathrm{T}}PA_vP$$
となる。 □

Remark. $\{w_i\}$ から $\{v_i\}$ へと基底を取り替えて対称行列を見る時、$A_v = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}A_wP^{-1}$ となる。念の為書いておくと、${}^{\mathrm{T}}\left(P^{-1}\right) = \left({}^{\mathrm{T}}P\right)^{-1}$ である。実際、P による同型射を $f : V \longrightarrow V$ とすると、$1 = f^{-1}f$ より $1 = f^*\left(f^{-1}\right)^*$ であるから $\left(f^{-1}\right)^* = (f^*)^{-1}$ が成立する。これは表現行列で言えば ${}^{\mathrm{T}}\left(P^{-1}\right) = \left({}^{\mathrm{T}}P\right)^{-1}$ ということになる。従って、転置と逆行列は順番を区別せずに ${}^{\mathrm{T}}P^{-1}$ と書く。

Proof. A_v, A_w はそれぞれ Q の付随線型射 $h : V \longrightarrow V^*$ の $\{v_i\}, \{w_i\}$ に関する表現行列であった。
$$\begin{tikzcd} \underset{\{w_i\}}{V} \arrow[r, "A_w"] \arrow[d, "P"'] & \underset{\{w_i^*\}}{V^*} \\ \underset{\{v_i\}}{V} \arrow[r, "A_v"] & \underset{\{v_i^*\}}{V^*} \arrow[u, "{}^{\mathrm{T}}P"'] \end{tikzcd}$$
$P, {}^{\mathrm{T}}P$ はそれぞれ V, V^* の基底の変換であり、$A_w, {}^{\mathrm{T}}PA_vP$ はどちらも $\{w_i\}$ に関する h の表現行列だから、$A_w = {}^{\mathrm{T}}PA_vP$ である。従ってこれが Q に付随する対象行列の対応となる。 □

1.4 非退化性

Definition 1.14. [1, p.22]
対称双線型形式 $B : V^2 \longrightarrow k$ が非退化 (non-degenerate) であるとは、任意の $x \in V$ に対し

て、$x \neq 0$ であれば、ある $y \in V$ が存在して $B(x,y) \neq 0$ となることである。このとき、付随する二次形式 Q も非退化であるということにする。 □

Proposition 1.15. [1, p.22]
二次形式 Q、付随する線型射を h、対称行列を A とする。次が同値である。

(1) Q が非退化
(2) h が同型
(3) A が正則

Proof. 1.11 より (2) と (3) が同値であることはよい。

Q が非退化であるとする。このとき h に関して、$x \in V$ が $x \neq 0$ であれば、ある $y \in V$ があって $(h(x))(y) \neq 0$ となるのが非退化性の定義であった。それは $h(x) \neq 0$ であるということだから、すなわち h は単射である。従って次元定理より h が同型であるとわかる。

逆に h が同型ならばやはり任意の $x \in V$ について $x \neq 0$ ならば $h(x)$ が零射でないから Q は非退化である。 □

1.5　等方性

Definition 1.16. [1, p23]
$Q : V \longrightarrow k$ は二次形式、$h : V \longrightarrow V^*$ は Q に付随する線型射であるとする。このとき、部分空間 $W \subset V$ に対して

$$W^{\perp_Q} := \{x \in V \,|\, h(x) = 0\} = h^{-1}\left(W^{\perp}\right)$$

とおき、これを Q に関する W の直交補空間と呼ぶ。

また、$W \subseteq W^{\perp_Q}$ であるとき、W は Q についての等方部分空間 (isotropic subspace) であるという。特に $0 \neq x \in V$ について kx が等方部分空間であるとき、x は等方ベクトルであるという。 □

Remark. 二次形式 Q に対して、付随する対称双線型形式 $B : V \times V \longrightarrow k$ はベクトル空間 V に対して「対称的な内積もどき」を与える。正値性 (任意の $x \in V$ に対して $x \neq 0$ ならば $B(x,x)0$) は満たさないが、双線型かつ対称的である。その意味で Q についての W の直交補空間は、与えられた内積もどき B によって W と直交する (内積が 0 になる) 元全体の空間だと思えばよい。

この内積もどきには正値性を満たさないが故の捻れが何種類か存在する。このうち、す

べての元と直交する元 $x \in V$ はつまり $B(x,V)=(0)$ となるものだから、二次形式の退化性そのものである。別の言い方をすれば次のようになる。

Proposition 1.17. [1, p24]
$Q: V \longrightarrow k$ は二次形式とする。$V^{\perp_Q}=(0)$ であることと Q が非退化であることは同値である。 □

Proof. $V^{\perp_Q}=(0)$ であるとしよう。Q に付随する線型射 $h: V \longrightarrow V^*$ について、$h^{-1}\left(V^{\perp}\right)=(0)$ である、ということであるが、定義から $V^{\perp}=(0)$ であるからこれはただ単に $\mathrm{Ker}\, h=(0)$ ということである。つまり h が同型射だから Q は非退化である。

逆に Q が非退化であるならば h が同型より、やはり $V^{\perp_Q}=\mathrm{Ker}\, h=(0)$ である。 □

等方ベクトルは自分自身と直交するベクトルだと言える。

Example 1.18. [1, p24]
$Q := X_1^2 - X_2^2$ とする。Q の等方ベクトルを求めよう。$0 \neq x \in V$ が Q についての等方ベクトルであるとは $(kx)^{\perp_Q} \subset kx$ であることだから、付随する双線型形式を B として、$B(x,x)=0$ であればよい。

ここで

$$\begin{aligned} B(x,x) &= \frac{1}{2}\left(Q(2x) - 2Q(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(4Q(x) - 2Q(x)\right) \\ &= Q(x) \end{aligned}$$

であるから、つまり等方ベクトルは $Q(x)=0$ を満たすものである。

$Q(x) = v_1^*(x)^2 - v_2^*(x)^2$ であるから、従って $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$ と書くとすれば x が等方ベクトルとなる必要充分条件は

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

である。従って $x_1 = x_2$ または $x_1 = -x_2$ の時、x は等方である。 □

実際に $k=\mathbb{R}$ として平面上に等方ベクトルの成す集合を図示すれば、等方ベクトル全体のなす空間が部分空間とならないことがすぐにわかる[*6]。等方ベクトルの存在について非退化性は寄与しない (必要条件ではあるが)。

Example 1.19. [1, p24]

[*6] もっとも、等方ベクトルの定義から 0 を排除しているから部分空間にならないこと自体は自明。ここでは等方ベクトルの和が等方となるとは限らない例をあげたかった。

$Q = X_1^2 + X_2^2$ としよう。基底や付随する射の表記を先と同じようにするとして、$x = x_1 v_1 + x_2 v_2$ が等方ベクトルであることは

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

が必要充分条件である。これは計算すればわかる通り、B は Euclid 空間で通常使われる内積と同じものであり、k が $\sqrt{-1}$ を持たない限り等方ベクトルは存在しない。 $\square$

<u>Proposition</u> 1.20. [1, p24]
$Q : V \longrightarrow k$ は二次形式、$W \subset V$ は部分空間とする。次が成立する。

(1) $\dim W^{\perp_Q} \geq \dim V - \dim W$
(2) Q が非退化であれば上の式は等号が成立する。
(3) Q が非退化であれば $\left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q} = W$ である。

<u>Proof</u>. Q に付随する線型射を $h : V \longrightarrow V^*$ とおく。$W^{\perp_Q} = h^{-1}\left(W^{\perp}\right)$ であったから、$\dim W^{\perp_Q} \geq \dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$ である。

　また、Q が非退化ならば h が同型だから、$\dim h^{-1}\left(W^{\perp}\right) = \dim W^{\perp}$ となる。従って $\dim W^{\perp_Q} = \dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$ だから等号が成り立つ。このとき、$V^{**} = V$ とみなせば $W \subset W^{\perp_Q \perp_Q}$ だから、次元に関する上の等式から $W^{\perp_Q \perp_Q} = W$ となる。 $\square$

<u>Corollary</u> 1.21. [1, p24]
非退化二次形式 $Q : V \longrightarrow k$ に関する等方部分空間 $W \subset V$ は $\dim W \leq \frac{\dim V}{2}$ を満たす。 $\square$

<u>Proof</u>. 上の命題から $\dim W + \dim W^{\perp_Q} = \dim V$ である。また等方性から $W \subset W^{\perp_Q}$ であるから $\dim W \leq \dim W^{\perp_Q}$、従って $\dim W \leq \frac{\dim V}{2}$ である。 $\square$

1.6 双対二次形式

Q は非退化二次形式、$h : V \longrightarrow V^*$ は付随する線型射とする。h は同型だから、

$$Q^* : V^* \xrightarrow{h^{-1}} V \xrightarrow{Q} k$$

が二次形式となる。これを Q の双対二次形式とよぶ。

<u>Theorem</u> 1.22. [1, p22]
Q は非退化二次形式、A はそれぞれ付随する対称行列とする。Q^* に付随する対称行列は A^{-1} となる。 □

<u>Proof</u>. Q に付随する線型射を $h : V \longrightarrow V^*$、双線型形式を $B : V \times V \longrightarrow k$ とする。Q^* に付随する線型射 h' を考え、この表現行列から付随する対称行列を考えよう。

Q^* の対称双線型形式 B' は $x, y \in V^*$ に対して

$$B'(x,y) = B\left(h^{-1}(x), h^{-1}(y)\right)$$

となる。実際、B' を Q^* に基づいて計算すると

$$\begin{aligned} B'(x,y) &= \frac{1}{2}\left(Q^*(x+y) - Q^*(x) - Q^*(y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q\left(h^{-1}(x) + h^{-1}(y)\right) - Q\left(h^{-1}(x)\right) - Q\left(h^{-1}(y)\right)\right) \end{aligned}$$

である。これは先の式の右辺に等しい。

従って、$h' : V^* \longrightarrow V^{**}$ は $x, y \in V^*$ に対して

$$\begin{aligned} \left(h'(x)\right)(y) &= B'(x,y) \\ &= B\left(h^{-1}(x), h^{-1}(y)\right) \\ &= \left(h\left(h^{-1}(x)\right)\right)\left(h^{-1}(y)\right) \\ &= xh^{-1}(y) \\ &= \left(h^{-1*}(x)\right)(y) \end{aligned}$$

となる。これはつまり $h^{-1*}(x) = h'(x)$ が任意の $x \in V^*$ に対して成立するということだから、つまり $h' = h^{-1*}$ である。従ってこの表現行列は ${}^{\mathrm{T}}A^{-1}$、すなわち A^{-1} である[*7]。

[*7] A が対称正則行列ならば A^{-1} もそうである。実際 $A^{-1}A = E = {}^{\mathrm{T}}E = {}^{\mathrm{T}}A\,{}^{\mathrm{T}}A^{-1} = A\,{}^{\mathrm{T}}A^{-1}$ であるから逆行列の一意性から ${}^{\mathrm{T}}A^{-1} = A^{-1}$ であると言える。

参考文献

[1] 川又雄二郎. 射影空間の幾何学. 朝倉書店, 2001.