1　上半束

半順序集合と上限、下限、最大元、最小元については既知とする[*1]。

1.1　上半束の構造の一意性

束のよくある導入として、束は有限個の元に対して上限下限が定まる半順序集合としての定義と、各種等式 (冪等性、可換性、結合性、吸収性) を満たす二種類の演算を持つ構造としての定義があって、この二つの定義が同値であることが示される。

今回は上半束に対しても同様の特徴づけがあることをみる。

Theorem 1.1. 上半束の定義性質 [1]
A は演算 $(\vee): A\times A \longrightarrow A$ を持つ可換モノイド (単位元付き可換半群) で単位元は $0\in A$ とする。任意の $a\in A$ に対して冪等律

$$a\vee a = a$$

が成立するとき、A に次を満たす半順序構造が一意的に定まる。

1. 任意の $a,b\in A$ に対して $a\vee b=\sup\{a,b\}$ となる。
2. $0=\min A$ となる。

□

Proof. 半順序 $a\leq b$ を $a\vee b=b$ で定める。まずはこれが本当に半順序となることを確かめよう。

冪等律より $a\vee a=a$ であるから、任意の $a\in A$ に対して $a\leq a$ が成り立つ。よって $(\leq)$ は反射的である。

$a\leq b$ かつ $b\leq a$ であるとすると、$a\vee b=b$ かつ $b\vee a=a$ である。演算は可換だから $a=b$ が成り立つ。よって反対称的である。

[*1] と思ったがここまで基礎的なところから始めたんだからそのうちちゃんと書こう。

最後に $a \leq b$ かつ $b \leq c$ であるとする。このとき

$$\begin{aligned} a \vee c &= a \vee (b \vee c) \\ &= (a \vee b) \vee c \\ &= b \vee c \\ &= c \end{aligned}$$

であるから $a \leq c$ である。よって推移的である。

以上より $(\leq)$ は A 上の半順序を定めることがわかった。

次に、$(\leq)$ が二つの性質を満たすことを示そう。

まず $a \vee b$ が a, b の上限であることを示す。$a, b \in A$ について、

$$\begin{aligned} a \vee (a \vee b) &= (a \vee a) \vee b \\ &= a \vee b \\ b \vee (a \vee b) &= a \vee (b \vee b) \\ &= a \vee b \end{aligned}$$

であるから、$a \leq a \vee b$ かつ $b \leq a \vee b$ である。

次に $a, b \in A$ に対して $c \in A$ が $a \leq c$ かつ $b \leq c$ を満たすとしよう。このとき

$$\begin{aligned} (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) \\ &= a \vee c \\ &= c \end{aligned}$$

であるから、よって $a \vee b \leq c$ である。

よって $a \vee b$ は a, b の上界の最小限である。

二つ目の性質、0 が A の最小限であることを示そう。各 $a \in A$ に対して、

$$0 \vee a = a$$

であるから $0 \leq a$ である。よって $0 = \min A$。

よって $(\leq)$ は主張にある二つの性質を満たす。

最後にこのような順序は上で構成した $(\leq)$ でしかありえないことを示そう。

仮に上の二条件を満たす A 上の半順序 $(\sqsubseteq)$ があったとする。これが上で定めた $(\leq)$ と同値であることをみればよい。

もし $a, b \in A$ が $a \sqsubseteq b$ を満たすとすると、$\sup\limits_{(\sqsubseteq)} \{a, b\} = a \vee b$ となるのであった[*2]。また

[*2] ただし $\sup\limits_{(\sqsubseteq)}$ は半順序 $(\sqsubseteq)$ についての上限とする。

$a \sqsubseteq b$ であるならば $\sup_{(\sqsubseteq)}\{a,b\} = b$ であるから $b = a \vee b$ が成り立つ。よって $a \leq b$ である。

逆に $a \leq b$ が成り立つならば、$\sup_{(\sqsubseteq)}\{a,b\} = a \vee b = b$ であるから、$a \sqsubseteq b$ が成り立つ。

以上より、$a \leq b \Leftrightarrow a \sqsubseteq b$ であるから二条件を満たす半順序は一意に定まる。 □

Definition 1.2. 上の定理で可換冪等モノイドに一意的に定まる半順序構造を半束、特に上半束や結び半束 (join semi-lattice) などと呼ぶ。演算 $(\vee)$ を結び (join) と呼ぶ。これの双対として、モノイド $(A, \wedge, 1)$ に対して $a \leq b$ を $a \wedge b = a$ で定めた順序については、演算 $(\wedge)$ を交わり (meet)、半順序構造を下半束または交わり半束 (meet semi-lattice) と呼ぶ。 □

ここでいう上半束は下に有界である (最小元を持つ) ことに注意。もちろん逆に上半束を「有限個の元に対して上限が定まる半順序集合」として定めれば、これは二項上限を演算に最小元を単位元とする冪等モノイドであり、この冪等性から構成される上半束構造は元のものと一致する。

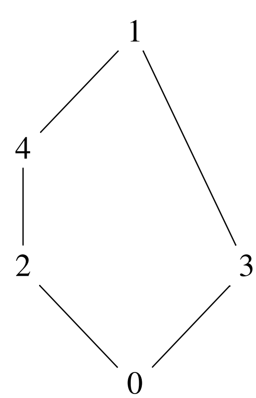
Lemma 1.3. 上半束の間のモノイド写像[*3] $f : A \longrightarrow B$ は順序を保存する。 □

Proof. $a_1, a_2 \in A$ に対して $f(a_1 \vee a_2) = f(a_1) \vee f(a_2)$ である。よってもし $a_1 \leq a_2$ であるならば、

$$\begin{aligned} f(a_1) \vee f(a_2) &= f(a_1 \vee a_2) \\ &= f(a_2) \end{aligned}$$

であるから $f(a_1) \leq f(a_2)$ である。 □

Example 1.4. 半束間の順序保存写像であってもモノイド構造を保つとは限らない。次の上半束を考える。



[*3] ここでいうモノイド写像は半群構造と単位元を保つ写像のことである。

これを順序保存写像 f で次のような半束に写すとする。

$$
\begin{tikzcd}
f(1) \arrow[d, dash] \\
f(2)=f(4) \arrow[d, dash] \\
f(3) \arrow[d, dash] \\
f(0)
\end{tikzcd}
$$

このとき、$f(3)\vee f(4)=f(4)\neq 1$ であるが、$f(3\vee 4)=f(1)=1$ である。従って半群構造を保たない。

Example 1.5. 0 を保たない順序保存写像もある。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dash] & f(1) \arrow[d, dash] \\
2 \arrow[d, dash] & f(2) \arrow[d, dash] \\
0 & f(0) \arrow[d, dash] \\
 & 0'
\end{tikzcd}
$$

Definition 1.6. 上半束の準同型を、モノイド準同型として定める。 □

1.2　束と上半束

Definition 1.7. 任意有限個の元に対して上限、下限が定まる半順序集合を束 (lattice) と呼ぶ。 □

上半束の定義で述べた通り、束は結びと交わりの演算が備えられているものとして定義されることも多い。この場合、演算がそれぞれ冪等律、結合律、交換律を満たし、かつ結びと交わりの関係式として吸収律を満たすものとされる。

今回は空集合に対しても上限下限が定まるように定義されているため、特に最大元と最小元が定まる。先に定義した上半束、下半束を用いれば束は次のように特徴付けられる。

Theorem 1.8. [1]
集合 A が二つの半束構造 $(A, \wedge, 1), (A, \vee, 0)$ を持ち、それぞれについて定まる半順序を $\leq_{\mathrm{MSL}}$、$\leq_{\mathrm{JSL}}$ とする[*4]。ただし $(\wedge, \leq_{\mathrm{MSL}})$ が下半束、$(\vee, \leq_{\mathrm{JSL}})$ が上半束を定めるとする。

この二つの順序が一致することと、任意の $a, b \in A$ に対して吸収律

$$a \wedge (a \vee b) = a$$
$$a \vee (a \wedge b) = a$$

が成立することが同値である。 □

$\leq_{\mathrm{JSL}}$ と $\leq_{\mathrm{MSL}}$ が一致する、ということはこれらで定まる半順序構造において有限部分集合に対する上限と下限が常に得られるということだからつまりは束を成すということである。つまりこの定理が束の定義性質である[*5]。

Proof. まず吸収律が成立するとき二つの順序が一致することを示そう。

$a \leq_{\mathrm{MSL}} b$ が成立するとする。このとき定義から $a \wedge b = a$ が成り立つ。よって両辺に b で結びを取れば

$$(a \wedge b) \vee b = a \vee b$$

である。吸収律から左辺は b に等しいから $b = a \vee b$ が成立、よって $a \leq_{\mathrm{JSL}} b$ である。

逆に $a \leq_{\mathrm{JSL}} b$ が成立するとすれば $a \vee b = b$ であるから a で交わりをとって

$$a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$$

である。左辺は吸収律から a に等しい。従って $a = a \wedge b$、つまり $a \leq_{\mathrm{MSL}} b$ である。

従って吸収律が成立すれば $(\leq_{\mathrm{JSL}})$ と $(\leq_{\mathrm{MSL}})$ は等価な順序である。

次に二つの順序が等価であれば吸収律が成り立つことを見る。$a, b \in A$ に対して $a \wedge b$ が a, b の下限であるから特に $a \wedge b \leq_{\mathrm{MSL}} a$ が成り立つ。従って $a \wedge b \leq_{\mathrm{JSL}} a$ である。よって定義から $a \vee (a \wedge b) = a$ である。もう一方の関係式はこの双対をとればよい。 □

束の中の良いクラスとして分配束がある。

Definition 1.9. 分配律と呼ばれる次の関係式を満たす束を分配束と呼ぶ:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

[*4] MSL は Meet Semi Lattice、JSL は Join Semi Lattice の略。

[*5] 上半束の定義がこの類の性質 (あるモノイド構造から一意的に定まる半順序構造) を用いて導入されたにも関わらず束の定義が普通 (有限部分集合に対する上限/下限をもつ半順序集合) であるのは一貫性に欠けている。しかしこれは単なる気分の問題なので気にしなくてよい。これを書いたときはそういう気分だった。

□

この関係式の双対もあるが、どちらか一方について満たしていればもう一方の関係式も満たされることが知られている。

Proposition 1.10. [1]
A は束とする。次の二つは同値である。

(1) 全ての $a,b,c \in A$ に対して $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ が成立する。
(2) 全ての $a,b,c \in A$ に対して $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ が成立する。

□

Proof. (1) が成立するとして (2) が成り立つことを示そう。任意に $a,b,c \in A$ をとる。

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= \underbrace{((a \wedge b) \vee a)}_{\text{吸収律より } a \text{ に等しい}} \wedge ((a \wedge b) \vee c) \\
&= a \wedge ((a \wedge b) \vee c) \\
&= a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \\
&= \underbrace{(a \wedge (a \vee c))}_{\text{吸収律より } a \text{ に等しい}} \wedge (b \vee c) \\
&= a \wedge (b \vee c)
\end{aligned}
$$

よって (2) が成り立つ。双対な議論によって (2) から (1) が成立することも同様に示される。 □

1.3 半束のイデアル

Definition 1.11. 上半束 A の空でない部分集合 $I \subset A$ は

1. 下方に閉じている ($a \leq b$ かつ $b \in I$ ならば $a \in I$)
2. 有限個の元の結びで閉じている (有限集合 $F \subset I$ に対して $\sup F \in I$ である)

を満たすとき、A のイデアルと呼ぶ。特に $\sup \emptyset = 0 \in I$ であるからイデアルは常に最小元を含むことに注意。 □

例として $a \in A$ に対して a の下方の集合

$$\downarrow a := \{x \in A \,|\, x \leq a\}$$

はイデアルをなす。このようなイデアルは特に単項イデアル (principal ideal) と呼ぶ。

Proposition 1.12. A は上半束、I,J はそのイデアルとする。

(1) $I \cap J$ はイデアルをなす。
(2) A が分配束ならば

$$I \vee J := \{x \vee y | x \in I,\ y \in J\}$$

はイデアルをなす。

□

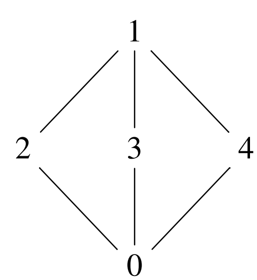
Proof. $I \cap J$ は下方に閉であって、かつ有限部分集合は I にも J にも含まれるからその上限はやはり I にも J にも含まれる。よって $I \cap J$ は A のイデアルをなす。

A を分配束とする。$I \vee J$ について示そう。$x \in I$,$y \in J$ として $a \in A$ が $a \le x \vee y$ を満たすとする。このとき $a \wedge (x \vee y) = a$ であるから

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (x \vee y) \\ &= \underbrace{(a \wedge x)}_{\le x \in I} \vee \underbrace{(a \wedge y)}_{\le y \in J} \\ &\in I \vee J \end{aligned}$$

である。また結びで閉じ、かつ 0 も持つから有限部分集合の上限で閉じている。

Example 1.13. 分配的でない束の場合、$I \vee J$ がイデアルになるとは限らない。



上図に示した半順序集合は束であるが分配的ではない。

$$2 \wedge (3 \vee 4) = 2 \wedge 1 = 2$$
$$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4) = 0 \vee 0 = 0$$

この束において $1 \in (\downarrow 2) \vee (\downarrow 3)$ であるが $4 \notin (\downarrow 2) \vee (\downarrow 3)$ である。よってこれは下方に閉じておらずイデアルではない。

また、$I \vee J$ について言及されれば $I \wedge J$ についても気になるところだが、これもすぐに示される。

Proposition 1.14. A は束とする。イデアル $I, J \subseteq A$ について

$$I \wedge J := \{x \wedge y \mid x \in I,\ y \in J\}$$

とおけば $I \wedge J$ はイデアルをなし、かつ $I \cap J$ に等しい。 □

Proof. $I \wedge J = I \cap J$ を示せば十分。$I \wedge J \subseteq I \cap J$ は自明 (I, J がそれぞれ下方に閉だから)。

$I \cap J \subseteq I \wedge J$ についてもほぼ自明。$x \in I \cap J$ ならば $x = x \wedge x \in I \wedge J$ である。

$I \cap J$ がイデアルとなることはすでに示したから、主張は示された。 □

Theorem 1.15. 分配束の場合はイデアルの演算で $I \vee J$、$I \wedge J$ が両方得られるからイデアル全体の集合が束となる。 □

Proof. 結び、交わりが定まるので自明である。 □

さらに任意のイデアルの族についてその共通部分が再びイデアルとなることを考えればこの束における交わりは任意のイデアルの族に対する演算へと拡張できる。ついでに完備束について触れておこう。

Definition 1.16. 完備束

半順序集合 A は、その任意の部分集合に対して上限および下限が定まるとき、完備束 (complete lattice) であるという。 □

次の命題より、束のイデアル全体が成す束は完備であることがわかる。

Proposition 1.17. 半順序集合 A について次が同値である。

(1) A は完備束である。

(2) A は任意の部分集合について上限をもつ。

(3) A は任意の部分集合について下限をもつ。

□

Proof. A が任意の部分集合について下限をもつとき、任意の部分集合について上限をもつことを示せば十分である。

$S \subset A$ を任意にとる。いま、$T \subset A$ は S の上界全体の成す部分集合とする。A は下限をもつから $t := \inf T$ とおく。

t が S の上限であることを示そう。$s \in S$ に対して任意の $x \in T$ は $s \leq x$ を満たすから、下限の定義より $s \leq t$ である。従って t は S の上界である。また t は T の下界であるから、S の任意の上界 $x \in A$ に対して (これはつまり $x \in T$ であるから)$t \leq x$ が成り立つ。従って t は S の上界の最小元であり、すなわち S の上限である。

よって任意の部分集合 $S \subset A$ は上限をもつ。特に上限、下限の両方を持つから完備束である。 $\square$

先の例では束のイデアル全体のなす族が再び束となり、任意の部分族が下限をもつことをみた。つまりこれは完備束である。束 A のイデアル全体のなす完備束を $\mathrm{Idl}(A)$ と表記する。

Q. 完備束の特徴づけはないか？例えばある $f : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$ があってこいつがなになにを満たす、みたいな。 $\square$

Q. 完備束 L に対して、完備束の同型対応 $L \simeq \mathrm{Idl}(A)$ が成り立つような束 A は常に存在するか？ただし完備束の同型とは上限と下限を保つ順序保存写像とする。 $\square$

*6

参考文献

[1] Peter T. Johnstone. *Stone spaces*. Cambridge University Press.

[2] M.F.Atiyah and I.G.MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.

*6 dammy:[2]