Affine 空間について

木村

目次

1　affine 空間

ここでは k は体とする。また、特に断らない限り、登場する k 上の線型空間はすべて有限次元のものとする。

1.1　affine 空間とその部分空間

Definition 1.1. [1, p.44]
集合 A、線型空間 V、加法群としての V から A への作用 $\tau : V \times A \longrightarrow A$ とする。

▷ 任意の $P \in A$ について、$\tau_P = \tau(-,P) : V \longrightarrow A$ が全単射となる。

この条件を満たすとき、これらの組 (A,V,τ) は affine 空間であるという。A は V 上の主等質空間 (torsor)、V は A の平行移動の群 (translation group) とよぶ。しばしば平行移動の群やその作用を省略して affine 空間 (A,V)、または A などと書くこともある。

V の線型空間としての次元を affine 空間 A の次元として定め、$\dim A$ と書く。

Example 1.2. n 次元線型空間 k^n は和によって自然に affine 空間となる。線型空間としての k^n と区別して、この affine 空間を $\mathbb{A}^n := (k^n, k^n, (+))$ と書く。 □

Definition 1.3. [1, p.45]
$A = (A,V,\tau)$ を affine 空間とする。部分集合 $B \subset A$、部分空間 $W \subset V$ について、$(B,W,\tau|_{W\times B})$ が affine 空間となるとき、これを A の affine 線型部分空間と呼ぶ。誤解がない場合は単に部分空間とよぶ。

特に $\dim W = 1$ のとき、B は affine 直線と呼び、$\dim W = \dim V - 1$ となるとき B を affine 超平面と呼ぶ。

また、二つの affine 部分空間 $B, B' \subset A$ が同じ平行移動の群を持つ時、これらは平行であるという。 □

次の事実は affine 空間の定義から自明であるが、非常によく使うので書いておく。

Proposition 1.4. (A,V,τ) は affine 空間、$P,Q \in A$ とする。このとき、$P = v + Q$ となる $v \in V$ が一意的に存在する。 □

Proof. $\tau_Q : V \longrightarrow A$ が全単射だから、$P \in A$ に対応する元 $v := \tau_Q^{-1}(P)$ が得られる。この元は定義から $P = \tau_Q(v) = v + Q$ である。 □

Definition 1.5. $P,Q \in A$ に対して $P = v + Q$ となる一意的な $v \in V$ を $\overline{QP}$ と書く。 □

Lemma 1.6. $P,Q \in A$ について $\overline{PQ} = -\overline{QP}$ である。 □

Proof. $P = \overline{QP} + Q$ より $-\overline{QP} + P = Q$ である。一意性から $\overline{PQ} = -\overline{QP}$ である。 □

Proposition 1.7. [1, p.45]
(A,V) は affine 空間、部分集合 $B \subset A$ について、次が同値である。

(1) B は A の affine 部分空間
(2) 任意の $Q \in B$ について、

$$W_Q := \{v \in V \,|\, v + Q \in B\}$$

とおけば W_Q は V の部分空間を成す。

Proof. B が affine 部分空間であるとする。平行移動の群を W とする。$Q \in B$ を任意にとって W_Q が V の部分空間となることを示そう。

定義から $W \subseteq W_Q$ である。また任意に $w \in W_Q$ をとれば $w + Q \in B$ であるから w は $\tau_Q^{-1} : B \longrightarrow W$ の像に属する。よって $w \in W$ である。よって $W = W_Q$ だから W_Q は部分空間を成す。

逆に $Q \in B$ を任意にとれば W_Q が V の部分空間となるとしよう。このとき B が affine 部分空間であることを示す。

Claim. 任意の $P,Q \in B$ について $W_P = W_Q$ である。 □

$P \in B$ について $W_P \subseteq W_Q$ を示せば、対称性から $W_Q \subseteq W_P$ でもあり、従って $W_P = W_Q$ が従う。

任意の $w \in W_Q$ について、

$$\begin{aligned} w + Q &= w + \overline{PQ} + P \\ &\in B \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $w + \overline{PQ} \in W_P$。ここで $\overline{PQ} \in W_P$ かつ W_P が部分空間であることから $w \in W_P$ となる。よって $W_Q \subseteq W_P$ である。 □

よって $W := \bigcap_{Q \in B} W_Q$ とすれば、任意の $Q \in B$ について $W = W_Q$ である。

(B,W) が affine 部分空間を成すことを示そう。任意の $Q \in B$ について $\tau_Q : W \longrightarrow B$ が well-defined であり、単射であることはよい。

全射であることを示そう。任意の $P \in B$ について、$P = \overline{QP} + Q$ であるから $\overline{QP} \in W_Q = W$ である。よって $P \in \operatorname{Im} \tau_Q|_{B\times W}$ である。よって $\tau_Q : W \longrightarrow B$ は全単射だから、(B,W) は A の affine 部分空間をなす。 □

特に次が言える。

Corollary 1.8. 部分空間 $(B,W) \subset (A,V)$ について、任意の $P \in B$ に対して

$$W = W_P = \{v \in V \,|\, v + P \in B\}$$

が成立する。 □

affine 空間は原点を持たない線型空間であると言えるが、特に原点を指定した形で書くのも便利である。

Proposition 1.9. (A,V) は affine 空間、(B,W) はその affine 線型部分空間とする。$Q \in B$ に対して $B = W + Q$ とかける。

逆に任意の部分空間 $W' \subset V$ と $P \in A$ に対して $W' + P$ は A の affine 線型部分空間となる。 □

Proof. 定義から $\tau_Q : W \longrightarrow B$ が全単射だから $B = W + Q$ という表示は自明に正しい。

$W' + P$ が affine 線型部分空間であることを示そう。$Q \in W' + P$ を任意に取ると、$\overline{PQ} \in W'$ である。

任意の $x \in V$ について、$x + Q \in W' + P$ であることと $x \in W'$ であることが同値であることを示せばよい。

$x + Q \in W' + P$ ならば $x + Q = \left(x + \overline{PQ}\right) + P$ であるから、$x + \overline{PQ} \in W'$ である。よって $x \in W'$ が導かれる。

逆に $x \in W'$ ならば $x' + \overline{PQ} \in W'$ であるから、$x + Q = \left(x + \overline{PQ}\right) + P \in W' + P$ である。

よって $W' + P$ は affine 線型部分空間となる。 □

1.2 基本的な幾何的性質

直線や二次元平面に関する基本的な性質が affine 空間でもきちんと成立することを示す。affine 空間はいわゆる普通の空間 (Euclid 空間) に近い性質を持つ。

Proposition 1.10. [1, p.45]
(A,V) は affine 空間とする。相異なる二点 $P_1, P_2 \in A$ を任意にとれば、これらを通る affine 直線がただ一つ存在する。 □

Proof. $L := k\overline{P_1P_2} + P_1$ とすればこれは P_1, P_2 ともに通る affine 直線である。逆に L' が二点を通る直線であるとすれば、$P_1 \in L'$ かつその平行移動群に $\overline{P_1P_2}$ を含むから $L \subseteq L'$ である。$\dim L' = 1$ より平行移動群が $k\overline{P_1P_2}$ に一致するから $L' = k\overline{P_1P_2} + P_1 = L$ となることがわかる。 □

Proposition 1.11. [1, p.45]
(A, V) は affine 空間、$L_1, L_2 \subset A$ は相異なる affine 直線とする。このとき、$^{\#}(L_1 \cap L_2) \leq 1$ である。

また $\dim A = 2$ の場合、$^{\#}(L_1 \cap L_2) = 0$ であることと L_1, L_2 が平行であることは同値である。 □

Proof. L_1, L_2 が 2 点以上の交点を持てば、それらを通る直線はただ一つしか存在しないので $L_1 = L_2$ となってしまう. よって相異なる直線の交点は高々一点。

L_1, L_2 の平行移動群をそれぞれ W_1, W_2 とおく。

$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ であるとする。$P \in L_1 \cap L_2$ とおく。

$0 \neq v \in W_1$ を任意にとる。$v + P \in L_1$ である。もし $v + P \in L_2$ でもあるならば、$v + P \neq P$ かつ $v + P, P \in L_1 \cap L_2$ となるから、2 点を通る affine 直線の一意性から $L_1 = L_2$ となる。しかしこれは L_1, L_2 が相異なる直線であるという前提に反する。従って $v + P \notin L_2$ である。部分空間についての性質から、$W_2 = W_P = \{w \in V \,|\, w + P \in L_2\}$ であるから、$v \notin W_2$ である。従って $W_1 \neq W_2$。

逆に $W_1 \neq W_2$ であるならば $\dim V = 2$ かつ $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$ であることから、$V = W_1 + W_2$ である。従って任意に $P_1 \in L_1$、$P_2 \in L_2$ を取れば、$\overline{P_1P_2} = v_1 + v_2$ となるような $v_1 \in W_1$ および $v_2 \in W_2$ が存在する。このとき $P_2 = v_1 + v_2 + P_1$ であるから、

$$v_1 + P_1 = -v_2 + P_2$$

が成立する。左辺は L_1 の元で、右辺は L_2 の元であるから、これは $L_1 \cap L_2$ の元ということになる。P_1, P_2 はそれぞれの直線から任意に取ってきた点であり、L_1, L_2 が空でないことは自明だから、従って上式を満たす P_1, P_2, v_1, v_2 は存在し、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ であることを導く。

以上より $W_1 \neq W_2$ であることと、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ であることが同値である。 □

証明からわかる通り、以下は 2 次元でなくとも成立する。

Corollary 1.12. 平行な affine 直線は一致するかまたは共通部分を持たない。 □

2　affine 線型写像

2.1　affine 線型写像と affine 同型

Definition 2.1. [1, p.46]
二つの affine 空間 $(A,V),(B,W)$ の間の affine 線型写像[*1] $f:(A,V)\longrightarrow(B,W)$ とは、torsor の写像 $f_1:A\longrightarrow B$ と線形写像 $f_2:V\longrightarrow W$ の組で、平行移動の作用と両立するものをいう。つまり、任意の $P\in A, v\in V$ について、次を満たす。

$$f_1(v+P)=f_2(v)+f_1(P)$$

また、affine 線型写像 $f:(A,V)\longrightarrow(B,W)$ は $g:(B,W)\longrightarrow(A,V)$ であって $gf=1$ かつ $fg=1$ を満たすものが存在するとき、affine 同型であるという。

なお、ここでいう合成 gf は torsor の写像の合成 g_1f_1 と平行移動群の線型写像の合成 g_2f_2 によって構成される affine 線型写像を指す。[*2]

また、(A,V) 上の自己同型全体の成す群を $\mathrm{Aut}(A,V)$ と書く。 □

Proposition 2.2. affine 線型射 $f:(A,V)\longrightarrow(B,W)$ について、torsor の写像 $f_1:A\longrightarrow B$ が全単射ならば f は affine 同型である。 □

教科書によっては最初から torsor の写像が全単射な affine 線型射を同型として定義しているが、ここではそう呼ぶにふさわしいことを素直に確かめることにする。

Proof. f_1 が全単射ならば、f_2 も全単射であり従って線型射として同型である。まずはこの事実を確かめよう。

$P\in A$ を一つ固定すれば、$v\in V$ に対して $f_2(v)=0$ のとき、

$$f_1(v+P)=f_2(v)+f_1(P)=f_1(P)$$

だから f_1 の単射性から $v+P=P$、従って $v=0$ である。よって f_2 は単射である。

また任意の $w\in W$ に対して、f_1 の全射性からある $Q\in A$ が存在して

$$f_1(Q)=w+f_1(P)$$

[*1] affine 線型射とも呼ぶ。

[*2] この合成が正しく affine 線型写像となることの証明は省略する。また恒等射の組み $1_{(A,V)}=(1_A,1_V)$ が affine 線型射となることも簡単だから省略する。

となる。このとき、$Q=\overline{PQ}+P$ であるから、

$$f_1(Q)=f_2\left(\overline{PQ}\right)+f_1(P)$$

よって

$$w=f_2\left(\overline{PQ}\right)$$

である。よって f_2 は全射である。

以上より f_2 は平行移動群の間の線型射として同型であることがわかった。

次に逆射の組 $g:=\left(f_1^{-1},f_2^{-1}\right)$ が affine 線型射をなすことを見よう。これを示せば自明に $gf=1$ かつ $fg=1$ であるから f が affine 同型であることがわかる。

$Q\in B$ と $w\in W$ について、

$$f_1^{-1}(w+Q)=f_2^{-1}(w)+f_1^{-1}(Q)$$

であることを示す。左辺について、f_1 を適用すると

$$f_1\left(f_1^{-1}(w+Q)\right)=w+Q$$

となる。一方右辺については

$$f_1\left(f_2^{-1}(w)+f_1^{-1}(Q)\right)=f_2\left(f_2^{-1}(w)\right)+f_1\left(f_1^{-1}(Q)\right)=w+Q$$

である。両者が等しいから、 f_1 の単射性から

$$f_1^{-1}(w+Q)=f_2^{-1}(w)+f_1^{-1}(Q)$$

が言える。 □

ここではあえて $f=(f_1,f_2)$ といった表記わけをしているが、以降は特に誤解のない限り、f_1,f_2 を表記上区別せず、どちらも f で書き表す。

Proposition 2.3. [1, p.46]
(A,V) は affine 空間、$v\in V$ とする。$t_v:A\longrightarrow A$ を $t_v(P):=v+P$ で定めると、$t_v=(t_v,1_V):(A,V)\longrightarrow(A,V)$ は affine 同型をなす。これを v による平行移動と呼ぶ。 □

Proof. 全単射は明らかだから affine 線型射となることを示そう。任意の $P\in A$ と $w\in V$ に対して、

$$t_v(w+P)=v+(w+P)$$

一方で

$$w+t_v(P)=w+(v+P)$$

となる。明らかに両者は等しいから主張は正しい。 □

次の命題は平行移動の作用に関する結合律や各 $P \in A$ における τ_P の全単射性から自明だが、affine 空間の自己同型群の構造に関して重要である。

Proposition 2.4. [1, p.46]
affine 空間 (A,V) に対して、$t : V \longrightarrow \mathrm{Aut}(A,V)$ を

$$t(v) := t_v = (t_v, 1_V)$$

で定める。この写像は群準同型であり、単射である。 □

Proof. $v,w \in V$、$P \in A$ に対して、$t_{v+w}(P) = (v+w)+P$ であり、一方 $t_v t_w(P) = v+(w+P)$ であるから、$t_{v+w} = t_v t_w$ であることがわかる。よって t は群の準同型である。また、$t_v = 1_A$ であったとすると、$P \in A$ に対して $v+P = P$ であるから $v = 0$ でなくてはならない。よって $\mathrm{Ker}t = (0)$ だから t は単射である。 □

特に affine 同型は作用と両立するから t の像としての $V \subset \mathrm{Aut}(A,V)$ は正規部分群となる。実際、任意の $f \in \mathrm{Aut}(A,V)$ と $v \in V$、$P \in A$ に対して、

$$t_v f(P) = v + f(P) = f\left(f^{-1}(v) + P\right) = f t_{f^{-1}(v)}(P)$$

であるから、$fV = Vf$ である。

Corollary 2.5. $t : V \longrightarrow \mathrm{Aut}(A,V)$ を通して $V \triangleleft \mathrm{Aut}(A,V)$ とみなせる。 □

線型写像は基底の行き先がその写像を完全に特徴付けていた。affine 空間も同じようなことが言える。ただし、線型空間における原点に相当するものがない分、次元より一つ多い点が必要になる。

Theorem 2.6. [1, p.46]
$(A,V),(B,W)$ は affine 空間、$\dim A = n$ とする。$P_0, P_1, \cdots, P_n \in A$ は相異なる元で、A の任意の超平面 $H \subset A$ に対して

$$\{P_0, \cdots, P_n\} \not\subset H$$

を満たすものとする。

この時 $Q_0, \cdots, Q_n \in B$ をとると、affine 線型射 $f : (A,V) \longrightarrow (B,W)$ であって、各 $i = 0, \cdots, n$ について $f(P_i) = Q_i$ となるものが一意的に存在する。 □

Proof. まず初めに、上の条件を満たす $P_0, \cdots, P_n$ について、$\overline{P_0P_1}, \cdots, \overline{P_0P_n}$ は V の基底をなす。実際、$\tau_{P_0} : V \simeq A$ を通して、$P_1, \cdots, P_n$ はそれぞれ V の中で $\overline{P_0P_1}, \cdots, \overline{P_0P_n}$

に対応するが、$P_0,\cdots,P_n$ が A のどの超平面にも同時に含まれない、という条件から $0=\overline{P_0P_0},\overline{P_0P_1},\cdots,\overline{P_0P_n}$ を含むような V の $n-1$ 次元部分空間は存在しない。

(もし存在したら、その部分空間を V' とするとき $V'+P_0$ は $P_0,\cdots,P_n$ を含む A の超平面となる。)

従って $\overline{P_0P_1},\cdots,\overline{P_0P_n}$ は n 次元空間 V を生成する n 個の元であり、したがって基底である。

さて、affine 線型射 $f:(A,V)\longrightarrow(B,W)$ で $f(P_i)=Q_i$ が各 $i=0,\cdots,n$ について成立するようなものが存在するとすれば、任意の $P\in A$ について

$$\begin{aligned} f(P) &= f\left(\overline{P_0P}+P_0\right) \\ &= f\left(\overline{P_0P}\right)+Q_0 \end{aligned}$$

となる。さらに $\left\{\overline{P_0P_i}\right\}_i$ が V の基底となるから、$\overline{P_0P}=a_1\overline{P_0P_1}+\cdots+a_n\overline{P_0P_n}$ となるような $a_1,\cdots,a_n\in k$ の組が一意的に存在して

$$\begin{aligned} f\left(\overline{P_0P}\right) &= f\left(a_1\overline{P_0P_1}+\ldots+a_n\overline{P_0P_n}\right) \\ &= a_1 f\left(\overline{P_0P_1}\right)+\ldots+a_n f\left(\overline{P_0P_n}\right) \end{aligned}$$

となる。

ここで、$P_i=\overline{P_0P_i}+P_0$ より

$$\begin{aligned} Q_i &= f(P_i) \\ &= f\left(\overline{P_0P_i}+P_0\right) \\ &= f\left(\overline{P_0P_i}\right)+Q_0 \end{aligned}$$

であり、かつ $Q_i=\overline{Q_0Q_i}+Q_0$ であるから、従って $f\left(\overline{P_0P_i}\right)=\overline{Q_0Q_i}$ を導く。

よって f の平行移動群の線型射は一意的に定まり、$f(P)$ はさらに計算できて、

$$f(P)=a_1\overline{Q_0Q_1}+\cdots+a_n\overline{Q_0Q_n}+Q_0$$

となる。よって torsor の写像も一意的に定まる。

従ってこのようにして定義した射 f が affine 線型射であることを確かめれば存在と一意性が成立することがわかる。平行移動群の間の線型射が $f\left(\overline{P_0P_i}\right)=\overline{Q_0Q_i}$ で一意的に定ま

るのはよい。torsor の写像も

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_1\overline{P_0P_i}\right)+P_0\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\overline{Q_0Q_i}\right)+Q_0$$

として定められる。任意の $P=\sum a_i\overline{P_0P_i}+P_0\in A$ と $v=\sum b_i\overline{P_0P_i}\in V$ に対して

$$\begin{aligned} f(v+P) &= f\left(\left(\sum(a_i+b_i)\overline{P_0P_i}\right)+P_0\right) \\ &= \left(\sum(a_i+b_i)\overline{Q_0Q_i}\right)+Q_0 \end{aligned}$$

である。一方で

$$f(v)+f(P)=\left(\sum b_i\overline{Q_0Q_i}\right)+\left(\sum a_i\overline{Q_0Q_i}\right)+Q_0$$

であり、これらは等しいから $f(v+P)=f(v)+f(P)$ となる。よって f は各 i について $f(P_i)=Q_i$ を満たす一意的な affine 線型射である。 □

上の定理の証明をみれば分かる通り n 次元 affine 空間においては、どの超平面にも含まれないような部分集合のうち極小のものをとれば、それは $n+1$ 個の元からなる部分集合 $\{P_0,\cdots,P_n\}$ であり、かつ $\overline{P_0P_1},\cdots,\overline{P_0P_n}$ が平行移動群の基底となる。そして affine 線形写像はこのような部分集合への制限が完全に決定するので、線型空間でいうところの基底と似た性質を持つ。

Definition 2.7. n 次元 affine 空間 (A,V) の中の $n+1$ 個の点 $\{P_0,\cdots,P_n\}$ で、$\overline{P_0P_1},\cdots,\overline{P_0P_n}$ が V の基底となるとき、この組を A の基底と呼ぶ。 □

Corollary 2.8. affine 線型射 $f:(A,V)\longrightarrow(B,W)$ について、平行移動群の線型射 $f:V\longrightarrow W$ が同型射であれば、f は affine 線型射として同型である。 □

Proof. A の基底の f による像が B の基底を成すから、torsor の写像 $f:A\longrightarrow B$ が全単射であることがわかる。 □

従って線型空間がそうであったように、任意の affine 空間は同次元の標準 affine 空間と同型である。

Corollary 2.9. [1, p.47]
n 次元 affine 空間 (A,V) について、標準的な n 次元 affine 空間 $\mathbb{A}^n$ との同型射が存在する。 □

Definition 2.10. $\mathbb{A}^n$ の基底を $e_0 = 0,\ e_1, \cdots, e_n$ とするとき、n 次元 affine 空間 A の基底 $P_0, \cdots, P_n \in A$ に対して $f(e_i) = P_i$ となる同型を、基底 $P_0, \cdots, P_n$ に沿う同型と呼ぶ。 □

2.2 affine 線型射の表示と自己同型群の構造

$(A,V),(B,W)$ はそれぞれ n,m 次元の affine 空間とし、それぞれの基底 $P_0, \cdots, P_n \in A$、$Q_0, \cdots, Q_m \in B$ をひと組固定する。線型空間の間の線型写像では、基底を固定することで射の行列表示ができたのであった。同様に affine 線型射 $f : (A,V) \longrightarrow (B,W)$ の表示を考えたい。ここでは無理に行列表示にまとめることを考えず、行列のペアで表す方法を与える。

線型写像の場合、0 は 0 に写ることがわかっていたが、affine 線型射に関しては便宜上の原点 P_0 が Q_0 に写るとは限らない。従って表示には、線型射の情報としての $m \times n$ 行列と、原点 P_0 の像が Q_0 を原点とする B の座標系のなかでどのように表されるかの情報が入る。

Lemma 2.11. $f : (A,V) \longrightarrow (B,W)$ は affine 線型射であるとする。$\dim A = n$、$\dim B = m$ とおき、A,B のそれぞれの基底を $P_0, \cdots, P_n \in A$、$Q_0, \cdots Q_m \in B$ と表記する。

$$f(P_0) := \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{Q_0 Q_i} + Q_0$$

となるように $x = (x_1, \cdots, x_m) \in k^m$ をとる。また、基底 $\left\{\overline{P_0 P_i}\right\}_i$、$\left\{\overline{Q_0 Q_j}\right\}_j$ による線型射 $f : V \longrightarrow W$ の行列表示を $M \in \mathrm{M}(m,n;k)$ とおく。affine 線型射からこのペア (x,M) の対応は一対一となる。また affine 線型射 $g : (B,W) \longrightarrow (C,U)$ があって対応するペアが (y,N) であるとき、合成 gf の対応するペアは $(Nx+y, NM)$ となる。 □

Proof. f に対して (x,M) を対応させる写像が単射であることはよい。また全射性についても、affine 線型射が基底 $P_0, \cdots, P_n$ の像で決定されることを考えれば自明である。

合成 gf を計算してみよう。(x,M)、(y,N) をそれぞれ f,g の対応するペアとする。ここでは x,y はそれぞれ $m \times 1$、$\ell \times 1$ の縦ベクトルとしてみなす。A,B,C の基底をそれぞれ $\{P_i\}_{i=0}^{n}$、$\left\{Q_j\right\}_{j=0}^{m}$、$\{R_k\}_{k=0}^{\ell}$ とする。ここで $\ell = \dim C$ である。

またこの基底で f の線型射が M に、g の線型射は N に対応するものとする。

$$
\begin{aligned}
gf(P_0) &= g\left(\begin{bmatrix} \overline{Q_0Q_1} & \dots & \overline{Q_0Q_m} \end{bmatrix} x + Q_0\right) \\
&= \begin{bmatrix} \overline{R_0R_1} & \dots & \overline{R_0R_\ell} \end{bmatrix} Nx + g(Q) \\
&= \begin{bmatrix} \overline{R_0R_1} & \dots & \overline{R_0R_\ell} \end{bmatrix} Nx + \begin{bmatrix} \overline{R_0R_1} & \dots & \overline{R_0R_\ell} \end{bmatrix} y + R_0 \\
&= \begin{bmatrix} \overline{R_0R_1} & \dots & \overline{R_0R_\ell} \end{bmatrix} (Nx+y) + R_0
\end{aligned}
$$

また gf の線型射は通常の行列表示のそれと同様に NM が対応することが自明にわかる。従って affine 線型射の合成 gf は $(Nx+y, NM)$ に対応する。 □

上の補題で見た演算

$$(y,N)(x,M) = (y+Nx, NM)$$

は合成と対応するから、特に affine 空間の自己準同型全体が成すモノイドは、この演算によって k^n と $\mathrm{M}(n,n;k)$ の半直積となる[*3]。従って特に affine 空間の自己同型群について次が言える。

Theorem 2.12. [1, p.48]
n 次元 affine 空間 (A,V) の自己同型群は平行移動群と一般線型群の半直積に群同型である。

$$\mathrm{Aut}(A,V) \simeq k^n \rtimes \mathrm{GL}(n;k)$$

□

Proof. 標準的な n 次元 affine 空間 $\mathbb{A}^n$ についてのみ考えればよい。

平行移動群 k^n が $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ の正規部分群になることはすでに見た。また先の半直積の対応からその剰余群が線型空間 k^n 上の自己同型になることがわかるから、短完全列

$$1 \longrightarrow k^n \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathrm{GL}(n;k) \longrightarrow 1$$

ができるが、補題でみた対応から各 $X \in \mathrm{GL}(n;k)$ に対して $(0,X)$ を対応させる群準同型

$$\mu : \mathrm{GL}(n;k) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$$

が定まる。

この群準同型 μ は上の短完全列を分裂させるから、$\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n) \simeq k^n \rtimes \mathrm{GL}(n;k)$ である。 □

[*3] 半群の半直積については調べ中。群では半直積は分裂短完全列で特徴づけされたが半群でも似たようなものがあるか？まとめたら affine 空間の自己準同型半群の構造としてもう少し詳しく書く。

<u>Note.</u> [1] では、affine 自己同型の表示 (x,M) を $n+1$ 次の正方行列

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline & \\ x & M \\ & \end{array}\right)$$

で表し、合成に対応する演算を単なる行列の積として表していた。半直積に限らず、特定の構造を持つ半群 (resp. 群) を、正方行列の成す半群 (resp. 一般線型群) に埋め込む何らかの手法があるのかもしれない。

参考文献

[1] 川又雄二郎. 射影空間の幾何学. 朝倉書店, 2001.