dammy [1]

1 Linear Algebra

1.1 Free Resolution

1.2 Fitting Invariant

有限生成自由加群の射の特徴の一つ、Fitting 不変量について紹介する。

Notation. 以下、R は可換環、$l,m,n,\ldots$ は正の整数を表すものとする。

- $\triangleright$ $\mathrm{M}(m,n;R) := \{R$ を成分に持つ $m \times n$ 行列全体$\}$

とおく。

Definition 1.1. The ideal of minors.
$U \in \mathrm{M}(m,n;R)$ とする。整数 $1 \leq t \leq \min\{m,n\}$ に対して、U の t 次小行列式 (t-minor、t マイナー) 全体で生成される R のイデアルを $I_t(U)$ で表し、U の t 次マイナーイデアル (the ideal generated by the all t-minors, the ideal of t-minors, t-minor ideal) と呼ぶ。 □

Example 1.2.

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

に対して、

$$I_2(U) = (a_1b_2 - a_2b_1, a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_3 - a_3b_2)$$

である。

Remark. $0 < t_1 \leq t_2 \leq \min\{m,n\}$ であるとき、行列 U の t_2 マイナーは $I_{t_1}(U)$ に含まれる。実際、U の t_2 次小行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,t_2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{t_2,1} & \ldots & a_{t_2,t_2} \end{pmatrix}$$

また、A の i 行 j 列を取り除いた $t_2 - 1$ 次小行列を $A_{i,j}$ とおけば、第一列による行列式の展開で

$$\det A = \sum_{j=1}^{t_2} (-1)^{j-1} a_{j,1} \det A_{j,1}$$

のように書けるが、ここで定義からこれら t_2-1 マイナー $\det A_{i,j}$ は $I_{t_2-1}(U)$ に含まれるので $\det A \in I_{t_2-1}(U)$ である。即ち $I_{t_2}(U)$ の生成元が全てこれに属するから $I_{t_2}(U) \subset I_{t_2-1}(U)$ である。よって

$$I_{t_2}(U) \subset I_{t_2-1}(U) \subset I_{t_2-2}(U) \subset \cdots \subset I_{t_1}(U)$$

である。この事実から、形式的に次のように定める。

- ▷ $t \leq 0$ の場合については $I_t(U) = R$、
- ▷ $t > \min(m,n)$ ならば $I_t(U) = (0)$

マイナーイデアルは有限生成自由加群の射の不変量として表れることを示そう。

Lemma 1.3. $X \in \mathrm{M}(l,m;R), Y \in \mathrm{M}(m,n;R)$ とする。このとき

$$\begin{aligned} I_t(XY) &\subset I_t(X) \\ I_t(XY) &\subset I_t(Y) \end{aligned}$$

である。 □

Proof. 行列 $\Phi \in \mathrm{M}(l,m;R)$ の t マイナーとは、Φ の t-exterior power $\bigwedge^t \Phi : \bigwedge^t R^m \longrightarrow \bigwedge^t R^l$ が有限生成 R 自由加群の射として対応する行列の成分のことであった[*1]。

$$\bigwedge^t (XY) = \left(\bigwedge^t X\right)\left(\bigwedge^t Y\right) : \bigwedge^t R^n \longrightarrow \bigwedge^t R^l$$

であり、よって XY の t マイナーは X、Y のそれらの積和である。よって $I_t(XY) \subset I_t(x), I_t(Y)$ である。 □

Proposition 1.4. F,G は有限生成 R 自由加群、$F \xrightarrow{\varphi} G$ は R 線型射とする。F,G の自由基底をそれぞれ一組定めると、φ の行列表現を得る。この行列のマイナーイデアルは φ にのみ依存し、基底の選び方に依らない。 □

Proof. φ の行列表現を $U \in \mathrm{M}(\mathrm{rank}\,G, \mathrm{rank}\,F;R)$ とする。F、G それぞれの基底の入れ替えに対応する正則行列 $P \in \mathrm{GL}(\mathrm{rank}\,F;R), Q \in \mathrm{GL}(\mathrm{rank}\,G;R)$ をとると、φ の行列表現と

[*1] 詳しくは外積代数についてのレポートをみよ。

して QUP^{-1} が新たに得られる。

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "U"] \arrow[d, "P"'] & G \arrow[d, "Q"] \\ F \arrow[r, "QUP^{-1}"'] & G \end{tikzcd}$$

補題より、

$$\begin{aligned} I_t(U) &\supseteq I_t\left(QUP^{-1}\right) \\ &\supseteq I_t\left(Q^{-1}QUP^{-1}P\right) \\ &= I_t(U) \end{aligned}$$

よって $I_t(U) = I_t\left(QUP^{-1}\right)$ である。 □

Notation. 以下、有限生成自由加群の射 φ に対して、$I_t(\varphi)$ という表記で φ の表現行列がなす t マイナーイデアルを表すことにする。

Lemma 1.5. M は有限表示な R 加群、

$$F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

はその表示とする (F_i は有限生成自由加群)。$t \geq 0$ と $P \in \operatorname{Spec} R$ に対して次が同値である。

- ▷ $I_t(\varphi) \not\subseteq P$
- ▷ $\operatorname{rank} F_0 \geq t + \mu(M_P)$
- ▷ $(\operatorname{Im}\varphi)_P$ は $(F_0)_P$ の rank t の直和因子を含む。

ただし有限生成加群 X に対して $\mu(X)$ は X の生成系の個数の最小値を表す。

参考文献

[1] M.F.Atiyah and I.G.MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.