dammy [1]

1 Dimension Theory

Noether 環の次元論について説明する。

1.1 環の不変量

環の内部構造から現れるいくつかの不変量について導入し、それらが一致することがこの節の主題である。まずは各不変量について定義する。

1.1.1 Krull 次元

Definition 1.1. イデアルの高さ.
Noether 環 R の素イデアル $P \in \operatorname{Spec} R$ について P の高さ $\operatorname{height}_R P$ を、$\operatorname{Spec} R$ 内に存在する素イデアル降鎖 $P = P_n \supsetneq P_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq P_0$ の長さ $n \geq 0$ の上限とする。

$$\operatorname{height}_R P := \sup\{n \geq 0 \,|\, \exists (P = P_n \supsetneq P_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq P_0) \text{ in } \operatorname{Spec} R\}$$

また、この定義に基づいて一般のイデアル $I \subset R$ について

$$\operatorname{height}_R I := \inf\{\operatorname{height}_R P \,|\, P \in V(I)\}$$

とおく。形式的に $I = R$ の場合は $\operatorname{height} R = \infty$ と定義する。 □

Definition 1.2. 環と加群の次元.
Noether 環 R 上の加群 M に対して

$$\dim_R M := \sup\{\operatorname{height} P \,|\, P \in \operatorname{Supp}_R M\}$$

と定めこれを加群の次元とよぶ[*1]。特に環の次元を、自身の上の加群としての次元と定め

$$\dim R := \dim_R R = \sup\{\operatorname{height} P \,|\, P \in \operatorname{Spec} R\}$$

のように書く。 □

Remark. M は有限生成のとき $\operatorname{Supp} M = V((0) : M)$ であったことに注意。有限生成でないときは $\operatorname{Supp} M \subset V((0) : M)$ ではあるが、等号は必ずしも成り立たない。

[*1] Krull 次元、イデアル論的次元などとよぶことがある。

反例として、$\mathbb{Z}$ 加群 $M=\bigoplus_{n\geq 2}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $\mathrm{Supp} M=\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}\setminus\{(0)\}$ であるが、$(0):M=(0)$ であるから $V((0):M)=\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ である。

この章で扱うのは主に有限生成の加群のクラスだから、$\mathfrak{a}:=(0):M$ とした時、$\dim_R M=\dim R/\mathfrak{a}$ と考えてよいが、一般には異なるので注意。上の反例では $\dim_{\mathbb{Z}} M=0$ であるが、$\dim\mathbb{Z}/\mathfrak{a}=\dim\mathbb{Z}=1$ である。

加群の次元を $\dim_R M=\dim R/\mathfrak{a}$ として定義する流儀もあるので注意。

Example 1.3. $\mathbb{Z}$ や体上一変数多項式環は単項イデアル整域で、素イデアルは (0) と (0) より真に大きい極大イデアルのみしか持たなかった。よってこれらの次元は 1 である。

Artin 環は素イデアルが全て極大イデアルであるような Noether 環であったから、その次元は 0 である。

Noether 局所環の次元はその極大イデアルの高さに等しい。また環の局所化と素イデアルの対応関係から、$P\in\mathrm{Spec} R$ に対して $\mathrm{height}_R P=\mathrm{height}_{R_P} PR_P=\dim R_P$ である。

$V(I)=\mathrm{Supp}_R R/I$ であり、R/I は Noether 環上の有限生成加群だから有限の素因子集合を持つ。$\mathrm{Min}_R R/I\subset\mathrm{Ass}_R R/I$ であったから、$\mathrm{height}_R I=\min\{\mathrm{height}_R P\,|P\in\mathrm{Min}_R R/I\}$ である。

また、次の定理から Noether 環ではイデアルの高さは有限であることが従う[*2]。

Theorem 1.4. Krull の標高定理.
R は Noether 環であるとする。イデアル $I\subset R$ が r 個の元で生成されるとき、I の極小素因子をとると、その高さは高々 r である。特に $\mathrm{height} I\leq r$ でもある。 □

Note. この定理は $r=1$ の場合が主結果であり、そのことから Krull の単項イデアル定理とも呼ばれる。尚、この定理は以下の証明とは別に、後に示す次元論の基本定理の系として非常に簡潔に証明できることが知られている。

また、$\mathrm{height} I\leq r$ と $\forall P\in\mathrm{Min} R/I, \mathrm{height} P\leq r$ にはギャップがあることに注意。標高定理は'I が高さ r 以下の極小素因子をもつこと' ではなく'I の全ての極小素因子が高さ r 以下' であることを主張している。

Proof. r についての帰納法によって示す。$r=0$ の場合は自明。$r=1$ の場合は後回しにして、先に帰納のステップ $r>1$ について考える。$P\in\mathrm{Min}_R R/I$ をとる。$\mathrm{height} P\leq r$ を示そう。ここで、IR_P も R_P の高々 r 元で生成されるイデアルでありかつ PR_P は IR_P の

[*2] まず Noether 性を仮定するのはこのため。非 Noether 的な可換環の次元論も知られているらしい。

(R_P のイデアルとしての) 極小素因子である。このケースについて $\mathrm{height}_{R_P} PR_P \le r$ を示せれば、$\mathrm{height}\, P \le r$ であることが分かる。よって R は局所環としてよい。

(R,P) は Noether 局所環、$I \subset R$ は r 元 $(r > 1)$ で生成されるイデアルで極小素因子に P を持つもの、即ち P 準素であるとする。$\mathrm{height}\, P > r$ を仮定すると矛盾が起こることを示す。

仮定より、P から始まる長さ $r+1$ の素イデアル降鎖が存在するから、特に $\mathrm{height}\, P' \ge r$ となる素イデアル $P' \subsetneq P$ を一つとれる。

$I = (a_1, \cdots, a_r)$ とおき、$P' + (a_1, \cdots, a_i)$ が P を極小素因子に持つような最小の i をとる。このとき、$P \ne P'$ かつ $P = \sqrt{P'+I}$ より $0 < i \le r$ である。この定義より、$P' + (a_1, \cdots, a_{i-1})$ は P を極小素因子に持たない。

$Q \in \mathrm{Min}_R \frac{R}{P' + (a_1, \cdots, a_{i-1})}$ を一つとる。ここで、$P' + (a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i) \subset Q + (a_i)$ であるから、$Q + (a_i)$ は P を極小素因子にもち、よって $P^t \subset Q + (a_i)$ となるように $t > 0$ をとれる。よって $a_{i+1}, \cdots, a_r$ に対して、

$$a_j^t = x_j + y_j \quad (j = i+1, \cdots, r)$$

となる $x_j \in Q$ と $y_j \in (a_i)$ がそれぞれ存在する。このとき、

$$J := (a_1, \cdots, a_{i-1}) + (x_{i+1}, \cdots, x_r)$$

と置く。もちろん $J \subset Q$ である。

各 $j = 1, \ldots, r$ に対して $a_j^t \in J + (a_i)$ がについて成り立つから $I \subset \sqrt{J + (a_i)}$ である。実際、$a_1, \ldots, a_i \in J + (a_i)$ は自明で、$j = i+1, \ldots, r$ については $x_j \in J$、$y_j \in (a_i)$ より $a_j^t = x_j + y_j \in J$ である。よって $J + (a_i)$ は P を極小素因子に持つ。特に R/J 内では P/J は単項イデアル $(\overline{a_i})$ の極小素因子である。

$r = 1$ の結果 (後に示す補題を参照) から、$\mathrm{height}(P/J) \le 1$ であり、さらに $J \subset Q \subsetneq P$ であった。よって Q は J の極小素因子であることが分かる。J は $r-1$ 元生成であったから、帰納法の仮定から $\mathrm{height}\, Q \le r-1$。

ところが $\mathrm{height}\, P' \ge r$ でかつ $P' \subseteq Q$ であった。$\mathrm{height}\, Q \ge \mathrm{height}\, P' \ge r$ でなくてはならない。これは矛盾である。

よってこのような P' は存在しない。即ち P から始まる素イデアル降鎖は高々長さ r であって $\mathrm{height}\, P \le r$ である。 $\square$

最後に $r = 1$ の場合を補題として示す。

Lemma 1.5. $(R, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環で、ある $f \in \mathfrak{m}$ に対して $\mathfrak{m} = \sqrt{(f)}$ となるものとする。このとき $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ となる素イデアル $\mathfrak{p}$ があるとすれば、それは R の極小素因子に限

る。 $\square$

Proof. $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ となる素イデアルがあるとする。各整数 $l \geq 0$ について、$\mathfrak{p}$ の l 次シンボリックパワー[*3]による $\mathfrak{p}$ 準素イデアルの降鎖列

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{(0)} \supseteq \mathfrak{p}^{(1)} \supseteq \mathfrak{p}^{(2)} \cdots$$

をみる。

仮定から $f \notin \mathfrak{p}$ であるから、各 l について $f\mathfrak{p}^{(l)} = (f) + \mathfrak{p}^{(l)}$ である (P 準素イデアル I に対して $fI = (f) \cap I$ が成り立つ)。

一方で $R/(f)$ は $\mathfrak{m}/(f)$ が冪零だから Artin 環であり、よって降鎖列

$$\mathfrak{p}^{(0)} + (f) \supseteq \mathfrak{p}^{(1)} + (f) \supseteq \mathfrak{p}^{(2)} + (f) \supseteq \cdots$$

は安定であることがわかる。即ち、ある $l > 0$ があって $\mathfrak{p}^{(l)} + (f) = \mathfrak{p}^{(l+1)} + (f) = \cdots$ である。

よって

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}^{(l)} &= \mathfrak{p}^{(l)} \cap \left(\mathfrak{p}^{(l)} + (f)\right) \\
&= \mathfrak{p}^{(l)} \cap \left(\mathfrak{p}^{(l+1)} + (f)\right) \\
&= \mathfrak{p}^{(l+1)} + \left(\mathfrak{p}^{(l)} \cap (f)\right) && \text{(modular law)} \\
&= \mathfrak{p}^{(l+1)} + f\mathfrak{p}^{(l)}
\end{aligned}$$

である。よって $R/\mathfrak{p}^{(l+1)}$ 内で

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{p}^{(l)}}{\mathfrak{p}^{(l+1)}} &= \frac{f\mathfrak{p}^{(l)} + \mathfrak{p}^{(l+1)}}{\mathfrak{p}^{(l+1)}} \\
&= f\frac{\mathfrak{p}^{(l)}}{\mathfrak{p}^{(l+1)}}
\end{aligned}$$

である。中山の補題から、$\mathfrak{p}^{(l)} = \mathfrak{p}^{(l+1)}$ であるから、特に $R_\mathfrak{p}$ において、極大イデアル $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ が冪零であることが従う。よって $R_\mathfrak{p}$ は Artin 環、$\mathfrak{p}$ は R の極小素因子である。 $\square$

[*3] 素イデアル P の l-th symbolic power は $P^{(l)} := P^l R_P \cap R$ で定義され、P^l を含む最小の P 準素イデアルなのであった。

Remark. 以上より、半局所 Noether 環 (極大イデアルが有限個しか無い環) の次元は必ず有限である。一般の Noether 環については有限次元であるとは限らない。つまり、いくらでも長い有限鎖が取れる可能性がある。

1.1.2 Samuel 関数

まず最初に次の母関数について導入する。

Definition 1.6. Hilbert 関数、Poincare 級数.

$R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ は R_0 が Artin 的な (非負整数による)Noether 次数環、$M=\bigoplus_{n\geq 0}M_n$ はその上の有限生成次数加群とする。

このとき各 M_n は R_0 上の長さ有限な加群であることに注意。実際、M の斉次生成元を $m_1,\ldots,m_s$ とし、それぞれ次数を d_i をすると、各斉次成分は

$$M_n=R_{n-d_1}m_1+R_{n-d_2}m_2+\ldots R_{n-d_s}m_s$$

である。各 R_n は R_0 有限生成であるから M_n も R_0 有限生成である。R_0 は Artin 的だから M_n のサポートは全て R_0 の極大イデアルであり、従ってこれは長さ有限である。

数列 $\{l(M_n)\}_{n\geq 0}$ で定まる整数上の関数を Hilbert 関数とよび、また不定元 T による形式的冪級数

$$P(M,T)=\sum_{n\geq 0}l_{R_0}(M_n)T^n$$

を次数加群 M の Poincare 級数と呼ぶ。 □

この母関数によって Hilbert 関数 $l(M_n)$ の n に関する増大度を測れる。この事実の根拠となるのが次の定理である。

Theorem 1.7. $R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ は R_0 が Artin 的な Noether 次数環、$M=\bigoplus_{n\geq 0}M_n$ はその上の有限生成次数加群とする。R_+ の斉次生成元を $x_1,\cdots,x_r$、$\deg x_i=d_i>0$ とする。$R=R_0[x_1,\cdots,x_r]$ であった。

この時、M の Poincare 級数はある整数係数多項式 $f(T)\in\mathbb{Z}[T]$ があって

$$P(M,T)=\frac{f(T)}{\prod_{i=1}^{r}(1-T^{d_i})}$$

が成り立つ。 □

Proof. R の (R_0 上の) 生成元 $x_1,\cdots,x_r$ の数 r で帰納法を用いる。

$r=0$、すなわち $R=R_0$ のとき、R 有限生成加群である M は有限の長さを持つ。した

がって $M_n \neq (0)$ なる n は高々有限個しかない。このとき Poincare 級数は多項式であり示すべきことは何も無い。

$r > 0$ とする。今、x_r を M に作用させる線型射は d_r 次の斉次射であり、よって特に各 $n \geq 0$ について R_0 線型射 $M_n \xrightarrow{x_r} M_{n+d_r}$ を引き起こす。これの核を K_n、余核を C_{n+d_r} とおくと R_0 完全列

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{x_r} M_{n+d_r} \longrightarrow C_{n+d_r} \longrightarrow 0$$

を得る。長さは加法的関数だから

$$l(K_n) - l(M_n) + l(M_{n+d_r}) - l(C_{n+d_r}) = 0$$

が成り立つ。

$$K := \bigoplus_{n \geq 0} K_n, \ C := \bigoplus_{n \geq 0} C_n$$

と置くと (ただし $i < d_r$ に対して $C_i = M_i$) これらは R 次数加群[*4]であって、上記完全列の貼り合わせから R 斉次射による完全列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow[+0]{} M \xrightarrow[+d_r]{x_r} M \xrightarrow[+0]{} C \longrightarrow 0$$

を得る。

先の式から、

$$l(K_n)T^{n+d_r} - l(M_n)T^{n+d_r} + l(M_{n+d_r})T^{n+d_r} - l(C_{n+d_r})T^{n+d_r} = 0$$

であるから、これを $n \geq 0$ で足し合わせることで T の級数の恒等式

$$T^{d_r}P(K,T) - T^{d_r}P(M,T) + \sum_{n \geq 0} l(M_{n+d_r})T^{n+d_r} - \sum_{n \geq 0} l(C_{n+d_r})T^{n+d_r} = 0$$

を得る。よって適当な T の多項式 $f(T)$ によって

$$T^{d_r}P(K,T) - T^{d_r}P(M,T) + P(M,T) - P(C,T) = -f(T)$$

となる。($f(T) = \left(\sum_{i=0}^{d_r-1} l(M_i)T^i\right) - \left(\sum_{i=0}^{d_r-1} l(C_i)T^i\right)$ である。)

よって

$$\left(1 - T^{d_r}\right)P(M,T) = P(C,T) - T^{d_r}P(K,T) - f(T)$$

[*4] $C = M/x_rM$ であることに注意。

であり、また K,C は有限生成 $R_0[x_1,\cdots,x_{r-1}]$ 次数加群であるから帰納法の仮定よりある多項式 $g_K(T),g_C(T)$ があって

$$P(K,T)=\frac{g_K(T)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1-T^{d_i})}$$

$$P(C,T)=\frac{g_C(T)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1-T^{d_i})}$$

であるから、これを代入して

$$P(M,T)=\frac{g_C(T)-T^{d_r}g_K(T)-\prod_{i=1}^{r-1}\left(1-T^{d_i}\right)f(T)}{\prod_{i=1}^{r}(1-T^{d_i})}$$

である。

従って M の Poincare 級数は整数係数の多項式による有理型関数となる。 □

Notation. 以下、先の定理での設定と同様に R は R_0 が Artin 的な Noether 次数環であるとし、さらに R が R_0 上一次の元で生成される状況について考える。つまり各 $1\le i\le r$ について $d_i(=\deg x_i)=1$ であるとする。このとき、有限生成次数加群 M の Poincare 級数はある多項式 $f(T)\in\mathbb{Z}[T]$ によって

$$P(M,T)=\frac{f(T)}{(1-T)^r}$$

という形をしているのであった。

$P(M,T)$ は見かけ上 $T=1$ を特異点にもつ。その' 極の位数' は M の不変量である (つまり M と同型な加群で共有される)。

$P(M,T)$ を約分して、多項式 $g(T)$ と $0\le d\le r$ によって

$$P(M,T)=\frac{g(T)}{(1-T)^d}$$

であってかつ $d>0$ ならば $g(1)\neq 0$ が成り立つようにできる (普通 $d>0$ かつ $g(1)\neq 0$ の時に P は $T=1$ を位数 d の極に持つと言うことに注意。よって正確には今は普通の意味での P の極について言及しているわけではない)。

この d を $d(M)$ と表記する。 □

Remark.

$$
\begin{aligned}
(1-T)^{-1} &= \sum_{n\geq 0} T^n \\
(1-T)^{-2} &= \frac{d}{dT}(1-T)^{-1} \\
&= \sum_{n\geq 1} nT^{n-1} \\
(1-T)^{-3} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dT}(1-T)^{-2} \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{2} T^{n-2} \\
\cdots & \\
(1-T)^{-d} &= \frac{1}{(d-1)!}\frac{d^{d-1}}{dT^{d-1}}(1-T)^{-1} \\
&= \sum_{n\geq d-1} \frac{n(n-1)\cdots(n-(d-1))}{(d-1)!}(1-T)^{n-(d-1)} \\
&= \sum_{n\geq 0} \binom{d+n-1}{d-1}(1-T)^n
\end{aligned}
$$

であるから、$P(M,T) = f(T)(1-T)^{-d}$、$f(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_s T^s$ であるとすると、

$$
\begin{aligned}
P(M,T) &= \frac{f(T)}{(1-T)^d} \\
&= (a_0 + \cdots a_s T^s) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} \binom{d+n-1}{d-1} T^n \right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{l+m=n} a_l \binom{d+m-1}{d-1} \right) T^n
\end{aligned}
$$

と、計算できる。Poincare 級数の定義からこの式より各 $l(M_n)$ を n の有理数係数の多項式として計算できて、特に $n \geq s$ については

$$
\begin{aligned}
l(M_n) &= a_0 \binom{d+n-1}{d-1} + a_1 \binom{d+(n-1)-1}{d-1} + \cdots + a_s \binom{d+(n-s)-1}{d-1} \\
&= \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_s}{(d-1)!} n^{d-1} + (d-2 \text{ 次以下の項})
\end{aligned}
$$

のように $\frac{f(1)}{(d-1)!}$ を最高次係数にもつある $d-1$ 次多項式に等しい。すなわち次の定理が成り立つ。

Theorem 1.8. R、M はこれまでの設定通りの次数環、有限生成次数加群とする。$d=d(M)$、$P(M,T)=\frac{f(T)}{(1-T)^d}$、$s=\deg f(T)$ であるとしよう。このとき、ある有理数係数多項式 $\varphi(X)\in\mathbb{Q}[X]$ で次のようなものが存在する:

全ての $n\geq s$ に対して

$$l(M_n)=\varphi(n)$$

が成り立ち、かつ $\deg\varphi(X)=d-1$、最高次係数が $\frac{f(1)}{(d-1)!}$ である。

□

よって $l(M_n)$ がどれくらいの早さで増えるのかについての情報が得られた。

Definition 1.9. Hilbert 多項式.
M によって定まるこの多項式を $\varphi=\varphi_M$ と書いて M の Hilbert 多項式と呼ぶ[*5]。 □

同型な加群の Poincare 級数は等しいから、Hilbert 多項式ももちろん同型類で共有される。

Example 1.10. 体 k 上の r 変数多項式環 $R=k[Y_1,\cdots,Y_r]$ は各不定元を次数 1 とした自然な重み付けで次数環となる。R の R 次数加群としての Hilbert 関数、Hilbert 多項式を求めてみよう。

$R_n=\{n$ 次単項式全体で生成される k 上のベクトル空間$\}$ であるから、Hilbert 関数は分かりやすく $l(R_n)=\binom{r+n-1}{r-1}$ である。

よって Poincare 級数は

$$\begin{aligned}P(R,T)&=\sum\binom{r+n-1}{r-1}T^n\\&=(1-T)^{-r}\end{aligned}$$

であり、$d(R)=r$、Hilbert 多項式は $\varphi_R(X)=\frac{1}{(r-1)!}X^{r-1}+(\text{lower terms})$ となる。 □

Samuel 関数とは環の随伴次数環の Hilbert 関数によって定まる。以下、特に断らない限り R は Noether 半局所環 (極大イデアルを有限個しかもたない) とし、$\mathfrak{m}$ はその Jacobson

[*5] 十分大きい値においてはある一定の多項式で表されるような整数上の関数を多項式型 (polynomial type) であるというのであった。つまり M の Hilbert 多項式とは M の Hilbert 関数の型となる多項式である

根基、イデアル I は任意の定義イデアルとする[*6]。また、イデアル $\mathfrak{a}$ による R の随伴次数環を $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(R)$、$R$ 加群 M の随伴次数加群を $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(M)$ で表す。

<u>Definition</u> 1.11. Samuel function.
有限生成 R 加群 M について、$\mathrm{gr}_I(M)$ は有限生成 $\mathrm{gr}_I(R)$ 加群であり、$\mathrm{gr}_I(R)$ は 0 次の部分環 R/I が Artin 的かつ R/I 上 1 次の元 (I/I^2 の生成元) で生成される代数であるから、先の議論を満たす。

M の Samuel 関数とは整数 $n \geq 0$ に対して $l\left(M/I^{n+1}M\right)$ を対応させる関数である。これを $\chi_M^I(n)$ と表す。 □

この関数は (加群の長さの性質から)Hilbert 関数によって

$$\chi_M^I(n) = l(M/IM) + l\left(IM/I^2M\right) \quad + \cdots + l\left(I^nM/I^{n+1}M\right)$$

と表される。

$d = d(\mathrm{gr}_I(M))$ とおき、$f(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_sT^s$ を $P(\mathrm{gr}_I(M), T) = \frac{f(T)}{(1-T)^d}$ となる整数係数多項式とする。この時、Hilbert 関数は任意の $n \geq 0$ に対して

$$l\left(I^nM/I^{n+1}M\right) = a_0\binom{d+n-1}{d-1} + \cdots + a_s\binom{d+(n-s)-1}{d-1}$$

と計算されるのであった (ただし $x < y$ のとき $\binom{x}{y} = 0$)。特に $n \geq s$ では $d-1$ 次の Hilbert 多項式で近似される。

[*6] Jacobson 根基が定める adic 位相と同じ位相を定めるイデアルを定義イデアルというのであった。

よって Samuel 関数は

$$
\begin{aligned}
\chi_M^I(n) = a_0\binom{d-1}{d-1} & \\
+a_0\binom{d}{d-1} & \quad +a_1\binom{d-1}{d-1} \\
+a_0\binom{d+1}{d-1} & \quad +a_1\binom{d}{d-1}+a_2\binom{d-1}{d-1} \\
+\dots & \\
+a_0\binom{d+s-1}{d-1} & \quad +a_1\binom{d+s-2}{d-1}+a_2\binom{d+s-3}{d-1} \quad +\dots+a_s\binom{d-1}{d-1} \\
+a_0\binom{d+s}{d-1} & \quad +a_1\binom{d+s-1}{d-1}+a_2\binom{d+s-2}{d-1} \quad +\dots+a_s\binom{d}{d-1} \\
+a_0\binom{d+s+1}{d-1} & \quad +a_1\binom{d+s}{d-1}+a_2\binom{d+s-1}{d-1} \quad +\dots+a_s\binom{d+1}{d-1} \\
+\dots & \\
+a_0\binom{d+n-1}{d-1} & \quad +a_1\binom{d+n-2}{d-1}+a_2\binom{d+n-3}{d-1} \quad +\dots+a_s\binom{d+(n-s)-1}{d-1}
\end{aligned}
$$

と計算される。

組み合せの公式:

$$
\binom{l}{n} = \binom{l-1}{n-1} + \binom{l-1}{n}
$$

から、

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{d+i-1}{d-1} &= \binom{d-1}{d-1}+\binom{d}{d-1}+\cdots+\binom{d+n-1}{d-1} \\
&= \left(\binom{d}{d}-\binom{d-1}{d}\right)+\left(\binom{d+1}{d}-\binom{d}{d}\right)+\cdots+\left(\binom{d+n}{d}-\binom{d+n-1}{d}\right) \\
&= \binom{d+n}{d}
\end{aligned}
$$

であるから、上の Samuel 関数の計算について各係数 a_i でまとめた組み合せの和にこの結果を適用して

$$
\chi_M^I(n) = a_0\binom{d+n}{d} + a_1\binom{d+n-1}{d} + \cdots + a_s\binom{d+(n-s)-1}{d}
$$

と表される。先の Hilbert 多項式の議論と同様に、この値は $n \geq s$ については n に関する一定の d 次有理数係数多項式によって

$$\chi_M^I(n) = \frac{f(1)}{d!}n^d + (\text{lower terms})$$

と表される。つまり χ_M^I は d 次の多項式の型を持つ。

この次数 d が M の同型類によって共有されるのは (I による) 随伴次数加群の同型から明らかだが、実は更に Noether 半局所環 R 上の有限生成加群 M という情報のみで定まることが分かる。つまり次が示される。

<u>**Proposition**</u> **1.12.** 有限生成 R 加群 M の Samuel 関数の次数 d は R の定義イデアルの取り方に依らない。 □

<u>**Proof**</u>**.** I, J がともに $\mathfrak{m}$-adic 位相を定めるとする。$I^a \subset J$ かつ $J^b \subset I$ となる $a, b > 0$ が存在する。よって

$$l\left(M/I^{a(n+1)}M\right) \geq l\left(M/J^{n+1}M\right), \qquad l\left(M/J^{b(n+1)M}\right) \geq l\left(M/I^{n+1}M\right)$$

である。つまり

$$\chi_M^I(a(n+1)-1) \geq \chi_M^J(n), \qquad \chi_M^J(b(n+1)-1) \geq \chi_M^I(n)$$

である。よって

$$\frac{\chi_M^I(n)}{\chi_M^I(a(n+1)-1)} \leq \frac{\chi_M^I(n)}{\chi_M^J(n)} \leq \frac{\chi_M^J(b(n+1)-1)}{\chi_M^J(n)}$$

である。今、$d_I := \deg \chi_M^I$、$d_J := \deg \chi_M^J$ とおく。十分大きな n で Samuel 関数が多項式で表されることを考えると、この不等式の両端は $n \to \infty$ でそれぞれ a^{-d_I}、b^{d_J} に収束する。

よって $\frac{\chi_M^I(n)}{\chi_M^J(n)}$ は少なくとも 0 に収束することも ∞ に発散することもしない。よって $\chi_M^I(n)$ と $\chi_M^J(n)$ は少なくとも多項式型としての次数を共有している。 □

<u>**Notation**</u>**.** 以上の議論より Samuel 関数の次数は加群 M の不変量であることがわかった。(次数加群の時と記号が被るが) 改めてこれを $d = d(M)$ と表す。以降、特に断らない限り $d(M)$ という記号はこれを表すものとする。

また以下、定義イデアルに依らずに成り立つ Samuel 関数の性質について言及するときは表記を $\chi_M = \chi_M^I$ のように省略する。 □

$d(M)$ の性質をいくつかみる。

Theorem 1.13.

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

を R 上の有限生成加群の短完全列とする。この時 $d(M) = \max\{d(L), d(N)\}$ が成り立つ。

また χ_M と $\chi_L + \chi_N$ はこの事実から型となる多項式の次数を等しくするが、さらに最高次係数も共有する。 □

Proof. 定義イデアルを I とする。

$$N/I^{n+1}N \simeq R/I^{n+1} \otimes M/L \simeq \frac{M/L}{I^{n+1}(M/L)} \simeq \frac{M}{I^{n+1}M+L}$$

である。よって

$$\chi_N(n) = l\left(\frac{N}{I^{n+1}N}\right) = l\left(\frac{M}{I^{n+1}M+L}\right)$$

である。また

$$\frac{I^{n+1}M+L}{I^{n+1}M} \simeq \frac{L}{I^{n+1}M \cap L}$$

であるから、これらの長さも等しい。

M の Samuel 関数を $I^{n+1}M \subset I^{n+1}M + L \subset M$ の分割によって

$$\begin{aligned}
\chi_M(n) &= l\left(\frac{M}{I^{n+1}M}\right) \\
&= l\left(\frac{M}{I^{n+1}M+L}\right) + l\left(\frac{I^{n+1}M+L}{I^{n+1}M}\right) \\
&= l\left(\frac{N}{I^{n+1}N}\right) + l\left(\frac{I^{n+1}M+L}{I^{n+1}M}\right) \\
&= \chi_N(n) + l\left(\frac{I^{n+1}M+L}{I^{n+1}M}\right) \\
&= \chi_N(n) + l\left(\frac{L}{I^{n+1}M \cap L}\right)
\end{aligned}$$

と計算できる。

$l\left(\frac{L}{I^{n+1}M \cap L}\right)$ を評価する。Artin-Rees の補題から、ある十分大きい $t > 0$ があって任意の $n \geq t$ に対して

$$I^{n+1}L \subset I^{n+1}M \cap L = I^{n-t}\left(I^{t+1}M \cap L\right)$$

である。よって

$$l\left(\frac{L}{I^{n+1}L}\right) \geq l\left(\frac{L}{I^{n+1}M \cap L}\right) = l\left(\frac{L}{I^{n-t}\left(I^{t+1}M \cap L\right)}\right) \geq l\left(\frac{L}{I^{n-t}L}\right)$$

である。すなわち

$$\chi_L(n) \geq l\left(\frac{L}{I^{n+1}M \cap L}\right) \geq \chi_L(n-t)$$

よって

$$1 \geq \frac{l\left(\frac{L}{I^{n+1}M \cap L}\right)}{\chi_L(n)} \geq \frac{\chi_L(n-t)}{\chi_L(n)} \to 1 \ \ (n \to \infty)$$

であるから $l\left(\frac{L}{I^{n+1}M \cap L}\right)$ は n の多項式として $\chi_L(n)$ と次数を共有しかつ最高次係数も共有するから、

$$\chi_M(n) = \chi_N(n) + l\left(\frac{L}{I^{n+1}M \cap L}\right)$$

より、右辺の次数 $d(M)$ と左辺の次数 $\max\{d(N), d(L)\}$ は等しく、またこれらは最高次係数を共有する。 □

1.1.3 System of Parameters

最後に δ について説明する。

<u>Definition</u> 1.14. 加群の巴系.

R は Noether 半局所環、$\mathfrak{m}$ は R の Jacobson 根基、M は有限生成 R 加群とする。このとき、$R/\mathfrak{m}$ が Artin 環であるから、$M/\mathfrak{m}M$ は長さ有限加群である。よって特に元の列 $\underline{a} = a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{m}$ で $M/\underline{a}M$ が長さ有限となるものがある。このような s の最小値[*7]を $\delta(M)$ と書くことにする。

特に R が Noether' 局所環' であるとき、$s = \delta(M)$ に対して $l(M/\underline{a}M) < \infty$ となる $\underline{a} = a_1, \ldots, a_s$ を M の巴系 (パケイ、パラメタ系、system of parameters、略して sop. と書くこともある) と呼ぶ。ここでは R が Noether' 半局所環' であるときもこれらを M の巴系と呼ぶことにしよう。

また R 自身の巴系で生成したイデアルを巴系イデアル (パラメタイデアル) と呼ぶ。同様にここでは M の巴系で生成されるイデアルを M の巴系イデアルと呼ぶことにする。 □

[*7] もちろん、非負整数全体は well ordered だからこの最小値は存在する。

1.2　次元論の基本定理

この節の主定理について証明する。

Theorem 1.15. 次元論の基本定理.
R は Noether 半局所環、M は有限生成 R 加群とする。このとき、

$$\dim_R M = d(M) = \delta(M)$$

が成立する。 □

以下、R と M は固定し、$\mathfrak{m}$ は R の Jacobson 根基とする。

Remark. 任意のイデアル $J \in (0) : M$ に対して、M の各不変量は R 加群としてのものと $S = R/J$ 加群としてのものとで変わりがない。つまり M がどの環の上のものかあえて明示する表記の上で

$$\dim_R M = \dim_S M$$
$$d({}_RM) = d({}_SM)$$
$$\delta({}_RM) = \delta({}_SM)$$

である。 □

実際、対応定理より $V(J) \subset \operatorname{Spec} R$ と $\operatorname{Spec} S$ の間には一対一の対応があり、$\operatorname{Supp}_R M = V((0) : M)$ はこれらの部分集合であると思える。よってその素イデアル鎖に関する量は R と S の間で共有される。従ってまず $\dim_R M = \dim_S M$ である。

次に、任意の $n \geq 0$ に対して ($JM = (0)$ であるから)

$$\mathfrak{m}^n M = (\mathfrak{m} + J)^n M$$

すなわち

$$\frac{M}{\mathfrak{m}^n M} = \frac{M}{(\mathfrak{m} + J)^n M}$$

が成り立つ。また、長さ有限な S 加群 X に対して $l_R(X) = l_S(X)$ であるから、

$$l_R\left(\frac{M}{\mathfrak{m}^n M}\right) = l_S\left(\frac{M}{(\mathfrak{m} + J)^n M}\right)$$

もちろん $\frac{\mathfrak{m}+J}{J}$ は S の Jacobson 根基に含まれるから定義イデアルである。以上より M の R 加群としての Samuel 関数と S 加群としての Samuel 関数は等しい。よって $d({}_RM) = d({}_SM)$ である。

最後に、$\underline{a} = a_1, \dots, a_s \in \mathfrak{m}$ ($s = \delta({}_RM)$) を ${}_RM$ の巴系とすると、もちろん $l_S\left(\frac{M}{\underline{a}M}\right) < \infty$ でもある。よってすくなくとも $\delta({}_SM) \leq \delta({}_RM)$ である。一方で ${}_SM$ の巴系 $\underline{\beta} = \beta_1, \dots, \beta_t \in \frac{\mathfrak{m}+J}{J}$ ($t = \delta({}_SM)$) をとってその各代表元を $\underline{b} = b_1, \dots, b_t \in \mathfrak{m} + J$ とおけばもちろん

$$\frac{M}{\underline{\beta}M} \simeq \frac{M}{((\underline{b}) + J)M} = \frac{M}{\underline{b}M}$$

であってこれらは長さ有限[*8]。従って $\delta({}_RM) \leq \delta({}_SM)$。つまり $\delta({}_RM) = \delta({}_SM)$

以上よりこれらが全て等しいことがわかる。

さて、まずは R 自身について定理が成り立つことを示そう。Krull の標高定理から、$\dim R$ は有限の値を示すことは分かっているが、標高定理が次元論の基本定理の系となることを強調するために敢えてこの結果を使わないことにする。

Claim. $\dim R \leq d(R)$.

Proof. $d(R)$ についての帰納法。

$d(R) = 0$ とする。つまり χ_R の多項式型としての次数 0、十分大きい $n > 0$ に対して $l(R/\mathfrak{m}^n)$ が一定の定数だから $m^n = (0)$。R は長さ有限、Artin 環である。従って $\dim R = 0 = \delta(R)$。

$d(R) > 0$ とする。$\dim R = 0$ なら自明に正しいから $\dim R \geq e > 0$ を仮定しよう。定義より $\operatorname{Spec} R$ 内の素イデアル鎖 $P_0 \supsetneq \cdots \supsetneq P_e$ が得られる。$a \in P_{e-1} \setminus P_e$ を一つ選んで $S = \frac{R}{(a)+P_e}$ とおき、

$$0 \longrightarrow \frac{R}{P_e} \xrightarrow{\ a\ } \frac{R}{P_e} \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

をみれば、Samuel 関数と短完全列に関する性質から

$$d(S) \leq d(R/P_e)$$

であり、かつ χ_{R/P_e} と $\chi_{R/P_e} + \chi_S$ が最高次係数を共有することから

$$d(S) < d(R/P_e)$$

であることがわかる。もちろん $d(R/P_e) \leq d(R)$ であるから[*9]$d(S) < d(R)$ であり、S に対して帰納法の仮定を適用できる。従って $e - 1 \leq \dim S \leq d(S) < d(R)$ であるから

$$e \leq d(R)$$

[*8] 言うまでもないが $JM = (0)$ より $(\underline{b} + J)M = \underline{b}M$。

[*9] $0 \longrightarrow P_e \longrightarrow R \longrightarrow R/P_e \longrightarrow 0$ を考えよ。

である。すべての素イデアル鎖に対してこれが成り立つことと、$\dim R$ がこのような e の上限であることから $\dim R \le d(R)$ が導かれる。

$d(R)$ は有限であることから、特に $\dim R$ が有限であることが (標高定理を使わずに) 示された。 □

Claim. $\delta(R) \le \dim R$.

Proof. $\dim R$ に関する帰納法。

$\dim R = 0$ とする。このとき $l(R) < \infty$ より $\delta(R) = 0$ である。よって正しい。

$\dim R > 0$ とする。$f \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{P \in \mathrm{Min} R} P$ をとれる。もちろん $\dim R/(f) < \dim R$ である。よって帰納法の仮定より $\delta(R/(f)) \le \dim R/(f)$。$s = \delta(R/(f))$ として $g_1, \ldots, g_s \in \mathfrak{m}$ を $R/(f)$ の巴系としてとる。

$$l\left(\frac{R}{(f, g_1, \ldots, g_s)}\right) < \infty$$

であるから $\delta(R) \le s+1 \le \dim R$ である。 □

Claim. $d(R) \le \delta(R)$.

Proof. $s = \delta(R)$ とおく。イデアル $Q = (a_1, \ldots, a_s) \subset \mathfrak{m}$ を巴系イデアルとする。Q はもちろん定義イデアルである。Q による随伴次数環を t を不定元とする R/Q の多項式環の部分環と同一視すれば $\mathrm{gr}_Q(R) = R/Q[Qt] = R/Q[a_1 t, \ldots, a_s t]$ である。これの Samuel 関数の多項式型としての次数 $d(R)$ について、これは $\mathrm{gr}_Q(R)$ の Poincare 級数の負の次数が $d(R)$ となるのであった。即ちある多項式 g, f で $g(T) = (1-T)^{s-d} f(T)$ かつ $(1-T) \nmid f$ となるものがあって

$$P\left(\mathrm{gr}_Q(R), T\right) = \frac{g(T)}{(1-T)^s} = \frac{f(T)}{(1-T)^d}$$

となっている。よって特に $d(R) \le s = \delta(R)$ である。 □

以上より次が示された。

Lemma 1.16. Noether 半局所環 R について

$$d(R) = \dim R = \delta(R)$$

である。 □

さて、定理について R 上の一般の有限生成加群 M に対して示そう。

Claim. $\dim_R M \leq d(M)$.

Proof. $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = (0)$ を各 $i = 0, \ldots, n-1$ に対して $M_i/M_{i+1} \simeq R/P_i$ となるような素イデアル $P_i \in \operatorname{Spec} R$ が存在するようにとる (Bourbaki's filtration)。

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow R/P_0 \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow R/P_{n-1} \longrightarrow 0$$

よって不変量 $d(-)$ の短完全列に関する性質から

$$d(M) = d(M_0) \geq \max\{d(R/P_i) \,|\, i = 0, \ldots, n-1\}$$

である。環については $d(R/P_i) = \dim R/P_i$ が成り立つから $d(M) \geq \max\{\dim R/P_i \,|\, i = 0, \ldots, n-1\}$ である。

　また

$$\operatorname{Min} M \subset \operatorname{Ass} M \subset \{P_0, \ldots, P_{n-1}\} \subset \operatorname{Supp} M$$

であるから特に $d(M) \geq \dim_R M$ である。

Claim. $\delta(M) \leq \dim_R M$.

Proof. $\dim_R M$ についての帰納法。

　$\dim_R M = 0$ ならば $\operatorname{Supp} M \subset \operatorname{Max} R$ であるから M はそれ自体長さ有限である。よって $\delta(M) = 0$。

　$\dim_R M = e > 0$ であるとする。このとき Krull 次元の定義より M の極小素因子 Q で $\dim R/Q = e$ となるものが存在する。これら全体を $\mathfrak{Q}$ で表すことにする (これが後に導入する $\operatorname{Assh}_R M$ である)。これらは定義より R の極大イデアルではない (極大イデアル P は必ず $\dim R/P = 0$ を満たす)。よって $\mathfrak{m} \not\subset \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q$ である。実際、$\mathfrak{m} \subset Q$ なる $Q \in \mathfrak{Q}$ の存在を仮定すると、$\mathfrak{m}$ が有限個の極大イデアルの交叉であることと Q が素イデアルであることから Q が極大イデアルを含むことになり直ちに矛盾する。したがって $f \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{Q \in \mathfrak{Q}} Q$ をとることができる。

$\mathfrak{a} := (0) : M$ とおくことにすれば

$$\mathrm{Supp}M/fM = V(\mathfrak{a}) \cap V(f) = V(\mathfrak{a} + (f))$$

であり、f の取り方から任意の $Q \in \mathfrak{Q}$ は $Q \notin V(\mathfrak{a} + (f))$ である。よって $\mathrm{Supp}M/fM$ に $\dim R/P = e$ となるような素イデアル P は存在しないから $\dim_R M/fM < e$ である[*10]。$l = \delta(M/fM)$ とおけば M/fM の巴系 $g_1, \ldots, g_l \in \mathfrak{m}$ が存在して、帰納法の仮定より $l \leq \dim M/fM$ である。

$$l\left(\frac{M}{(f, g_1, \ldots, g_l)M}\right) = l\left(\frac{M/fM}{(g_1, \ldots, g_l)M/fM}\right) < \infty$$

であるから $\delta(M) \leq l + 1$ であって、よって

$$\delta(M) \leq l + 1 \leq \dim M/fM + 1 \leq e$$

が成り立つ。 □

以上より Noether 半局所環上の有限生成加群について次元論の基本定理

$$\dim M = d(M) = \delta(M)$$

が示された。

先に書いた通り、この基本定理によって Krull の標高定理は簡潔に証明される。

Corollary 1.17. Krull の標高定理 (再掲).
R は Noether 環、$I \subset R$ は r 元生成のイデアルとする。このとき任意の $P \in \mathrm{Min}R/I$ について $\mathrm{height}P \leq r$ が成り立つ。 □

Proof. I の極小素因子を一つとって P とする。IR_P は PR_P 準素である。従って $\dim R_P = \delta(R_P) \leq r$ である。もちろんそれは $\mathrm{height}P \leq r$ ということである。 □

巴系と Krull 次元の関係の議論については実は Samuel 関数は必要ない。Krull の標高定理さえ証明できていればよい。巴系の振る舞いを見るためにいくつかの考察を書いておく。

Proposition 1.18. R は Noether 環、P は高さ r のイデアルとする。$f_1, \ldots, f_r \in P$ で $\mathrm{height}P/(f_1, \ldots, f_i) = r - i$ が全ての $i = 0, \ldots, r$ について成り立つようなものが存在する。 □

これは局所環における巴系の定義とも言える命題である。

[*10] これも後で $\mathrm{Assh}M$ に関する定理として再掲する。

Proof. 次元論の基本定理がわかっていれば、なんのことはない P による局所化の巴系をとればよい。少し説明を加えると、まず局所化を通して R を局所的、P はその極大イデアルとしてよい。$f_1,\dots,f_r \in P$ を巴系にとれば $f_2,\dots,f_r$ が $R/(f_1)$ の巴系であるから $\dim R/(f_1) = \operatorname{height} P/(f_1) = r-1$ である。同様に $\dim R/(f_1,\dots,f_i) = \operatorname{height} P/(f_1,\dots,f_i) = r-i$ である。もちろん $r=0$ でも成り立つ。

次元論の基本定理を使わない場合の証明をする。同様に局所化を通して (R,P) を r 次元 Noether 局所環とする。$r=0$ なら示すべきことはない。$r>0$ とする。R の極小素因子 Q で $\dim R/Q = r$ となるもの全体を $\mathfrak{Q}$ とおく。もちろん $\mathfrak{Q} \neq \emptyset$ である。どの $Q \in \mathfrak{Q}$ にも含まれない $f \in P$ がとれる。よって $\dim R/(f) = \operatorname{height} P/(f) \leq r-1$ である。$\dim R/(f) < r-1$ を仮定する。帰納法の仮定より高々 $r-2$ 個の元 $g_1,\dots,g_l \in P$ (ただし $l \leq r-2$) が存在して $\operatorname{height} P/(f,g_1,\dots,g_l) = 0$ となる。これは P が $(f,g_1,\dots,g_l)$ の極小素因子であることを導くが、$(f,g_1,\dots,g_l)$ は $l+1$ 元生成だから標高定理より極小素因子は高さ $l+1$ $(<r)$ 以下のものに限るからこれは矛盾。よって $\dim R/(f) = r-1$ である。帰納法の仮定から $f_1,\dots,f_{r-1} \in P$ で $\dim R/(f,f_1,\dots,f_i) = r-i-1$ が任意の $i=0,\dots,r-1$ について成り立つようなものが存在する。 □

Corollary 1.19. R は Noether 環、I は高さ r のイデアルとする。$f_1,\dots,f_r \in I$ で $\operatorname{height} I/(f_1,\dots,f_i) = r-i$ が各 $i=0,\dots,r$ について成り立つものが存在する。 □

Proof. 高さ r の $P \in \operatorname{Min} R/I$ をとって、これの局所化を通してかんがえてよい。(R,P) を Noether 局所環、I は P 準素とする。$\operatorname{height} P/(f_1,\dots,f_i) = i$ が成り立つ $f_1,\dots,f_r \in P$ が取れるのであった。任意の正整数 $n>0$ について $\sqrt{(f_1^n,\dots,f_r^n)} = \sqrt{(f_1,\dots,f_r)} = P$ であるから $f_1^n,\dots,f_r^n$ もまた P の巴系となり、同様に $\sqrt{(f_1^n,\dots,f_i^n)} = \sqrt{(f_1,\dots,f_i)}$ だから $\operatorname{height} P/(f_1^n,\dots,f_i^n) = r-i$ を各 i について満たす。

$\sqrt{I} = P$ であることを鑑みて、はじめから $f_1,\dots,f_r \in I$ としてよい。もちろん各 i について $\operatorname{height} I/(f_1,\dots,f_i) = \operatorname{height} P/(f_1,\dots,f_i) = r-i$ である。 □

また、上記の $\mathfrak{Q}$ についての議論から次の補題が分かる。

Lemma 1.20. (R,P) は r 次元 Noether 局所環、$\mathfrak{Q} = \{Q \in \operatorname{Min} R \mid \dim R/Q = r\}$ とする。このとき $f \in P$ について、もし $f \notin Q$ がすべての $Q \in \mathfrak{Q}$ に対して成り立てば $\dim R/(f) = r-1$ である。 □

Proof. 上記議論をなぞるだけである。r についての帰納法。

$r=0$ なら $\mathfrak{Q} = \{P\}$ であるからそもそもこのような条件をみたす $f \in P$ は存在しない。

$r>0$ とする。f の選び方から $\dim R/(f) \le r-1$ であり、$\dim R/(f) = l < r-1$ と仮定すると帰納法の仮定から $g_1,\dots,g_l \in P$ が存在して $\dim R/(f,g_1,\dots,g_l) = 0$ となるがこれは高さ $r > l+1$ である P が、$l+1$ 元生成であるイデアル $(f,g_1,\dots,g_l)$ の極小素因子であることを導き標高定理に矛盾する。よって $\dim R/(f) = r-1$ である。 □

次の命題は上の命題と似ているが少しギャップがあるので注意。

Proposition 1.21. R は Noether 環、I は高さ r のイデアルとする。$f_1,\dots,f_r \in I$ で $\mathrm{height}(f_1,\dots,f_i) = i$ が各 $i = 0,\dots,r$ について成り立つようなものが存在する。 □

Proof. $r=0$ なら自明。$r>0$ とする。

任意の $P \in \mathrm{Min}R$ について $I \not\subset P$ であるから、$f_1 \in I \setminus \bigcup_{P \in \mathrm{Min}R} P \neq \emptyset$ がとれる。$\mathrm{height}(f_1) = 1$ である。

$1 \le i < r$ について $f_1,\dots,f_i \in I$ があって $\mathrm{height}(f_1,\dots,f_l) = l$ が各 $l = 0,\dots,i$ について成り立つとする。$(f_1,\dots,f_l)$ の極小素因子は (標高定理より) 全て高さ l である。$(f_1,\dots,f_i)$ のどの極小素因子も I を含まない (含んだら $\mathrm{height}I = r > i$ に矛盾する)。よって $f_{i+1} \in I$ を $(f_1,\dots,f_i)$ のどの極小素因子にも含まないように取れる。このとき、選び方から $\mathrm{height}(f_1,\dots,f_{i+1}) \ge i+1$ である。もちろん標高定理より $\mathrm{height}(f_1,\dots,f_{i+1}) = i+1$ である。

以上のようにして $f_1,\dots,f_r \in I$ を望んだ通りにとることができる。 □

この二つの命題の証明のギャップは' 極小素因子は必ずしも次元分の長さの素イデアル鎖の底になるわけではない' という事実に基づく。イデアル I について $\dim R/I + \mathrm{height}I$ が必ずしも $\dim R$ と一致しないということでもある。だから特に局所環について

1. $\dim R$ をみるときは $\mathfrak{Q} = \{Q \in \mathrm{Min}R \mid \dim R = \dim R/Q\}$ に、
2. $\mathrm{height}I$ をみるときは $\mathrm{Min}R/I$ に

それぞれ注目することになる。ただ、後者の命題のほうが強いのでしばしばこちらを使う。

以上の考察から今まで $\mathfrak{Q}$ と表記していたものについても導入することにする。

Definition 1.22. (R,P) は Noether 局所環、M はその上の有限生成加群とする。

$$\mathrm{Assh}_R M := \{Q \in \mathrm{Supp}M \mid \dim R/Q = \dim M\}$$

と定める。 □

もちろん、イデアル I について $\mathrm{Assh}_R R/I$ と $\mathrm{Assh}_{R/I} R/I$ の間には対応定理による一対

一対応がある。この定義のもと、先の $\mathfrak{Q}$ に関する補題は次のように拡張できる。

Lemma 1.23. (R,P) は Noether 局所環、I は R のイデアルとする。単元でない $f \in R$ について、もし $f \notin Q$ が全ての $Q \in \mathrm{Assh} R/I$ について成り立つならば $\dim \frac{R}{I+(f)} = \dim R/I - 1$ である。 □

Proof. R/I を通して $f \notin Q$ がすべての $Q \in \mathrm{Assh} R$ にたいして成り立つときに $\dim R/(f) = \dim R - 1$ であることを示せばよい。そしてこれは先の補題と同じことである。 □

Proposition 1.24. (R,P) は Noether 局所環、M は有限生成 R 加群とする。

1. $\mathrm{Assh} M \subset \mathrm{Min} M \subset \mathrm{Ass} M$ である。
2. $f \in P$ について、$\dim M - 1 \leq \dim M/fM \leq \dim M$ である。
3. さらに $\dim M/fM = \dim M - 1$ は任意の $Q \in \mathrm{Assh} M$ に対して $f \notin Q$ であることと同値である。

□

Proof. 任意の $Q \in \mathrm{Assh} M$ についてもし $\mathfrak{p} \subsetneq Q$ なる $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp} M$ があれば $\dim M = \dim R/Q < \dim R/\mathfrak{p}$ となり明らかに Krull 次元の定義に反する。よって Q は極小素因子である。

$\mathfrak{a} = (0) : M$ とする。$f \in P$ について、$\mathrm{Supp} M/fM = V(\mathfrak{a} + (f))$ であるから M/fM の次元が M のそれより高くなることはない。また $\dim M/fM = \dim R/\mathfrak{a} + (f) \geq \dim R/\mathfrak{a} = \dim M$ であるから
$$\dim M - 1 \leq \dim M/fM \leq \dim M$$
である。

$f \notin Q$ がすべての $Q \in \mathrm{Assh} M$ について成り立つならば、それすなわち $Q \notin \mathrm{Assh} R/\mathfrak{a}$ に対してもそうであるから $\dim R/\mathfrak{a} + (f) = \dim R/\mathfrak{a} - 1$、よって $\dim M/fM = \dim M - 1$ である。

逆に $\dim M/fM = \dim M - 1$ ならば、もし $f \in Q$ なる $Q \in \mathrm{Assh} M$ が存在すると仮定すると Q をそこにする長さ $\dim M$ の素イデアル鎖が $\mathrm{Supp} M$ 内に存在することになり、Q が f を含むことからこの素イデアル鎖は $\mathrm{Supp} M/fM$ にも存在する。よって $\dim M/fM = \dim M$ を導き矛盾する。 □

Definition 1.25. 巴系についての再定義.
(R,P) を Noether 局所環、M を有限生成 R 加群とする。$\dim M/(f_1, \ldots, f_d) < \infty$ となるよ

うな $f_1,\ldots,f_d \in P$ で d が最小となるようなものを M の巴系とよぶ。特に $r=\dim M$ とすると特に $\dim M/(f_1,\ldots,f_i)=\dim M-i$ が各 $i=0,\ldots,r$ について成り立つような $f_1,\ldots,f_r$ の取り方が上記の通り存在し、またこれが最小であるから巴系の長さは加群の Krull 次元に等しい。 $\square$

参考文献

[1] M.F.Atiyah and I.G.MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.