dammy [1]

1 Exterior Algebra

外積代数 (Grassman 代数) について導入する。

以下、特に断らない限り R は単位元付き可換環とする。

Definition 1.1. テンソル代数
M を R 加群とする。各整数 $n \geq 0$ に対して

$$M^{\bigotimes n} := \underbrace{M \otimes M \otimes \cdots \otimes M}_{n}$$

と書くことにする。ただし $M^{\bigotimes 0} = R$ とする。

テンソル積の標準的な同型 $M^{\bigotimes m} \otimes M^{\bigotimes n} \simeq M^{\bigotimes (m+n)}$ が得られる。同様に各 $m, n \geq 0$ に対して標準的な R 二重線型射

$$M^{\bigotimes m} \times M^{\bigotimes n} \xrightarrow{\mu_{m,n}} M^{\bigotimes (m+n)}$$

を得る。この射の族によって

$$\mathrm{Tens}_R(M) := \bigoplus_{n \geq 0} M^{\bigotimes n}$$

の各直和因子同士に定まる積を線型に拡張することで $\mathrm{Tens}_R(M)$ は $\mathbb{N}$ で次数付けられた R 代数の構造をもつ。次数付けを強調して $M^{\bigotimes n} = \mathrm{Tens}_R^n(M)$ と書くことにしよう。つまり $\mathrm{Tens}_R(M)$ の積は

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tens}_R(M) \times \mathrm{Tens}_R(M) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathrm{Tens}_R(M) \\
\mathrm{Tens}_R(M) \otimes \mathrm{Tens}_R(M) \arrow[d, "\simeq"'] & \\
\bigoplus_{m,n \geq 0} (\mathrm{Tens}_R^m(M) \otimes \mathrm{Tens}_R^n(M)) \arrow[uur, "\bigoplus \mu_{m,n}"'] &
\end{tikzcd}$$

で得られる。 □

Theorem 1.2. テンソル代数の普遍性

R は可換環、S は一般の単位元付き R 代数とする。R 加群 M について、もし $M \xrightarrow{f} S$ が得られれば、

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tens}_R(M) \arrow[rr, "\alpha"] & & S \\ & M \arrow[ul, "\text{canon.}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするような R 代数の射 α が一意に得られる。 □

Proof. もしあるとしたら、各 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \mathrm{Tens}_R^n(M)$(ただし $x_i \in M$) に対して

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \alpha(x_1) \cdot \cdots \cdot \alpha(x_n) \\ &= f(x_1) \cdot \cdots \cdot f(x_n) \end{aligned}$$

でなくてはならない。

　また、実際 α を $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ に対して

$$\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1) \cdot \cdots \cdot f(x_n)$$

$$\alpha(1) = 1$$

と定め、これを $\mathrm{Tens}_R(M)$ 全体に R 線型に拡張したものとして定義すると、これは R 代数の射となる。 □

Definition 1.3. 外積代数 (Grassmann 代数)

R 加群 M について、

$$\{x \otimes x \,|\, x \in M\}$$

で生成される $\mathrm{Tens}_R(M)$ の両側イデアルを $\mathfrak{I}$ とする。これは斉次元で生成されたイデアルだから斉次イデアルである。

　この剰余次数環を

$$\bigwedge M := \frac{\mathrm{Tens}_R(M)}{\mathfrak{I}}$$

と書き、M の外積代数と呼ぶ。各斉次成分は $\bigwedge^n M$ と表記する。また、

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n := \overline{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n}$$

と書く。 □

Proposition 1.4. ▷ $\bigwedge^0 M \simeq R$、$\bigwedge^1 M \simeq M$ である。

▷ $x, y \in M$ について $x \wedge y = -y \wedge x$ である。

▷ より一般に $x \in \bigwedge^m M, y \in \bigwedge^n M$ とすると

$$y \wedge x = (-1)^{mn} x \wedge y$$

である。

□

Proof. 任意の $z \in M$ について $z \wedge z = 0$ だから

$$\begin{aligned} x \wedge y + y \wedge x &= x \wedge y + x \wedge x + y \wedge y + y \wedge x \\ &= x \wedge (y + x) + y \wedge (y + x) \\ &= (x + y) \wedge (y + x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $x \wedge y = -y \wedge x$ である。

これによって 2 次以上の斉次元の場合を計算できる。

$$\begin{aligned} &(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) \wedge (y_1 \wedge \cdots \wedge y_n) \\ &\qquad = ((x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) \wedge y_1) \wedge (y_2 \wedge y_n) \\ &\qquad = (-1)^m (y_1 \wedge (x_1 \wedge \cdots \wedge x_m)) \wedge (y_2 \wedge \cdots \wedge y_n) \\ &\qquad = \dots \\ &\qquad = (-1)^{mn} (y_1 \wedge \cdots \wedge y_n) \wedge (x_1 \wedge x_m) \end{aligned}$$

□

1.1 Koszul Complex

Lemma 1.5. 環 R 上の二つの全射

$$M_1 \xrightarrow{f_1} N_1$$

$$M_2 \xrightarrow{f_2} N_2$$

について、$f_1 \otimes f_2$ は全射であり、このとき

$$\operatorname{Ker}(f_1 \otimes f_2) = (x_1 \otimes x_2 \,|\, x_1 \in \operatorname{Ker} f_1 \text{ または } x_2 \in \operatorname{Ker} f_2)$$

である。 □

Proof. 任意の $y_1 \in N_1, y_2 \in N_2$ に対して $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$ を $f_i(x_i) = y_i$ となるようにとれば $f_1 \otimes f_2(x_1 \otimes x_2) = y_1 \otimes y_2$ であるから、$f_1 \otimes f_2$ は全射である。

$\{x_1 \otimes x_2 \,|\, x_1 \in \operatorname{Ker} f_1$ または $x_2 \in \operatorname{Ker} f_2\}$ で生成された $M_1 \otimes M_2$ の部分加群を T とおく。

さて、$(y_1, y_2) \in N_1 \times N_2$ に対して $x_1 \in f_1^{-1}(\{y_1\}), x_2 \in f_2^{-1}(\{y_2\})$ をとって $\overline{x_1 \otimes x_2} \in \frac{M_1 \otimes M_2}{T}$ を対応させると、これは well-defined な R 二重線型射である。実際、$x_1' \in f_1^{-1}(\{y_1\}), x_2' \in f_2^{-1}(\{y_2\})$ を x_1, x_2 とは別にとれば、

$$\begin{aligned} x_1 \otimes x_2 - x_1' \otimes x_2' &= x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_2' + x_1 \otimes x_2' - x_1' \otimes x_2' \\ &= x_1 \otimes \left(x_2 - x_2'\right) + \left(x_1 - x_1'\right) \otimes x_2' \\ &\in T \end{aligned}$$

よって $\frac{M_1 \otimes M_2}{T}$ 内で $\overline{x_1 \otimes x_2} = \overline{x_1' \otimes x_2'}$ である[*1]。またこの対応は明らかに二重 R 線型射である。

- ▷ 上記の二重線型射を $\beta : N_1 \times N_2 \longrightarrow \frac{M_1 \otimes M_2}{T}$、
- ▷ β から得られる R 線型射を $h : N_1 \otimes N_2 \longrightarrow \frac{M_1 \otimes M_2}{T}$、
- ▷ 剰余加群への自然な射影を $\varepsilon : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow \frac{M_1 \otimes M_2}{T}$、
- ▷ 直積からテンソル積への自然な射を $\eta : N_1 \times N_2 \longrightarrow N_1 \otimes N_2$

で表すことにすると

$$\begin{tikzcd}
\frac{M_1\otimes M_2}{T} \arrow[r, "\overline{f_1\otimes f_2}"'] \arrow[rr, bend left, "1"] & N_1\otimes N_2 \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend left, "1"] & \frac{M_1\otimes M_2}{T} \arrow[r, "\overline{f_1\otimes f_2}"'] & N_1\otimes N_2 \\
& M_1\otimes M_2 \arrow[ul, bend left, "\varepsilon"] \arrow[u, "f_1\otimes f_2"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & N_1\times N_2 \arrow[ul, "\eta"] \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ur, bend right, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

は可換である。まずは

$$h \circ f_1 \otimes f_2 = \varepsilon$$

[*1] つまりこの h が定義できるかどうかに f_i の全射性が関わってくる。

を示す。$x_1 \otimes x_2 \in M_1 \otimes M_2$ に対して、

$$\begin{aligned} h \circ f_1 \otimes f_2 (x_1 \otimes x_2) &= h(f_1(x_1) \otimes f_2(x_2)) \\ &= \overline{x_1 \otimes x_2} \end{aligned}$$

であるから $h \circ f_1 \otimes f_2 = \varepsilon$ である。次に

$$\overline{f_1 \otimes f_2} \circ \beta = \eta$$

について示そう。$(y_1, y_2) \in N_1 \times N_2$ に対して $f_1(x_1) = y_1, f_2(x_2) = y_2$ なる x_1, x_2 をとれば

$$\begin{aligned} \left(\overline{f_1 \otimes f_2} \circ \beta\right)(y_1, y_2) &= \overline{f_1 \otimes f_2}\,(\overline{x_1 \otimes x_2}) \\ &= f_1(x_1) \otimes f_2(x_2) \\ &= y_1 \otimes y_2 \end{aligned}$$

よって $\overline{f_1 \otimes f_2} \circ \beta = \eta$ である。

また、テンソル積と剰余加群の普遍性から

$$\begin{aligned} h \circ \overline{f_1 \otimes f_2} &= 1 \\ \overline{f_1 \otimes f_2} \circ h &= 1 \end{aligned}$$

がわかる。すなわち h は $\overline{f_1 \otimes f_2}$ の逆射であり、$f_1 \otimes f_2$ の核は T に等しい。 □

Corollary 1.6. R 線型射 $\left(M_i \xrightarrow{f_i} N_i\right)_{i=1}^{n}$ がすべて全射であるとき、$\mathrm{Ker}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$ は

$$\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \,|\, x_i \in M_i, \text{いずれかは } x_i \in \mathrm{Ker}\, f_i \text{ である}\}$$

で生成される部分加群に等しい。 □

Proof. n についての帰納法。$n = 2$ の時は上記補題より正しい。

$n > 2$ とする。$M' := M_1 \otimes \cdots \otimes M_{n-1}$、$N' := N_1 \otimes \cdots \otimes N_{n-1}$ とおく。$f' = f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n-1} : M' \longrightarrow N'$ は帰納法の仮定より全射であり、$\mathrm{Ker}\, f'$ は

$$\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \,|\, x_i \in M_i, \text{いずれかは } x_i \in \mathrm{Ker}\, f_i \text{ である}\}$$

で生成される。

よって $f' \otimes f_n : M' \otimes M_n \longrightarrow N' \otimes N_n$ も全射であり、$\operatorname{Ker} f' \otimes f_n$ は

$$\left\{ x' \otimes x_n \,\middle|\, x' \in M', x_n \in M_n, x' \in \operatorname{Ker} f' \text{ または } x_n \in \operatorname{Ker} f_n \text{ である} \right\}$$

で生成される。カノニカルな同型 $M' \otimes M_n \simeq M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ を通して主張が正しいことが分かる。

$$\begin{array}{ccc} M' \otimes M & \xrightarrow{f' \otimes f_n} & N' \otimes N_n \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \bigotimes_{i=1}^n M_i & \xrightarrow[\bigotimes_{i=1}^n f_i]{} & \bigotimes_{i=1}^n N_i \end{array}$$

Proposition 1.7. $M \xrightarrow{f} N$ を環 R 上の線型射とする。もし f が全射ならば $\operatorname{Tens}_R(M) \xrightarrow{\operatorname{Tens} f} \operatorname{Tens}_R(N)$ もまた全射である。さらにこの時、

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Tens} f) = [\operatorname{Ker} f \text{ で生成された } \operatorname{Tens}(M) \text{ の両側イデアル}]$$

である。 □

Proof. T を $\operatorname{Ker} f$ で生成された $\operatorname{Tens}(M)$ の両側イデアル、T_n でその斉次成分を表すこととする。

$\operatorname{Tens} f$ は斉次な射だからその核は斉次イデアルである。斉次成分を $K_n := \operatorname{Ker}(\operatorname{Tens} f) \cap \operatorname{Tens}^n(M)$ と書くことにする。各 K_n が T_n に一致することを示せばよい。

補題より、$M^{\bigotimes n} \xrightarrow{f^{\bigotimes n}} N^{\bigotimes n}$ は全射であってその核 (K_n のことである) は

$$\left\{ x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \,|\, x_1, \cdots, x_n \in M, \text{いずれかは } x_i \in \operatorname{Ker} f \text{ である} \right\}$$

によって生成される $M^{\bigotimes n}$ の部分加群であり、これは定義から T_n に等しい。

よって $T = \operatorname{Ker}(\operatorname{Tens} f)$ である。 □

1.2 射の外積冪と行列式

R 線型射 $M \xrightarrow{f} N$ を交代的な次数付き R 代数の射 $\bigwedge M \xrightarrow{\bigwedge f} \bigwedge N$ に対応させる函手は忠実充満である。ここで交代的な次数付き R 代数とは $\mathbb{N}$ で次数付けられた R 代数で斉次元 x, y について

$$yx = (-1)^{(\deg x)(\deg y)} xy$$

が成り立つものであり、その射とは斉次な R 代数の射とする。

実際、$f,g:M\longrightarrow N$ が得られた時にもし $\bigwedge f=\bigwedge g$ ならば $f=\bigwedge^1 f=\bigwedge^1 g=g$ であるからこれは忠実。

逆に交代的な次数付き R 代数の射として $\alpha:\bigwedge M\longrightarrow\bigwedge N$ をとると、$M=\bigwedge^1 M\xrightarrow{\alpha_1}\bigwedge^1 N=N$ として線型写像が得られ、これを $\varphi=\alpha_1$ とすると $x_1,\ldots,x_n\in M$ に対して

$$\begin{aligned}\bigwedge^n\varphi\left(x_1\wedge\cdots\wedge x_n\right)&=\varphi\left(x_1\right)\wedge\ldots\varphi\left(x_n\right)\\&=\alpha_1\left(x_1\right)\wedge\cdots\wedge\alpha_1\left(x_n\right)\\\alpha\left(x_1\wedge\cdots\wedge x_n\right)&=\alpha\left(x_1\right)\wedge\cdots\wedge\alpha\left(x_n\right)\\&=\alpha_1\left(x_1\right)\wedge\cdots\wedge\alpha_1\left(x_n\right)\end{aligned}$$

であり、これらは等しい。よって $\bigwedge\varphi=\alpha$ だから充満性が分かる。

従って、$M\xrightarrow{f}N$ についてもし $\bigwedge f$ が同型射ならば f もまた同型射である。

以下、R は可換環、F,G はそれぞれ階数 $n,m>0$ の R 自由加群、$F\xrightarrow{\varphi}G$ を R 線型射とする。

F の自由基底を $e_1,\ldots,e_n$、G の自由基底を $f_1,\ldots,f_m$ とする。$0<\ell\leq\min\{n,m\}$ について $\bigwedge^\ell\varphi$ を見よう。

今、φ の表現行列を

$$X:=\begin{pmatrix}x_{1,1}&\ldots&x_{1,n}\\\vdots&&\vdots\\x_{m,1}&\ldots&x_{m,n}\end{pmatrix}$$

とおく。即ち、

$$\varphi\begin{bmatrix}e_1&\ldots&e_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1&\ldots&f_m\end{bmatrix}X$$

である。

$1\leq i_1<\cdots<i_\ell\leq n$ に対して

$$\begin{aligned}\bigwedge^\ell\varphi\left(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_\ell}\right)&=\varphi\left(e_{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\varphi\left(e_{i_\ell}\right)\\&=\left(\begin{bmatrix}f_1&\ldots&f_m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_{1,i_1}\\\vdots\\x_{m,i_1}\end{pmatrix}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\begin{bmatrix}f_1&\ldots&f_m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_{1,i_\ell}\\\vdots\\x_{m,i_\ell}\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

である。各 $1 \leq s \leq \ell$ について

$$\begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,i_s} \\ \vdots \\ x_{m,i_s} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} x_{k,i_s} f_k$$

であるから、

$$\begin{aligned} \bigwedge^{\ell} \varphi \left(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell} \right) &= \left(\sum_{k_1=1}^{m} x_{k_1,i_1} f_{k_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k_\ell=1}^{m} x_{k_\ell,i_\ell} f_{k_\ell} \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_2=1}^{m} \cdots \sum_{k_\ell=1}^{m} \left(x_{k_1,i_1} f_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_\ell,i_\ell} f_{k_\ell} \right) \end{aligned}$$

$y \wedge y = 0$ であるから、$k_1, \dots, k_\ell$ のダブりと順列を考慮すると上式は

$$\begin{aligned} &= \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_\ell \leq m} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_\ell} x_{k_{\sigma(1)},i_1} f_{k_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge x_{k_{\sigma(\ell)},i_\ell} f_{k_{\sigma(\ell)}} \\ &= \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_\ell \leq m} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_\ell} \left(x_{k_{\sigma(1)},i_1} x_{k_{\sigma(2)},i_2} \dots x_{k_{\sigma(\ell)},i_\ell} \right) f_{k_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge f_{k_{\sigma(\ell)}} \end{aligned}$$

$f_{k_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge f_{k_{\sigma(\ell)}} = \operatorname{sign}(\sigma) f_{k_1} \wedge \cdots \wedge f_{k_\ell}$ であるから更に

$$= \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_\ell \leq m} \left(\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_\ell} \operatorname{sign}(\sigma) \left(x_{k_{\sigma(1)},i_1} x_{k_{\sigma(2)},i_2} \dots x_{k_{\sigma(\ell)},i_\ell} \right) \right) f_{k_1} \wedge \cdots \wedge f_{k_\ell}$$

となる。

Notation. この式に表れる

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_\ell} \operatorname{sign}(\sigma) \left(x_{k_{\sigma(1)},i_1} x_{k_{\sigma(2)},i_2} \dots x_{k_{\sigma(\ell)},i_\ell} \right)$$

を X の第 $k_1 < \cdots < k_\ell$ 行 $i_1 < \cdots < i_\ell$ 列の成分の式ということで

$$\det_X \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_\ell \\ i_1 & \dots & i_\ell \end{pmatrix}$$

と表記することにしよう (これを $k_1,\dots,k_\ell$ 行と $i_1,\dots,i_\ell$ 列から成る X の小行列式と呼んでいたのであった)。

集合

$$\{(i_1,\dots,i_\ell)\,|1\le i_1<\dots<i_\ell\le n\}$$

は $\binom{n}{\ell}$ 個の元から成る集合で、自然に辞書式の順序 $\prec$ を持つ。

$$(i_1,\dots,i_\ell)\prec(j_1,\dots,j_\ell)\underset{\text{dfn}}{\Leftrightarrow}1\le\exists s\le\ell,\begin{cases}1\le\forall t<s, i_t=j_t \quad \text{and}\\ i_s<j_s\end{cases}$$

この全順序集合を $\Lambda_{(n;\ell)}$ と表すことにし、以降これで順番付けられたものについて'$(i_1,\dots,i_\ell)$ 番目' などという言い方をすることがある。

また簡略の為ここでは $\Lambda_F:=\Lambda_{(n;\ell)}$、$\Lambda_G:=\Lambda_{(m;\ell)}$ とおくことにし、Λ_F の元を

$$\Lambda_F=\left\{\lambda_1<\dots<\lambda_{\binom{n}{\ell}}\right\}$$

Λ_G の元を

$$\Lambda_G=\left\{\mu_1<\dots<\mu_{\binom{m}{\ell}}\right\}$$

と表記することにする。(例えば $\lambda_1=(1,2,3,\dots,\ell)$、$\lambda_2=(1,2,\dots,\ell-1,\ell+1)$、$\lambda_{\binom{n}{\ell}}=(n-\ell+1,n-\ell+2,\dots,n)$ である。)

この記号の下、$\lambda=(i_1,\dots,i_\ell)\in\Lambda_F,\mu=(k_1,\dots,k_\ell)\in\Lambda_G$ に対して

$$\det{}_X\begin{pmatrix}\mu\\ \lambda\end{pmatrix}=\det{}_X\begin{pmatrix}k_1&\dots&k_\ell\\ i_1&\dots&i_\ell\end{pmatrix}$$

と略記する。 □

$$\bigwedge^{\ell}F=\bigoplus_{(i_1,\dots,i_\ell)\in\Lambda}R\left(e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_\ell}\right)$$

であった。以下、$e_{(i_1,\dots,i_\ell)}:=e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_\ell}$ という表記を用いる。この表記のもと $\bigwedge^\ell F=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_F}e_\lambda$、$G$ も同様に $\bigwedge^\ell G=\bigoplus_{\mu\in\Lambda_G}f_\mu$ である。このように Λ_F,Λ_G で順番付けられた基底によって $\bigwedge^\ell\varphi$ の表現行列を得られる。この表現行列のサイズは $\binom{m}{\ell}\times\binom{n}{\ell}$ である。

$$
\begin{aligned}
&\bigwedge^{\ell}\varphi\left[\begin{array}{cccc} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_2} & \cdots & e_{\lambda_{\binom{n}{\ell}}}\end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} \bigwedge^{\ell}\varphi\left(e_{\lambda_1}\right) & \cdots & \bigwedge^{\ell}\varphi\left(e_{\lambda_{\binom{n}{\ell}}}\right)\end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} \left(\sum_{\mu\in\Lambda_G}\det_X\left(\begin{array}{c}\mu\\ \lambda_1\end{array}\right)f_\mu\right) & \cdots & \left(\sum_{\mu\in\Lambda_G}\det_X\left(\begin{array}{c}\mu\\ \lambda_{\binom{m}{\ell}}\end{array}\right)f_\mu\right)\end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} f_{\lambda_1} & \cdots & f_{\lambda_{\binom{m}{\ell}}}\end{array}\right]
\left(\begin{array}{cccc}
\det_X\left(\begin{array}{c}\lambda_1\\ \lambda_1\end{array}\right) & \det_X\left(\begin{array}{c}\lambda_1\\ \lambda_2\end{array}\right) & \cdots & \det_X\left(\begin{array}{c}\lambda_1\\ \lambda_{\binom{n}{\ell}}\end{array}\right) \\
\det_X\left(\begin{array}{c}\lambda_2\\ \lambda_1\end{array}\right) & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots \\
\det_X\left(\begin{array}{c}\lambda_{\binom{m}{\ell}}\\ \lambda_1\end{array}\right) & \cdots & \cdots & \det_X\left(\begin{array}{c}\lambda_{\binom{m}{\ell}}\\ \lambda_{\binom{n}{\ell}}\end{array}\right)
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

以上の通り、行列 X の ℓ 次小行列式 (ℓ-minor) とは X に対応する自由加群の射 φ の ℓ 次外積冪 (ℓ-th exterior power) の表現行列の成分のことである。

特に $m=n$、即ち X が n 次正方行列であるとき、X の n-minor については、$\Lambda_{(n;n)} = \{(1,\ldots,n)\}$ だから、$\bigwedge^n F = Re_{(1,\ldots,n)} \simeq R$、$\bigwedge^n G \simeq R$ であり、

$$
\bigwedge^{n}\varphi\left(e_{(1,\ldots,n)}\right) = \det_X\left(\begin{array}{c}1,2,\ldots,n\\ 1,2,\ldots,n\end{array}\right)f_{(1,\ldots,n)}
$$

である。これを $\det X$ と書いて X の行列式と呼んでいたのであった。従って特に φ が同型ならば ($\bigwedge^n\varphi$ が同型だから)$\det X$ が R の単元であることがわかる。また X の (i,j) 余因子を $X_{(i,j)}$ とするとき、余因子行列 $Y := \left(X_{(j,i)}\right)_{(i,j)}$ について $XY = YX = \det XE$ が成り立つのであった (ただし E は単位行列)。よって逆に $\det X$ が単元であれば X は逆行列を持ち、従って φ は同型射である。それは、$\bigwedge^n\varphi$ が同型射であれば実は φ は同型であるということである。つまり $R^n \xrightarrow{\varphi} R^n$ について次がすべて同じことである。

- ▷ $\det X$ が単元である。
- ▷ X が逆行列を持つ。
- ▷ φ が同型射である。
- ▷ $\bigwedge\varphi$ が同型射である。
- ▷ 各 $\ell \geq 0$ について $\bigwedge^{\ell}\varphi$ が同型射である。
- ▷ $\bigwedge^n\varphi$ が同型射である。

Note. これは自由加群の射でない $M \xrightarrow{\varphi} N$ に対しても似たようなが成り立つだろうか？ □

Remark. X, Y をそれぞれ $\ell \times m$、$m \times n$ 行列とし、対応する自由加群の射を $R^m \xrightarrow{x} R^l$、$R^n \xrightarrow{y} R^m$ とする。このとき各 $1 \leq t \leq \min\{l, m, n\}$ に対して

$$\bigwedge^t (xy) = \left(\bigwedge^t x\right)\left(\bigwedge^t y\right)$$

であるから、行列 XY の t-minor は X の t-minor と Y の t-minor の積和である。特に $\lambda \in \Lambda_{n;t}, \mu \in \Lambda_{l;t}$ について

$$\det{}_{XY}\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \sum_{\xi \in \Lambda_{m;t}} \det{}_X \begin{pmatrix} \mu \\ \xi \end{pmatrix} \det{}_Y \begin{pmatrix} \xi \\ \lambda \end{pmatrix}$$

である。

参考文献

[1] M.F.Atiyah and I.G.MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.