

# Affine 空間について

木村

## 目次

1	affine 空間	2
1.1	affine 空間とその部分空間 . . . . .	2
1.2	基本的な幾何的性質 . . . . .	4
2	affine 線型写像	6
2.1	affine 線型写像と affine 同型 . . . . .	6

# 1 affine 空間

ここでは  $k$  は体とする。また、特に断らない限り、登場する  $k$  上の線型空間はすべて有限次元のものとする。

## 1.1 affine 空間とその部分空間

**Definition 1.1.** [1, p.44]

集合  $A$ 、線型空間  $V$ 、加法群としての  $V$  から  $A$  への作用  $\tau: V \times A \rightarrow A$  とする。

▷ 任意の  $P \in A$  について、 $\tau_P = \tau(-, P): V \rightarrow A$  が全単射となる。

この条件を満たすとき、これらの組  $(A, V, \tau)$  は affine 空間であるという。 $A$  は  $V$  上の主等質空間 (torsor)、 $V$  は  $A$  の平行移動の群 (translation group) とよぶ。しばしば平行移動の群やその作用を省略して affine 空間  $(A, V)$ 、または  $A$  などと書くこともある。

$V$  の線型空間としての次元を affine 空間  $A$  の次元として定め、 $\dim A$  と書く。

**Example 1.2.**  $n$  次元線型空間  $k^n$  は和によって自然に affine 空間となる。線型空間としての  $k^n$  と区別して、この affine 空間を  $\mathbb{A}^n := (k^n, k^n, (+))$  と書く。□

**Definition 1.3.** [1, p.45]

$A = (A, V, \tau)$  を affine 空間とする。部分集合  $B \subset A$ 、部分空間  $W \subset V$  について、 $(B, W, \tau|_{W \times B})$  が affine 空間となるとき、これを  $A$  の affine 線型部分空間と呼ぶ。誤解がない場合は単に部分空間とよぶ。

特に  $\dim W = 1$  のとき、 $B$  は affine 直線と呼び、 $\dim W = \dim V - 1$  となるとき  $B$  を affine 超平面と呼ぶ。

また、二つの affine 部分空間  $B, B' \subset A$  が同じ平行移動の群を持つ時、これらは平行であるという。□

次の事実は affine 空間の定義から自明であるが、非常によく使うので書いておく。

**Proposition 1.4.**  $(A, V, \tau)$  は affine 空間、 $P, Q \in A$  とする。このとき、 $P = v + Q$  となる  $v \in V$  が一意的に存在する。□

**Proof.**  $\tau_Q: V \rightarrow A$  が全単射だから、 $P \in A$  に対応する元  $v := \tau_Q^{-1}(P)$  が得られる。この元は定義から  $P = \tau_Q(v) = v + Q$  である。□

**Definition 1.5.**  $P, Q \in A$  に対して  $P = v + Q$  となる一意的な  $v \in V$  を  $\overline{QP}$  と書く。  $\square$

**Lemma 1.6.**  $P, Q \in A$  について  $\overline{PQ} = -\overline{QP}$  である。  $\square$

**Proof.**  $P = \overline{QP} + Q$  より  $-\overline{QP} + P = Q$  である。一意性から  $\overline{PQ} = -\overline{QP}$  である。  $\square$

**Proposition 1.7.** [1, p.45]

$(A, V)$  は affine 空間、部分集合  $B \subset A$  について、次が同値である。

- (1)  $B$  は  $A$  の affine 部分空間
- (2) 任意の  $Q \in B$  について、

$$W_Q := \{v \in V \mid v + Q \in B\}$$

とおけば  $W_Q$  は  $V$  の部分空間を成す。

**Proof.**  $B$  が affine 部分空間であるとする。平行移動の群を  $W$  とする。 $Q \in B$  を任意にとって  $W_Q$  が  $V$  の部分空間となることを示そう。

定義から  $W \subseteq W_Q$  である。また任意に  $w \in W_Q$  をとれば  $w + Q \in B$  であるから  $w$  は  $\tau_Q^{-1} : B \rightarrow W$  の像に属する。よって  $w \in W$  である。よって  $W = W_Q$  だから  $W_Q$  は部分空間を成す。

逆に  $Q \in B$  を任意にとれば  $W_Q$  が  $V$  の部分空間となるとしよう。このとき  $B$  が affine 部分空間であることを示す。

**Claim.** 任意の  $P, Q \in B$  について  $W_P = W_Q$  である。  $\square$

$P \in B$  について  $W_P \subseteq W_Q$  を示せば、対称性から  $W_Q \subseteq W_P$  でもあり、従って  $W_P = W_Q$  が従う。

任意の  $w \in W_Q$  について、

$$\begin{aligned} w + Q &= w + \overline{PQ} + P \\ &\in B \end{aligned}$$

が成り立つ。よって  $w + \overline{PQ} \in W_P$ 。ここで  $\overline{PQ} \in W_P$  かつ  $W_P$  が部分空間であることから  $w \in W_P$  となる。よって  $W_Q \subseteq W_P$  である。  $\square$

よって  $W := \bigcap_{Q \in B} W_Q$  とすれば、任意の  $Q \in B$  について  $W = W_Q$  である。

$(B, W)$  が affine 部分空間を成すことを示そう。任意の  $Q \in B$  について  $\tau_Q : W \rightarrow B$  が well-defined であり、単射であることはよい。

全射であることを示そう。任意の  $P \in B$  について、 $P = \overline{QP} + Q$  であるから  $\overline{QP} \in W_Q = W$  である。よって  $P \in \text{Im } \tau_Q|_{B \times W}$  である。よって  $\tau_Q : W \rightarrow B$  は全単射だから、 $(B, W)$  は  $A$  の affine 部分空間をなす。□

特に次が言える。

**Corollary 1.8.** 部分空間  $(B, W) \subset (A, V)$  について、任意の  $P \in B$  に対して

$$W = W_P = \{v \in V \mid v + P \in B\}$$

が成立する。□

affine 空間は原点を持たない線型空間であると言えるが、特に原点を指定した形で書くのも便利である。

**Proposition 1.9.**  $(A, V)$  は affine 空間、 $(B, W)$  はその affine 線型部分空間とする。  $Q \in B$  に対して  $B = W + Q$  とかける。

逆に任意の部分空間  $W' \subset V$  と  $P \in A$  に対して  $W' + P$  は  $A$  の affine 線型部分空間となる。□

**Proof.** 定義から  $\tau_Q : W \rightarrow B$  が全単射だから  $B = W + Q$  という表示は自明に正しい。

$W' + P$  が affine 線型部分空間であることを示そう。  $Q \in W' + P$  を任意にとると、 $\overline{PQ} \in W'$  である。

任意の  $x \in V$  について、 $x + Q \in W' + P$  であることと  $x \in W'$  であることが同値であることを示せばよい。

$x + Q \in W' + P$  ならば  $x + Q = (x + \overline{PQ}) + P$  であるから、 $x + \overline{PQ} \in W'$  である。よって  $x \in W'$  が導かれる。

逆に  $x \in W'$  ならば  $x + \overline{PQ} \in W'$  であるから、 $x + Q = (x + \overline{PQ}) + P \in W' + P$  である。

よって  $W' + P$  は affine 線型部分空間となる。□

## 1.2 基本的な幾何的性質

直線や二次元平面に関する基本的な性質が affine 空間でもきちんと成立することを示す。 affine 空間はいわゆる普通の空間 (Euclid 空間) に近い性質を持つ。

**Proposition 1.10.** [1, p.45]

$(A, V)$  は affine 空間とする。相異なる二点  $P_1, P_2 \in A$  を任意にとれば、これらを通る affine 直線がただ一つ存在する。□

**Proof.**  $L := k\overline{P_1P_2} + P_1$  とすればこれは  $P_1, P_2$  ともを通る affine 直線である。逆に  $L'$  が二点を通る直線であるとするれば、 $P_1 \in L'$  かつその平行移動群に  $\overline{P_1P_2}$  を含むから  $L \subseteq L'$  である。 $\dim L' = 1$  より平行移動群が  $k\overline{P_1P_2}$  に一致するから  $L' = k\overline{P_1P_2} + P_1 = L$  となることがわかる。□

**Proposition 1.11.** [1, p.45]

$(A, V)$  は affine 空間、 $L_1, L_2 \subset A$  は相異なる affine 直線とする。このとき、 $\#(L_1 \cap L_2) \leq 1$  である。

また  $\dim A = 2$  の場合、 $\#(L_1 \cap L_2) = 0$  であることと  $L_1, L_2$  が平行であることは同値である。□

**Proof.**  $L_1, L_2$  が 2 点以上の交点を持てば、それらを通る直線はただ一つしか存在しないので  $L_1 = L_2$  となってしまう。よって相異なる直線の交点は高々一点。

$L_1, L_2$  の平行移動群をそれぞれ  $W_1, W_2$  とおく。

$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  であるとする。 $P \in L_1 \cap L_2$  とおく。

$0 \neq v \in W_1$  を任意にとる。 $v + P \in L_1$  である。もし  $v + P \in L_2$  でもあるならば、 $v + P \neq P$  かつ  $v + P, P \in L_1 \cap L_2$  となるから、2 点を通る affine 直線の一意性から  $L_1 = L_2$  となる。しかしこれは  $L_1, L_2$  が相異なる直線であるという前提に反する。従って  $v + P \notin L_2$  である。部分空間についての性質から、 $W_2 = W_P = \{w \in V \mid w + P \in L_2\}$  であるから、 $v \notin W_2$  である。従って  $W_1 \neq W_2$ 。

逆に  $W_1 \neq W_2$  であるならば  $\dim V = 2$  かつ  $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$  であることから、 $V = W_1 + W_2$  である。従って任意に  $P_1 \in L_1, P_2 \in L_2$  を取れば、 $\overline{P_1P_2} = v_1 + v_2$  となるような  $v_1 \in W_1$  および  $v_2 \in W_2$  が存在する。このとき  $P_2 = v_1 + v_2 + P_1$  であるから、

$$v_1 + P_1 = -v_2 + P_2$$

が成立する。左辺は  $L_1$  の元で、右辺は  $L_2$  の元であるから、これは  $L_1 \cap L_2$  の元ということになる。 $P_1, P_2$  はそれぞれの直線から任意に取ってきた点であり、 $L_1, L_2$  が空でないことは自明だから、従って上式を満たす  $P_1, P_2, v_1, v_2$  は存在し、 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  であることを導く。

以上より  $W_1 \neq W_2$  であることと、 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  であることが同値である。□

証明からわかる通り、以下は 2 次元でなくとも成立する。

**Corollary 1.12.** 平行な affine 直線は一致するかまたは共通部分を持たない。□

## 2 affine 線型写像

### 2.1 affine 線型写像と affine 同型

**Definition 2.1.** [1, p.46]

二つの affine 空間  $(A, V), (B, W)$  の間の affine 線型写像<sup>\*1</sup>  $f: (A, V) \rightarrow (B, W)$  とは、torsor の写像  $f_1: A \rightarrow B$  と線形写像  $f_2: V \rightarrow W$  の組で、平行移動の作用と両立するものをいう。つまり、任意の  $P \in A, v \in V$  について、次を満たす。

$$f_1(v + P) = f_2(v) + f_1(P)$$

また、affine 線型写像  $f: (A, V) \rightarrow (B, W)$  は  $g: (B, W) \rightarrow (A, V)$  であって  $gf = 1$  かつ  $fg = 1$  を満たすものが存在するとき、affine 同型であるという。

なお、ここでいう合成  $gf$  は torsor の写像の合成  $g_1 f_1$  と平行移動群の線型写像の合成  $g_2 f_2$  によって構成される affine 線型写像を指す。<sup>\*2</sup>

また、 $(A, V)$  上の自己同型全体の成す群を  $\text{Aut}(A, V)$  と書く。□

**Proposition 2.2.** affine 線型射  $f: (A, V) \rightarrow (B, W)$  について、torsor の写像  $f_1: A \rightarrow B$  が全単射ならば  $f$  は affine 同型である。□

教科書によっては最初から torsor の写像が全単射な affine 線型射を同型として定義しているが、ここではそう呼ぶにふさわしいことを素直に確かめることにする。

**Proof.**  $f_1$  が全単射ならば、 $f_2$  も全単射であり従って線型射として同型である。まずはこの事実を確かめよう。

$P \in A$  を一つ固定すれば、 $v \in V$  に対して  $f_2(v) = 0$  のとき、

$$f_1(v + P) = f_2(v) + f_1(P) = f_1(P)$$

だから  $f_1$  の単射性から  $v + P = P$ 、従って  $v = 0$  である。よって  $f_2$  は単射である。

また任意の  $w \in W$  に対して、 $f_1$  の全射性からある  $Q \in A$  が存在して

$$f_1(Q) = w + f_1(P)$$

---

<sup>\*1</sup> affine 線型射とも呼ぶ。

<sup>\*2</sup> この合成が正しく affine 線型写像となることの証明は省略する。また恒等射の組み  $1_{(A,V)} = (1_A, 1_V)$  が affine 線型射となることも簡単だから省略する。

となる。このとき、 $Q = \overline{PQ} + P$  であるから、

$$f_1(Q) = f_2(\overline{PQ}) + f_1(P)$$

よって

$$w = f_2(\overline{PQ})$$

である。よって  $f_2$  は全射である。

以上より  $f_2$  は平行移動群の間の線型射として同型であることがわかった。

次に逆射の組  $g := (f_1^{-1}, f_2^{-1})$  が affine 線型射をなすことを見よう。これを示せば自明に  $gf = 1$  かつ  $fg = 1$  であるから  $f$  が affine 同型であることがわかる。

$Q \in B$  と  $w \in W$  について、

$$f_1^{-1}(w + Q) = f_2^{-1}(w) + f_1^{-1}(Q)$$

であることを示す。左辺について、 $f_1$  を適用すると

$$f_1(f_1^{-1}(w + Q)) = w + Q$$

となる。一方右辺については

$$f_1(f_2^{-1}(w) + f_1^{-1}(Q)) = f_2(f_2^{-1}(w)) + f_1(f_1^{-1}(Q)) = w + Q$$

である。両者が等しいから、 $f_1$  の単射性から

$$f_1^{-1}(w + Q) = f_2^{-1}(w) + f_1^{-1}(Q)$$

が言える。 □

ここではあえて  $f = (f_1, f_2)$  といった表記わけをしているが、以降は特に誤解のない限り、 $f_1, f_2$  を表記上区別せず、どちらも  $f$  で書き表す。

### **Proposition 2.3.** [1, p.46]

$(A, V)$  は affine 空間、 $v \in V$  とする。 $t_v : A \rightarrow A$  を  $t_v(P) := v + P$  で定めると、 $t_v = (t_v, 1_V) : (A, V) \rightarrow (A, V)$  は affine 同型をなす。これを  $v$  による平行移動と呼ぶ。 □

**Proof.** 全単射は明らかだから affine 線型射となることを示そう。任意の  $P \in A$  と  $w \in V$  に対して、

$$t_v(w + P) = v + (w + P)$$

一方で

$$w + t_v(P) = w + (v + P)$$

となる。明らかに両者は等しいから主張は正しい。  $\square$

次の命題は平行移動の作用に関する結合律や各  $P \in A$  における  $\tau_P$  の全単射性から自明だが、affine 空間の自己同型群の構造に関して重要である。

**Proposition 2.4.** [1, p.46]

affine 空間  $(A, V)$  に対して、 $t : V \longrightarrow \text{Aut}(A, V)$  を

$$t(v) := t_v = (t_v, 1_V)$$

で定める。この写像は群準同型であり、単射である。  $\square$

**Proof.**  $v, w \in V, P \in A$  に対して、 $t_{v+w}(P) = (v+w) + P$  であり、一方  $t_v t_w(P) = v + (w + P)$  であるから、 $t_{v+w} = t_v t_w$  であることがわかる。よって  $t$  は群の準同型である。また、 $t_v = 1_A$  であったとすると、 $P \in A$  に対して  $v + P = P$  であるから  $v = 0$  でなくてはならない。よって  $\text{Ker } t = (0)$  だから  $t$  は単射である。  $\square$

特に affine 同型は作用と両立するから  $t$  の像としての  $V \subset \text{Aut}(A, V)$  は正規部分群となる。実際、任意の  $f \in \text{Aut}(A, V)$  と  $v \in V, P \in A$  に対して、

$$t_v f(P) = v + f(P) = f(f^{-1}(v) + P) = f t_{f^{-1}(v)}(P)$$

であるから、 $fV = Vf$  である。

**Corollary 2.5.**  $t : V \longrightarrow \text{Aut}(A, V)$  を通して  $V \triangleleft \text{Aut}(A, V)$  とみなせる。  $\square$

線型写像は基底の行き先がその写像を完全に特徴付けていた。affine 空間も同じようなことが言える。ただし、線型空間における原点に相当するものがない分、次元より一つ多い点が必要になる。

**Theorem 2.6.** [1, p.46]

$(A, V), (B, W)$  は affine 空間、 $\dim A = n$  とする。 $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$  は相異なる元で、 $A$  の任意の超平面  $H \subset A$  に対して

$$\{P_0, \dots, P_n\} \not\subset H$$

を満たすものとする。

この時  $Q_0, \dots, Q_n \in B$  をとると、affine 線型射  $f : (A, V) \longrightarrow (B, W)$  であって、各  $i = 0, \dots, n$  について  $f(P_i) = Q_i$  となるものが一意的に存在する。  $\square$

**Proof.** まず初めに、上の条件を満たす  $P_0, \dots, P_n$  について、 $\overline{P_0 P_1}, \dots, \overline{P_0 P_n}$  は  $V$  の基底をなす。実際、 $\tau_{P_0} : V \simeq A$  を通して、 $P_1, \dots, P_n$  はそれぞれ  $V$  の中で  $\overline{P_0 P_1}, \dots, \overline{P_0 P_n}$



に対応するが、 $P_0, \dots, P_n$  が  $A$  のどの超平面にも同時に含まれない、という条件から  $0 = \overline{P_0 P_0}, \overline{P_0 P_1}, \dots, \overline{P_0 P_n}$  を含むような  $V$  の  $n-1$  次元部分空間は存在しない。

(もし存在したら、その部分空間を  $V'$  とするとき  $V' + P_0$  は  $P_0, \dots, P_n$  を含む  $A$  の超平面となる。)

従って  $\overline{P_0 P_1}, \dots, \overline{P_0 P_n}$  は  $n$  次元空間  $V$  を生成する  $n$  個の元であり、したがって基底である。

さて、affine 線型射  $f: (A, V) \rightarrow (B, W)$  で  $f(P_i) = Q_i$  が各  $i = 0, \dots, n$  について成立するようなものが存在するとすれば、任意の  $P \in A$  について

$$\begin{aligned} f(P) &= f(\overline{P_0 P} + P_0) \\ &= f(\overline{P_0 P}) + Q_0 \end{aligned}$$

となる。さらに  $\{\overline{P_0 P_i}\}_i$  が  $V$  の基底となるから、 $\overline{P_0 P} = a_1 \overline{P_0 P_1} + \dots + a_n \overline{P_0 P_n}$  となるような  $a_1, \dots, a_n \in k$  の組が一意的に存在して

$$\begin{aligned} f(\overline{P_0 P}) &= f(a_1 \overline{P_0 P_1} + \dots + a_n \overline{P_0 P_n}) \\ &= a_1 f(\overline{P_0 P_1}) + \dots + a_n f(\overline{P_0 P_n}) \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $P_i = \overline{P_0 P_i} + P_0$  より

$$\begin{aligned} Q_i &= f(P_i) \\ &= f(\overline{P_0 P_i} + P_0) \\ &= f(\overline{P_0 P_i}) + Q_0 \end{aligned}$$

であり、かつ  $Q_i = \overline{Q_0 Q_i} + Q_0$  であるから、従って  $f(\overline{P_0 P_i}) = \overline{Q_0 Q_i}$  を導く。

よって  $f$  の平行移動群の線型射は一意的に定まり、 $f(P)$  はさらに計算できて、

$$f(P) = a_1 \overline{Q_0 Q_1} + \dots + a_n \overline{Q_0 Q_n} + Q_0$$

となる。よって torsor の写像も一意的に定まる。

従ってこのようにして定義した射  $f$  が affine 線型射であることを確かめれば存在と一意性が成立することがわかる。平行移動群の間の線型射が  $f(\overline{P_0 P_i}) = \overline{Q_0 Q_i}$  で一意的に定ま

るのはよい。torsor の写像も

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \overline{P_0 P_i}\right) + P_0\right) = \sum_{i=1}^n (a_i \overline{Q_0 Q_i}) + Q_0$$

として定められる。任意の  $P = \sum a_i \overline{P_0 P_i} + P_0 \in A$  と  $v = \sum b_i \overline{P_0 P_i} \in V$  に対して

$$\begin{aligned} f(v+P) &= f\left(\left(\sum (a_i + b_i) \overline{P_0 P_i}\right) + P_0\right) \\ &= \left(\sum (a_i + b_i) \overline{Q_0 Q_i}\right) + Q_0 \end{aligned}$$

である。一方で

$$f(v) + f(P) = \left(\sum b_i \overline{Q_0 Q_i}\right) + \left(\sum a_i \overline{Q_0 Q_i}\right) + Q_0$$

であり、これらは等しいから  $f(v+P) = f(v) + f(P)$  となる。よって  $f$  は各  $i$  について  $f(P_i) = Q_i$  を満たす一意的な affine 線型射である。  $\square$

## 参考文献

- [1] 川又雄二郎. 射影空間の幾何学. 朝倉書店, 2001.