Геометрия конечнообъемных ячеек.

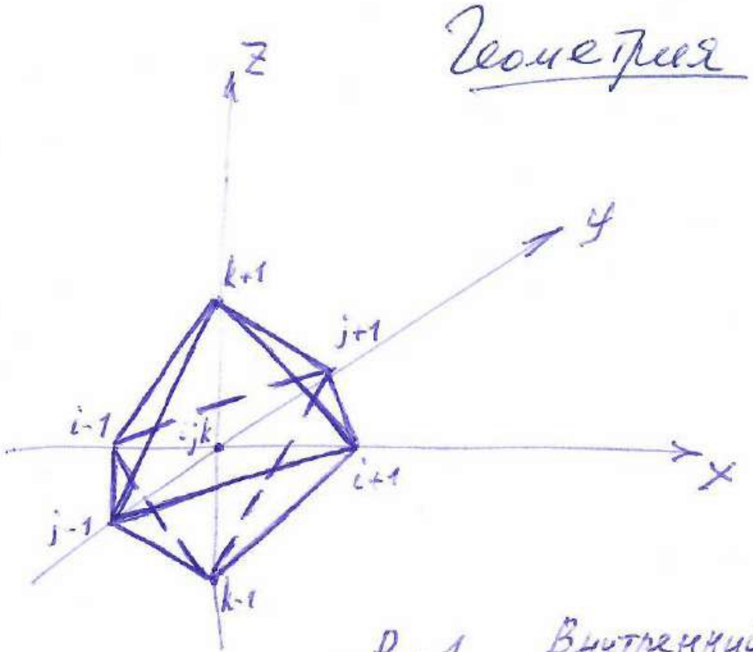


Рис. 1. Внутренний узел i, j, k.
Конечный объем - октаэдр.

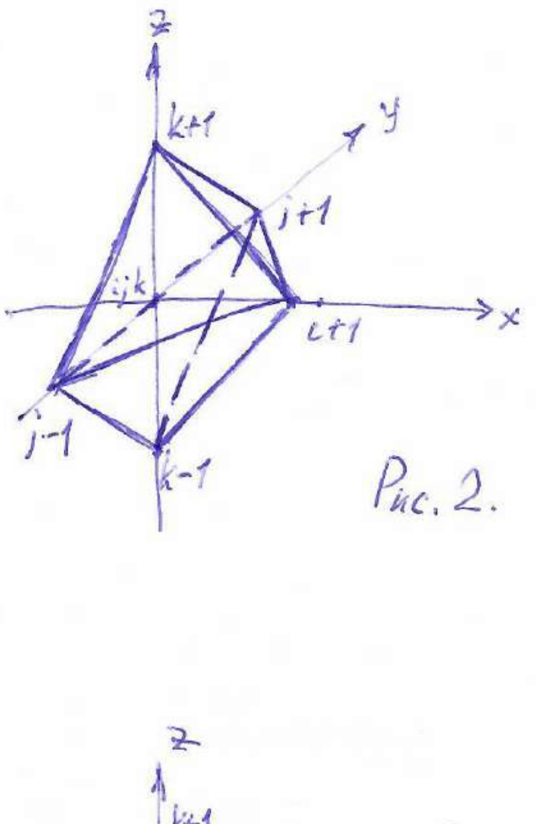


Рис. 2. Поверхностный узел i,j,k.
Конечный объем - гексаэдр.

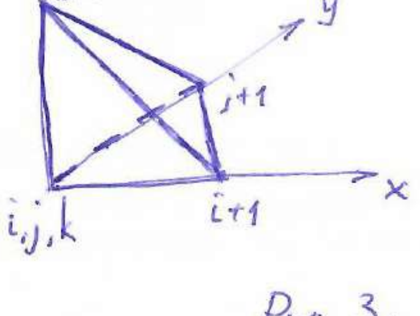


Рис. 3. Угловой узел i,j,k.
Конечный объем - тетраэдр.

Динамическая система 1 порядка (скорости и напряжения)

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial V_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V_y}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \frac{\partial V_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial V_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial V_z}{\partial y} + \mu \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

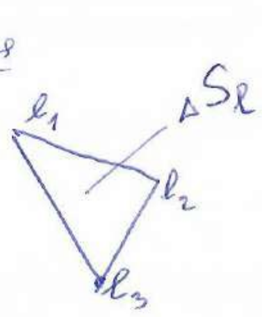
Одношаговая схема

Все уравнения интегрируются по конечным объемам и применяется формула Гаусса-Остроградского

$$\iiint\limits_{v_{ijk}} \rho \frac{V_x^{t+1} - V_x^{t}}{\Delta t}\, dv = \iiint\limits_{v_{i,j,k}} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^{t}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{t}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{t}}{\partial z} \right) dv =$$

$$= \oint\!\!\!\oint\limits_{S} \left(\sigma_{xx}^{t} n_x + \sigma_{xy}^{t} n_y + \sigma_{xz}^{t} n_z \right) dS$$

Схема для уравнений движения



$$\rho \frac{V_{x\,ijk}^{t+1} - V_{x\,ijk}^{t}}{\Delta t} \Delta v_{i,j,k} =$$

$$= \sum_{l=1}^{8\,(6,4)} \left(\sigma_{xx_l}^{t} n_{x_l} + \sigma_{xy_l}^{t} n_{y_l} + \sigma_{xz_l}^{t} n_{z_l} \right) \Delta S_l$$

площадки, окружающие к.о.

$$\sigma_{xx_l}^{t} = \frac{1}{3} \left(\sigma_{xx_{l_1}}^{t} + \sigma_{xx_{l_2}}^{t} + \sigma_{xx_{l_3}}^{t} \right) \quad \text{и т.д.}$$

Если i,j,k – точка поверхности с граничным условием в усилиях T_x, T_y, T_z, то

$$\sigma_{xx_l}^{t} n_{xl} + \sigma_{xy_l}^{t} n_{yl} + \sigma_{xz_l}^{t} n_{zl} = T_{x_l}^{t} = \frac{1}{3} \left(T_{x_{l_1}}^{t} + T_{x_{l_2}}^{t} + T_{x_{l_3}}^{t} \right)$$

и т.д.

$$\iiint\limits_{V_{i,j,k}} \frac{\sigma_{xx}^{t+1} - \sigma_{xx}^{t}}{\Delta t}\, dv = \iiint\limits_{v_{i,j,k}} \left((\lambda+2\mu)\frac{\partial V_x^t}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V_y^t}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V_z^t}{\partial z} \right) dv =$$

$$= \oint\!\!\oint\limits_{S} \left((\lambda+2\mu) V_x^t n_x + \lambda V_y^t n_y + \lambda V_z^t n_z \right) dS$$

<u>Схема для уравнений для напряжений</u>

$$\frac{\sigma_{xx_{ijk}}^{t+1} - \sigma_{xx_{ijk}}^{t}}{\Delta t}\, \Delta v_{i,j,k} = \sum_{l=1}^{8(6,4)} \left((\lambda+2\mu) V_{x_l}^t n_{x_l} + \lambda V_{y_l}^t n_{y_l} + \lambda V_{z_l}^t n_{z_l} \right) \Delta S_l$$

$$V_{x_l}^t = \frac{1}{3}\left(V_{x_{l_1}}^t + V_{x_{l_2}}^t + V_{x_{l_3}}^t \right)$$

Если i,j,k – точка поверхности с граничным условием в скоростях $\bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{V}_z$, то

$$V_{x_l}^t = \bar{V}_{x_l}^t = \frac{1}{3}\left(\bar{V}_{x_{l_1}}^t + \bar{V}_{x_{l_2}}^t + \bar{V}_{x_{l_3}}^t \right)$$

и т.д.

Двухшаговая схема

1 шаг: на $\frac{1}{2}\Delta t$

$$\rho \frac{V_{x_{ijk}}^{t+\frac{1}{2}} - V_{x_{ijk}}^{t}}{\Delta t/2} \Delta v_{ijk} = \sum_{l=1}^{8(6,4)} \left(\sigma_{xx_l}^{t} n_{x_l} + \sigma_{xy_l}^{t} n_{y_l} + \sigma_{xz_l}^{t} n_{z_l} \right) \Delta S_l$$

⋮

2 шаг: на Δt

$$\rho \frac{V_{x_{ijk}}^{t+1} - V_{x_{ijk}}^{t}}{\Delta t} \Delta v_{ijk} = \sum_{l=1}^{8(6,4)} \left(\sigma_{xx_l}^{t+1/2} n_{x_l} + \sigma_{xy_l}^{t+1/2} n_{y_l} + \sigma_{xz_l}^{t+1/2} n_{z_l} \right) \Delta S_l$$

⋮

Для устойчивости —
— условие Куранта

Решение квазистатической задачи (параболизация)

(смещения $\bar{u}$ и напряжения $\bar{\bar{\sigma}}$)

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

$\vdots$

$$\sigma_{xx} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$\vdots$

Одношаговая схема

$$\rho \frac{u^{t+1}_{x_{ijk}} - u^{t}_{x_{ijk}}}{\Delta t} \Delta v_{ijk} = \sum_{l=1}^{8(6,4)} \left(\sigma^{t}_{xx_l} n_{x_l} + \sigma^{t}_{xy_l} n_{y_l} + \sigma^{t}_{xz_l} n_{z_l} \right) \Delta S_l$$

$\vdots$

$$\sigma^{t}_{xx_{ijk}} \Delta v_{ijk} = \sum_{l=1}^{8(6,4)} \left((\lambda+2\mu) u^{t}_{x_l} n_{x_l} + \lambda u^{t}_{y_l} n_{y_l} + \lambda u^{t}_{z_l} n_{z_l} \right) \Delta S_l$$

$\vdots$

Сходимость к квазистатическому решению с условием устойчивости $\Delta t \sim h^2$