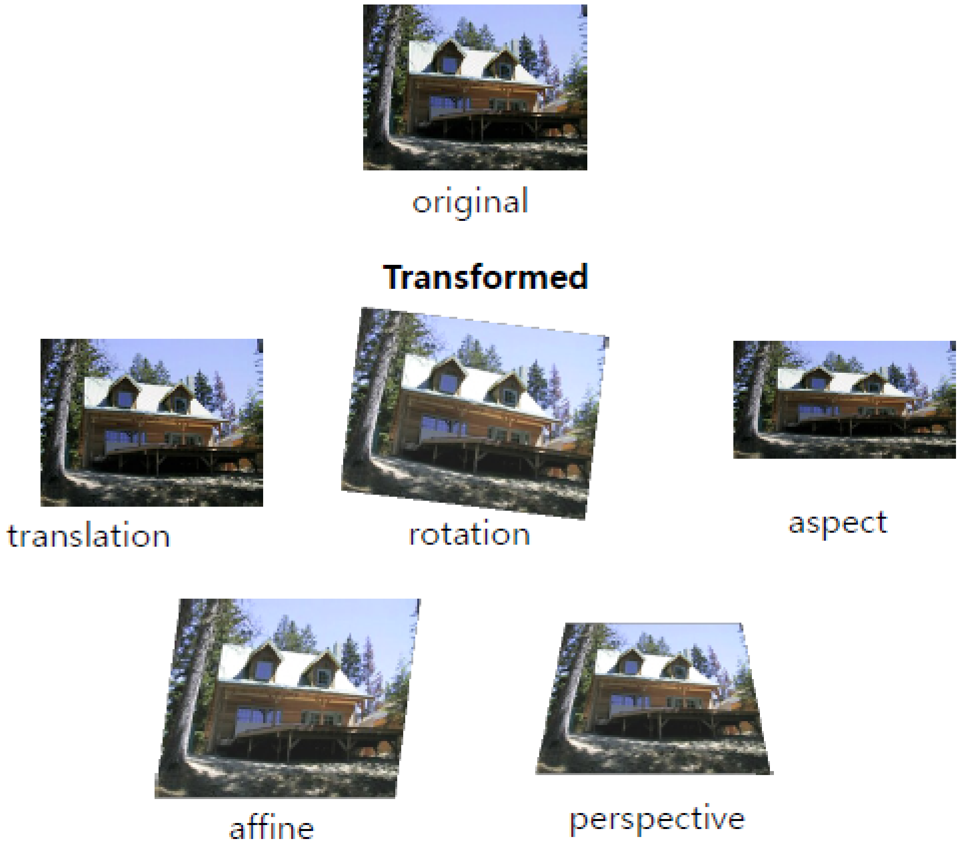
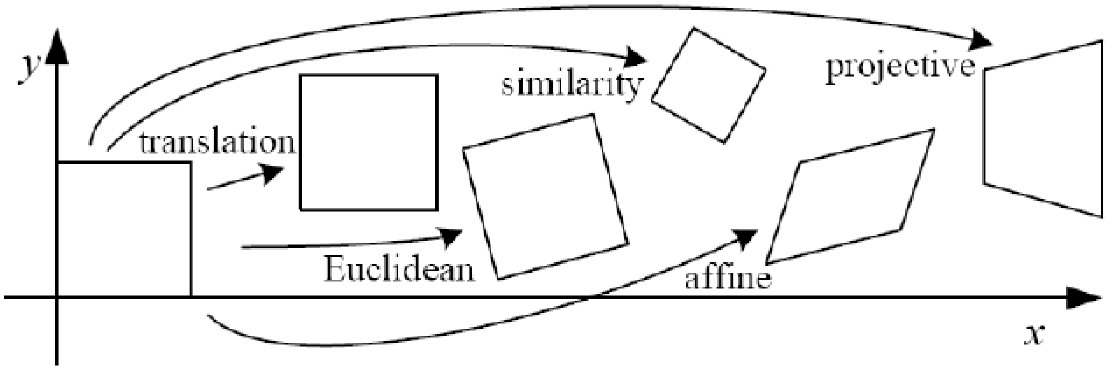
기하 연산

- 일정한 기하 연산으로 결정된 화소의 명암값에 따라 새로운 값 결정
- Common Transformations



  - Affine : 직선에 대한 Parallel한 정도는 유지
  - Perspective : 하나의 소실점으로 모여지도록 하는 것, Parallel한 정보도 사라짐(가장 복잡)
- 2D image transformations (reference table)

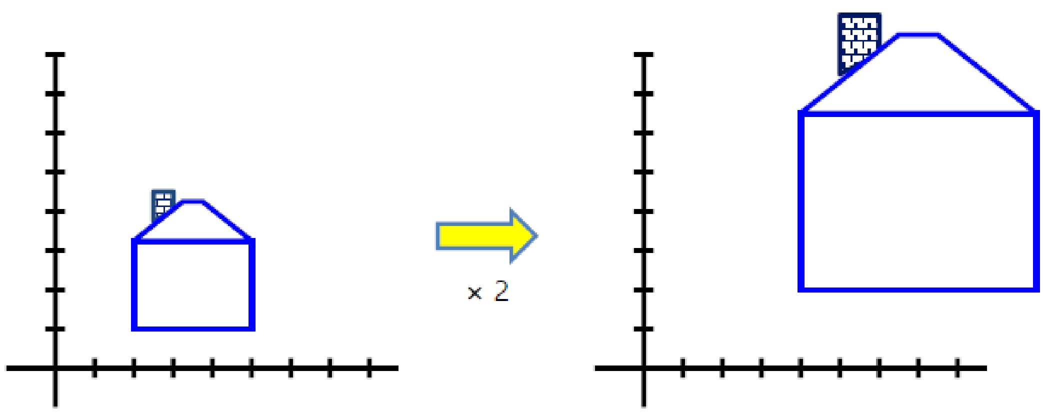


Name	Matrix	# D.O.F.	Preserves:	Icon
translation	$\begin{bmatrix} I \mid t \end{bmatrix}_{2\times 3}$	2	orientation $+ \cdots$	
rigid (Euclidean)	$\begin{bmatrix} R \mid t \end{bmatrix}_{2\times 3}$	3	lengths $+ \cdots$	
similarity	$\begin{bmatrix} sR \mid t \end{bmatrix}_{2\times 3}$	4	angles $+ \cdots$	
affine	$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{2\times 3}$	6	parallelism $+ \cdots$	
projective	$\begin{bmatrix} \tilde{H} \end{bmatrix}_{3\times 3}$	8	straight lines	

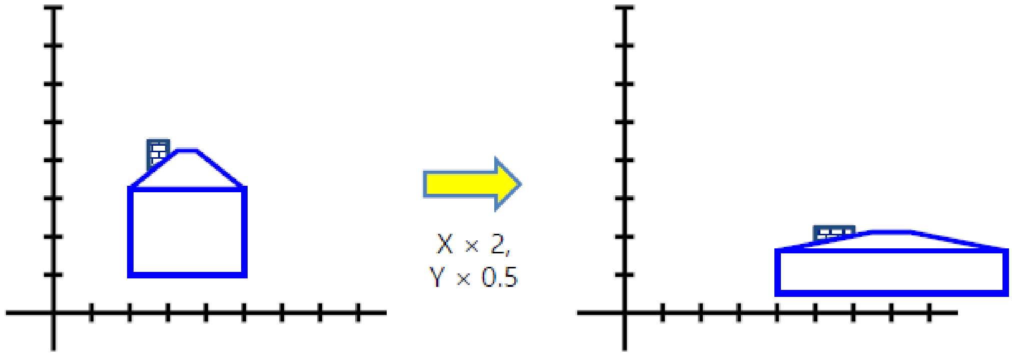
- rigid body object : 이동을 하거나 변환을 해도 모양이 바뀌지 않는 object
  - non-rigid body object : 이동하거나 변환하면 모양 바뀌는 object
  - 회전은 했지만 길이는 유지
- similarity : rotation + translation, angle값은 유지
- affine : rotation, translation, scale, angle 모두 바뀜, parallel 함은 유지
- projective : parallel도 깨질 수 있음
  - 어느 시점에서 본

Scaling

- **scaling** a coordinate : multiplying each of its components by a scalar
  - **unifrom scaling** : this scalar is the same for all components



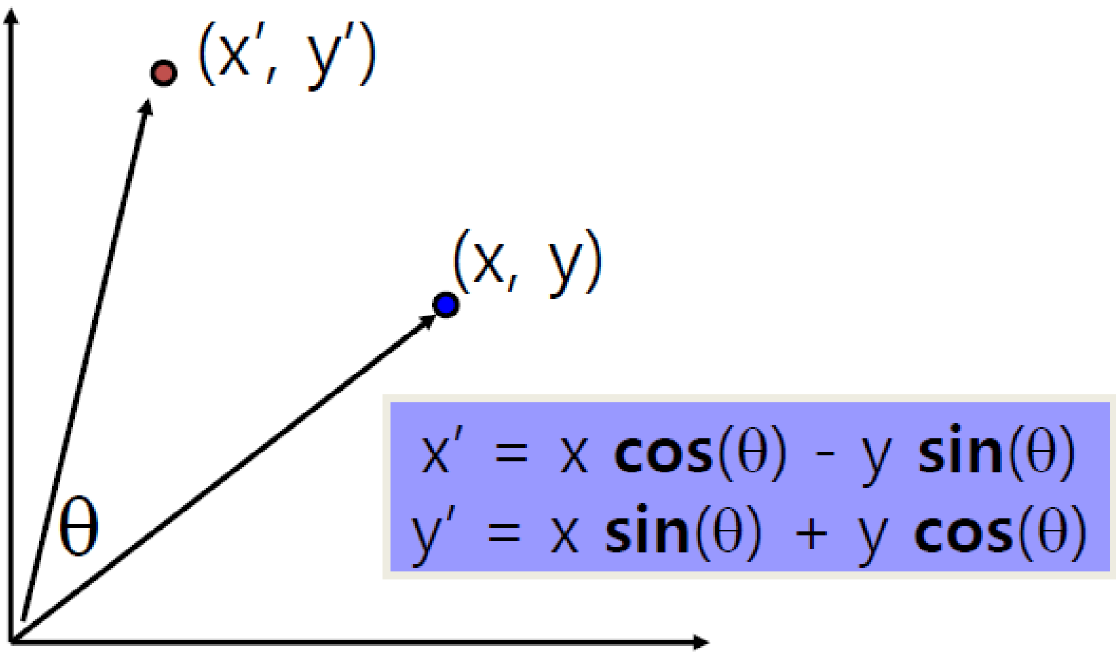
  - **non-uniform scaling** : different scalars per component



- operation : x' = ax, y' = by
- matrix form :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{\textit{scaling matrix S}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2-D Rotation



- Matrix Form

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- sin, cos 연산이 비선형 함수이지만

- **x' is a linear combination of x and y**
- **y' is a linear combination of x and y**

- Inverse Transformation
    - Rotation by –theta
    - Rotation Matrices : $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$

Basic Transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Scale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_x \\ \alpha_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Shear

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Affine

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translate

- Shear(기울임)는영상을 눕히는 셈, x는 y에 변환을, y는 x에 변환을 줌
- Affine은 translation, scale, rotation, shear의 조합 중
- 2x3 매트릭스중 앞의 2x2 매트릭스는 I/R/sR, 뒤 2x1 매트릭스가 translation 표현

Affine Transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Affine Transformations : Combinations of linear transformations and translations

- Properties
    - Lines map to lines
    - Parallel lines remain parallel
    - Ratios are preserved
    - Closed under composition

- 3x3 행렬은 Honogenous transformation matrix
    - 단순히 차원을 하나 늘리는 것
    - 밑에 있는 값들이 0 0 1 고정

Projective Transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

- Combos of affine transformations and projective warps

- Properties
  - Lines map to lines
  - Parallel lines do not necessarily remain parallel
  - Ratios are not preserved
  - Closed under composition
  - Models change of basis
  - Projective Matrix is defined up to a scale (8 DOF)
    - 8개의 점을 알아야지만 abcdefghi의 값을 알아낼 수 있음

동차 좌표와 동차 행렬

- 동차 좌표

$$\dot{\mathbf{x}} = (y\ x\ 1)$$

예) (3,5) → (3,5,1), (6,10,2), (0.3,0.5,0.1), ...

- 동차 행렬

표 2-1 기하 변환을 위한 동차 행렬

변환	동차 행렬 $\dot{\mathbf{H}}$	설명
이동	$T(t_y,t_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_y & t_x & 1 \end{pmatrix}$	y방향으로 t_y, x방향으로 t_x만큼 이동
회전	$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	원점을 중심으로 시계방향으로 θ만큼 회전
크기	$S(s_y,s_x) = \begin{pmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	y방향으로 s_y, x방향으로 s_x만큼 확대
기울임	$Sh_y(h_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Sh_x(h_x) = \begin{pmatrix} 1 & h_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Sh_y: y방향으로 h_y만큼 기울임 Sh_x: x방향으로 h_x만큼 기울임

- 동차 행렬을 이용한 기하 변환

예를 들어, 어떤 점을 y방향으로 3, x방향으로 2만큼 이동시키는 동차 행렬 $\dot{\mathbf{H}}$는 다음과 같다. 식 (2.16)은 동차 좌표 $\dot{\mathbf{x}}$와 동차 행렬 $\dot{\mathbf{H}}$를 이용한 기하 변환이다.

$$\dot{\mathbf{H}} = T(3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}' = (y'\ x'\ 1) = \dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{H}} = (y\ x\ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

풀어쓰면, $y' = a_{11}y + a_{21}x + a_{31}$, $x' = a_{12}y + a_{22}x + a_{32}$

예제 2-3 **동차 행렬을 이용한 기하 변환**

[그림 2-26]의 삼각형을 y방향으로 3, x방향으로 2만큼 이동시킨 후 30° 회전 시켜보자.

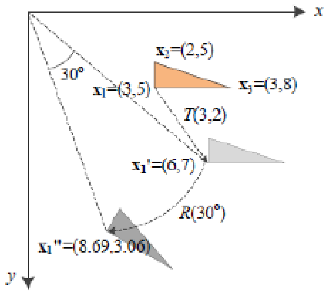


그림 2-26 기하 변환의 예

먼저, 이동 변환을 구하려면 $T(3,2)$가 필요하다. 꼭지점 $\mathbf{x}_1=(3,5)$를 동차 좌표로 확장하여 $\dot{\mathbf{x}}_1=(3,5,1)$을 만들고 식 (2.16)의 연산을 적용한다.

$$T(3,2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \dot{\mathbf{x}}_1'=(3\ \ 5\ \ 1)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}=(6\ \ 7\ \ 1)$$

연산의 결과로 $\dot{\mathbf{x}}_1'=(6\ 7\ 1)$을 얻었는데, 마지막 요소를 제거하여 2차원 좌표로 바꾸면 $\mathbf{x}_1'=(6,7)$이 된다. 나머지 두 점 $\mathbf{x}_2$와 $\mathbf{x}_3$도 같은 과정으로 변환한 후 이동한 삼각형을 그려보면 가운데 삼각형과 같다. 이제 이동한 삼각형을 30° 회전 시켜보자. 회전을 계산하는 데 필요한 행렬 $R(30°)$를 꼭지점 $\mathbf{x}_1'$에 적용하면, 다음과 같이 $\mathbf{x}_1''=(8.6962, 3.0622)$를 얻는다. 나머지 두 점을 계산하고 결과를 그려보면 맨 아래 삼각형과 같다.

$$(6\ \ 7\ \ 1)\begin{pmatrix}\cos30° & -\sin30° & 0\\ \sin30° & \cos30° & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=(6\ \ 7\ \ 1)\begin{pmatrix}0.866&-0.500&0\\0.500&0.866&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(8.6962\ \ 3.0622\ \ 1)$$

- 동차좌표 사용 이유
  - 복합 변환을 이용한 계산 효율
    - 이동 후 회전은 두 번의 행렬 곱셈, 복합 변환을 이용하면 한 번의 곱셈

예제 2-4 **복합 기하 변환**

[예제 2-3]의 두 단계 변환을 효율적으로 해 보자. 변환에 필요한 행렬 $T(3,2)$와 $R(30°)$를 곱하면 다음과 같다.

$$T(3,2)R(30°)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.866&-0.500&0\\0.500&0.866&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.866&-0.500&0\\0.500&0.866&0\\3.5981&0.2321&1\end{pmatrix}$$

이제 이 행렬을 원래 삼각형의 세 개의 꼭지점 각각에 대해 적용하면, 최종 변환된 삼각형을 얻을 수 있다. 예를 들어, 꼭지점 $\mathbf{x}_1=(3,5)$에 적용한 결과는 다음과 같다. [예제 2-3]에서 행렬 곱을 두 번 한 것과 결과가 동일하다.

$$(3\ \ 5\ \ 1)\begin{pmatrix}0.866&-0.500&0\\0.500&0.866&0\\3.5981&0.2321&1\end{pmatrix}=(8.6962\ \ 3.0622\ \ 1)$$

- 임의의 점 (c_y, c_x)을 중심으로 회전

$$T(-c_y,-c_x)\,R(\theta)\,T(c_y,c_x)$$

영상에 적용

- 전방 변환은 심한 에일리어싱 현상
  - 계단 현상이 생길 수 있음(구멍이 생긴다)
    - 주변에 있는 값으로 값을 매꿔줌(평균을 내서)

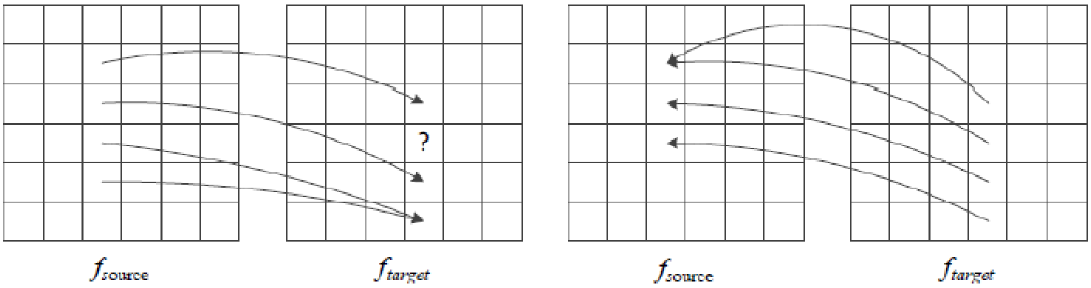
알고리즘 2-7 전방 기하 변환

입력 : 영상 $f_{source}(j, i)$, $0 \le j \le M-1$, $0 \le i \le N-1$, 변환 행렬 $\dot{H}$

출력 : 기하 변환된 영상 $f_{target}(j, i)$, $0 \le j \le M-1$, $0 \le i \le N-1$

```
for (j=0 to M-1)
  for (i=0 to N-1) {
    (j, i)에 Ḣ를 적용하여 변환된 점 (j', i')를 구한다. 실수는 반올림하여 정수로 만든다.
    f_target(j', i') = f_source(j, i);   // 영상 공간을 벗어난 점은 무시한다.
  }
```

- 후방 변환을 이용한 안티 에일리어싱



(a) 전방 변환　　(b) 후방 변환

그림 2-27 후방 기하 변환의 안티 에일리어싱 효과

알고리즘 2-8 후방 기하 변환

입력 : 영상 $f_{source}(j, i)$, $0 \le j \le M-1$, $0 \le i \le N-1$, 변환 행렬 $\dot{H}$

출력 : 기하 변환된 영상 $f_{target}(j, i)$, $0 \le j \le M-1$, $0 \le i \le N-1$

```
for (j=0 to M-1)
  for (i=0 to N-1) {
    (j, i)에 Ḣ⁻¹을 적용하여 변환된 점 (j', i')를 구한다. 실수는 반올림하여 정수로 만든다.
    f_target(j, i) = f_source(j', i');   // 영상 공간을 벗어난 점은 무시한다.
  }
```

- 보간에 의한 안티 에일리어싱
  - 실수 좌표를 반올림하여 정수로 변환하는 과정에서 에일리어싱 발생
  - 주위 화소 값을 이용한 보간으로 안티 이일리어싱

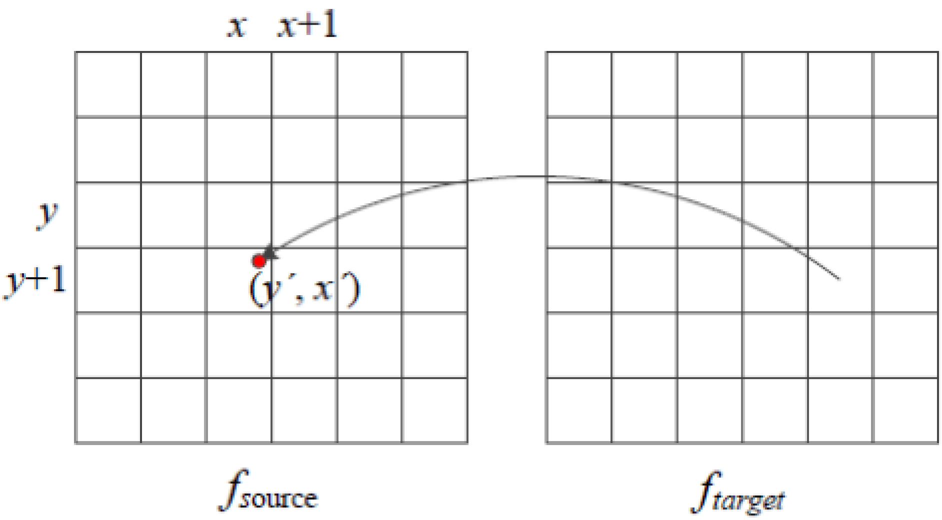


그림 2-28 기하 변환한 점의 좌표

- 양선형 보간

$$f(x') = (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(x + 1) \tag{2.17}$$

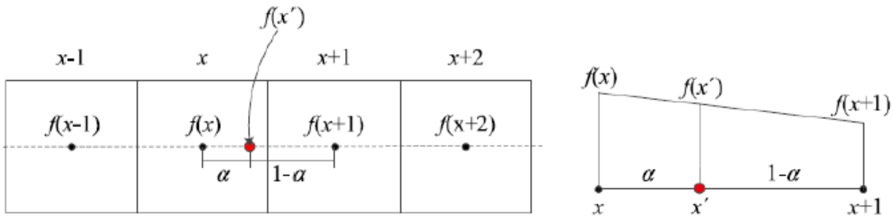


그림 2-29 1차원에서 보간식 유도

- 거리가 먼 쪽에 더 weight, 가까운 쪽에 덜 weight

$$\begin{aligned} f(y,x') &= (1 - \alpha)f(y,x) + \alpha f(y,x + 1) \\ f(y+1,x') &= (1 - \alpha)f(y+1,x) + \alpha f(y+1,x + 1) \\ f(y',x') &= (1 - \beta)f(y,x') + \beta f(y+1,x') \end{aligned} \tag{2.18}$$

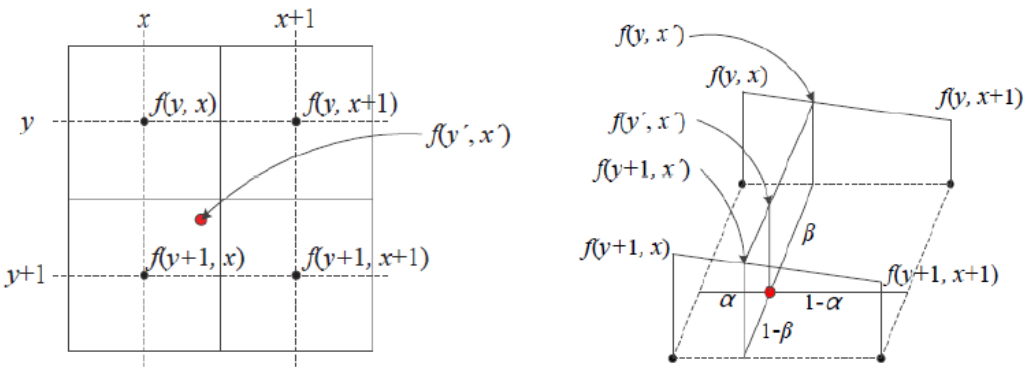


그림 2-30 2차원에서 보간식 유도

- 최근접 이웃, 양선형 보간, 양 3차 보간의 비교

(a) 원래 영상과 조각 영상

> 최근접 이웃 > 양선형 보간 > 양 3차 보간

(b) 10° 회전한 영상

그림 2-31 영상 보간

- 최근접 이웃으로 할 시, 계단현상 발생(블럭 생김)

다해상도

- 해상도를 줄이거나 늘리는 연산

- 다양한 응용
  - 멀티미디어 장치에 디스플레이
  - 물체 크기 변환에 강인한 인식 등
- 업샘플링과 다운샘플링
  - 업샘플링 : 작은이미지에서 큰 이미지로 만드는 것(하나의 픽셀 -> 4개의 픽셀)
  - 다운샘플링 : 큰 이미지에서 작은 이미지로 만드는 것(4개의 픽셀 -> 하나의 픽셀)

- 피라미드
  - 샘플링 비율 0.5로 다운샘플링

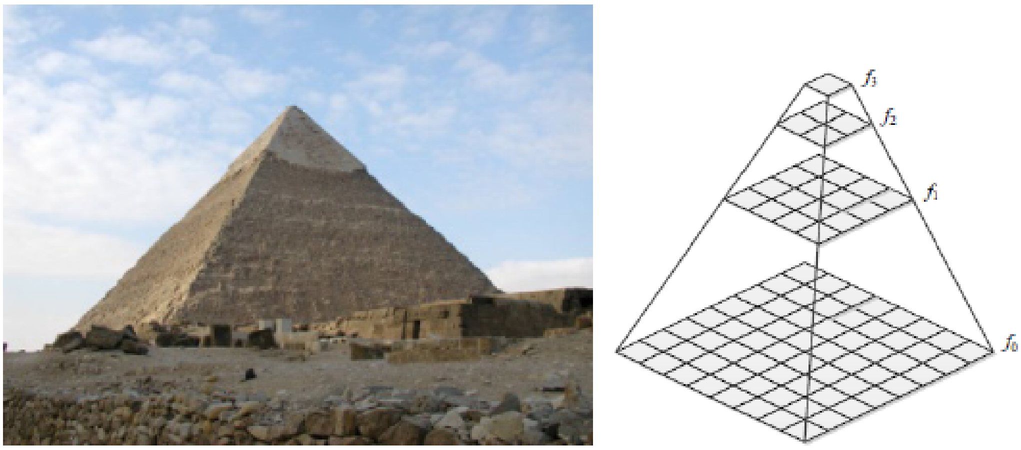


그림 2-32 피라미드

  - 구축 연산

$$f_k(j,i) = f_{k-1}\left(\frac{j}{r}, \frac{i}{r}\right), \quad r = \frac{1}{2}, \quad 1 \le k \le q \qquad (2.19)$$

    - 에일리어싱 발생(화소에 따라 100% 또는 0%만큼 공헌)
  - Burt & Adelson 방법 [Burt83a]

$$f_k(j,i) = \sum_{y=-2}^{2} \sum_{x=-2}^{2} w(y,x) f_{k-1}\left(\frac{j}{r}+y, \frac{i}{r}+x\right), \quad r = \frac{1}{2}, \quad 1 \le k \le q \qquad (2.20)$$

    - 모든 화소가 50%씩 공헌

v =

0.05
0.25
0.4
0.25
0.05

h =

0.05	0.25	0.4	0.25	0.05

w =

.0025	.0125	.0200	.0125	.0025
.0125	.0625	.1000	.0625	.0125
.0200	.1000	.1600	.1000	.0200
.0125	.0625	.1000	.0625	.0125
.0025	.0125	.0200	.0125	.0025

그림 2-34 [Burt83a]가 사용한 필터

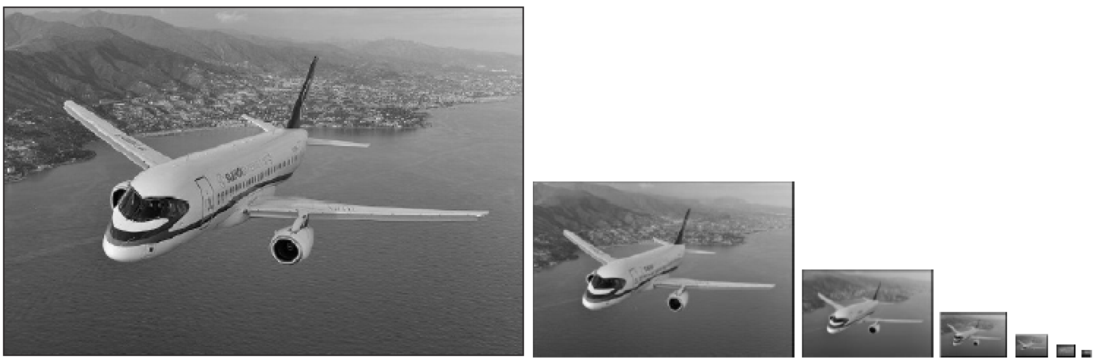
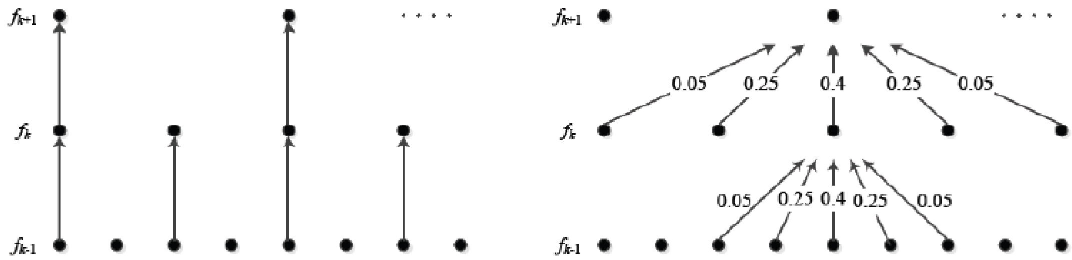


그림 2-35 피라미드 영상의 예(원래 영상의 해상도는 764×1024)



(a) 식 (2.19)를 표현한 그림 (b) 식 (2.20)을 표현한 그림

그림 2-33 피라미드 구축을 위한 다운샘플링

모폴로지

- 원래 생물학에서 생물의 모양 변화를 표현하는 기법
- 수학적 모폴로지 : 컴퓨터 비전에서 패턴을 원하는 형태로 변환하는 기법

이진 모폴로지

- 구조 요소

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

그림 2-36 몇 가지 대표적인 구조요소

- 팽창, 침식, 열기, 닫기 연산

$$S_t = \{\mathbf{s} + \mathbf{t} \mid \mathbf{s} \in S\} \tag{2.21}$$

$$\text{팽창}: f \oplus S = \bigcup_{\mathbf{x} \in f} S_{\mathbf{x}} \tag{2.22}$$

$$\text{침식}: f \ominus S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} + \mathbf{s} \in f, \forall \mathbf{s} \in S\} \tag{2.23}$$

$$\text{열기}: f \circ S = (f \ominus S) \oplus S \tag{2.24}$$

$$\text{닫기}: f \bullet S = (f \oplus S) \ominus S \tag{2.25}$$

  - 팽창 : 내가 1이면 주변 값 다 채움(상하좌우)
  - 침식 : 상하좌우 중 하나라도 없으면 본인이 사라짐(상하좌우 모두 있으면 남겨짐)
  - 열기 : 침식을 먼저하고 그 결과에 팽창(잡음을 제거하기 위함)
  - 닫기 : 팽창을 먼저하고 그 결과에 침식(작은 구멍들을 제거하기 위함)

예제 2-5 **모폴로지 연산(팽창, 침식, 열기, 닫기)**

[그림 2-37]은 간단한 예제 영상과 1×3 크기의 가로 방향의 구조요소를 보여준다.

$f=$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(a) 원래 영상

$S=$

1	1	1

(b) 구조요소

그림 2-37 예제 영상과 구조요소

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

(a) 팽창($f \oplus S$)

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(b) 침식($f \ominus S$)

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(c) 열기($f \circ S$)

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(d) 닫기($f \bullet S$)

← 효과를 분석해 보자.

그림 2-38 모폴로지 연산 적용 결과

명암 모폴로지

- <u>잘 쓰지 않음</u>

예제 2-6 **명암 모폴로지 연산(팽창, 침식)**

[그림 2-40]은 예제에서 다룰 명암 영상과 그것을 지형으로 해석한 것이다. 계산을 간단히 하기 위해 1×3의 작은 크기의 평편한 구조요소를 가정한다.

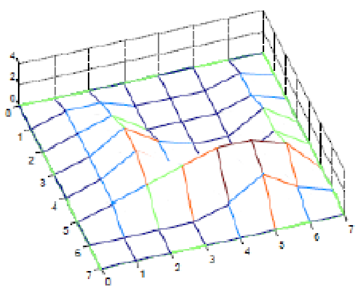
$f=$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	2	0	0	0	1	0
0	1	3	1	0	0	2	0
0	1	3	1	0	0	2	0
0	1	2	3	4	4	3	0
0	0	0	0	1	3	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$S=$

0	0	0

(a) 원래 영상과 구조요소



(b) 원래 영상을 지형으로 해석한 영상

그림 2-40 원래 영상과 지형으로 해석한 영상

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1
1	2	2	2	0	1	1	1
1	3	3	3	1	2	2	2
1	3	3	3	1	2	2	2
1	2	3	4	4	4	4	3
0	0	0	1	3	3	3	1
0	0	0	0	0	0	0	0

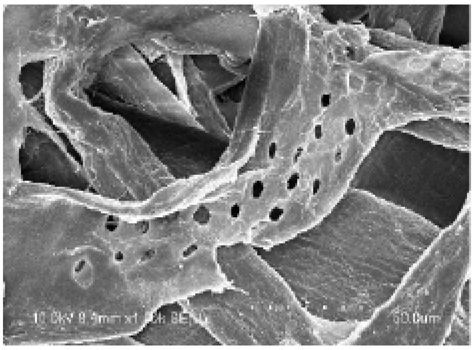
(a) 팽창

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	2	3	3	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(b) 침식

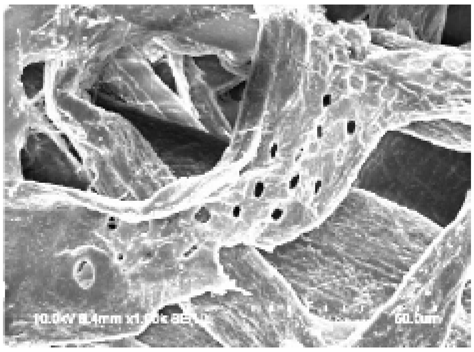
← 효과를 분석해□보자.

그림 2-41 명암 팽창과 침식의 예(평편한 구조요소)

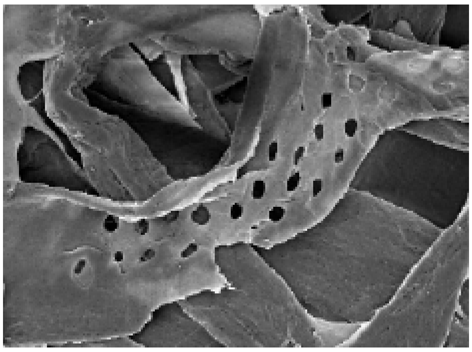
$f =$ 

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

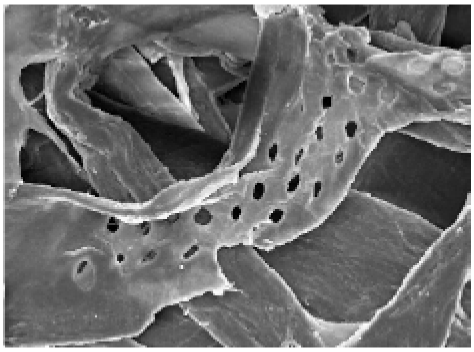
(a) 원래 영상과 구조요소



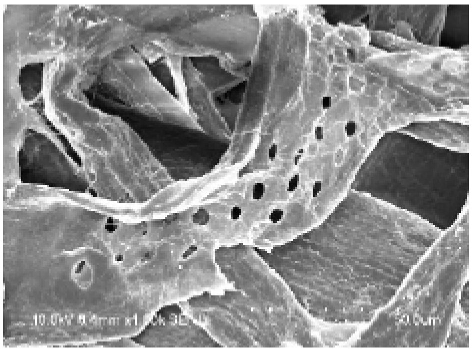
> 팽창



> 침식



> 열기



> 닫기

(b) 연산 적용 후 영상

그림 2-42 전자 현미경으로 찍은 한지 영상에 적용한 명암 모폴로지(명암 256, 해상도 960×1280)