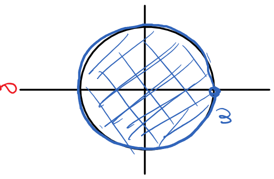
Ejemplo: Sea $f(x, y) = x^2y$. Hallar los máximos y mínimos absolutos de f sobre la región $\underbrace{x^2 + y^2}_{\text{CONTINUA}} \leq 9$.

$x^2+y^2 \leq 9$ ACOTADO Y ES CERRADO



$x^2+y^2=9$

$f(x,y)=x^2y$ ES CONTINUA Y LA REGIÓN ES COMPACTA

$\underset{\text{WEIERSTRASS}}{\Rightarrow}$ f ALCANZA MÁX Y MIN ABSOLUTO.

$g(x,y)=x^2+y^2$

BUSCAR TODOS LOS PUNTOS CRÍTICOS DE f:

1° DE f EN $\mathbb{R}^2$: $\nabla f(x,y) = (2xy, x^2) = (0,0)$

$x^2+y^2<9$

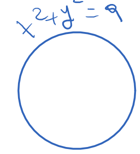
$x^2+y^2<9$

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \qquad (0,y)$$

LOS PUNTOS CRÍTICOS DEBEN ESTAR EN LA REGIÓN:

$0^2+y^2<9 \qquad -3<y<3$

$x^2+y^2=9$



2° PUNTOS CRÍTICOS DE f EN EL BORDE: $x^2+y^2=9$

$$L(\lambda,x,y) = \overbrace{x^2y}^{f(x,y)} - \lambda(\overbrace{x^2+y^2}^{g(x,y)} - \overbrace{9}^{c})$$

$g(x,y)=x^2+y^2=9$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$

$$\nabla L(\lambda,x,y) = (-(x^2+y^2-9);\ 2xy-2\lambda x;\ x^2-2\lambda y) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} ① & -(x^2+y^2-9)=0 \\ ② & 2xy-2\lambda x=0 \\ ③ & x^2-2\lambda y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ① & x^2+y^2=9 \\ ② & 2x(y-\lambda)=0 \\ ③ & x^2=2\lambda y \end{cases}$$

(2) $2x(y-\lambda)=0$

$x=0$ $\boxed{\lambda = y}$

REEMPLAZO EN (3)

$2\lambda y = 0$

$\lambda = 0$ $\cancel{y=0}$ NO CUMPLE (1)

REEMPLAZO $x=0$ EN (1)

$\cancel{0}^2+\cancel{0}^2-9=0$ ABS

$y^2=9$

$y=3$ $y=-3$

PC: $(0,3)$

$(0,-3)$

$\lambda=0$

REEMPLAZO $\lambda = y$ EN (3)

$x^2 = 2y^2$

$(\sqrt{2}y)^2 = \sqrt{2}\,y \cdot \sqrt{2}\,y = (\sqrt{2})^2 y^2$

$x=\sqrt{2}\,y$ $x=-\sqrt{2}\,y$ ← REEMPLAZO EN (1)

$(\sqrt{2}y)^2+y^2=9$ $(-\sqrt{2}y)^2+y^2=9$

$2y^2+y^2=9$ $2y^2+y^2=9$

$3y^2=9$ $3y^2=9$

$y^2=3$ $y^2=3$

$y=\sqrt{3}$ $y=-\sqrt{3}$ $y=\sqrt{3}$ $y=-\sqrt{3}$

$x=\sqrt{6}$ $x=-\sqrt{6}$ $x=-\sqrt{6}$ $x=\sqrt{6}$

$\boxed{\lambda=\sqrt{3}}$ $\lambda=-\sqrt{3}$ $\lambda=\sqrt{3}$ $\lambda=-\sqrt{3}$

$x=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

$x=\sqrt{2\cdot 3}$

$x=\sqrt{6}$

$\lambda=\sqrt{3}$ $\lambda=-\sqrt{3}$

PC: $(\sqrt{6},\sqrt{3})$, $(-\sqrt{6};-\sqrt{3})$

$(-\sqrt{6};\sqrt{3})$; $(\sqrt{6};-\sqrt{3})$

TODOS LOS P.C: $(0,y)$ con $-3<y<3$, $(0,3)$, $(0,-3)$; $(\sqrt{6},\sqrt{3})$; $(-\sqrt{6},\sqrt{3})$

$(-\sqrt{6};-\sqrt{3})$; $(\sqrt{6};-\sqrt{3})$

$f(x,y)=x^2y$

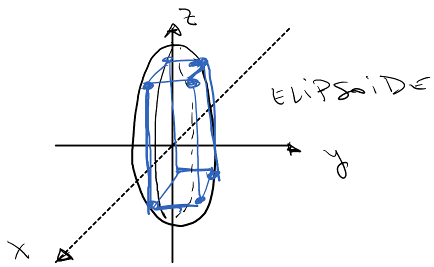
- $(0,y) \Rightarrow f(0,y)=0$
- $(0,3) \Rightarrow f(0,3)=0$
- $(0,-3) \Rightarrow f(0,-3)=0$

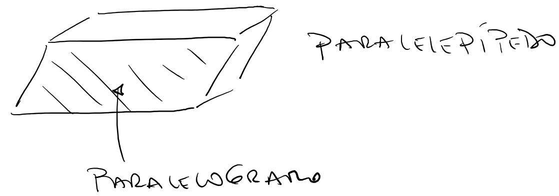
- $(\sqrt{6};\sqrt{3}) \Rightarrow f(\sqrt{6};\sqrt{3})=6\sqrt{3}$ } MAXIMOS
- $(-\sqrt{6},\sqrt{3}) \Rightarrow f(-\sqrt{6};\sqrt{3})=6\sqrt{3}$
- $(-\sqrt{6};-\sqrt{3}) \Rightarrow f(-\sqrt{6},-\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$ } MÍNIMOS
- $(\sqrt{6};-\sqrt{3}) \Rightarrow f(\sqrt{6};-\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$

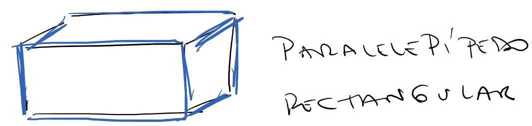
MÁXIMOS ABSOLUTOS: $(\sqrt{6};\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{6};\sqrt{3})$

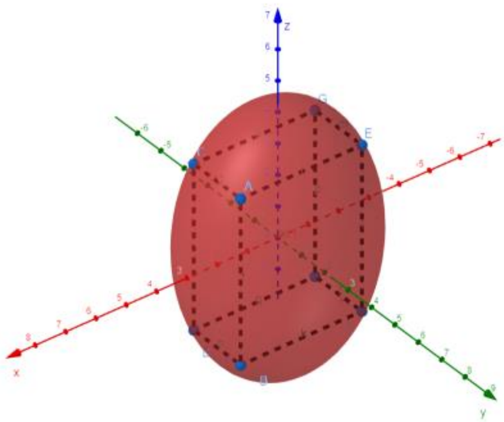
MÍNIMOS ABSOLUTOS: $(-\sqrt{6};-\sqrt{3})$ y $(\sqrt{6};-\sqrt{3})$

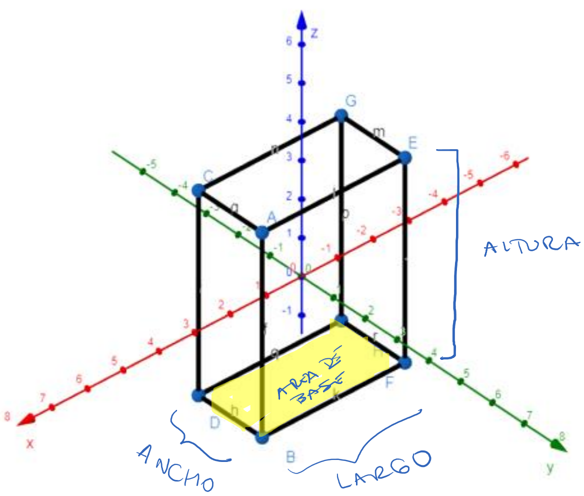
Ejemplo: Calcular el volumen máximo del paralelepípedo rectangular con aristas paralelas a los ejes coordenados inscripto en el elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 18$.



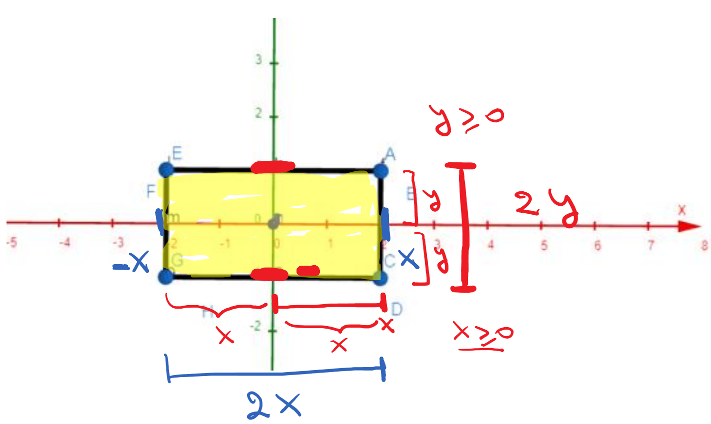






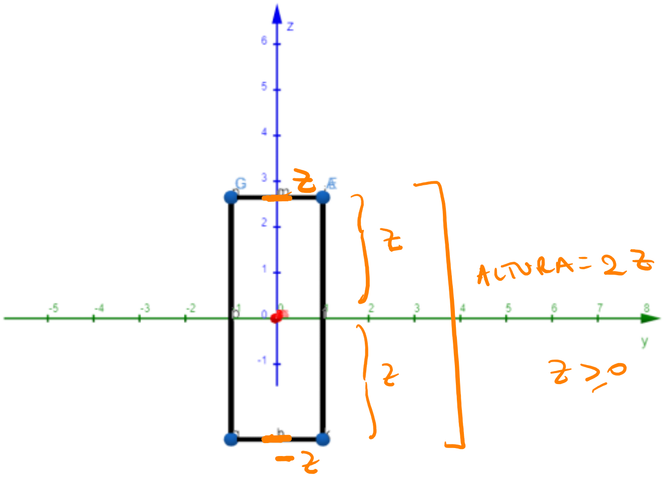


VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO: ÁREA DE LA BASE × ALTURA



ÁREA DE LA BASE: $2x\,2y$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

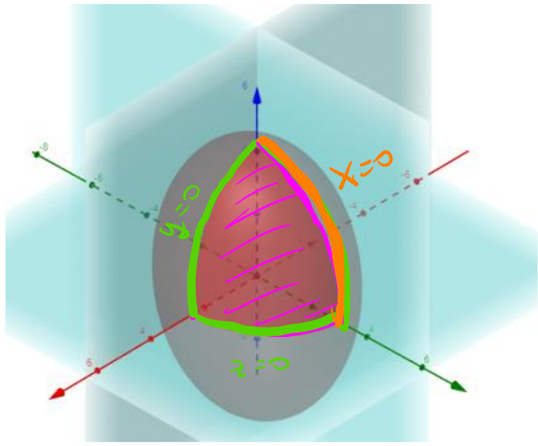


ALTURA: $2z$

$z \geq 0$

VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO: $2x \cdot 2y \cdot 2z$ $\qquad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

MAXIMIZAR $f(x,y,z) = 8xyz$ $\qquad$ SUJETA A $g(x,y,z) = \underbrace{2x^2+3y^2+z^2 = 18}_{\text{COMPACTA}}$



CON $\boxed{x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0}$

LA REGIÓN ES COMPACTA Y f ES CONTINUA $\Rightarrow$ f ALCANZA MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTOS EN LA REGIÓN

Si $x=0$ o $y=0$ o $z=0$

$f(x,y,z) = 0$

Si $x>0,\ y>0,\ z>0$: $\qquad f(x,y,z) = 8xyz \qquad g(x,y,z) = 2x^2+3y^2+z^2 = 18$

$$L(\lambda,x,y,z) = 8xyz - \lambda(2x^2+3y^2+z^2-18)$$

$$\nabla L(\lambda,x,y,z) = \left(-(2x^2+3y^2+z^2-18);\ 8yz - 4\lambda x;\ 8xz - 6\lambda y;\ 8xy - 2\lambda z\right)$$

$$\nabla L(\lambda,x,y,z) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} ① & 2x^2+3y^2+z^2-18=0 \\ ② & 8yz-4\lambda x=0 \\ ③ & 8xz-6\lambda y=0 \\ ④ & 8xy-2\lambda z=0 \end{cases}$$

② DESPEJO x:

$$4\lambda x = 8yz$$

$$\lambda x = 2yz$$

$$\boxed{x = \frac{2yz}{\lambda}}$$

Si $\lambda=0$

$8yz=0$

$y=0$ $\quad$ $z=0$

ABS!

$x>0, y>0, z>0$

$\Rightarrow \lambda \neq 0$

④ REEMPLAZO $x=\frac{2yz}{\lambda}$

$$8\cdot\frac{2yz}{\lambda}\cdot y - 2\lambda z = 0$$

$$2z\left(\frac{8y^2}{\lambda}-\lambda\right)=0$$

$z \neq 0$

$z>0$

$$\frac{8y^2}{\lambda}=\lambda$$

$$8y^2=\lambda^2$$

$\boxed{\lambda=\sqrt{8}\,y}$ $\qquad$ $\boxed{\lambda=-\sqrt{8}\,y}$

CASO 1 $\qquad$ CASO 2

REEMPLAZO:

CASO 1: $\boxed{\lambda=\sqrt{8}\,y}$ EN $x=\frac{2yz}{\lambda}$

$$x=\frac{2\cancel{y}z}{\sqrt{8}\,\cancel{y}}$$

$$\boxed{x=\frac{2}{\sqrt{8}}z}$$

REEMPLAZO $\lambda=\sqrt{8}\,y$ $\quad x=\frac{2}{\sqrt{8}}z$

EN ③

$$8xz-6\lambda y=0$$

$$8\frac{2}{\sqrt{8}}z\cdot z-6\sqrt{8}\,y\cdot y=0$$

$$\frac{16}{\sqrt{8}}z^2-6\sqrt{8}\,y^2=0$$

$$z^2=\overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{8}\,y^2\cdot\frac{\sqrt{8}}{\cancel{16}}$$

$$z^2=3y^2$$

$z=\sqrt{3}\,y$ $\qquad$ $\cancel{z=-\sqrt{3}\,y}$

$z>0 \quad y>0$

$$\boxed{\frac{z}{\sqrt{3}}=y}$$

CASO 1: $\lambda=\sqrt{8}\,y$

$$x=\frac{2}{\sqrt{8}}z$$

$$y=\frac{z}{\sqrt{3}}$$

① $2x^2+3y^2+z^2-18=0$

$$2\left(\frac{2}{\sqrt{8}}z\right)^2+3\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2=18$$

$$2\cdot\frac{4}{8}z^2 + 3\frac{z^2}{3} + z^2 = 18$$
$$z^2 + z^2 + z^2 = 18$$
$$3z^2 = 18$$
$$z^2 = 6$$
$$\boxed{z=\sqrt{6}} \qquad \cancel{z=-\sqrt{6}}$$
$z>0$

PUNTO CRÍTICO:

$$x = \frac{2}{\sqrt{8}}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{3} \qquad \lambda = \sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$$
$$y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$
$$z = \sqrt{6} \qquad \boxed{(\sqrt{3};\sqrt{2},\sqrt{6}) \qquad \lambda = 4}$$

CASO 2: $\lambda = -\sqrt{8}\,y$ $\qquad x = \frac{2yz}{-\sqrt{8}\,y}$ $\qquad \underbrace{x = -\frac{2}{\sqrt{8}}\cdot z}_{\text{ABS} \quad x>0 \ z>0}$

$$f(x,y,z) = 8xyz \qquad f(\sqrt{3},\sqrt{2},\sqrt{6}) = 48$$ VOLUMEN MÁXIMO

DIMENSIONES DEL PARALELEPÍPEDO DE VOLUMEN MÁXIMO: $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}$
LARGO ANCHO ALTO

Ejemplo: Hallar los extremos de la función $f(x,y,z) = xz - yz$ restringida a $yz = 2$ y $x^2+y^2 = 2$.

$g(x,y,z) = yz = 2 \qquad h(x,y,z) = x^2+y^2 = 2$

$$L(\lambda,\mu,x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - c) - \mu(h(x,y,z) - d)$$
$$L(\lambda,\mu,x,y,z) = xz - yz - \lambda(yz-2) - \mu(x^2+y^2-2)$$
$$\nabla L = \vec{0} \iff \nabla f = \lambda\nabla g + \mu\nabla h$$

OJO: ∇g y ∇h NO DEBEN SER MÚLTIPLOS

$$\nabla L = (-(yz-2); -(x^2+y^2-2); z - 2\mu x; -z - \lambda z - 2\mu y; x - y - \lambda y) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} ① & yz = 2 \\ ② & x^2+y^2 = 2 \\ ③ & z = 2\mu x \\ ④ & -z-\lambda z - 2\mu y = 0 \\ ⑤ & x - y - \lambda y = 0 \end{cases}$$

REEMPLAZO ③ EN ④

$$-2\mu x - \lambda 2\mu x - 2\mu y = 0$$
$$-2\mu(x+\lambda x + y) = 0$$

$\mu = 0$ POR ③ $z=0$ ABS!

$x + \lambda x + y = 0$

$y = -x - \lambda x$

REEMPLAZO EN ⑤

$$x - (-x-\lambda x) - \lambda(-x-\lambda x) = 0$$
$$x + x + \lambda x + \lambda x + \lambda^2 x = 0$$
$$x(2+2\lambda+\lambda^2) = 0$$

$x = 0$ POR ③ $z = 0$ ABS!

$2+2\lambda+\lambda^2 = 0$ NO HAY SOLUCIÓN

$yz = 2$
$\Rightarrow y \neq 0, z \neq 0$
$x^2+y^2 = 2$
$\Rightarrow (x,y) \neq (0,0)$

NO HAY P.C.

OBS:

$g(x,y,z) = yz = 2$ $\qquad h(x,y,z) = x^2+y^2 = 2$

$\nabla g = (0, z, y)$ $\qquad \nabla h = (2x, 2y, 0)$

$\nabla g = k \nabla h \Leftrightarrow (0,z,y) = k(2x, 2y, 0)$

$$\left.\begin{cases} 2xk = 0 \\ z = 2y \\ y = 0 \end{cases}\right\} y=0 \; z=0 \quad \text{ABS!} \; \boxed{yz=2}$$

NO HAY PUNTOS CRÍTICOS $\Rightarrow$ NO HAY EXTREMOS

Ejemplo: Calcular el mínimo y máximo absolutos de $f(x,y) = xy$ en la región dada por $1 \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 4$.

Ejemplo: Calcular el mínimo y máximo absolutos de $f(x,y) = \ln(1 + 9x^2 + 4y^2)$ en la región dada por $1 \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 4$.