Funkcje ciągłe i różniczkowalne

Marcin Śliwiński

14 grudnia 2010

Spis treści

1 Funkcje ciagłe

Definicja 1.1. (funkcja ciągła). Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, oraz niech $x_0 \in (a, b)$. Mówimy, że funkcja f jest ciągla w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall x \in (a, b)|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Przykład 1.2. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne, są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny.

Przykład 1.3. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Jest ciągła w każdym punkcie poza $x_0 = 0$.
Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych.

Przykład 1.4. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Przykład 1.5. Funkcja f dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale nie jest ciągła w pozostałych punktach dziedziny.

Zadanie 1. Udowonij prawdziwość podanychprzykładów.

Definicja 1.6. Jeśli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny A to mowimy krótko, że jest ciągła.

Ponizsze twierdzienie zbiera podstawowe własności zbioru funkcji ciągłych.

Twierdzenie 1.7. *Niech funkcje $f, g : R \to \mathbb{R}$ będą ciągłe, oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Wtedy Funkcje:*

a) $h_1(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$,

b) $h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$,

c) $h_3(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(o ile $g(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$),*

d) $h_4(x) = f(g(x))$,

są ciągłe.

Następne twierdzenie zwane powszechnie ”wlasnością Darboux” lub twierdzeniem o wartości pośredniej ma liczne praktyczne zastosowania, Mowi ono o tym, że jeśli funkcja ciągła przyjmuje jakieś dwie wartości, to przy odpowiednich założeniach co do dziedziny, przyjmuje też wszystkie warotści pośrednie. Możemy sobie to łatwo wyobraxić na przykładzie funkcji, która opisuje zmianę temperatury w czasie. Jeśli o 7:00 było $-1°$C a o 9:00 było $2°$C, to zapewme gdzieś między 7:00 a 9:00 był taki moment, że temperatura wynosiła dokładnie $0°$C.

Twierdzenie 1.8. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągła, oraz niech $f(a) \neq f(b)$. Wtedy dla dowolnego $y_0 \in conv\{f(a), f(b)\}$ istnieje $x_0 \in [a, b]$ takie, że $f(x_0) = y_0$.*

2 Różniczkowalność

Definicja 2.1. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ oraz f ciągła w otoczeniu punktu x_0. Jeśli istnieje granica:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

i jest skończona, to oznaczmy ją przez $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0.