Równanie Schrödingera*

Maciej J. Mrowiński

4 marca 2024

⋆ **Zadanie RS1**

Funkcja falowa opisująca stan pewnej cząstki w chwili $t = 0$ ma następującą postać:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & \text{gdy } x \in [-a,a] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [-a,a] \end{cases}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+$. Wyznacz stałą A. Jakie jest średnie położenie i pęd cząstki w chwili $t = 0$?

Odpowiedź: $A = \sqrt{\frac{15}{16a^5}}$, $\langle x \rangle = 0$, $\langle p \rangle = 0$

⋆ **Zadanie rs2**

Funkcja falowa opisująca stan pewnej cząstki ma następującą postać:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x| - i\omega t}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \mathbb{R}_+$. Wyznacz stałą A. Jakie jest średnie położenie i średni kwadrat położenia cząstki?

Odpowiedź: $A = \sqrt{\lambda}$, $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda^2}$

⋆ **Zadanie RS3**

W nieskończonej studni potencjału, zdefiniowanej na przedziale $x \in [-a,a]$, znajduje się cząstka w stanie opisywanym funkcją falową:

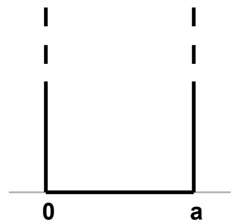
$$\psi(x) = A\sin^2\frac{\pi x}{2a}$$

Wyznacz stałą A i średnią energię kinetyczną cząstki w tym stanie.

Odpowiedź: $A^2 = \frac{4}{3a}$, $< T >= \frac{\pi^2\hbar^2}{6ma^2}$

*Skompilowane z wielu źródeł. Tylko do użytku na zajęciach.

⋆ **Zadanie RS4**



Wyznacz unormowane stany stacjonarne i dozwolone wartości energii dla cząstki znajdującej się w nieskończonej studni potencjału o szerokości a (patrz rysunek) przy założeniu, że energia cząstki $E > 0$. Wykaż, że te stany stacjonarne spełniają zasadę nieoznaczoności.

Odpowiedź: $\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{-i\frac{n^2\pi^2\hbar}{2ma^2}t}$, $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

⋆ **Zadanie RS5**

Wyznacz unormowane stany stacjonarne i dozwolone wartości energii dla cząstki znajdującej się w trójwymiarowej, nieskończonej studni potencjału (czyli w pudełku):

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mathbf{r} \in [0,a] \times [0,b] \times [0,c] \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

przy założeniu, że energia cząstki $E > 0$.

Odpowiedź: $\Psi_{n_x,n_y,n_z}(x,y,z,t) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z\pi}{c} z\right) e^{-\frac{iE_{n_x,n_y,n_z}}{\hbar}t}$,
$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2\right]$

⋆ **Zadanie RS6**

Iloczyn skalarny dwóch funkcji falowych Ψ_1 i Ψ_2 może zostać zdefiniowany w następujący sposób:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \Psi_1^* \ \Psi_2 \ dx$$

przy czym granica tej całki zależy od kontekstu (na przykład dziedziny lub okresu funkcji Ψ_1 i Ψ_2). Wykaż, że tak zdefiniowany iloczyn skalarny jest odwzorowaniem addytywnym względem obu parametrów:

$$(\Psi_1, \Psi_2 + \Psi_3) = (\Psi_1, \Psi_2) + (\Psi_1, \Psi_3)$$

$$(\Psi_1 + \Psi_3, \Psi_2) = (\Psi_1, \Psi_2) + (\Psi_3, \Psi_2)$$

Wykaż również, że zachodzą następujące równości dla dowolnego $c \in \mathbb{C}$:

$$(\Psi_1, c\Psi_2) = c\,(\Psi_1, \Psi_2)$$

$$(c\Psi_1, \Psi_2) = c^*\,(\Psi_1, \Psi_2)$$

⋆ **Zadanie RS7**

Dyskretną bazą ortonormalną nazywamy zbiór funkcji $\{u_n(x)\}$ ($u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$), pomiędzy którymi zachodzi, między innymi, następująca zależność (ortonormalność):

$$(u_n, u_m) = \delta_{n,m}$$

Wykaż, że rozwiązania niezależnego od czasu równania Schrödingera dla cząstki w nieskończonej studni potencjału (zadanie **RS4**) spełniają ten warunek.

⋆ **Zadanie RS8**

Załóżmy, że funkcje falowe $\Psi_1(x,t)$ i $\Psi_2(x,t)$ są rozwiązaniami równania Schrödingera. Udowodnij, że funkcja falowa $\Psi_3(x,t)$ będąca ich liniową kombinacją:

$$\Psi_3(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t)$$

gdzie $c_1 \in \mathbb{C}$ i $c_2 \in \mathbb{C}$ to dowolne stałe, jest również rozwiązaniem równania Schrödingera. Ile będą wynosiły iloczyny skalarne (Ψ_1, Ψ_3), (Ψ_2, Ψ_3) i (Ψ_3, Ψ_3), jeżeli funkcje falowe Ψ_1 i Ψ_2 są ortonormalne (zadanie **RS7**)?

Odpowiedź: $(\Psi_1, \Psi_3) = c_1$, $(\Psi_2, \Psi_3) = c_2$, $(\Psi_3, \Psi_3) = |c_1|^2 + |c_2|^2$ (tu warto zauważyć, że jest to z definicji całka kwadratu modułu Ψ_3)

⋆⋆ **Zadanie RS9**

Każdą „przyzwoicie" zachowującą się funkcję, zdefiniowaną na odcinku $[-L/2, L/2]$, można przedstawić w postaci liniowej kombinacji funkcji bazy $u_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n(x)$$

gdzie (szereg Fouriera)

$$u_n(x) = Ae^{iBnx}$$

Wyznacz stałe A i B (podpowiedź: baza ortonormalna). Udowodnij, że przy odpowiednich założeniach powyższa kombinacja liniowa przechodzi dokładnie w ogólną postać rozwiązania równania Schrödingera dla cząstki w nieskończonej studni potencjału zdefiniowanej jak w zadaniu **RS4**. Sprawdź co będzie się działo, gdy L dąży do nieskończoności (podpowiedź: transformacja Fouriera). Korzystając z transformacji Fouriera pokaż, że poniższy wzór jest prawdziwy:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk$$

Odpowiedź: $A = \frac{1}{\sqrt{L}}$, $B = \frac{2\pi}{L}$

$\star\star$ **Zadanie RS10**

Najbardziej ogólne rozwiązanie równania Schrödingera, z uwagi na jego liniowość, dla cząstki w nieskończonej studni potencjału (zadanie **RS4**) może zostać przedstawione jako superpozycja wielu stanów stacjonarnych (zadanie **RS8**):

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \Psi_n(x,t)$$

gdzie $\Psi_n(x,t)$ to n-ty stan stacjonarny, a $c_n \in \mathbb{C}$ to pewna stała (waga). Załóżmy, że dla pewnej cząstki w nieskończonej studni potencjału o szerokości a ($V = 0$ gdy $x \in [0,a]$, $V = \infty$ gdy $x \notin [0,a]$) kształt funkcji falowej w chwili $t = 0$ dany jest w następujący sposób:

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x)$$

Wyznacz dla tej cząstki stałą A i poszczególne wartości współczynników c_n. *Podpowiedź*: przy wyznaczaniu c_n należy skorzystać z ortogonalności stanów stacjonarnych (patrz zadania **RS7**, **RS8**) - problem ten jest analogiczny do wyznaczania współczynników wektora w pewnej ortonormalnej bazie (gdyż, w istocie, jest to dokładnie wyznaczanie współczynników wektora w pewnej ortonormalnej bazie - naszym wektorem jest funkcja falowa a bazą poszczególne stany stacjonarne).

Odpowiedź: $A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$, $c_n = \begin{cases} \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3} & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ 0 & \text{gdy gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases}$

$\star\star$ **Zadanie RS11**

Jeżeli funkcja falowa opisująca stan cząstki w nieskończonej studni potencjału (zadanie **RS4**) miała w chwili początkowej postać:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax & \text{gdy } x \in [0, a/2[\\ A(a-x) & \text{gdy } x \in [a/2, a] \\ 0 & \text{gdy w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

wyznacz stałą A i współczynniki c_n (patrz zadanie **RS10**).

Odpowiedź: $A = \sqrt{\frac{12}{a^3}}$, $c_n = \begin{cases} \frac{4\sqrt{6}}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ 0 & \text{gdy gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases}$

$\star$ **Zadanie RS12**

Po jakim czasie cząstka w nieskończonej studni potencjału znajdzie się znowu w stanie początkowym:

$$\Psi(x,T) = \Psi(x,0)$$

jeżeli w chwili początkowej znajdowała się w dowolnym stanie $\Psi(x,0)$ (niekoniecznie stacjonarnym)?

Odpowiedź: $T = \frac{4ma^2}{\pi\hbar}$

⋆ **Zadanie RS13**
Wyznacz wzór na prąd prawdopodobieństwa $j(x,t)$:

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Psi\right)$$

różniczkując gęstość prawdopodobieństwa $|\Psi|^2$ po czasie i używając równania Schrödingera do zamiany pochodnych na pochodne po położeniu.

⋆ **Zadanie RS14**
Wyznacz prąd prawdopodobieństwa (zadanie **RS13**) dla funkcji falowej:

$$\Psi(x,t) = Ae^{\pm ikx - i\omega t}$$

Odpowiedź: $j(x,t) = \pm\frac{\hbar k}{m}|A|^2$

⋆ **Zadanie RS15**
Wyznacz prąd prawdopodobieństwa (zadanie **RS13**) dla cząstki w nieskończonej studni potencjału o szerokości a (zadanie **RS4**), jeżeli cząstka znajduje się w n-tym stanie stacjonarnym:

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

gdzie

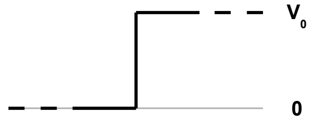
$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Jaki będzie prąd prawdopodobieństwa w przypadku cząstki znajdującej się w stanie będącym następującą liniową kombinacją n-tego i m-tego stanu stacjonarnego:

$$\Psi_{n,m}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_n(x,t) + \Psi_m(x,t)\right]$$

Odpowiedź: $j_n(x,t) = 0$,
$j_{n,m}(x,t) = \frac{\hbar\pi}{2ma^2}\left[(n+m)\sin\frac{(n-m)\pi x}{a} - (n-m)\sin\frac{(n+m)\pi x}{a}\right]\sin\frac{(E_n-E_m)t}{\hbar}$

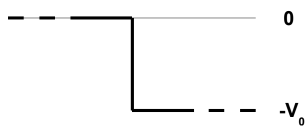
⋆ **Zadanie RS16**



Wyznacz, korzystając z prądu prawdopodobieństwa, współczynnik odbicia R i transmisji T dla „stopnia” potencjału o wysokości V_0 w przypadku kiedy energia $E > V_0$ i $E \in [0, V_0[$.

Odpowiedź: dla $E > V_0$: $R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$, $T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$; dla $E \in [0, V_0[$: $R = 1$, $T = 0$

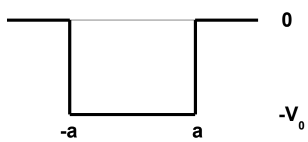
⋆ **Zadanie RS17**



Wyznacz współczynnik odbicia R i transmisji T dla odwróconego „stopnia” potencjału o głębokości V_0 w przypadku, kiedy energia $E > 0$.

Odpowiedź: $R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$, $T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

⋆⋆ **Zadanie RS18**



Wyznacz parzyste i nieparzyste unormowane rozwiązania niezależnego od czasu równania Schrödingera dla cząstki o energii $E \in]-V_0, 0[$ znajdującej się w skończonej studni potencjału o głębokości V_0 i szerokości $2a$. Znajdź, w obu przypadkach, równania na dopuszczalne wartości energii (uwaga: równań tych nie daje się analitycznie rozwikłać). Dla energii $E > 0$ znajdź współczynnik transmisji. Dla jakich wartości energii fala całkowicie przejdzie przez barierę (studnię)?

Odpowiedź:

Rozwiązania parzyste: $\psi(x) = \begin{cases} \frac{e^{k_1 a}\cos k_2 a}{\sqrt{a+\frac{1}{k_1}}} e^{k_1 x} & \text{gdy } x \in]-\infty, -a[\\ \frac{\cos k_2 x}{\sqrt{a+\frac{1}{k_1}}} & \text{gdy } x \in [-a, -a] \\ \frac{e^{k_1 a}\cos k_2 a}{\sqrt{a+\frac{1}{k_1}}} e^{-k_1 x} & \text{gdy } x \in]a, \infty[\end{cases}$

Warunek dla energii stanów parzystych: $k_1 = k_2 \operatorname{tg} k_2 a$

Rozwiązania nieparzyste: $\psi(x) = \begin{cases} -\frac{e^{k_1 a}\sin k_2 a}{\sqrt{a+\frac{1}{k_1}}} e^{k_1 x} & \text{gdy } x \in]-\infty, -a[\\ \frac{\sin k_2 x}{\sqrt{a+\frac{1}{k_1}}} & \text{gdy } x \in [-a, -a] \\ \frac{e^{k_1 a}\sin k_2 a}{\sqrt{a+\frac{1}{k_1}}} e^{-k_1 x} & \text{gdy } x \in]a, \infty[\end{cases}$

Warunek dla energii stanów nieparzystych: $k_1 = -k_2 \operatorname{ctg} k_2 a$

$T = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)} \sin^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}\right)\right]^{-1}$

$E_n + V_0 = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$

⋆⋆ **Zadanie RS19**

Wyznacz unormowane stany stacjonarne i równanie na dopuszczalne poziomy energii dla cząstki w poruszającej się w potencjale:

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{dla } x \in [0, a] \\ V_2 & \text{dla } x \in]a, b] \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

gdzie $V_2 > V_1 > 0$. Załóż, że energia cząstki $E > V_2$. Jakie będzie prawdopodobieństwo tego, że cząstka znajdzie się w obszarze $[0, a]$?

Odpowiedź:

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin k_1 x & \text{dla } x \in [0, a] \\ A\frac{\sin k_1 a}{\sin k_2 \beta}\sin k_2(b-x) & \text{dla } x \in \,]a, b] \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$k_2 \operatorname{ctg} k_2\beta + k_1 \operatorname{ctg} k_1 a = 0,\ A^{-2} = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{\sin 2k_1 a}{2k_1 a} + \sin^2 k_1 a \frac{2k_2\beta - \sin 2k_2\beta}{2k_2 a \sin^2 k_2\beta}\right],$

$p = A^2\frac{a}{2}\left[1 - \frac{\sin 2k_1 a}{2k_1 a}\right]$, $\beta = b - a$

$\star\star$ **Zadanie RS20**

Wyznacz równanie na dopuszczalne poziomy energii dla cząstki poruszającej się w potencjale:

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{dla } x \in]-\infty, 0] \\ V_2 & \text{dla } x \in]0, L[\\ V_3 & \text{dla } x \in [L, +\infty[\end{cases}$$

gdzie $V_1 > V_3 > V_2 > 0$. Załóż, że energia cząstki $V_2 < E < V_3$.

Odpowiedź: $\operatorname{tg} k_2 L = \frac{k_1 + k_3}{k_2 - \frac{k_1 k_3}{k_2}}$

$\star\star$ **Zadanie RS21**

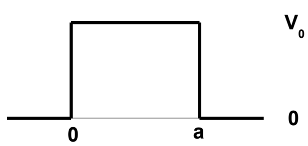
Wyznacz równanie na dopuszczalne poziomy energii i warunek na istnienie stanów związanych dla cząstki poruszającej się w potencjale:

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{dla } x \in]-\infty, -a] \\ V_2 & \text{dla } x \in]-a, b[\\ V_3 & \text{dla } x \in [b, +\infty[\end{cases}$$

gdzie $V_2 < V_3 < V_1$.

Odpowiedź: $\arcsin \varepsilon + \arcsin \varepsilon\lambda = m\pi - \frac{\sqrt{2m(V_3 - V_1)}}{\hbar}(a+b)\varepsilon$,
$(m-1)\pi + \arccos \lambda < \frac{\sqrt{2m(V_3 - V_1)}}{\hbar}(a+b)$, $\varepsilon = \sqrt{\frac{E - V_2}{V_3 - V_2}}$, $\lambda = \sqrt{\frac{V_3 - V_2}{V_1 - V_2}}$

$\star\star$ **Zadanie RS22**



Wyznacz współczynnik transmisji dla prostokątnej bariery potencjału o szerokości a i wysokości V_0 w przypadku, kiedy energia cząstki $E > V_0$, $E = V_0$ i $0 < E < V_0$.

Odpowiedź:

$E > V_0$: $T = \left[1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2}\right)^2 \sin^2 k_2 a\right]^{-1}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar^2}$

$E = V_0$: $T = \left[1 + \left(\frac{ka}{2}\right)^2\right]^{-1}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$0 < E < V_0$: $T = \left[1 + \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2}\right)^2 \sinh^2 k_2 a\right]^{-1}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar^2}$

$\star\star$ **Zadanie RS23**

Cząstka o masie m porusza się w potencjale:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{gdy } x \in]-\infty, 0[\\ -\frac{32\hbar^2}{ma^2} & \text{gdy } x \in [0, a] \\ 0 & \text{gdy } x \in]a, \infty[\end{cases}$$

W ilu stanach o energii $E \in [-\frac{32\hbar^2}{ma^2}, 0]$ może znaleźć się cząstka. Podpowiedź: końcówkę zadania należy rozwiązać graficznie.

Odpowiedź: Istnieją 3 stany stacjonarne o energii $E \in [-\frac{32\hbar^2}{ma^2}, 0]$.

$\star\star$ **Zadanie RS24**

Załóżmy, że rozwiązanie niezależnego od czasu równania Schrödingera ma następującą postać

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_l(x) & \text{gdy } x \in]-\infty, x_0[\\ \psi_r(x) & \text{gdy } x \in [x_0, +\infty[\end{cases}$$

Udowodnij, że dla dowolnego potencjału będącego funkcją $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($|V(x)| < \infty$), pierwsza pochodna $\psi(x)$ musi być ciągła. Wykaż również, że możemy dokładnie określić jak zachowuje się nieciągłość pochodnej $\psi(x)$ w przypadku deltoidalnego potencjału $V(x) = -c\delta(x - x_0)$. *Podpowiedź*: w obu przypadkach należy obustronnie scałkować niezależne od czasu równanie Schrödingera w najbliższym otoczeniu punktu x_0.

Odpowiedź:

$$\left.\frac{d\psi_r}{dx}\right|_{x=x_0} - \left.\frac{d\psi_l}{dx}\right|_{x=x_0} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } V(x) \text{ zachowuje się „przyzwoicie”} \\ -\frac{2mc}{\hbar^2}\psi(x_0) & \text{nieciągłość dla potencjału deltoidalnego} \end{cases}$$

$\star\star$ **Zadanie RS25**

Wyznacz stany stacjonarne i dopuszczalne wartości energii dla cząstki w potencjale deltoidalnym $V(x) = -\alpha\delta(x)$, której energia $E < 0$. Dla energii $E > 0$ wyznacz współczynnik transmisji i odbicia. Pamiętaj, że w punkcie $x = 0$ pierwsza pochodna funkcji falowej nie będzie ciągła z uwagi na deltoidalny potencjał (zadanie **RS24**).

Odpowiedź: $\Psi(x, y) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x| - \frac{iE}{\hbar}t}$, $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ (istnieje tylko jeden stan stacjonarny!)

$R = \left[1 + \frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}\right]^{-1}$, $T = \left[1 + \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}\right]^{-1}$

$\star\star$ **Zadanie RS26**

Wyznacz równanie na dopuszczalne poziomy energii dla cząstki poruszającej się w potencjale niesymetrycznej studni z barierą deltoidalną:

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{dla } x \in [0, a[\\ c\delta(x) & \text{dla } x = a \\ V_2 & \text{dla } x \in]a, b] \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

gdzie $V_2 > V_1 > 0$. Załóż, że energia cząstki $E > V_2$.

Odpowiedź: $k_2 \operatorname{ctg} k_2\beta + k_1 \operatorname{ctg} k_1 a = -\frac{2mc}{\hbar^2}$, $\beta = b - a$

$\star\star$ **Zadanie RS27**

Wyznacz równanie na dopuszczalne poziomy energetyczne dla cząstki znajdującej się w potencjale $V(x) = -\alpha\left[\delta(x) + \delta(x-l)\right]$ $(\alpha, l \in \mathbb{R}_+)$, jeżeli jej energia $E < 0$.

Odpowiedź: $e^{-2kl} = \left(1 - \frac{2k}{\beta}\right)^2$, $k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$, $\beta = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}$

$\star\star$ **Zadanie RS28**

Wyznacz równanie na dopuszczalne poziomy energetyczne dla cząstki znajdującej się w potencjale $V(x) = -\alpha\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$ $(\alpha, a \in \mathbb{R}_+)$, jeżeli jej energia $E < 0$. Dla $E > 0$ wyznacz współczynnik transmisji.

Odpowiedź: Dla rozwiązań parzystych: $e^{-2ka} = \frac{k\hbar^2}{m\alpha} - 1$, dla rozwiązań nieparzystych: $e^{-2ka} = 1 - \frac{k\hbar^2}{m\alpha}$, gdzie $k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$; $T = \frac{8\delta^2}{8\delta^4 + 4\delta^2 + 1 + (4\delta^2 - 1)\cos(4ka) + 4\delta\sin(4ka)}$, $\delta = -\frac{\hbar^2 k}{2m\alpha}$

$\star$ **Zadanie RS29**

Wyznacz unormowane stany stacjonarne i dopuszczalne poziomy energii dla cząstki swobodnej poruszającej się po okręgu, którego obwód wynosi L. *Podpowiedź*: Rozwiązania elementarne będą dwa - jedno dla ruchu zgodnie i jedno dla ruchu przeciwnie do wskazówek zegara.

Odpowiedź: $\psi_n^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\pm\frac{2\pi i n x}{L}}$, $E = \frac{2n^2\pi^2\hbar^2}{mL^2}$

$\star$ **Zadanie RS30**

Wyznacz ogólne rozwiązanie równania Schrödingera dla cząstki swobodnej.

Odpowiedź: $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)}\, dk$

⋆ **Zadanie RS31**

Wyznacz $\Psi(x,t)$ dla cząstki swobodnej, jeżeli w chwili początkowej jej funkcja falowa miała postać:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A & \text{gdy } x \in]-a,a[\\ 0 & \text{gdy } x \notin]-a,a[\end{cases}$$

Dobierz stałą A tak, aby funkcja falowa była unormowana.

Odpowiedź: $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2a}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ka}{k} e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)}\, dk$

⋆ **Zadanie RS32**

Wyznacz $\Psi(x,t)$ dla cząstki swobodnej, jeżeli w chwili początkowej jej funkcja falowa miała postać:

$$\Psi(x,0) = Ae^{-a|x|}$$

gdzie a i A to dodatnie, rzeczywiste stałe (A nie jest znana).

Odpowiedź: $\Psi(x,t) = \frac{a^{3/2}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2+a^2} e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)}\, dk$

⋆⋆ **Zadanie RS33**

Wyznacz $\Psi(x,t)$ dla cząstki swobodnej, jeżeli w chwili początkowej jej funkcja falowa miała postać (paczka Gaussowska):

$$\Psi(x,0) = Ae^{-ax^2}$$

gdzie a i A to dodatnie, rzeczywiste stałe (A nie jest znana). Wyznacz również $|\Psi|^2$ i wariancję położenia oraz pędu cząstki. Sprawdź, czy zasada nieoznaczoności jest spełniona.

Odpowiedź: $\Psi(x,t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\hbar ita}{m}}} e^{\frac{-ax^2}{1+\frac{2\hbar ita}{m}}}$, $\sigma_x^2 = \frac{1+\theta^2}{4a}$, $\sigma_p^2 = a\hbar^2$, $\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\theta^2}$, $\theta = \frac{2hat}{m}$

⋆⋆ **Zadanie RS34**

Korzystając z operatorów drabinkowych a_+ i a_- rozwiąż zagadnienie własne (znajdź unormowane funkcje własne i dopuszczalne poziomy energii) dla operatora energii (Hamiltonianu) w przypadku, kiedy cząstka porusza się w potencjale jednowymiarowego oscylatora harmonicznego ($V(x) = 1/2\ m\omega^2 x^2$). Przedstaw operatory pędu i położenia przy pomocy operatorów a_+ i a_-. Sprawdź, czy wyznaczone funkcje własne spełniają zasadę nieoznaczoności.

Odpowiedź: $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\ a_+^n \psi_0$, $\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$, $E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n\right)$, $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-)$, $P = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a_+ - a_-)$, $\sigma_X\sigma_P = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$

⋆ **Zadanie RS35**

Korzystając z operatorów drabinkowych a_+ i a_- wyznacz średnią energię kinetyczną i potencjalną cząstki opisanej n-tą funkcją własną operatora energii dla potencjału harmonicznego.

Odpowiedź: $\langle T\rangle = \langle V\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1)$

⋆ **Zadanie RS36**

Dla cząstki poruszającej się w potencjale oscylatora harmonicznego wyznacz explicite (korzystając z operatora drabinkowego a_+) postać trzech pierwszych funkcji własnych operatora energii (ψ_0, ψ_1 oraz ψ_2). Naszkicuj te funkcje w dowolnym programie graficznym. Następnie, poprzez bezpośrednie całkowanie tych funkcji (czyli nie korzystając z własności operatorów drabinkowych), udowodnij ich ortogonalność.

Odpowiedź: $\psi_1 = \left(\frac{4m^3\omega^3}{\pi\hbar^3}\right)^{1/4} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$, $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

⋆ **Zadanie RS37**

Wyznacz funkcje własne operatora energii i dopuszczalne poziomy energii dla cząstki poruszającej się w potencjale „połowicznego” oscylatora harmonicznego:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } x < 0 \\ 1/2\ m\omega^2 x^2 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

Podpowiedź: To zadanie wygląda strasznie, ale jest banalnie proste, jeżeli tylko ruszy się przy tym trochę głową - nie trzeba nawet nic nowego liczyć, wystarczy znajomość rozwiązań zadań **RS34** i **RS36**. Jak rozwiązywaliśmy podobne problemy w przypadku potencjałów stałych odcinkami?

Odpowiedź: Jeżeli $\psi_m(x)$ to funkcja własna dla „całego” oscylatora, wówczas funkcjami własnymi dla „połowicznego” oscylatora będą funkcje

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in]-\infty, 0] \\ \sqrt{2}\psi_{2n-1}(x) & \text{gdy } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$; dopuszczalne poziomy energii to $E_n = \hbar\omega\left(2n - \frac{1}{2}\right)$