TRABAJO FIN DE GRADO

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ranking de números difusos

Aplicación en Economía

Autor

Miguel Sánchez Maldonado (alumno)

Directores

Concepción Beatriz Roldán López de Hierro (tutora)

Antonio Francisco Roldán López de Hierro (tutor)

Facultad de Ciencias

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

—

Granada, Junio de 2017

Índice general

Resumen **3**

Abstract **9**

1. Introducción **19**

2. Objetivos **21**

3. Números Difusos **23**

3.1. Definiciones previas 23

3.2. Algunas clases de números difusos 25

3.2.1. Números difusos crisp 25

3.2.2. Números difusos rectangulares 26

3.2.3. Números difusos triangulares 27

3.2.4. Números difusos trapezoidales 28

3.2.5. Números difusos de tipo LR 29

3.3. Operaciones con números difusos 32

3.3.1. Aritmética intervalar 32

3.3.2. Principio de extensión de Zadeh 32

4. Ranking **35**

4.1. Inconsistencia de las órdenes de clasificación entre diferentes enfoques 37

4.2. Propiedades razonables de un ranking 39

4.3. Organización de los métodos de ordenación 40

4.4. Métodos de Ranking 41

4.4.1. Método del punto central 41

4.4.2. Método de la distancia de signo 42

4.4.3. Método de la magnitud 43

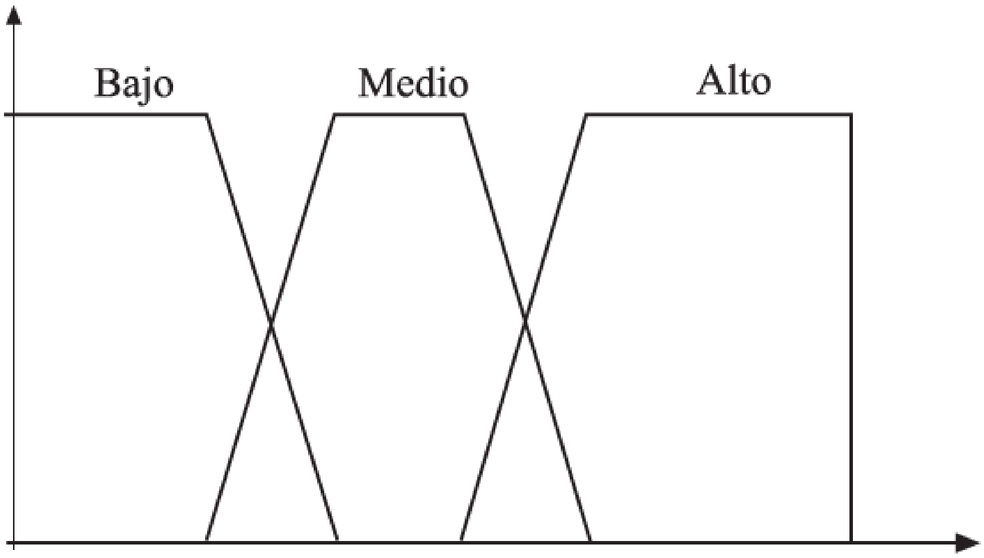
4.4.4. Principio de descomposición y distancia 45
4.4.5. Método del coeficiente de variación 46
4.4.6. Método del centroide 48
4.4.7. Método de Chen 48
4.5. Verificación de los axiomas de los métodos de ranking 50
4.6. Ejemplos de clasificación 50

5. Librería desarrollada en R **59**
5.1. Cálculo del índice para números difusos trapezoidales 61
5.2. Ranking de un conjunto de números difusos 65
5.3. Cálculo del índice para números difusos LR 70
5.4. Ejemplo de aplicación en Economía 73

6. Conclusiones **77**

Índice de figuras **79**

Bibliografía **81**



Números Difusos

Ranking de Números Difusos

Autor
Miguel Sánchez Maldonado (alumno)

Directores
Concepción Beatriz Roldán López de Hierro (tutora)
Antonio Francisco Roldán López de Hierro (tutor)

Números Difusos: Ranking de Números Difusos

Miguel Sánchez Maldonado (alumno)

Palabras clave: Número difuso; Ranking de números difusos; Punto Centroide; Índice distancia; Coeficiente de variación (CV)

Resumen

En esta memoria de fin de grado presentaremos diversos métodos para establecer ordenaciones entre conjuntos de cantidades imprecisas modeladas mediante números difusos. Dichos métodos han quedado implementados en una librería de la implementación de software libre R para que las personas que estén interesadas en desarrollar ranking entre los números difusos que más se utilizan en la práctica puedan ayudarse de este programa para llevar a cabo dicha tarea de una forma rápida y sencilla.

En muchas ocasiones, cuando tratamos de medir, de manera precisa, algunos fenómenos de la vida real, nos encontramos ciertas dificultades. En unas ocasiones, por la naturaleza intrínseca de los fenómenos (por ejemplo, la distancia entre dos estrellas) y, en otros, por las limitaciones de los aparatos de medida. En tales situaciones, las medidas que se obtienen conllevan, de manera intrínseca, un cierto grado de imprecisión difícil de valorar con exactitud. De esta forma, podemos interpretar dichas medidas como cantidades imprecisas, cuyo conocimiento no es más que la suposición de que los verdaderos valores, aunque desconocidos, están cercanos a los valores obtenidos. De esta forma, en vez de obtener números reales (interpretados como cantidades exactas), debemos manejar una nueva clase de números capaz de modelizar estas situaciones de incertidumbre: los *números difusos*.

Los **números difusos** son entidades matemáticas que podemos asociar a la medición de la mayoría de los fenómenos que observamos cada día y que, de manera natural, conllevan un cierto grado de imprecisión; dicho de otro modo, son extensiones abstractas de la noción de *número real* que presentan un cierto grado de indeterminación o incertidumbre en la descripción de su naturaleza.

La teoría de conjuntos difusos fue presentada por primera vez por Lotfi A. Zadeh en 1965. Dicho autor observó que muchos objetos del mundo físico real no se ajustan a criterios definidos con precisión. La teoría de Zadeh define los conjuntos difusos como clases de objetos a los que se les asocian grados de pertenencia. Esta teoría se basa en la idea de que no siempre es posible determinar con total exactitud si un elemento pertenece, o no, a un conjunto. La lógica difusa parte del hecho de que la realidad no tiene por qué ser sólo verdadera o falsa, sino que existen grados intermedios de incertidumbre.

Comenzamos esta memoria haciendo una introducción a la teoría de los conjuntos difusos, centrándonos en el concepto de *número difuso* y en sus principales características. Para ello, presentaremos una serie de definiciones asociadas al ambiente difuso (por ejemplo, la noción de *variable lingüística* o de α-*corte*). Veremos que un número difuso es un conjunto dotado de una función de pertenencia en el intervalo $[0, 1]$ que cumple ciertas condiciones.

Teniendo en cuenta la noción de número difuso, presentaremos las clases de números difusos que, por su sencillez, más se utilizan en la práctica. Como veremos, estos grupos o familias de números difusos se clasifican, principalmente, atendiendo a la forma geométrica de la representación gráfica del número difuso (como función valuada en $[0, 1]$). Según este criterio, podemos encontrar diversos tipos de números difusos:

- Números difusos *crisp* (son extensiones naturales de la noción de número real).
- Números difusos de tipo *rectangular* (que sirven para modelizar intervalos de números reales).
- Números difusos *triangulares* y *trapezoidales* (son los más usados en la práctica por su sencillez y fácil interpretación).
- Números difusos tipo *LR* (léase *left-right*, pues tienen la forma geométrica de un trapecio con la salvedad de que las funciones que definen los lados no paralelos no son necesariamente rectilíneas).

Los números difusos llevan asociados números reales que tratan de describir algunas de sus principales propiedades analíticas y geométricas. Es el caso del *valor* o la *ambigüedad que se puede calcular para cada número difuso.*

Los números difusos nacieron con la idea de extender los números reales a un ambiente de incertidumbre. Por tanto, también es necesario extender las operaciones aritméticas con números reales al ambiente de los números difusos. Esta extensión se hace de forma que el número resultante vuelva a ser un número difuso. Esto no resulta evidente. Por ejemplo, la aritmética usual de funciones valuadas en el conjunto de los números reales no sirve para desarrollar dicha extensión. Por ejemplo, si tomamos dos números difusos A y B tales que $A(x_0) = B(x_0) = 1$, entonces $A(x_0) + B(x_0) = 2 \notin [0,1]$, lo que significa que la función suma $A + B$ ya no es un número difuso. Para extender las operaciones con números difusos se utiliza el principio de extensión de Zadeh o, equivalentemente, la aritmética intervalar. Con ambos procedimientos se obtienen los mismos resultados. Las operaciones básicas entre números difusos, denotadas abstractamente como $\diamond$ son la suma $(+)$, la diferencia $(-)$, la multiplicación $(\cdot)$ y la división $(/)$.

El tema principal de esta memoria es la ordenación o **ranking de números difusos**. Se trata de una herramienta con posibles aplicaciones a muy diversos campos de investigación. Por ejemplo, en la toma de decisiones, frecuentemente se utilizan cantidades difusas para describir los problemas que surgen en el mundo real. En este contexto, la ordenación o ranking de los números difusos será una herramienta esencial para el proceso de decisión.

El problema de ordenación de cantidades difusas no es un problema sencillo de afrontar. Aunque se pueden establecer diversos órdenes parciales en el conjunto formado por todos los números difusos, ninguno de ellos ha sido universalmente aceptado para desarrollar la tarea de ordenación. La causa principal de este inconveniente es que ninguno de los procesos presentados es coherente con la intuición humana. En este sentido, cualquier proceso de ordenación de números difusos debe producir los resultados que esperamos cuando se aplica a número difusos *crisp*, es decir, debe extender el orden natural entre los números reales.

Desde 1976 se han presentado más de 35 índices de ordenación de números difusos. Los métodos de ranking están organizados en distintas categorías como pueden ser el *método de defusificación* (se asocia un índice real a cada número difuso y se ordenan estos números reales), *el método de referencia* (se establece un conjunto difuso como referencia en la ordenación) y el *método de relación difusa* (se establece una relación para comparar pares de números).

Como hemos comentado, la razón por la que existen diversos métodos o índices para establecer rankings es que ningún método obtiene siempre los resultados esperados para todos los casos, es decir, hay una cierta inconsistencia entre los resultados que proporcionan unos y otros. En este trabajo se muestra un ejemplo en el que se puede apreciar esta inconsistencia entre algunos métodos. Para evitar este problema y lograr unificar las ordenaciones para un mismo conjunto, se proponen una serie de propiedades razonables que debería verificar cualquier metodología de ranking entre números difusos, lo que justificaría la racionalidad del método propuesto. Estas propiedades (o axiomas) son siete, aunque algunas de ellas tienen corolarios o extensiones más fuertes.

A continuación, se describe la formulación matemática de distintos métodos de ordenación clásicos, con los que la mayoría de investigadores, que publican actualmente sus nuevos métodos de ranking, comparan sus resultados. Por ejemplo, el método que se suele llamar del *punto central de* Wang consiste en determinar los puntos del centroide (x_0, y_0) de un número difuso y, a partir de estos valores, calcular un índice. Hay distintas formas de obtener este índice. La forma en la que Wang lo calcula a partir de estos puntos es $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Otros métodos que se describen en la presente memoria son, por ejemplo, el de la *magnitud* o el de la *distancia* de Chu y Tsao. Todos los métodos que hemos analizado en esta memoria calculan un índice para cada número difuso y, a partir de ese índice, obtienen una ordenación o ranking entre los números difusos implicados. Cuanto más valor posee el índice correspondiente, más alta es la clasificación del número difuso. De esta manera, si consideramos dos números difusos A y B, y sus índices son I_A e I_B, respectivamente, escribiremos que $A \prec B$ si $I_A < I_B$. Cabe destacar que hay un método, el del coeficiente de variación, que ordena los números difusos del revés, es decir, cuanto menor sea el índice, más alta es la clasificación del número difuso (o sea, si $I_A < I_B$, entonces $A \succ B$).

En relación a los métodos analizados, mostraremos en una tabla los axiomas o propiedades que verifican cada uno de ellos. Finalizaremos el capítulo considerando un ejemplo (empleado por distintos autores) en el que tomaremos varios conjuntos de números difusos y haremos su representación gráfica para intentar deducir, de forma visual, cuál debería ser su ordenación. A continuación, mostraremos en una tabla los resultados de los índices de cada número difuso según cada método y el ranking correspondiente que se utilice. En relación a este ejemplo, discutiremos cómo algunos métodos no llevan al orden que podríamos esperar teniendo en cuenta la representación gráfica de cada conjunto de números difusos.

Después de la parte matemática de esta memoria, desarrollaremos una parte informática. Más concretamente, explicaremos el desarrollo y la implementación de una librería en lenguaje R, a la que hemos denominado `FuzzyNumbersRanking`, que está compuesta por tres partes.

- La primera parte es la implementación de los métodos estudiados para números difusos trapezoidales. Estos métodos también son válidos para números difusos triangulares ya que éstos pueden verse como un caso especial de los números trapezoidales. A partir de estos métodos podremos obtener el índice asociado a un número difuso según las metodologías propuestas.

- La segunda parte de la librería consta de una función que realizará ordenaciones dentro de un conjunto de números difusos. Esta función nos pedirá, por pantalla, que introduzcamos el conjunto de números (trapezoidales y/o triangulares) y, a continuación, que seleccionemos un método. La función nos devolverá el valor del índice para cada número difuso introducido así como el ranking entre todos ellos.

- La tercera y última parte de esta librería consiste en la implementación de todos los métodos pero considerando que las funciones laterales no son lineales, es decir, introduciendo números difusos de tipo LR. Para la implementación de esta parte hemos necesitado usar la librería *SymPy* de *Python* que, en el caso de R, se denomina *rSymPy*. Por tanto, es necesario tener *Python* instalado en el dispositivo para poder usar esta librería. Debe tenerse en cuenta que, para que R pueda invocar funciones de *Python*, se necesita *Java*. Por lo tanto, nuestro dispositivo también debe tener una versión actual de *Java* instalada.

La parte final de esta memoria está dedicada a presentar una posible aplicación de los conocimientos desarrollados en la misma al campo de la Economía. Para ello, consideraremos los precios diarios del petróleo Brent (en dólares por barril). Para evitar la pérdida de información, vamos a considerar números difusos asociados a cada mes. Estos números difusos serán triangulares y se calcularán utilizando la media de todos los valores y las desviaciones típicas de los valores superiores e inferiores a la media. La ordenación de los precios por meses como números reales se basaría en la media de todos los datos del mes. En nuestro caso, consideraremos los números difusos correspondientes a cada mes y aplicaremos los diversos métodos estudiados para establecer rankings a partir de los índices obtenidos. Tras la realización de estas ordenaciones con números difusos, comprobaremos que todos los métodos, excepto el coeficiente de variación, nos llevan a una clasificación que coincide con la ordenación de números reales y que es el ranking de números difusos que podríamos considerar más razonable.

En cuanto al desarrollo del trabajo, una vez que la parte matemática estaba bastante avanzada, se inició la implementación de la librería, comenzando con los métodos para los números difusos más sencillos (es decir, triangulares y trapezoidales), ya que esta clase de números es muy utilizada por investigadores de distintas áreas de conocimiento. Esta parte finalizó con la implementación de la función que nos permite establecer rankings para un conjunto de números difusos aplicando uno de los métodos descritos en esta memoria. A continuación, se decidió introducir una clase de números difusos más general, los números difusos de tipo LR, con la idea de poder utilizar números más generales en la librería.

Fuzzy Numbers : Ranking of Fuzzy Numbers

Miguel Sánchez Maldonado (student)

Keywords: Fuzzy number; Ranking of fuzzy numbers; Centroid point; Distance index; Coefficient of variation (CV)

Abstract

In this paper we will focus on the theory of fuzzy numbers to establish orders or rankings in a set of fuzzy numbers.

Fuzzy numbers are the numbers that we associate with most of the phenomena observed each day that present a certain degree of imprecision in the description of his nature.

The theory of fuzzy sets was first introduced by Lotfi Zadeh in 1965. He noted that many objects of the real world do not have precisely defined criteria. Zadeh's theory defines fuzzy sets as classes of objects with different degrees of membership. This theory has the idea that it is not always possible to determine with complete accuracy whether an element belongs or not a set. Fuzzy logic starts from the fact that reality does not have to be only true or false, but there are intermediate degrees of uncertainty.

In this report we made a review of the theory of fuzzy sets, focusing on the concept of diffuse number and its main characteristics. Firstly, we will give a set of definitions such as linguistic variables or α-cut. A fuzzy number is defined as a function of belonging to the interval $[0, 1]$. Once we know how to define a fuzzy number we will introduce some classes of fuzzy numbers. In our case, these groups or families of fuzzy numbers are made considering its graphical representation, more specifically based on the geometric form of the fuzzy number. According to this, we can find different types of numbers:

- Crisp fuzzy numbers (it is the representation of a real number).
- Rectangular fuzzy number (intervals of real numbers).

- Triangular and trapezoidal fuzzy numbers (which are the most used in practice for their simplicity) only take four real values to define them; we will denote them by $A = (a, b, c, d)$.
- LR fuzzy numbers (this is a trapezoidal number but the lateral functions are not linear).

At this point we understand the concept of a fuzzy number and how it is represented, so we can now introduce other concepts such us the value of the fuzzy number and its ambiguity.

Fuzzy numbers were born with the idea of extending the real numbers to an environment of uncertainty. Therefore it is necessary extend the arithmetic operations with real numbers to the fuzzy sets. This is necessary because the operations between real numbers would fail, for example, it is enough to take two diffuse numbers that at one point reach the value 1, ie $A(x_0) = B(x_0) = 1$ and see that clearly $A(x_0) + B(x_0) = 2 \notin [0, 1]$ is not a fuzzy number. The Extension Principle of Zadeh or the Interval Arithmetic is used to extend the operations to fuzzy numbers. Both methods lead to the same results. The basic operations are denoted in general by $\diamond$ and they are: addition (+), subtraction (-), multiplication ($\cdot$) and division (/).

After introducing and studying some concepts associated to fuzzy numbers, we can work with the main aim of this report, that is, how we can obtain a **ranking of fuzzy numbers**. In decision analysis, diffuse quantities are often used to describe problems that arise in the real world. In this context, the ranking of fuzzy numbers will be a very important tool of the decision process.

The problem of ordering fuzzy quantities is really interesting and more than 35 classification indexes have been proposed since 1976. The ranking indexes are organized in different categories such as the method of defuzzification (the index is associated with a real number), the reference method (a fuzzy set is established as a reference) and the fuzzy relation method (a relation is made to compare pairs of numbers).

The reason why we can find several methods or indexes in the literature to establish rankings is that no method always provides the expected results for all cases, ie, there is a certain inconsistency between them. This proyect shows an example where this inconsistency occurs in some methods. Some reasonable properties have been established in order to avoid this inconsistency and to unify orders for the same set of fuzzy numbers. If these properties are fulfilled, the rationality of the proposed method would be justified. There are seven properties or axioms and some of them have important corollaries or extensions.

As a set of next steps, the majority of researchers are currently publishing their new ranking methods and comparing their results so we have described their mathematical formulation. Among these methods, for example, the *Wang centroid method* that consists of determining the centroid point of a diffuse number.That centroid point is denoted by (x_0, y_0) and we calculated an index from these values. In this case, Wang proposes to calculate the index using the formula $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Other methods that have been studied are, for example, the magnitude or distance of Chu and Tsao.

All methods studied in this report calculate an index for each diffuse number and from these indexes, they establish a ranking between them. The higher value obtained from the corresponding index produces the higher classification between the fuzzy numbers. We consider two fuzzy numbers A and B, and their indexes are I_A and I_B, respectively. If $I_A < I_B$ then $A \prec B$. It should be noted that there is a method that that calculates the index as a coefficient of variation, which makes the ordering in reverse order, that is, the lower index corresponds to the highest rank of the fuzzy numbers, ie if $I_A < I_B \Rightarrow A \succ B$.

In relation to the methods analyzed, we show a table with the axioms or properties that satisfy each of the methods that we have studied in this report.

We finish the chapter considering an example widely used by different authors in which we take several sets of fuzzy numbers. First, we make its graphical representation in order to see in a visual way what would be the ranking. Then, a table shows the indexes calculated for each diffuse number according to each method and, based on these indexes, the rankings between them are obtained for each method. Next, we discuss how some methods do not return the order that we could expect from their graphical representation.

Once the mathematical developments are finished, we works in the computer part of this project, more specifically, the development and implementation of a library in R, called *RankingFuzzyNumbers* which is divided in three parts.

- The first part is the implementation of the methods studied for the class of trapezoidal fuzzy numbers. These methods are also acceptable for fuzzy triangular numbers because they are a special cases of the trapezoidal fuzzy numbers. From the functions implemented in this part, we can obtain the index of a fuzzy number for each method.

- The second part of the library consists of a function that will perform ranking in a set of fuzzy numbers. The screen ask us to enter a set of fuzzy numbers (trapezoidal or triangular), and then we can select a method to do the ranking. The function return the value of the index for each fuzzy number entered, as well as, the ranking between all of them.

- The third and final part of this library consists in the implementation of all methods, although in that case the lateral functions are not linear, ie considering the class of LR fuzzy numbers. For the implementation of this part we have needed to use the *SymPy* library of *Python*. To use it in R, it will be called *rSymPy*. Therefore, it will be necessary to have *Python* installed on the computer in order to use the methods of the last part. Finally it is important to mention that our computers must also have installed a current version of Java.

The last section of this proyect is the application of the knowledge acquired to the field of economics. We will consider Brent crude oil prices in dollars per barrel per day, and in order to avoid the waste of information we have considered fuzzy numbers for each month. These fuzzy numbers are triangular and they are calculated with the mean of all values, and the standard deviations of the values above and below the mean. The order of prices by months as real numbers, would be based on the average of all data for each month. In our case, using the fuzzy numbers, we apply the different methods studied to obtain the indexes, and we establish rankings based on them. From these rankings, we can see that all methods, except one, provide the same classification that matches with the order of real numbers and that is the ranking of fuzzy numbers that we could consider reasonable.

It is important to highlight that the objectives that were initially marked have been fulfilled. The order of accomplishment of this memory has followed the same structure and organization that the chapters. In the begining we work the mathematical part, and we finish with the computer part.

In relation to the development of the work, once the mathematical part was advanced, the implementation of the library began, starting with the methods for the simplest fuzzy numbers, ie triangular and trapezoidal, since this class of numbers is widely used by researchers from different areas of knowledge. This part ends with the implementation of the function that allows us to establish rankings for sets of fuzzy numbers using all the method considered in this project. Then we decided to introduce a more general class of fuzzy numbers, LR fuzzy numbers, with the idea of being able to calculate rankings for more general numbers with this library.

Yo, **Miguel Sánchez Maldonado**, alumno de la titulación Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas de la **Facultad de Ciencias** y la **Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación de la Universidad de Granada**, con DNI 20078633-R, autorizo la ubicación de la siguiente copia de mi Trabajo Fin de Grado en la biblioteca del centro para que pueda ser consultada por las personas que lo deseen.

Fdo: Miguel Sánchez Maldonado

Granada a 26 de junio de 2017.

Dña. Concepción Beatriz Roldán López de Hierro , Profesora del Área de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada.

D. Antonio Francisco Roldán López de Hierro, Profesor del Área de Matemáticas del Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa de la Universidad de Granada.

Informan:

Que el presente trabajo, titulado ***Ranking de Números Difusos***, ha sido realizado bajo su supervisión por **Miguel Sánchez Maldonado (alumno)**, y autorizo la defensa de dicho trabajo ante el tribunal que corresponda.

Y para que conste, expiden y firman el presente informe en Granada a 26 de junio de 2017.

Los directores:

Concepción B. Roldán López de Hierro

Antonio F. Roldán López de Hierro

Agradecimientos

Antes de comenzar el desarrollo de esta memoria, quisiera dar las gracias a todas y cada una de las personas que me han apoyado y colaborado para llevar este proyecto a cabo.

Gracias al profesorado que me despertó y transmitió los conocimientos que hoy tengo.

Gracias a mi familia que me ha apoyado en todo momento, en especial mis padres y mi hermana. Y gracias a Concepción Beatriz y Antonio Francisco que como tutores de este proyecto me han dado su tiempo y trabajo incondicionalmente.

Y no puedo olvidar de dar las gracias a mis compañeros y amigos de LPB, especialmente Antonio y Mary que siempre han estado a mi lado cuando los he necesitado.

Capítulo 1

Introducción

La mayoría de las mediciones que realizamos cada día de los fenómenos que observamos en la realidad son imprecisas, es decir, conllevan implícitamente un cierto grado de incertidumbre acerca de los fenómenos que tratan de describir. En esta memoria, utilizaremos la teoría de conjuntos difusos para describir y manejar dicha incertidumbre.

La teoría de conjuntos difusos fue enunciada por primera vez por Lotfi A. Zadeh en 1965 (véase [44]). En su trabajo observó que, en muchos casos, las clases de objetos que se encuentran en el mundo físico real no siguen criterios definidos con total precisión. Para estudiarlos, introdujo los *conjuntos difusos* como clases de objetos con grados de pertenencia continuos. La teoría de Zadeh está basada en la idea de que no siempre es posible determinar, con total exactitud, si un elemento pertenece, o no, a un conjunto. Por ejemplo, consideremos el conjunto de individuos que caerán enfermos por neumonía durante el invierno del año próximo. Si hoy tuviéramos que determinar si una persona pertenece o no a ese conjunto, no lo podríamos hacer con total precisión, sino que tendríamos que hablar de una cierta probabilidad de que el individuo pertenezca a ese conjunto. Dicho de otra forma, puede existir una cierta incertidumbre sobre la pertenencia, o no, de una persona a ese conjunto.

Por otro lado, estamos acostumbrados a tomar decisiones sobre fenómenos que nos proporcionan una información imprecisa, no numérica. Los conjuntos difusos nos facilitan una herramienta para representar formalmente esta información. Por lo tanto, se trata de un concepto que intenta acercar la forma de razonamiento que utilizan las personas ante estos fenómenos imprecisos. Esta teoría puede ser aplicada prácticamente a cualquier campo de estudio: Sociología, Física, Biología, Finanzas, Ingeniería, etc., siempre que sea necesario manejar datos que presenten cierto grado de vaguedad o incertidumbre.

En el contexto difuso, las afirmaciones categóricas no tienen por qué ser completamente verdaderas o completamente falsas, sino que cualquier interpretación de la realidad lleva asociado un cierto grado de incertidumbre. Las técnicas difusas son las que tratarán de dar rigurosidad matemática a esa imprecisión que necesitamos en nuestro día a día. La *lógica difusa* parte del hecho de que la realidad no tiene por qué ser sólo verdadera o falsa, sino que existen grados intermedios de incertidumbre. Frases como “nos vemos luego” o “no me siento muy bien” serán expresiones difusas ya que surgen de las diferentes interpretaciones que podemos dar a las palabras “luego” o “muy bien”. Dichas palabras, dependiendo del campo en el que se usen, adquirirán distinta interpretación. Mientras que en Ingeniería hablaremos de un orden de nanosegundos, en Paleontología harían referencia a un orden de miles de años. Por tanto, será importante establecer de manera clara el contexto en el que se utilizan para poder encontrar un punto de referencia y una unidad de medida.

En este contexto, a menudo tenemos que comparar las alternativas que están representadas por distintos números difusos. Ésta es una tarea difícil ya que los números difusos involucrados pueden solaparse de muchas maneras y no es fácil establecer si uno tiene mayor valor numérico que otro. En esta memoria estudiaremos métodos de ranking que establecerán un orden entre ellos. Se trata de una herramienta que se utiliza en muchos campos de aplicación, entre los que destaca los sistemas expertos basados en conjuntos difusos. Un sistema experto reúne tradicionalmente los conocimientos de expertos humanos en un área específica. Este conocimiento está representado en forma más precisa y, por lo tanto, el sistema es más potente si permite incluir grados de certeza en las relaciones y afirmaciones que contiene que, en general, son inherentes a ese conocimiento.

En esta memoria se realiza un estudio de los distintos métodos y algoritmos que diferentes autores han ido desarrollando en los últimos años para hacer ordenaciones de números difusos. Para plasmar el funcionamiento de estos rankings de números difusos, utilizaremos el lenguaje de programación R, en el que implementaremos algunos enfoques muy conocidos que nos permitan establecer una clasificación sobre un conjunto de números difusos. Esto nos será de gran utilidad para describir, de una manera visual y dinámica, toda la formulación matemática de los distintos enfoques analizados.

Capítulo 2

Objetivos

Desde el punto de vista matemático, los objetivos que se han perseguido a lo largo del trabajo son los siguientes:

✓ Realizar una revisión de los fundamentos de la teoría de números difusos.

✓ Dar una introducción a las técnicas de ranking de números difusos.

Respecto a la parte correspondiente a la Ingeniería Informática, se marcaron los siguientes objetivos:

✓ Programar los métodos de ranking de números difusos cuya formulación matemática se desarrolló anteriormente, construyendo una librería en R Studio con funciones que permiten la ejecución automática de los métodos analizados en esta memoria.

✓ Mostrar la aplicabilidad de los distintos métodos de ranking de números difusos utilizando datos reales.

A lo largo de la presente memoria se irá describiendo el grado de consecución de los objetivos planteados.

Capítulo 3

Números Difusos

En este capítulo vamos a hacer un repaso a la teoría de conjuntos difusos, centrándonos en especial en el concepto de número difuso y en sus principales características. Concluiremos el capítulo describiendo los diferentes tipos de números difusos que podemos encontrar así como las operaciones que se realizan con éstos. Para una ampliación de los conceptos y definiciones que se incluyen en este capítulo, véase [23–25].

Los **números difusos** son conjuntos difusos que utilizaremos para hacer una representación de la incertidumbre que encontramos en un conjunto de datos numérico. Es decir, nos permitirán dotar de "precisión matemática" algunas expresiones de la vida cotidiana como "mi nota académica es casi 7". Con estos números vamos a manejar esas etiquetas lingüísticas que nos aportan imprecisión: por ejemplo, "casi", "luego", "mediano", etc. Se trata de funciones valuadas en el intervalo $[0,1]$ y existirá una forma canónica para representar cada número real como un número difuso.

3.1. Definiciones previas

Antes de comenzar con la lógica difusa revisaremos el concepto de variable lingüística. Una *variable lingüística* es una variable cuyos valores, en lugar de ser numéricos, son palabras o sentencias en lenguaje natural que nos permiten describir el estado de un objeto o de un fenómeno. Sus valores se denominan *términos o etiquetas lingüísticas,* y ayudan a caracterizar o describir fenómenos complejos de manejar en la práctica.

Ejemplo 3.1 *La temperatura puede ser considerada una variable lingüística si sus estiquetas vienen dadas, en lugar de valores núméricos, mediante las expresiones "muy frío", "frío", "templado", "caliente" o "muy caliente".*

Cabe destacar que toda variable lingüística posee una regla semántica que asocia a cada etiqueta un número difuso, es decir, los estados de cada variable son expresados mediante etiquetas linguísticas que se interpretan como números difusos.

Definición 3.1 *Una* ***variable lingüística*** *es un conjunto* $\{v, T, X, g, m\}$ *donde cada elemento representa:*

- **v** es el nombre de la variable.
- **T** es el conjunto de términos o etiquetas lingúisticas de v.
- **X** es el conjunto universo.
- **g** es una regla sintáctica para generar las etiquetas.
- **m** es una regla semántica que asigna, a cada término $t \in T$, su significado $m(t)$, el cual es un conjunto difuso sobre X.

A continuación introduciremos los números difusos de forma rigurosa así como sus principales características. En lo que sigue, denotaremos por I al intervalo compacto real $I = [0, 1]$.

Definición 3.2 *Sea* χ *un conjunto no vacío. Llamaremos* ***conjunto difuso sobre*** χ *a toda función* $A : \chi \longrightarrow I$.

De esta forma, $A(x)$, con $x \in \chi$, representa el grado de certidumbre de que el elemento x pertenezca a A. Además, si $A(x) = 0$ sabemos que x no pertenece a A. En caso contrario, si $A(x) = 1$, estamos seguros de su pertenencia.

Definición 3.3 *Dado* $\alpha \in (0, 1]$*, llamaremos* ***α-corte de*** A *(o* conjunto de nivel α *de* A*) al conjunto*

$$A_{[\alpha]} = \{\ x \in \mathbb{R} : A(x) \geq \alpha\ \}.$$

El *núcleo* de un número difuso A es $\ker A = A_{[1]}$ y su *soporte* es la clausura (en la topología usual de $\mathbb{R}$) del conjunto de números reales en los que A toma valores estrictamente positivos, es decir,

$$\operatorname{sop} A = \{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$$

En este memoria nos centraremos en números difusos cuyo soporte sea un conjunto acotado en $\mathbb{R}$, es decir, tendrán soporte compacto que será denotado por $A_{[0]}$. También denotaremos por $\mathbf{FOM} = \text{mín} \ker(\mathbf{A})$ al elemento más pequeño del núcleo (el mínimo del núcleo) y como $\mathbf{LOM}(\mathbf{A}) = \text{máx} \ker(\mathbf{A})$ (el máximo del núcleo).

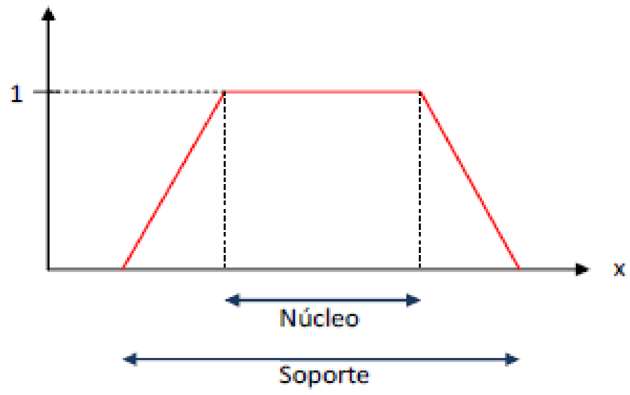


Figura 3.1: Núcleo y soporte

Definición 3.4 *Un número difuso sobre* $\mathbb{R}$ *es cualquier conjunto difuso* $A : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *que verifica:*

- ***Normalidad:*** *existe un punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $A(x) = 1$.
- *Cada* α*-corte de* A *es un subintervalo cerrado de* $\mathbb{R}$.

Denotaremos por E *a conjunto formado por todos los números difusos sobre* $\mathbb{R}$.

Es sencillo dotar al conjunto E de un orden parcial a través de la relación *punto a punto*. De esta forma, escribiremos $A \preccurlyeq B$ cuando $A(x) \leq B(x)$ para cada número real $x \in \mathbb{R}$. Aunque la relación binaria $\preccurlyeq$ es un orden parcial en E, como veremos, no es acorde con la intuición humana.

3.2. Algunas clases de números difusos

En la práctica, la familia formada por todos los números difusos es muy amplia. De esta forma, es usual considerar diferentes clases de números difusos que son capaces de modelizar distintos fenómenos observados. A continuación, describimos algunas de estas subfamilias cuya clasificación está basada en la representación gráfica del número difuso y, más concretamente, en su forma geométrica.

3.2.1. Números difusos crisp

Generalmente nos sirven para representar un número real $r \in \mathbb{R}$ como un número difuso. Dado $r \in \mathbb{R}$, se define el número difuso crisp $\bar{r}$ como la función $\bar{r} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ que viene dada de la siguiente forma:

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x = r, \\ \\ 0. & \text{si} \quad x \neq r. \end{cases}$$

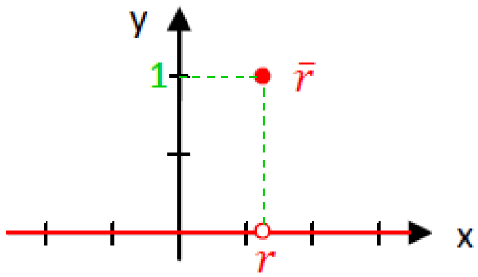


Figura 3.2: Número difuso crisp

3.2.2. Números difusos rectangulares

Definición 3.5 *Diremos que un número difuso A es* ***rectangular*** *si se puede expresar de la forma*

$$A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in [a, b], \\ \\ 0, & si \quad x \notin [a, b], \end{cases}$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$ dos números reales tales que $a \leq b$. En el caso de que $a = b$, el número rectangular es un número difuso crisp, ya que su gráfica sería un rectángulo degenerado[1]*.*

[1]Es un caso donde la clase de un objeto cambia a un objeto generalmente más simple. Los casos degenerados son limitación, significando que el objeto original no se puede cambiar más lejos.

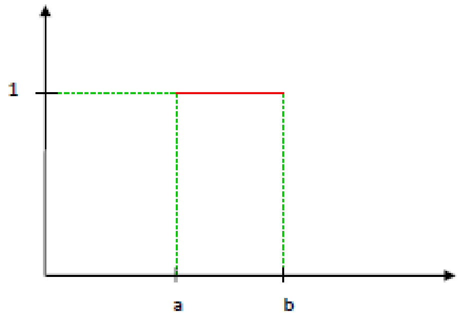


Figura 3.3: Número difuso rectangular

3.2.3. Números difusos triangulares

Definición 3.6 *Dados tres números reales $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b \leq c$, denotaremos por $A = (a, b, c)$ al número difuso* ***triangular*** *dado por:*

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & si \quad x \in [a,b], \\[2ex] \dfrac{c-x}{c-b}, & si \quad x \in [b,c], \\[2ex] 1, & si \quad x = b, \\[2ex] 0, & si \quad x \notin [a,c]. \end{cases}$$

Si $a < b < c$, la gráfica del número difuso (a, b, c) es un triángulo de base $[a, c]$ y vértice en $x = b$. Por ello, esta clase de números difusos es la más utilizada en la práctica: es muy sencilla tanto de manejar como de interpretar.

Proposición 3.1 *Si $\alpha \in [0, 1]$, el α-corte del número difuso triangular $A = (a, b, c)$ es:*

$$A_{[\alpha]} = [\ (1-\alpha)a + \alpha b,\ \ (1-\alpha)c + \alpha b\ ].$$

En el caso convreto de que $\alpha = 0$, obtenemos el intervalo $[a, c] = \text{sop}\, A$, y si $\alpha = 1$, encontramos el vértice $\{b\} = \ker A$. Además, si $b = \frac{a+c}{2}$, diremos que el número difuso triangular es simétrico.

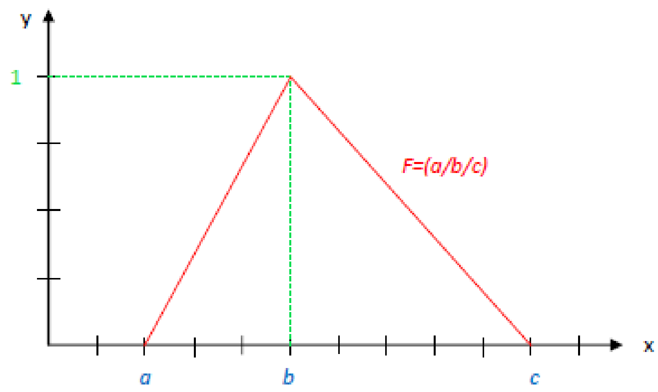


Figura 3.4: Número difuso triangular

3.2.4. Números difusos trapezoidales

Definición 3.7 *Dados cuatro números reales $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b \leq c \leq d$, denotaremos por $A = (a, b, c, d)$ al número difuso **trapezoidal** definido como sigue:*

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & si\ x \in [a,b], \\ \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & si\ x \in [c,d], \\ \\ 1, & si\ x \in [b,c], \\ \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

Los números reales a, b, c y d se denominan las *esquinas* del número difuso (a, b, c, d). Si $a < b < c < d$, la gráfica del número difuso (a, b, c, d) es un trapecio de base mayor $[a, d]$ y base menor $[b, c]$.

Proposición 3.2 *Si $\alpha \in [0, 1]$, el α-corte del número difuso trapezoidal $A = (a, b, c, d)$ es:*

$$A_{[\alpha]} = [\ (1-\alpha)a + \alpha b,\ (1-\alpha)d + \alpha c\ ].$$

Si $\alpha = 0$, obtenemos el intervalo $[a, d] = \operatorname{sop} A$, mientras que si $\alpha = 1$, encontramos el intervalo $[b, c] = \ker A$. Los números difusos crisp, rectangulares y triangulares pueden verse como casos particulares de los números difusos trapezoidales.

Caso 3.1 $a = b = c = d \ \rightarrow$ *número difuso* crisp.

Caso 3.2 $a = b < c = d \;\rightarrow\;$ *número difuso rectangular.*

Caso 3.3 $a < b = c < d \;\rightarrow\;$ *número difuso triangular.*

Los números difusos trapezoidales se usan cuando tenemos la certeza de que una medida toma valores en $[b, c]$. De esta forma, asumimos que puede haber error en la medición, pero el valor real debe estar necesariamente comprendido en $[a, d] \supseteq [b, c]$.

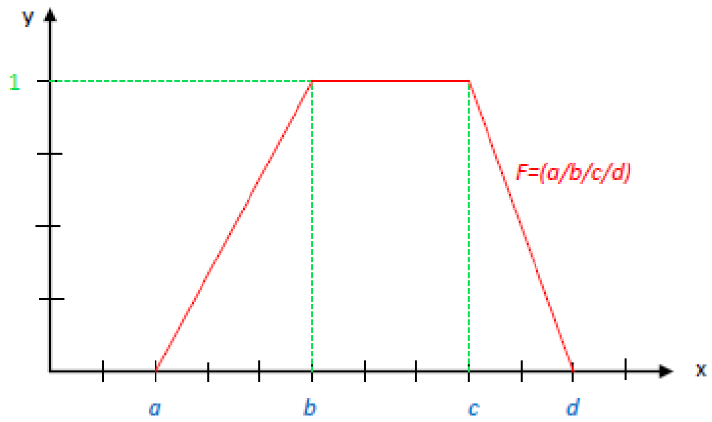


Figura 3.5: Número difuso trapezoidal

3.2.5. Números difusos de tipo LR

Los números difusos de tipo LR se obtienen al considerar funciones más generales que las lineales en los lados del trapecio.

Definición 3.8 *Dados cuatro números reales* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tales que* $a \leq b \leq c \leq d$*, sean* $L : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ *y* $R : [c, d] \rightarrow [0, 1]$ *funciones continuas tales que* L *es estrictamente creciente,* R *es estrictamente decreciente,* $L(a) = 0 = R(d)$ *y* $L(b) = 1 = R(c)$*. Un número difuso de tipo* LR *viene definido por la siguiente función:*

$$A(x) = \begin{cases} L(x), & si \quad x \in [a, b], \\ R(x), & si \quad x \in [c, d], \\ 1, & si \quad x \in [b, c], \\ 0, & si \quad x \notin [a, d]. \end{cases}$$

Se trata de una forma más general que las anteriores para representar un número difuso ya que, a partir de esta definición, podemos construir cualquiera de los conceptos anteriores. Por ejemplo, si las funciones L y R son lineales, tendremos un número trapezoidal, y ya observamos anteriormente que a partir de un trapezoidal se obtienen las otras tres clases.

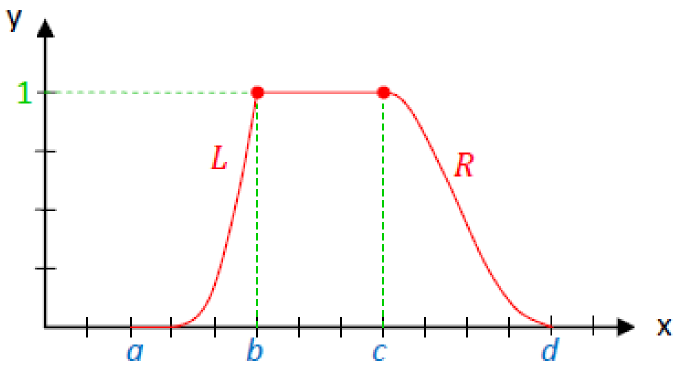


Figura 3.6: Número difuso tipo LR

Algunos métodos de ranking consideran que la condición de normalidad del número difuso no se verifica necesariamente. En este caso, una definición de número difuso de tipo LR, aúnmás general que la anterior, sería la siguiente:

$$A(x) = \begin{cases} L_A(x), & \text{si} \quad x \in [a,b], \\ R_A(x), & \text{si} \quad x \in [c,d], \\ \omega, & \text{si} \quad x \in [b,c], \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [a,d], \end{cases}$$

donde $0 < \omega \leq 1$ es una constante, $L_A : [a,b] \to [0,\omega]$ es una función continua monótona creciente, $R_A : [c,d] \to [0,\omega]$ es una función continua monónota decreciente, y también se cumple que $L_A(a) = 0 = R_A(d)$ y $L_A(b) = \omega = R_A(c)$. Denotaremos al número difuso trapezoidal mediante $A = (a,b,c,d,\omega)$.

Como L y R son funciones continuas y monótonas, sus inversas existen y son continuas y estrictamente monótonas. Por tanto denotamos $L^{-1} : [0,\omega] \to [a,b]$ y $R^{-1} : [0,\omega] \to [c,d]$ como las funciones inversas de L y R, respectivamente. Además L^{-1} y R^{-1} son integrables en $[0,\omega]$, por lo que existirán las integrales

$$\int_0^\omega L^{-1}(r)dr \qquad \text{y} \qquad \int_0^\omega R^{-1}(r)dr.$$

Las inversas, en el caso de números trapezoidales, se pueden expresar de forma analítica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L^{-1}(r) &= a + \frac{(b-a)r}{\omega}, \qquad 0 < \omega \leq 1, \\ R^{-1}(r) &= d - \frac{(d-c)r}{\omega}, \qquad 0 < \omega \leq 1. \end{aligned}$$

Definición 3.9 *Una función $f : [0,1] \to [0,1]$ se dice una **función reductora** si f es creciente, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Además, f es una **función regular** si $\int_0^1 f(r)dr = \frac{1}{2}$.*

Definición 3.10 *Si A es un número difuso con representación en forma de r-cortes $[L_A^{-1}(r)$,$R_A^{-1}(r)]$ y s es una función reductora, entonces el* valor *de A (con respecto a s) es el número real:*

$$Val(A) = \int_0^1 f(r)[L_A^{-1}(r) + R_A^{-1}(r)]dr.$$

Definición 3.11 *Si A es un número difuso con representación en forma de r-cortes $\left[L_A^{-1}(r), R_A^{-1}(r)\right]$ y s es una función reductora, entonces la* ambigüedad *de A (con respecto a s) es el número real:*

$$Amb(A) = \int_0^1 f(r)\left(R_A^{-1}(r) - L_A^{-1}(r)\right)dr.$$

El *intervalo esperado* de un número difuso A, que denotaremos por $EI(A)$, es el intervalo

$$EI(A) = \left[\ \int_0^1 L_A^{-1}(r)dr,\ \int_0^1 R_A^{-1}(r)dr\ \right].$$

Otro parámetro para representar el valor de un número difuso es usar la media del intervalo anterior. Este parámetro se denomina valor esperado de un número difuso A, $EV(A)$, y se calcula mediante la expresión:

$$EV(A) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 L_A^{-1}(r)dr + \int_0^1 R_A^{-1}(r)dr\right).$$

Definición 3.12 *Dados dos números difusos $A = \left[L_A^{-1}(r), R_A^{-1}(r)\right]$ y $B = \left[L_B^{-1}(r), R_B^{-1}(r)\right]$, la **distancia** entre A y B se define como:*

$$D(A,B) = \left[\int_0^1 \left(L_A^{-1}(r) - L_B^{-1}(r)\right)^2 dr + \int_0^1 \left(R_A^{-1}(r) - R_B^{-1}(r)\right)^2 dr\right]^{\frac{1}{2}}.$$

La función $D(A,B)$ es una métrica en E y (E,D) es un espacio métrico completo.

3.3. Operaciones con números difusos

Como ya hemos comentado anteriormente, los números difusos nacen a partir de la idea de extender los números reales a un ambiente de incertidumbre. Por tanto, como extensiones de números reales, también es necesario extender las operaciones aritméticas básicas a este conjunto. Como los números difusos son funciones, podríamos pensar que las operaciones usuales entre funciones podrían resolver este problema. Sin embargo, no es así. Si A y B son dos números difusos tales que $A(x_0) = B(x_0) = 1$ para cierto valor x_0, entonces $A(x_0) + B(x_0) = 2$, lo que significa que la función suma $A + B$ no es un número difuso.

En esta sección presentamos las operaciones con números difusos a través de la **aritmética intervalar** y a través del **principio de extensión de Zadeh**. De ambas formas se llega al mismo resultado.

3.3.1. Aritmética intervalar

Denotemos por $\diamond$ a una operación aritmética básica entre números reales (suma $+$, resta $-$, multiplicación $\cdot$, división $/$). Sea $\mathcal{I}$ la familia de intervalos reales, no vacíos y compactos. Dados $[a,b]\,,[d,e] \in \mathcal{I}$, se define:

$$[a,b] \diamond [d,e] = \{\ s \diamond t : a \leq s \leq b,\ \ d \leq t \leq e\}.$$

Puede demostrarse que $[a,b] \diamond [d,e]$ es otro intervalo de $\mathcal{I}$. Además:

- $[a,b] + [d,e] = [a+d, b+e]$.
- $[a,b] - [d,e] = [a-d, b-e]$.
- Si $\Pi = \{ad, ae, bd, be\}$, entonces $[a,b] \cdot [d,e] = [\ \text{mín}\,\Pi,\ \ \text{máx}\,\Pi\ ]$.
- Si $\Lambda = \{\frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e}\}$, entonces $[a,b]\,/[d,e] = [\ \text{mín}\,\Lambda,\ \ \text{máx}\,\Lambda\ ]$ siempre que $0 \notin [d,e]$.

3.3.2. Principio de extensión de Zadeh

Desde el punto de vista de Zadeh, podemos realizar la siguiente definición.

Definición 3.13 *Si $\diamond$ es una operación aritmética básica, entonces dados dos números difusos A y B se define $A \diamond B$ mediante:*

$$(A \diamond B)(x) = \sup(\textit{mín}\ \{(A(s), B(t)\} : s \diamond t = x) \qquad \textit{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

De esta forma, puede probarse que $A \diamond B$ es otro número difuso. No obstante, la división $\frac{A}{B}$ sólo puede considerarse si $0 \notin \operatorname{sop} B$. Como casos concretos, tenemos las siguientes definiciones:

$$(A + B)(x) = \sup_{x=s+t} \ \text{mín}[A(s), B(t)]$$

$$(A - B)(x) = \sup_{x=s-t} \ \text{mín}[A(s), B(t)]$$

$$(A \cdot B)(x) = \sup_{x=s \cdot t} \ \text{mín}[A(s), B(t)]$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)(x) = \sup_{x=\frac{s}{t}} \ \text{mín}[A(s), B(t)]$$

Proposición 3.3 *Si A y B son números difusos continuos (como funciones), entonces el número difuso $A \diamond B$ también es continuo.*

Capítulo 4

Ranking

En la toma de decisiones, frecuentemente se utilizan cantidades difusas para describir las mediciones que surgen en el mundo real. En este contexto, el **ranking** (o elección de alternativas, o clasificación de números difusos) es una herramienta esencial del proceso de decisión. A diferencia de los números reales, las cantidades difusas no están ordenadas de manera natural de una forma coherente con la intuición humana. Esta cuestión ha sido, y sigue siendo, motivo de interés para muchos investigadores a lo largo de los últimos años.

Esta situación ha llevado a un gran aumento en la investigación en distintos campos como el de la neuroingeniería, con el objetivo de sintetizar la lógica difusa con redes neuronales computacionales. Estas dos tecnologías se complementan; las redes neuronales proporcionan la base metodológica necesaria para acomodar e interpretar grandes cantidades de datos recogidas de sensores, y la lógica difusa proporciona un marco estructural que utiliza y explora estos resultados de bajo nivel. Sabemos que una red neuronal tiene capacidad para representar funciones, y la base de cada modelo difuso es la función de pertenencia, por lo que la aplicación natural de redes neuronales en modelos difusos ha surgido para proporcionar buenas aproximaciones a las funciones de pertenencia, las cuales son esenciales para un enfoque difuso. Los métodos de clasificación difusa pueden considerarse una herramienta de gran utilidad en la red neuronal.

El problema de ordenación de cantidades difusas es un problema de gran interés que ha sido considerado por muchos investigadores. Más de 35 índices de clasificación difusa se han propuesto desde 1976. En 1976 y 1977, Jain [28, 29] propuso un método utilizando el concepto de conjunto de maximización para ordenar los números difusos que hace que el tomador de decisiones considere solamente la función de pertenencia del lado derecho. En 1977, Bass y Kwakernaak [11] sugirieron una forma canónica de extender el ordenamiento natural de los números reales a los números difusos.

Dubios y Prade [23] en 1978, usaron conjuntos de maximización para ordenar números difusos. En 1979, Baldwin y Guild [10] indicaron que los dos métodos anteriores tienen algunas desventajas. Además, en 1980, Adamo [8] utilizó el concepto de $\alpha-$nivel para introducir una regla de preferencia. En 1981, Chang [14] introdujo el concepto de la función de preferencia de una alternativa, y en ese mismo año Yager [41, 42] propuso cuatro índices que pueden ser empleados con el fin de ordenar las cantidades difusas en $[0, 1]$. Bortolan y Degani [13] realizaron una revisión de algunos de estos métodos de clasificación propuestos hasta 1985. Chen y Hwang [17] también revisaron minuciosamente los enfoques existentes y señalaron algunas relaciones ilógicas que surgen entre los números difusos que se pretenden clasificar. Chen [15], Choobineh [20] y Cheng [19] presentaron algunos métodos de ordenación y, más recientemente, numerosas técnicas de clasificación han sido propuestas e investigadas por Wang [37], Abbasbandy y Hajjari [6], y Asady [7].

Dado que los números difusos no mantienen un orden lineal natural, una técnica comúnmente utilizada consiste en construir una función apropiada que transforme los números difusos en números reales y que se conoce como defusificación. En este caso, las comparaciones entre números difusos se basan en las comparaciones entre los números reales correspondientes. En este sentido, en este tipo de enfoque (véase, entre otros, por ejemplo, Abbasbandy y Asady [3], Abbasbandy y Hajjari [5, 6], Asady [7], Chen y Chen, [16], Wang [37]), basándose en una medición del área que encierra el número difuso o en una distancia real respecto a un origen o entre los números difusos, a cada número difuso se le asigna un número real y la ordenación de estos números reales es la que lleva a un ranking de números difusos.

Algunos autores consideran que el enfoque tendrá algunos defectos si sólo un número real está asociado con cada número difuso. Freeling [26] señaló *"al reducir el conjunto de nuestro análisis a un sólo número, estamos perdiendo gran parte de la información que hemos mantenido a lo largo de los cálculos"*. Además, algunos de estos métodos dan resultados contra-intuitivos y no discriminantes [1–4, 13, 18, 34, 40].

Hoy en día, distintos investigadores siguen desarrollando nuevos enfoques para comparar y clasificar los números difusos. Se trata de un tema que ha generado un profundo debate entre los investigadores en este campo ya que las metodologías propuestas por unos autores suelen estar en desacuerdo con otras. Por ello, puede decirse que no hay ningún método comúnmente aceptado.

En este capítulo vamos a revisar algunos de los métodos más conocidos de ranking de números difusos. Empezaremos describiendo una técnica comúnmente utilizada que se conoce como enfoque basado en el *centroide*. Cheng [19] propuso un método de clasificación utilizando índices centroides, donde la distancia del punto centroide de cada número difuso y al punto original se calcula para mejorar el enfoque de Yager [42]. A continuación describiremos el método basado en la distancia de Abbasbandy y Asady [3]. Estos autores consideraron un origen difuso para los números difusos y utilizando la distancia de los números difusos con respecto a este origen, los clasifican. El método del índice basado en el coeficiente de variación parte de la metodología propuesta en Lee y Li [31] quienes propusieron, para la comparación de los números difusos, utilizar los valores de la media y la desviación típica basados en las distribuciones de probabilidad uniforme y proporcional. A partir de estos valores, Cheng [19] definió el índice del coeficiente de variación (CV), es decir, el cociente entre σ (desviación típica) y $|\mu|$ (media), siendo $\sigma > 0$, para mejorar el enfoque de clasificación de Lee y Li. Sin embargo, el índice de distancia, por lo general, contradice el índice CV introducido por Cheng en la clasificación de los números difusos. Para superar estas limitaciones, Chu y Tsao [21] propusieron un enfoque para clasificar números difusos basado en el área entre el centroide y los puntos originales. Además, Wang [39] demostró que las fórmulas de centroides para clasificar los números difusos proporcionados por Cheng (1998) son incorrectas y conducen a algunas aplicaciones erróneas en Chu y Tsao (2002). En dicho trabajo se corrigen las fórmulas de centroides para clasificar los números difusos que se justificaban desde el punto de vista de la geometría analítica. Después, Wang y Lee [38] hicieron una revisión en la clasificación de números difusos utilizando el área entre el centroide y los puntos originales para mejorar el enfoque de Chu y Tsao [21].

Algunos de los ejemplos propuestos en estos trabajos siguen siendo muy utilizados para mostrar el uso de los nuevos enfoques. Los resultados de la aplicación de estos métodos se mostrarán utilizando uno de ellos: en concreto nos basaremos en el ejemplo numérico propuesto por Yao y Wu [40] que considera cuatro conjuntos distintos de números difusos.

4.1. Inconsistencia de las órdenes de clasificación entre diferentes enfoques

Veamos un ejemplo claro de interpretación polémica entre los resultados obtenidos por diferentes metodologías.

Ejemplo 4.1 *Consideremos los números difusos* $A = (0.3, 0.4, 0.7, 0.9)$*,* $B = (0.3, 0.7, 0.9)$ *y* $C = (0.5, 0.7, 0.9)$*. Éstos toman los mismos valores a la derecha, y sólo se diferencian por sus valores en la parte izquierda de sus representaciones gráficas (véase la Figura 4.1).*

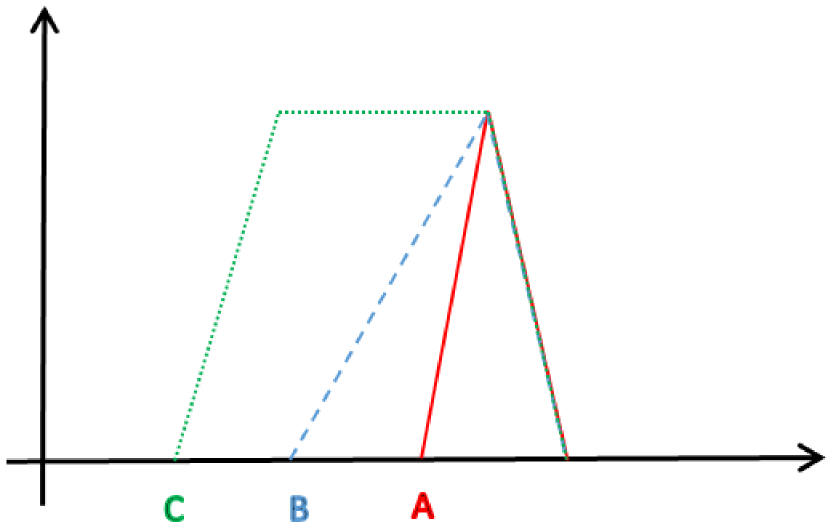


Figura 4.1: Un ejemplo de inconsistencia de ranking.

Si usamos el principio de extensión, obtenemos

$$\text{máx}(A, B) = A \quad y \quad \text{mín}(A, B) = B.$$

Claramente $A \neq B$ y por el principio de extensión, A debe tener una clasificación más alta que B, de la misma manera B tiene una clasificación más alta que C.

Muchos enfoques de ordenación como los índices de Yager [41, 42] o el índice de Chen [15] obtienen estos órdenes de clasificación en $\{A, B, C\}$. Esto también está de acuerdo con la intuición de Baldwin [10] aunque su método lleva a la conclusión de que A tiene una clasificación más alta pero B y C tienen una misma clasificación.

Sin embargo Chang [14] argumentó que C es intuitivamente preferible a B mientras que la aplicación de Bass y Kwakernaak [11], Jain [28, 29] y Adamo [8] lleva a la misma clasificación para los tres números difusos.

*En relación a la intuición de Chen [15] que indica que A debería de tener un ranking mayor que B, Saade y Schwarlander [35] argumentan que el orden de clasificación de A y B debería depender de la actitud subjetiva de la persona que toma la decisión (*decision maker, DM*) y, además, añaden que para un DM optimista A y B tendrían el mismo rango.*

Como podemos observar sobre los números difusos de este ejemplo, existen muchos argumentos, y algunos órdenes de clasificación son conflictivos. En general, si un investigador intenta establecer un nuevo procedimiento de ordenación, el criterio de intuición es muy usado y para su análisis se toman distintos ejemplos numéricos ya utilizados anteriormente en los que el nuevo método se analiza para ver si da lugar a clasificaciones razonables teniendo en cuenta la intuición y ciertas propiedades que analizamos a continuación.

4.2. Propiedades razonables de un ranking

Además de la intuición, cuando se propone un nuevo método de ranking, es necesario analizar las posibles propiedades razonables que dicho orden de ranking verificaría, para determinar la racionalidad de un procedimiento de ranking.

Wang y Kerre [36] presentaron las siguientes propiedades que de forma razonable ha de verificar un método de ordenación de cantidades difusas.

Sea M un método de ordenación o ranking, E el conjunto de todos los números difusos con adición y multiplicación donde podemos aplicar M y Ω un subconjunto de E.

La afirmación de que dos elementos A y B de Ω que verifican A tiene una clasificación más alta que B (A ocupa una posición más alta en el ranking que B) cuando se aplica M se escribirá como $A \succ B$ por M. Las notaciones $A \sim B$ por M y $A \succeq B$ por M se interpretan de manera similar.

Además, vamos a asumir que se verifican las siguientes condiciones:

1. Cuando investigamos un método, los números difusos cumplen las condiciones para la aplicación del método de clasificación.

2. Cuando aplicamos un método de clasificación o ranking en el conjunto E, una de las siguientes afirmaciones es verdadera para cada $(A, B) \in E^2$:
$$A \succ B, \quad A \sim B, \quad B \succ A.$$

A continuación se presentan una serie de axiomas que serán las propiedades razonables para ordenar cantidades difusas a partir de un método de clasificación M.

A1 Para cada subconjunto Ω de E y $A \in \Omega$, $A \succeq A$ por M en Ω.

A2 Para cada subconjunto Ω de E y $(A, B) \in \Omega^2$, con $A \succeq B$ y $B \succeq A$ por M en Ω, entonces tenemos $A \sim B$ por M en Ω.

A3 Para cada subconjunto Ω de E y $(A, B, C) \in \Omega^3$, con $A \succeq B$ y $B \succeq C$ por M en Ω, entonces tenemos $A \succeq C$ por M en Ω.

A4 Para cada subconjunto Ω de E y $(A, B) \in \Omega^2$, con $\inf \operatorname{sop}(A) > \sup \operatorname{sop}(B)$, tenemos que $A \succeq B$ por M en Ω.

Este axioma significa que si dos números difusos tienen soportes separados, entonces el número difuso con soporte a la derecha es al menos tan bueno como el de soporte a la izquierda. La versión fuerte del axioma anterior sería:

A4' *Para cada subconjunto* Ω *de* E *y* $(A,B) \in \Omega^2$, *con* $\inf \operatorname{sop}(A) > \sup \operatorname{sop}(B)$, *tenemos que* $A \succ B$ *por* M *en* Ω.

Esta versión además de ser más fuerte nos dice que si M satisface esta versión y M puede clasificar números reales, entonces $\forall(a,b) \neq 0 \in \mathbb{R}^2, a < b \Rightarrow \{\frac{1}{b}\} \succ \{\frac{1}{a}\}$ por M, es decir, es una extensión del orden natural de los números reales

A5 Sean E_1 y E_2 dos conjuntos arbitrarios de números difusos en los que M puede ser aplicado y $A, B \in E_1 \cap E_2$, entonces $A \succ B$ *por* M *en* E_2 si, y sólo si, $A \succ B$ *por* M *en* E_1.

A6 Sean $A, B, A+C$ y $B+C$ elementos de E. Si $A \succeq B$ por M en $\{A,B\}$, entonces $A+C \succeq B+C$ por M en $\{A+C, B+C\}$.

Este axioma nos indica que '+' es compatible con $\succeq$ definido por el método M. Otro axioma similar sería el siguiente:

A6' *Si* $A \succ B$ *por* M *en* $\{A,B\}$, *entonces* $A+C \succ B+C$ *por* M *en* $\{A+C, B+C\}$ *cuando* $C \neq \emptyset$.

Si $A \sim B$ en $\{A,B\} \Rightarrow A+C \sim B+C$ en $\{A+C, B+C\}$.

Demostración 4.1 $A \sim B$ *en* $\{A,B\} \Rightarrow A \succeq B$ *y* $B \succeq A$. *Usamos* $A \succeq B$ *y tenemos* $A+C \succeq B+C$, *hacemos lo mismo para* $B \succeq A$ *y tenemos* $B+C \succeq A+C$, *Por tanto* $A+C \sim B+C$ *por* M *en* $\{A+C, B+C\}$

A7 Sean A, B, AC y BC elementos de E y $C \geq 0$. Si $A \succeq B$ por M en $\{A,B\} \Rightarrow AC \succeq BC$ por M en $\{AC, BC\}$.

4.3. Organización de los métodos de ordenación

Los índices de ranking están organizados en tres categorías :

- **Método de defusificación**: Cada índice se asocia con un número real. En este caso los número difusos se comparan de acuerdo con el orden usual de los números reales.

- **Método de referencia**: Se establece un conjunto difuso como conjunto de referencia y se comparan todas las cantidades difusas a clasificar con este conjunto de referencia.

- **Método de relación difusa:** En este caso se construirá una relación para hacer comparaciones de pares de números difusos.

4.4. Métodos de Ranking

En esta sección vamos a describir la formulación matemática de distintos métodos de clasificación clásicos con los que la mayoría o muchos de los investigadores que publican actualmente sus nuevos métodos de ranking comparan sus resultados.

4.4.1. Método del punto central

El objetivo de este método es determinar los puntos del centroide (x_0, y_0) de un número difuso $A = (a, b, c, d, \omega)$. Este método fue introducido por Cheng [19] en 1998 aunque Wang y otros [38] fueron los que encontraron una fórmula desde el punto de vista de la geometría analítica y determinaron los puntos del centroide como sigue:

$$x_0 = \frac{\int_a^b xL_A(x)dx + \int_b^c xdx + \int_c^d xR_A(x)dx}{\int_a^b L_A(x)dx + \int_b^c dx + \int_c^d R_A(x)dx}, \tag{C1}$$

$$y_0 = \frac{\int_0^\omega yR_A^{-1}(y)dy - \int_0^\omega yL_A^{-1}(y)dy}{\int_0^\omega R_A^{-1}(y)dy - \int_0^\omega L_A^{-1}(y)dy}.$$

En el caso del número difuso trapezoidal, donde L y R son las funciones lineales,

$$L(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{y} \quad R(x) = \frac{d-x}{d-c},$$

el método del centroide nos lleva a los siguientes resultados:

$$x_0 = \frac{1}{3}\left[a + b + c + d - \frac{dc - ab}{(d+c) - (a+b)}\right],$$

$$y_0 = \frac{\omega}{3}\left[1 + \frac{c-b}{(d+c) - (a+b)}\right]$$

Además como los números difusos triangulares son casos especiales de los trapezoidales donde $b = c$, las fórmulas pueden simplificarse para este caso:

$$x_0 = \frac{1}{3}[\ a + b + d\ ],$$

$$y_0 = \frac{\omega}{3}.$$

En este caso, los números difusos triangulares pueden ser clasificados en términos de sus coordenadas centroides en el eje horizontal o abscisas. Cheng [19] definió su idea como sigue

$$R(A) = \sqrt{x_0(A)^2 + y_0(A)^2}.$$

Unos años más tarde Chu y Tsao [21] mejoraron el inconveniente de la distancia anterior, calculando el área entre el centroide y los puntos originales y por tanto clasificaban los números difusos a partir de

$$S(A) = x_0(A) \cdot y_0(A) \tag{S(A)}$$

Finalmente Abbasbandy y Hajjari [6] mejoraron la distancia del centroide de Cheng obteniendo:

$$IR(A) = \gamma(A)\sqrt{x_0(A)^2 + y_0(A)^2}$$

donde

$$\gamma(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } \int_0^1 \left(L_A^{-1}(r) + R_A^{-1}(r)\right) dr > 0, \\ 0, & \text{si } \int_0^1 \left(L_A^{-1}(r) + R_A^{-1}(r)\right) dr = 0, \\ -1, & \text{si } \int_0^1 \left(L_A^{-1}(r) + R_A^{-1}(r)\right) dr < 0. \end{cases}$$

Hay que añadir que Wang y Lee [38] establecieron un ranking a partir del centroide basándose en si los respectivos valores de x_0 eran diferentes. Además para el caso que los x_0 sean iguales, compararon sus valores de y_0 para formular el ranking. De modo que si $x_0(A) = x_0(B)$ e $y_0(A) \geq y_0(B)$, entonces $A \geq B$.

4.4.2. Método de la distancia de signo

Consideremos el número difuso A, definido por sus r-cortes $A = \left[L_A^{-1}(r), R_A^{-1}(r)\right]$ y el número difuso crisp $\bar{0}$. Fijado $p > 0$, la función

$$D_p(A, \bar{0}) = \left(\int_0^1 \left(|L_A^{-1}(x)|^p + |R_A^{-1}(x)|^p\right) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

es la distancia de A al origen.

Definición 4.1 *Sea* $\gamma(A) : E \longrightarrow \{-1, 1\}$ *la función definida como*

$$\gamma(A) = \begin{cases} 1 & si \;\; \int_0^1 (L_A^{-1}(r) + R_A^{-1}(r))dr > 0 \\ \\ -1 & si \;\; \int_0^1 (L_A^{-1}(r) + R_A^{-1}(r))dr < 0 \end{cases}$$
$$= \text{signo}\left(\int_0^1 (L_A^{-1}(r) + R_A^{-1}(r))dr \right).$$

Algunas propiedades de la definición anterior son las siguientes.

1. Si $\text{sop}(A) \geq 0$ o $\text{ínf}\, L_A^{-1}(r) \geq 0$, entonces $\gamma(A) = 1$.
2. Si $\text{sop}(A) < 0$ o $\sup R_A^{-1}(r) < 0$, entonces $\gamma(A) = -1$.

Definición 4.2 *Sea A un número difuso. Llamaremos distancia de signo [3] de A al valor:*

$$d_p(A, \bar{0}) = \gamma(A) D_p(A, \bar{0}).$$

Utilizando el número anterior como un índice asociado a cada número difuso, podemos establecer la siguiente metodología para ordenar números difusos:

- $A \succ B$ si $d_p\,(A, \bar{0}) > d_p\,(B, \bar{0})$;
- $A \prec B$ si $d_p\,(A, \bar{0}) < d_p\,(B, \bar{0})$;
- $A \sim B$ si $d_p\,(A, \bar{0}) = d_p\,(B, \bar{0})$.

4.4.3. Método de la magnitud

Para un número difuso A definido por sus r-cortes $A = \left[L_A^{-1}(r), R_A^{-1}(r)\right]$ definimos la *magnitud* [5] de dicho número difuso como:

$$Mag(A) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (L_A^{-1}(r) + R_A^{-1}(r) + b + c) f(r) dr \right),$$

donde la función $f(r)$ es no negativa y creciente en $[0, 1]$ con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $\int_0^1 f(r)dr = \frac{1}{2}$. Esta función actúa como una función ponderadora. La función $f(r)$ debe ser elegida de acuerdo con la situación real que estamos evaluando. Nosotros usaremos la función $f(r) = r$. El valor escalar de la magnitud resultante se utiliza para clasificar los números difusos. El que tenga mayor magnitud será el número difuso mayor, por lo que para cualesquiera dos números difusos A y B, la clasificación que podemos establecer es la siguiente:

- $A \succ B$ si $Mag(A) \succ Mag(B)$;
- $A \prec B$ si $Mag(A) \prec Mag(B)$;
- $A \sim B$ si $Mag(A) = Mag(B)$.

Observación 4.1 *Si* $\text{ínf}\,\text{sop}(A) \geq 0$ *o* $\text{ínf}\, L_A^{-1}(r) \geq 0$, *entonces* $Mag(A) \geq 0$.

Observación 4.2 *Se verifican las siguientes propiedades:*

- *Si* $\sup A \sim B\ si(A) < 0$ *o* $\sup R_A^{-1}(r) < 0$, *entonces* $Mag(A) < 0$.
- *Para dos números difusos* A *y* B *se verifica* $Mag(A+B) = Mag(A) + Mag(B)$.
- *Si* A *es un número difuso trapezoidal simétrico, entonces* $Mag(A) = 0$.
- *Para dos números difusos trapezoidales simétricos* $Mag(A) = Mag(B)$.

Si consideramos un número difuso trapezoidal $A = (a, b, c, d, \omega)$ expresado mediante su representación por r-cortes $(L_A^{-1}(r), R_A^{-1}(r))$, puede demostrarse que:

$$Mag(A) = \frac{(3\omega + 2)(b + c)}{12\omega} + \frac{(3\omega - 2)(a + d)}{12\omega}.$$

En particular, si $\omega = 1$, se tiene que

$$Mag(A) = \frac{5}{12}(b + c) + \frac{1}{12}(a + d).$$

Ejemplo 4.2 *Las magnitudes de los números difusos triangulares* $A = (-4, 1, 2)$ *y* $B = (-8, 2, 3)$ *son:*

$$Mag(A) = \frac{5}{12}(1 + 1) + \frac{1}{12}(-4 + 2) = 0.6666,$$
$$Mag(B) = \frac{5}{12}(2 + 2) + \frac{1}{12}(-8 + 3) = 1.25.$$

Por tanto $A \prec B$

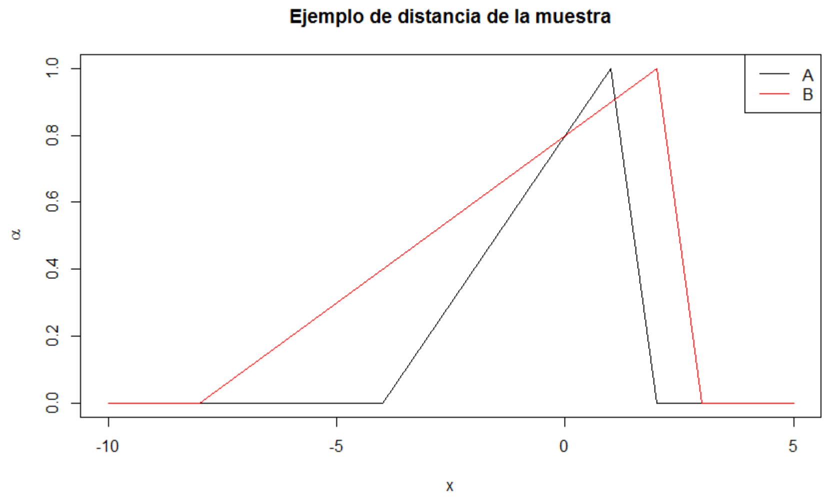


Figura 4.2: Gráfica de los números difusos A y B del Ejemplo 4.2

4.4.4. Principio de descomposición y distancia

El objetivo de este método es calcular la distancia que hay entre dos números difusos pertenecientes al conjunto. Sea $A, B \in \Omega$ dos números difusos definidos por sus r-cortes $A = \left[L_A^{-1}(r), R_A^{-1}(r)\right]$ y $B = \left[L_B^{-1}(r), R_B^{-1}(r)\right]$. La *distancia de signo* entre A y B se define como:

$$d\,(A, B) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(L_A^{-1}(y) + R_A^{-1}\,(y) - L_B^{-1}(y) - R_B^{-1}\,(y)\right) dy.$$

A partir de esta definición se considera que:

- $d\,(A, B) > 0 \Leftrightarrow B \prec A$
- $d\,(A, B) < 0 \Leftrightarrow A \prec B$
- $d\,(A, B) = 0 \Leftrightarrow B \sim A$

La fórmula anterior nos permite averiguar la distancia entre dos números difusos. Pero para hacer ranking sobre varios números difusos necesitamos calcular un índice o valor para cada número difuso, para posteriormente poder compararlos.

Yao y Wu [40] definieron un índice como la distancia que hay del número 0 al número difuso. Es decir, suponemos que $0 \in \Omega$ y nos queda

$$d\,(A, 0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[L_A^{-1}(y) + R_A^{-1}\,(y)\right] dy$$

Entonces el ranking se obtendría de la siguiente forma:

- $d(A,B) > 0 \Leftrightarrow d(A,0) > d(B,0) \Leftrightarrow B \prec A$
- $d(A,B) < 0 \Leftrightarrow d(A,0) < d(B,0) \Leftrightarrow A \prec B$
- $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow d(A,0) = d(B,0) \Leftrightarrow A \sim B$

Lema 4.1 *Sean $A, B \in \Omega$ dos números difusos.*

- *Si $A = B$ entonces $A \sim B$.*
- *Si $A \subset B$ y $\frac{1}{2}\int_0^1 \left[L_A^{-1}(y) + R_A^{-1}(y)\right] dy \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[L_B^{-1}(y) + R_B^{-1}(y)\right] dy$, entonces $A \prec B$.*
- *Si $B \subset A$ y $\frac{1}{2}\int_0^1 \left[L_A^{-1}(y) + R_A^{-1}(y)\right] dy \geq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[L_B^{-1}(y) + R_B^{-1}(y)\right] dy$, entonces$B \prec A$*

Por último, teniendo en cuenta que pueden calcularse las funciones inversas L^{-1} y R^{-1} a partir de la definición del número difuso trapezoidal $A = (a, b, c, d)$ con $\omega = 1$, las integrales anteriores nos llevan a los siguientes valores:

$$\begin{aligned} d(A,0) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[a + (b-a)y + d - (d-c)y\right] dy \\ &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{b-a}{2} + d - \frac{d-c}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(a+b+c+d). \end{aligned}$$

4.4.5. Método del coeficiente de variación

El método CV es una mejora del método que propusieron Lee y Li [31]. Estos autores hicieron uso de una media generalizada y una desviación típica sobre la base de las medidas de probabilidad de sucesos difusos para obtener índices en base a los cuales realizan la clasificación de los números difusos. Por tanto, este método clasifica los números considerando dos distribuciones diferentes en base a las cuales calcula las correspondientes **medias** y **desviaciones típicas** de los números difusos.

1. Distribución uniforme:

$$\bar{x}(A) = \frac{\int_{sop(A)} xA(x)dx}{\int_{sop(A)} A(x)dx}$$

$$\sigma(A) = \sqrt{\frac{\int_{sop(A)} x^2 A(x)dx}{\int_{sop(A)} A(x)dx} - \left(\bar{x}(A)\right)^2}$$

Si el número difuso es triangular, $A = (a, b, c)$ las expresiones anteriores se reducen a:

$$\bar{x}(A) = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

$$\sigma(A) = \frac{1}{18}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - cb)$$

2. Distribución proporcional:

$$\bar{x}(A) = \frac{\int_{sop(A)} xA(x)^2 dx}{\int_{sop(A)} (A(x))^2 dx}$$

$$\sigma(A) = \sqrt{\frac{\int_{sop(A)} x^2 (A(x))^2 dx}{\int_{sop(A)} (A(x))^2 dx} - (\bar{x}(A))^2}$$

Si el número difuso es triangular, $A = (a, b, c)$, las expresiones anteriores dan lugar a:

$$\bar{x}(A) = \frac{1}{4}(a + 2b + c)$$

$$\sigma(A) = \frac{1}{80}(3a^2 + 4b^2 + 3c^2 - 4ab - 2ac - 4cb)$$

Por tanto para Lee y Li [31] había 4 índices para clasificar, o a partir del valor de las medias o de la desviación tanto de la distribución uniforme como la distribución proporcional. La mejora que hace Cheng [19] sobre este método y que dió lugar a su propio método, fue sacar un índice que relacionara las dos variables anteriores, y sobre ese índice realizar la clasificación. A este índice lo denotó como CV y se obtiene:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A}$$

Obtenemos un índice para la distribución uniforme y otro para la distribución proporcional, es decir podemos hacer clasificación sobre la distribución uniforme o sobre la proporcional.

La clasificación se establece :

- Si $CV_A > CV_B \Rightarrow A \prec B$
- Si $CV_A < CV_B \Rightarrow A \succ B$
- Si $CV_A = CV_B \Rightarrow A \sim B$

4.4.6. Método del centroide

Volviendo a la definición de punto central o centroide de un número difuso (x_0, y_0), que viene dado de la siguiente forma:

$$x_0 = \frac{\int_a^b xL_A(x)dx + \int_b^c xdx + \int_c^d xR_A(x)dx}{\int_a^b L_A(x)dx + \int_b^c dx + \int_c^d R_A(x)dx},$$

$$y_0 = \frac{\int_0^\omega rR_A^{-1}(r)dr + \int_0^\omega rL_A^{-1}(r)dr}{\int_0^\omega R_A^{-1}(r)dr + \int_0^\omega L_A^{-1}(r)dr},$$

Chu y Tsao [21] basaron su método en la distancia del punto central (x_0, y_0) al origen $(0, 0)$. De esta manera la superficie o área viene definida por:

$$S(A) = x_0 \cdot y_0.$$

La ordenación se establece de la siguiente forma:

- Si $S(A) = S(B) \Rightarrow A \sim B$
- Si $S(A) < S(B) \Rightarrow A \prec B$
- Si $S(A) > S(B) \Rightarrow A \succ B$

4.4.7. Método de Chen

El método de Chen [15] calcula un índice, que denotamos por U_T, sobre un conjunto de números difusos $A_i \in \Omega$ con $i = 1, .., n$. Ese índice establece la clasificación. Antes de definir U_T trabaja con dos funciones:

$$f_M(x) = \frac{x - x_{\text{mín}}}{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}} \quad \text{si } x \in [x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}}],$$

$$f_G(x) = \frac{x - x_{\text{máx}}}{x_{\text{mín}} - x_{\text{máx}}} \quad \text{si } x \in [x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}}],$$

donde $x_{\text{mín}} = \text{ínf}\, S$, $x_{\text{máx}} = \sup S$ y $\Omega = \cup_{i=1}^n \text{sop}(A_i)$.

La función f_M maximizará el conjunto y f_G lo minimizará. Para ello define los conjuntos:

$$U_M(i) = \sup_x (f_{A_i}(x) \wedge f_M(x))$$

$$U_G(i) = \sup_x (f_{A_i}(x) \wedge f_G(x))$$

El índice para este método se obtiene como:

$$U_T(i) = \frac{U_M(i) + 1 - U_G(i)}{2}$$

Posteriormente, Chen hizo una mejora de este método a partir de las funciones $f_M(i)$ y $f_G(i)$ considerando un número $k > 0$ y definiendo:

$$f_M(x) = \left(\frac{x - x_{\text{mín}}}{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}}\right)^k \quad \text{si } x \in [x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}}],$$

$$f_G(x) = \left(\frac{x - x_{\text{máx}}}{x_{\text{mín}} - x_{\text{máx}}}\right)^k \quad \text{si } x \in [x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}}].$$

En este caso, el índice se sigue definiendo como antes:

$$U_T(i) = \frac{U_M(i) + 1 - U_G(i)}{2}.$$

Los valores de k más usados son $k = 1$ y $k = \frac{1}{2}$. Veamos a continuación como quedarían los indices para esos valores de k considerando el número difuso $A_i = (a, b, c, d)$.

1. Cuando $k = 1$

$$U_T(i) = \frac{1}{2}\left(\frac{d - x_{\text{mín}}}{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}} - (c - d)} + 1 - \frac{x_{\text{máx}} - a}{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}} + (b - a)}\right).$$

2. Cuando $k = \frac{1}{2}$

$$U_T(i) = \frac{(c-d) + \sqrt{(c-d)^2 + 4\left(x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}\right)\left(d - x_{\text{mín}}\right)}}{4\left(x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}\right)}$$

$$+ \frac{2\left(x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}\right)}{4\left(x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}\right)}$$

$$+ \frac{(b-a) - \sqrt{(b-a)^2 + 4\left(x_{\text{mín}} - x_{\text{máx}}\right)\left(a - x_{\text{máx}}\right)}}{4\left(x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}\right)}.$$

Estos son los valores más usados de k para este método, aunque se puede usar cualquier valor siempre que $k > 0$.

4.5. Verificación de los axiomas de los métodos de ranking

Los axiomas que Wang y Kerre [36] presentaron en 2001 permiten comprobar si un método de ordenación de cantidades difusas puede considerarse razonable (véase la Sección 4.2). En la siguiente tabla se resumen todos los resultados relacionados con el cumplimiento de estos axiomas para algunos de los métodos analizados en esta memoria.

Método	A_1	A_2	A_3	A_4	A_4'	A_5	A_6	A_6'	A_7
Distancia de Wang [38]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	No
Distancia signo $p = 1$ [3]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Distancia signo $p = 2$ [3]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No
Magnitud [5]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Chen [15]	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	No	No

A partir de estos resultados, podemos concluir que los procedimientos de ordenación analizados en esta memoria son relativamente razonables para establecer rankings entre números difusos en base a los axiomas $A_1 - A_7$.

4.6. Ejemplos de clasificación

A continuación vamos a describir algunos ejemplos acerca de cómo actúan los métodos descritos en las secciones anteriores sobre varios conjuntos de números difusos. Los primeros en considerar estos datos fueron Yao y Wu [40] en el año 2000. Desde entonces, la gran mayoría de autores los utilizan en sus contribuciones.

Como $\omega = 1$, cada número difuso vendrá definido como $A_i = (a, b, c, d)$. A partir de esta definición obtendremos la funciones lineales L_{A_i} y R_{A_i} y representaremos en una tabla cada número difuso utilizando estas funciones L_{A_i} y R_{A_i} y sus inversas $L_{A_i}^{-1}$ y $R_{A_i}^{-1}$. Para finalizar esta sección, generaremos una tabla en la que vamos a aplicar los distintos métodos de clasificación a dichos números difusos para obtener ordenaciones entre ellos.

- **Conjunto 1** : $A = (0.4, 0.5, 1)$; $B = (0.4, 0.7, 1)$; $C = (0.4, 0.9, 1)$

Ahora veamos la definición de esos números como funciones a trozos.

$$A(x) = \begin{cases} 10x - 4 & si \quad x \in [0.4, 0.5] \\ 2 - 2x & si \quad x \in [0.5, 1] \\ 1 & si \quad x = 0.5 \\ 0 & si \quad x \notin [0.4, 1] \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{x-0.4}{0.3} & si \quad x \in [0.4, 0.7] \\ \frac{1-x}{0.3} & si \quad x \in [0.7, 1] \\ 1 & si \quad x = 0.7 \\ 0 & si \quad x \notin [0.4, 1] \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 2x - 0.8 & si \quad x \in [0.4, 0.9] \\ 10 - 10x & si \quad x \in [0.9, 1] \\ 1 & si \quad x = 0.9 \\ 0 & si \quad x \notin [0.4, 1] \end{cases}$$

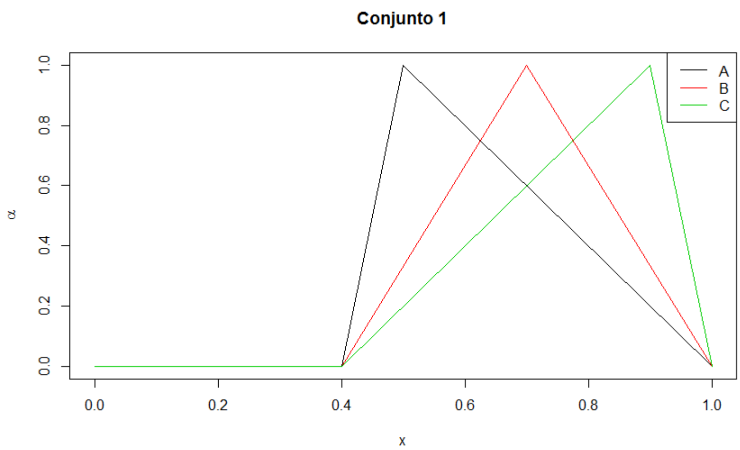


Figura 4.3: Números difusos del Conjunto 1

- **Conjunto 2:** $A = (0.3, 0.4, 0.7, 0.9)$; $B = (0.3, 0.7, 0.9)$; $C = (0.5, 0.7, 0.9)$

$$A(x) = \begin{cases} 10x - 3 & \text{si } x \in [0.3, 0.4] \\ 4.5 - 5x & \text{si } x \in [0.7, 0.9] \\ 1 & \text{si } x \in [0.4, 0.7] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{x-0.3}{0.4} & si \quad x \in [0.3, 0.7] \\ 4.5 - 5x & si \quad x \in [0.7, 0.9] \\ 1 & si \quad x = 0.7 \\ 0 & si \quad x \notin [0.3, 0.9] \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 5x - 2.5 & si \quad x \in [0.5, 0.7] \\ 4.5 - 5x & si \quad x \in [0.7, 0.9] \\ 1 & si \quad x = 0.7 \\ 0 & si \quad x \notin [0.5, 0.9] \end{cases}$$

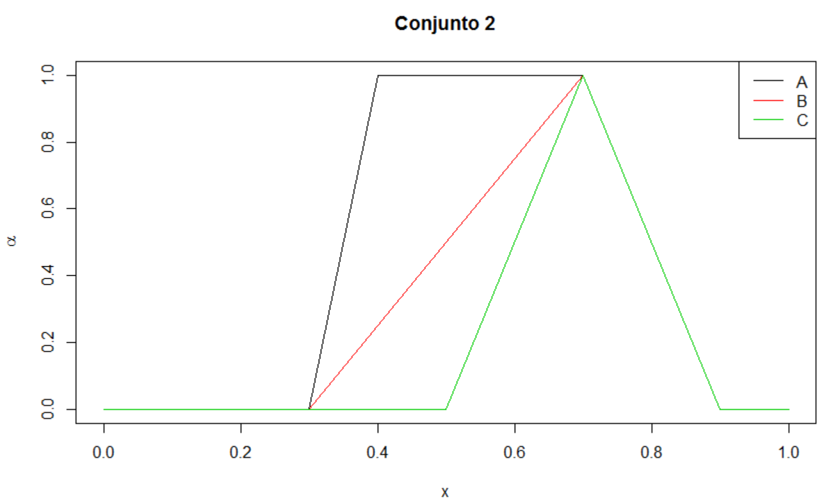


Figura 4.4: Números difusos del Conjunto 2

- **Conjunto 3** : $A = (0.3, 0.5, 0.7)$; $B = (0.3, 0.5, 0.8, 0.9)$; $C = (0.3, 0.5, 0.9)$

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x-0.3}{0.2} & si \quad x \in [0.3, 0.5] \\ \frac{0.7-x}{0.2} & si \quad x \in [0.5, 0.7] \\ 1 & si \quad x = 0.5 \\ 0 & si \quad x \notin [0.3, 0.7] \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{x-0.3}{0.2} & si \quad x \in [0.3, 0.5] \\ 9 - 10x & si \quad x \in [0.8, 0.9] \\ 1 & si \quad x \in [0.5, 0.8] \\ 0 & si \quad x \notin [0.3, 0.9] \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x-0.3}{0.2} & si \quad x \in [0.3, 0.5] \\ \frac{0.9-x}{0.4} & si \quad x \in [0.5, 0.9] \\ 1 & si \quad x = 0.5 \\ 0 & si \quad x \notin [0.3, 0.9] \end{cases}$$

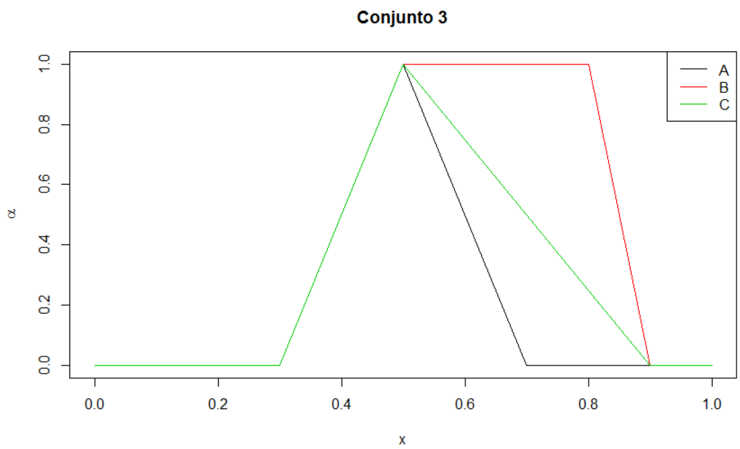


Figura 4.5: Números difusos del Conjunto 3

- **Conjunto 4**: $A = (0, 0.4, 0.7, 0.8)$; $B = (0.2, 0.5, 0.9)$; $C = (0.1, 0.6, 0.8)$

$$A(x) = \begin{cases} 2.5x & si \quad x \in [0, 0.4] \\ 8 - 10x & si \quad x \in [0.7, 0.8] \\ 1 & si \quad x \in [0.4, 0.7] \\ 0 & si \quad x \notin [0, 0.8] \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{x-0.2}{0.3} & si \quad x \in [0.2, 0.5] \\ \frac{0.9-x}{0.4} & si \quad x \in [0.5, 0.9] \\ 1 & si \quad x = 0.5 \\ 0 & si \quad x \notin [0.2, 0.9] \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x-0.1}{0.5} & si \quad x \in [0.1, 0.6] \\ 4 - 5x & si \quad x \in [0.6, 0.8] \\ 1 & si \quad x = 0.6 \\ 0 & si \quad x \notin [0.1, 0.8] \end{cases}$$

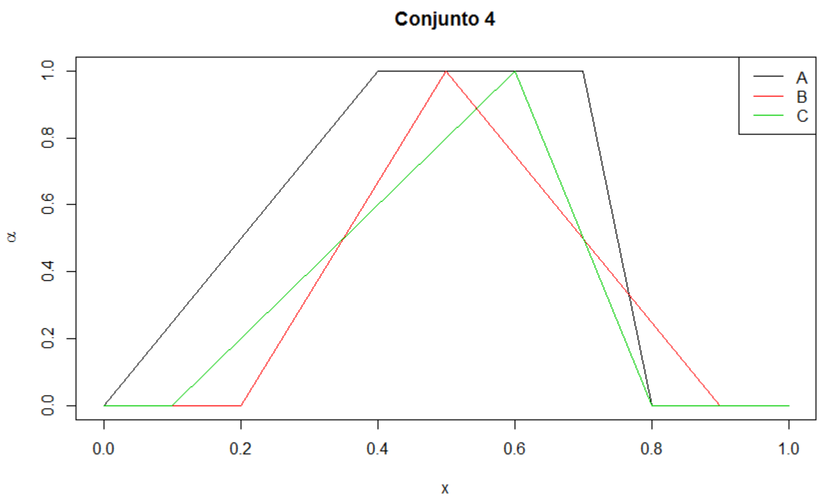


Figura 4.6: Números difusos del Conjunto 4

A continuación recogemos en una tabla para cada número difuso de cada Conjunto i, $i = 1, .., 4$, el valor de la funciones L y R y sus respectivas inversas.

N ^{o} Difusos	L	R	L^{-1}	R^{-1}
Conjunto 1				
A	$10x - 4$	$2 - 2x$	$\frac{r+4}{10}$	$\frac{r-2}{-2}$
B	$\frac{x-0.4}{0.3}$	$\frac{1-x}{0.3}$	$0.3r + 0.4$	$-0.3r + 1$
C	$2x - 0.8$	$10 - 10x$	$\frac{r+0.8}{2}$	$\frac{r-10}{-10}$
Conjunto 2				
A	$10x - 3$	$4.5 - 5x$	$\frac{r+3}{10}$	$\frac{r-4.5}{-5}$
B	$\frac{x-0.3}{0.4}$	$4.5 - 5x$	$0.4r + 0.3$	$\frac{r-4.5}{-5}$
C	$5x - 2.5$	$4.5 - 5x$	$\frac{r+2.5}{5}$	$\frac{r-4.5}{-5}$
Conjunto 3				
A	$\frac{x-0.3}{0.2}$	$\frac{0.7-x}{0.2}$	$0.2r + 0.3$	$-0.2r + 0.7$
B	$\frac{x-0.3}{0.2}$	$9 - 10x$	$0.2r + 0.3$	$\frac{r-9}{-10}$
C	$\frac{x-0.3}{0.2}$	$\frac{0.9-x}{0.4}$	$0.2r + 0.3$	$-0.4r + 0.9$
Conjunto 4				
A	$2.5x$	$8 - 10x$	$\frac{r}{2.5}$	$\frac{r-8}{-10}$
B	$\frac{x-0.2}{0.3}$	$\frac{0.9-x}{0.4}$	$0.3r + 0.2$	$-0.4r + 0.9$
C	$\frac{x-0.1}{0.5}$	$4 - 5x$	$0.5r + 0.1$	$\frac{r-4}{-5}$

Finalmente vamos a calcular los índices de ranking para los conjuntos del ejemplo con los distintos métodos descritos anteriormente. De esta manera podemos observar qué números tienen mayor ranking así como observar que algunos métodos no nos devuelven la clasificación que podríamos esperar.

Método	**N ^{o} Dif.**	**Conjunto 1**	**Conjunto 2**	**Conjunto 3**	**Conjunto 4**
Distancia	A	0.7151	0.7289	0.6009	0.6284
de Wang	B	0.7753	0.7157	0.7646	0.6289
[38]	C	0.8360	0.7753	0.6574	0.6009
Resultados		$A \prec B \prec C$	$B \prec A \prec C$	$A \prec C \prec B$	$C \prec A \prec B$
Dist. signo	A	1.2	1.15	1	0.95
$p = 1$	B	1.4	1.3	1.25	1.05
[3]	C	1.6	1.4	1.1	1.05
Resultados		$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec B \sim C$
Dist. signo	A	0.8869	0.8756	0.7257	0.7853
$p = 2$	B	1.0194	0.9522	0.9416	0.7958
[3]	C	1.1605	1.0033	0.8165	0.8386
Resultados		$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec B \prec C$
Magnitud	A	0.5334	0.5584	0.5	0.5250
[5]	B	0.7	0.6334	0.6416	0.5084
	C	0.8666	0.7	0.5166	0.5750
Resultados		$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$B \prec A \prec C$
Distancia	A	0.6	0.575	0.5	0.475
Yao y Wu	B	0.7	0.65	0.625	0.525
[40]	C	0.8	0.7	0.55	0.525
Resultados		$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec B \sim C$
CV Unif.	A	0.0272	0.0328	0.0133	0.0693
Cheng [19]	B	0.0214	0.0246	0.0304	0.0385
	C	0.0225	0.0095	0.0275	0.0433
Resultados		$A \prec C \prec B$	$A \prec B \prec C$	$B \prec C \prec A$	$A \prec C \prec B$
CV Prop.	A	0.0183	0.026	0.008	0.0471
Cheng [19]	B	0.0128	0.0146	0.0234	0.0236
	C	0.0137	0.0057	0.0173	0.0255
Resultados		$A \prec C \prec B$	$A \prec B \prec C$	$B \prec C \prec A$	$A \prec C \prec B$
Centroide	A	0.299	0.2847	0.25	0.2440
Chu y Tsao	B	0.350	0.3248	0.3153	0.2624
[21]	C	0.3993	0.350	0.2748	0.2619
Resultados		$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec C \prec B$
Centroide	A	0.2111	0.2568	0.1778	0.1967
de Wang	B	0.2333	0.2111	0.2765	0.1778
[38]	C	0.2555	0.2333	0.1889	0.1667
Resultados		$A \prec B \prec C$	$B \prec C \prec A$	$A \prec C \prec B$	$C \prec B \prec A$
Chen [15]	A	0.3375	0.4315	0.375	0.52
	B	0.5	0.5625	0.425	0.57
	C	0.667	0.625	0.55	0.625
Resultados		$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$

Como podemos observar para un mismo conjunto de números difusos, podemos obtener distinta ordenación dependiendo del método empleado. El método del CV, descrito en [19], tiene el inconveniente de que a veces se utiliza incorrectamente. Según [19], cuanto menor sea el índice CV, mayor será el número difuso correspondiente.

A continuación vamos a comentar estos resultados de ranking:

1. En relación con el Conjunto 1, por el enfoque del CV [19], el orden de clasificación es $A \prec C \prec B$, que parece ir contra la intuición (ver Fig. 4.3). El resto de los enfoques proporcionan la misma ordenación de números difusos, $A \prec B \prec C$, que es el ranking que podríamos considerar razonable.

2. Para el Conjunto 2, los métodos de la distancia con $p = 1, 2$, de la Magnitud [3], de Yao y Wu [37], del CV [19], del centroide de Chu y Tsao [37], el orden de clasificación es $A \prec B \prec C$. Por el de la distancia de Wang [38] es $B \prec A \prec C$ y por el centroide de Wang [21], el orden es $B \prec C \prec A$. Si observamos la Fig. 4.4, es fácil ver que ninguno de ellos es consistente con la intuición humana.

3. Para el Conjunto 3 (ver Fig. 4.5), deberíamos de obtener el resultado $A \prec C \prec B$. En este caso, todos los métodos concluyen esta ordenación excepto el método de del CV [19] cuya ordenación es $B \prec C \prec A$ y el de Chen [15] cuyo ranking es $A \prec B \prec C$.

4. Para los números difusos A, B y C que se muestran para el Conjunto 4 (ver Fig. 4.6) podemos observar numerosas ordenaciones. El método de la distancia ($p = 1, 2$) [3], el método de Yao y Wu [38] y el método de Chen [15], obtienen el mismo orden de clasificación, $A \prec B \prec C$. Sin embargo la ordenación obtenida en Chu y Tsao [21] y por el CV [19], $A \prec C \prec B$ puede considerarse mejor. Por el método de la Magnitud [5] es $B \prec A \prec C$, por el del distancia de Wang [38] es $C \prec A \prec B$ y por el del centroide de Wang [38] es $C \prec B \prec A$. Observando las clasificaciones obtenidas, podemos ver que algunos métodos consideran que la amplitud de un número difuso es más importante que el valor que se obtiene al defusificar el número difuso.

Capítulo 5

Librería desarrollada en R

En este capítulo vamos a poner en práctica los conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores. Para ello, vamos a implementar una librería en lenguaje R que recoge todos los métodos descritos para calcular el índice. Esta librería la hemos llamado *FuzzyNumbersRanking* y se encuentra ubicada en el enlace de *github* `https://github.com/msmaldonado/TFG` [45].

Esta librería consta de tres partes que desarrollaremos en este capítulo. El objetivo es implementar los métodos que se explicaron en el capítulo anterior y describir el código utilizado en su implementación. También mostraremos su uso a través de algunos ejemplos.

Para la instalación de la librería, desde el enlace anterior descargaremos el archivo *libreria.zip* el cual contiene todos los métodos con sus respectivos archivos *.Rd*. Para instalarlo, una vez que tenemos el archivo en nuestro disco duro, en R, en la *barra de Menus* buscamos la opción *Paquetes* y dentro del menú que se despliega elegimos la opción *Instalar paquete(s) a partir de archivos zip locales*. De esta manera ya lo tendremos instalado. A partir de este momento, cuando queramos usar este paquete llamaremos a la librería escribiendo:

```
library(FuzzyNumbersRanking)
```

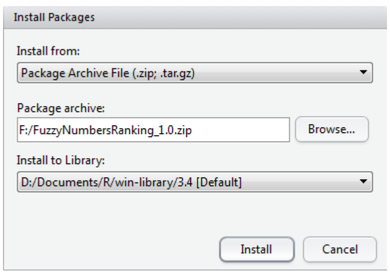


Figura 5.1: Instalar una librería en R desde archivos locales

La librería contiene tres bloques:

- La implementación de los métodos de ranking estudiados para el caso de números difusos trapezoidales.

- La implementación de una función que nos permite ordenar un conjunto de números difusos a través de un método seleccionado. Esta parte requiere interacción por parte del usuario.

- La implementación de todos los métodos pero utilizando cualquier tipo de número difuso, es decir que las funciones L y R no tienen que ser lineales.

Para esta última parte nos hemos ayudado de *rSymPy* (la librería de *Python* [47]) como veremos más adelante. Para utilizar este bloque de programación es necesario tener instalado una versión de *Python* o de Anaconda (para poder llamar a sus librerías) y una versión de *Java* actualizada (ya que *Java* es el software que llama a *Python*). Una vez que tenemos preparado todo esto, ejecutamos en R:

```
install.packages(" rSymPy ")
```

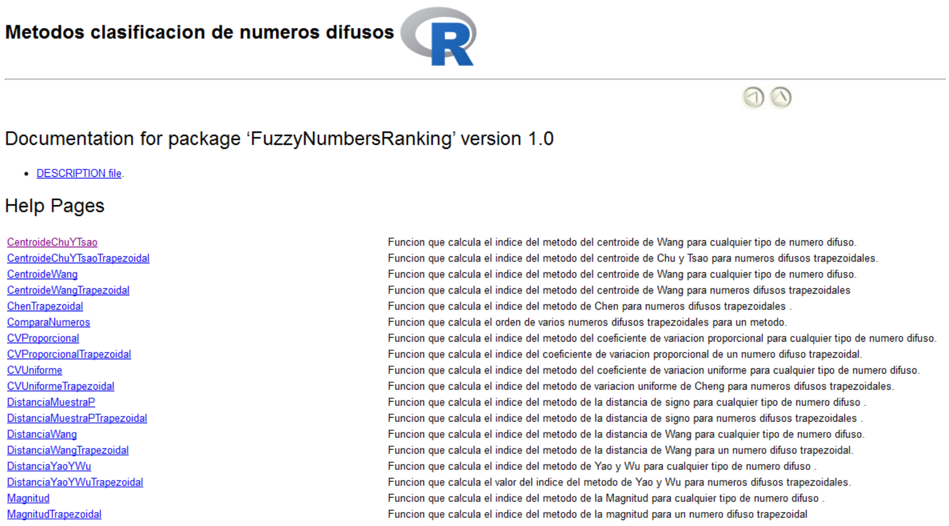
y esto nos instalará 'rJava', 'rjson','rJython' y 'rSymPy'. De esta manera, ya podemos utilizar las funciones de SymPy sin problemas.

La idea de hacer una librería en R es poder recoger distintos métodos que se usan para hacer ranking de números difusos en un mismo paquete, de modo que para un número difuso podamos obtener fácilmente el índice que proporciona un método concreto. Con esta librería podemos obtener rankings de forma rápida sobre cualquier conjunto de números difusos, o determinar qué método es más apropiado para usar sobre un determinado tipo de números difusos.

Además de los archivos con extensión .R (donde se encontrará el código implementado) también hemos creado archivos de extensión .Rd para cada método. Estos archivos se encuentran en la carpeta *man* y son el manual de ayuda de la librería. A través de la orden *help* podemos descargar este manual. Para verlo ejecutamos

```
help( package = " FuzzyNumbersRanking ")
```

Este manual da una descripción detallada de todas las funciones, de los métodos implementados y la descripción de los argumentos que utilizan. La Fig.5.2 muestra la salida que se obtiene al ejecutar dicha orden.



Metodos clasificacion de numeros difusos

Documentation for package 'FuzzyNumbersRanking' version 1.0

- DESCRIPTION file.

Help Pages

CentroideChuYTsao	Funcion que calcula el indice del metodo del centroide de Wang para cualquier tipo de numero difuso.
CentroideChuYTsaoTrapezoidal	Funcion que calcula el indice del metodo del centroide de Chu y Tsao para numeros difusos trapezoidales.
CentroideWang	Funcion que calcula el indice del metodo del centroide de Wang para cualquier tipo de numero difuso.
CentroideWangTrapezoidal	Funcion que calcula el indice del metodo del centroide de Wang para numeros difusos trapezoidales
ChenTrapezoidal	Funcion que calcula el indice del metodo de Chen para numeros difusos trapezoidales .
ComparaNumeros	Funcion que calcula el orden de varios numeros difusos trapezoidales para un metodo.
CVProporcional	Funcion que calcula el indice del metodo del coeficiente de variacion proporcional para cualquier tipo de numero difuso.
CVProporcionalTrapezoidal	Funcion que calcula el indice del coeficiente de variacion proporcional de un numero difuso trapezoidal.
CVUniforme	Funcion que calcula el indice del metodo del coeficiente de variacion uniforme para cualquier tipo de numero difuso.
CVUniformeTrapezoidal	Funcion que calcula el indice del metodo de variacion uniforme de Cheng para numeros difusos trapezoidales.
DistanciaMuestraP	Funcion que calcula el indice del metodo de la distancia de signo para cualquier tipo de numero difuso .
DistanciaMuestraPTrapezoidal	Funcion que calcula el indice del metodo de la distancia de signo para numeros difusos trapezoidales .
DistanciaWang	Funcion que calcula el indice del metodo de la distancia de Wang para cualquier tipo de numero difuso.
DistanciaWangTrapezoidal	Funcion que calcula el indice del metodo de la distancia de Wang para un numero difuso trapezoidal.
DistanciaYaoYWu	Funcion que calcula el indice del metodo de Yao y Wu para cualquier tipo de numero difuso .
DistanciaYaoYWuTrapezoidal	Funcion que calcula el valor del indice del metodo de Yao y Wu para numeros difusos trapezoidales.
Magnitud	Funcion que calcula el indice del metodo de la Magnitud para cualquier tipo de numero difuso .
MagnitudTrapezoidal	Funcion que calcula el indice del metodo de la magnitud para un numero difuso trapezoidal

Figura 5.2: Manual del paquete

5.1. Cálculo del índice para números difusos trapezoidales

En la primera parte de esta librería nos centramos en la implementación de todos los métodos estudiados anteriormente para números difusos trapezoidales. Como ya sabemos, estos números son fáciles de entender y son muy utilizados en lógica difusa por muchos investigadores. Por lo tanto, sólo podrán ser usados con esta clase de números difusos y en su defecto con triangulares, ya que un número difuso triangular es uno trapezoidal en el que $b = c$.

Estas funciones están declaradas como

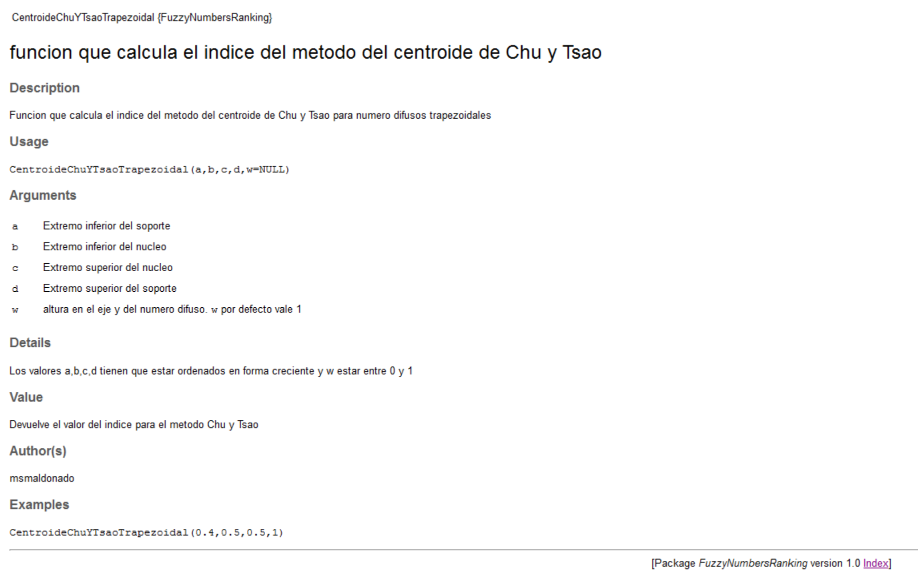
$\texttt{NombreMetodoTrapezoidal}(a, b, c, d, \omega = NULL)$

donde a, b, c, d son los valores que definen el número difuso y $\omega \in (0, 1]$ será un parámetro opcional y por defecto valdrá uno.

Como hemos visto anteriormente, la orden *help* proporciona la información del método implementado así como de los argumentos que utiliza y ejemplos sencillos de utilización. Por ejemplo, la siguiente orden

```
help(" CentroideChuYTsaoTrapezoidal ")
```

nos muestra el manual para la función que calcula el índice de Chu y Tsao, véase la Fig. 5.3.


CentroideChuYTsaoTrapezoidal {FuzzyNumbersRanking}

funcion que calcula el indice del metodo del centroide de Chu y Tsao

Description

Funcion que calcula el indice del metodo del centroide de Chu y Tsao para numero difusos trapezoidales

Usage

`CentroideChuYTsaoTrapezoidal(a,b,c,d,w=NULL)`

Arguments

a	Extremo inferior del soporte
b	Extremo inferior del nucleo
c	Extremo superior del nucleo
d	Extremo superior del soporte
w	altura en el eje y del numero difuso. w por defecto vale 1

Details

Los valores a,b,c,d tienen que estar ordenados en forma creciente y w estar entre 0 y 1

Value

Devuelve el valor del indice para el metodo Chu y Tsao

Author(s)

msmaldonado

Examples

`CentroideChuYTsaoTrapezoidal(0.4,0.5,0.5,1)`

[Package *FuzzyNumbersRanking* version 1.0 Index]

Figura 5.3: Manual de Chu y Tsao Trapezoidal

A continuación vamos a explicar la implementación de estos métodos para números trapezoidales. Nos centraremos concretamente en el código del método de **Chu y Tsao** y posteriormente se realizará un ejemplo de su uso.

```
CentroideChuYTsaoTrapezoidal=function(a,b,c,d, w=NULL){
 #no se introduce w
 if(is.null(w)){
    #Comprobamos que los numeros son correctos
    if(a<b && b<=c && c<d){
      #Definimos funciones del x0
      #Funciones L y R
      L=function(x)((x-a)/(b-a));
      R=function(x)((d-x)/(d-c));
      Lx=function(x)(x*(x-a)/(b-a));
      Rx=function(x)(x*(d-x)/(d-c));
      Linear=function(x)(x);
      #Funciones L y R inversas
      Linversa=function(x)(a+((b-a)*x));
      Rinversa=function(x)(d-(d-c)*x);
      Lxinversa=function(x)(x*(a+(b-a)*x))
      Rxinversa=function(x)(x*(d-(d-c)*x));
      #integrales
      #numerador
      n1=integrate(Lx,a,b);
      n2=integrate(Linear,b,c);
      n3=integrate(Rx,c,d);
      #denominador
      d1=integrate(L,a,b);
      d2=c-b;
```

```
        d3=integrate(R,c,d);
        #valor del x0
        x0<-(n1$value + n2$value + n3$value)/(d1$value + d2 + d3$value)
        #calcular y0
        #integrrales
        #numerador
        m1=integrate(Rxinversa,0,1);
        m2=integrate(Lxinversa,0,1);
        #denominador
        f1=integrate(Rinversa,0,1);
        f2=integrate(Linversa,0,1);
        #valor del y0
        y0<-(m1$value + m2$value)/(f1$value + f2$value)
        #valor del indice indice
        return(x0*y0)
      }else{#numeros incorrectos
       cat(paste("Error:  los valores a,b,c,d no estan en orden"))
      }
    }else{# Si introducimos omega
    #Comprobamos que los parametros sean correctos
    if(w >0 && w <=1 && a<b && b<=c && c<d){
      #Definimos funciones del x0
        #Funciones L y R
        L=function(x)(w*(x-a)/(b-a));
        R=function(x)(w*(d-x)/(d-c));
        Lx=function(x)(x*w*(x-a)/(b-a));
        Rx=function(x)(x*w*(d-x)/(d-c));
        Linear=function(x)(x);
        #Funciones L y R inversas
        Linversa=function(x)(a+((b-a)*x/w));
        Rinversa=function(x)(d-(d-c)*x/w);
        Lxinversa=function(x)(x*(a+(b-a)*x/w))
        Rxinversa=function(x)(x*(d-(d-c)*x/w));
        #integrales
        #numerador
        n1=integrate(Lx,a,b);
        n2=integrate(Linear,b,c);
        n3=integrate(Rx,c,d);
        #denominador
        d1=integrate(L,a,b);
        d2=c-b;
        d3=integrate(R,c,d);
        #valor del x0
        x0<-(n1$value + n2$value + n3$value)/(d1$value + d2 + d3$value)
        #calcular y0
        #integrales
        #numerador
        m1=integrate(Rxinversa,0,w);
        m2=integrate(Lxinversa,0,w);
        #denominador
        f1=integrate(Rinversa,0,w);
```

```
        f2=integrate(Linversa,0,w);
        #valor del y0
        y0<-(m1$value + m2$value)/(f1$value + f2$value)
        #valor del indice
        return(x0*y0)
      }else{#parametros incorrectos
        cat(paste("Error:  parametros incorrectos "))
      }
    }
}
```

Este código, como ya hemos comentado anteriormente, se corresponde con el método del centroide de Chu y Tsao. Este índice se ha programado siguiendo los siguientes pasos. En primer lugar se comprueba si se ha introducido un valor para el parámetro ω del número difuso trapezoidal. Si no hay valor para ω, pasa a comprobar si los valores de a, b, c, y d introducidos son correctos, es decir, si cumplen la condición $a < b \leq c < d$, ya que se permite la entrada de números difusos triangulares. Si los números son correctos, el programa procede a calcular la integral para las funciones lineales L y R que definen el número difuso y que obtenemos a partir de los valores de esos parámetros a, b, c, y d. A continuación, se realizan las operaciones correspondientes y devuelve el índice. Este procedimiento es similar cuando introducimos el valor de ω; la diferencia es que en este caso se tiene en cuenta este valor para calcular las funciones L y R.

Para ilustrar su uso, veamos algunos ejemplos. El uso de otros métodos es completamente análogo. En los siguientes ejemplos vamos a trabajar con un número difuso triangular, otro trapezoidal y otro erróneo que nos mostrará un mensaje de error.

- De los ejemplos de la sección anterior vamos a tomar el número difuso A del primer conjunto, $(0.4, 0.5, 1)$, 4.3 del que sabemos, por la tabla de la página 56 4.6, que el índice de este número para el método de Chu y Tsao era 0.299. Como se trata de un número difuso triangular, $b = c$ y, además sabemos que $\omega = 1$, por tanto, no es necesario introducirlo como argumento.

  ```
  library(FuzzyNumbersRanking)
  > CentroideChuYTsaoTrapezoidal(0.4,0.5,0.5,1)
  [1] 0.2990741
  ```

  No obstante, en este caso, también introduciremos el valor de ω para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

  ```
  > CentroideChuYTsaoTrapezoidal(0.4,0.5,0.5,1,1)
  [1] 0.2990741
  ```

- En el siguiente ejemplo vamos a probar el método para un número trapezoidal. Consideremos el número A del conjunto 2, $(0.3, 0.4, 0.7, 0.9)$. A partir de los resultados de la tabla de la página 56 4.6 sabemos que este índice de Chu y Tsao correspondiente es 0.2847. Además sabemos que $\omega = 1$ por lo que no es necesario introducirlo como argumento.

  ```
  > CentroideChuYTsaoTrapezoidal(0.3,0.4,0.7,0.9)
  [1] 0.2847021
  ```

  Si introducimos el parámetro ω obtendríamos el mismo resultado.

  ```
  > CentroideChuYTsaoTrapezoidal(0.3,0.4,0.7,0.9,1)
  [1] 0.2847021
  ```

- Para finalizar veamos lo que ocurre si el número introducido no es un número difuso trapezoidal correcto, por ejemplo, cuando introducimos el número difuso $(0.4, 0.5, 0.4, 0.8)$. En este caso obtendremos un mensaje de error ya que $b > c$.

  ```
  > CentroideChuYTsaoTrapezoidal(0.4,0.5,0.4,0.8)
  Error:  los valores a,b,c,d no estan en orden
  ```

Finalmente comentar que el método de la distancia de signo utiliza un valor p, por lo que en este caso es necesario introducir un parámetro más, que será este valor y que ha de cumplir $p > 0$. Este método utiliza la función

`DistanciaMuestraPTrapezoidal`$(a, b, c, d, p, w = NULL)$

Veamos un ejemplo para $p = 2$.

```
> DistanciaMuestraPTrapezoidal(0.3,0.4,0.7,0.9,2)
[1] 0.875595
```

5.2. Ranking de un conjunto de números difusos

Esta parte tiene como objetivo implementar una función que llamaremos `comparaNumeros()`, la cual nos permitirá una interacción del usuario para poder obtener rankings.

En primer lugar, esta función nos pide por pantalla la cantidad de números difusos que queremos ordenar. Establecido este valor, a continuación, se introducen todos los números difusos de ese conjunto. Para ello nos irá pidiendo las valores o parámetros de cada número difuso. Esta función está preparada para números difusos triangulares y trapezoidales cuyo parámetro $\omega = 1$, ya que serán los tipos de números difusos que usaremos en la próxima sección. Volviendo a esta función, una vez introducidos todos los números difusos y almacenados, estos son guardados en vectores, nos aparecen en pantalla los métodos que podemos elegir para hacer ranking. Una vez seleccionado un método concreto, procedemos a obtener el vector de índices del conjunto de números difusos, el cual, posteriormente, será ordenado. Finalmente esta función nos muestra el orden de los números difusos que forman este conjunto.

A continuación, veamos la parte del de código de esta función donde se realiza la ordenación del vector de los índices para posteriormente mostrar esa ordenación

```
#ordenamos el vector de indices de menor a mayor los indices
indiceOrdenado = sort(indice)

#Obtengo el vector conjunto con los numeros difusos ordenados, teniendo en cuenta repeticiones
for(i in 1:cantidadNumeros){
 #si los indice actual y anterior no coinciden busca la posicion
  if(i>=2 && indiceOrdenado[i-1] != indiceOrdenado[i]){
    for(t in 1:cantidadNumeros){
    #busco la posicion que coincide y lo pongo en el vector la posicion
      if(indiceOrdenado[i]==indice[t]){
       vectorConjunto =c(vectorConjunto,t)

      }
    }

   }else if(i==1){#para el primer caso, solo busco la posicion que coincide
      for(t in 1:cantidadNumeros){
       if(indiceOrdenado[i]==indice[t]){
         vectorConjunto =c(vectorConjunto,t)

       }
      }

    }else{#las posicion actual y anterior en el vector coinciden guardamos las posicion en el vector de coincidencias
      vectorCoincidencias=c(vectorCoincidencias,i)
    }
  }#for



#Para imprimir, obtengo el orden y miramos el tipo de ordenacion
#Busco para cada posicion si esta en el vector de coincidencias, de ser asi esa posicion es con igual. Si no hay repetidos, directamente sacar el orden
if(OrdenacionNormal){
```

```
  cat(paste("Los numeros difusos ordenados son \n"))
   for(i in 1:cantidadNumeros){
      if(i==1){
       cat(paste(vectorConjunto[i]))#imprimo el primero
   }else{#para todas las posiciones menos la primera
    aux=FALSE
   #si hay coincidencias
     if(length(vectorCoincidencias)!=0){
      for(j in 1:length(vectorCoincidencias)){#busco si la posicion esta en coincidencias, por tanto el indice era el mismo
      if(i == vectorCoincidencias[j]){
        aux=TRUE
           }
         }
     }

   if(aux){#si esa posicion era coincidencia imprimo con
       cat(paste(" = ",vectorConjunto[i]))
      }else{
       cat(paste(" < ",vectorConjunto[i]))
      }

     }#else

   }#for
}else{
  cat(paste("\nLos numeros difusos ordenados son \n"))
   for(i in 1:cantidadNumeros){
     if(i==1){
      cat(paste(vectorConjunto[i]))#imprimo el primero
     }else{#para todas las posiciones menos la primera
      aux=FALSE
      if(length(vectorCoincidencias)!=0){
        for(j in 1:length(vectorCoincidencias)){#busco si la posicion esta en coincidencias, por tanto el indice era el mismo
         if(i == vectorCoincidencias[j]){
          aux=TRUE
         }
        }
     }
   if(aux){#si esa posicion era coincidencia imprimo con =
     cat(paste(" = ",vectorConjunto[i]))
   }else{
     cat(paste(" > ",vectorConjunto[i]))
   }

   }#else

  }#for
}
```

Para finalizar esta sección, veamos la ordenación del conjunto 1 Fig.4.3 anterior de números difusos para algunos métodos

```
> ComparaNumeros()
Introduce la cantidad de numeros difusos trapezoidales para
    hacer ranking
1: 3
Read 1 item

Cada numero difuso trapezoidal se introduce como (a,b,c,d), si
    es triangular, b=c

El numero difuso trapezoidal 1 es :
1: 0.4
2: 0.5
3: 0.5
4: 1
Read 4 items

El numero difuso trapezoidal 2 es :
1: 0.4
2: 0.7
3: 0.7
4: 1
Read 4 items

El numero difuso trapezoidal 3 es :
1: 0.4
2: 0.9
3: 0.9
4: 1
Read 4 items

Elige el metodo para realizar ranking:
1- metodo centroide Chu y Tsao
2- metodo centroide Wang
3- metodo coeficiente variacional proporcional
4- metodo coeficiente variacional uniforme
5- metodo distancia muestra p
6- metodo de la distancia Wang
7- metodo de la distancia Yaou y Wu
8- metodo de la magnitud
Para salir pulse cualquier otra tecla
1: 1
Read 1 item

El valor del indice para cada numero
1 = 0.299074074074074
2 = 0.35
3 = 0.399305555555556

Los numeros difusos ordenados son
1 < 2 < 3
```

```
Elige el metodo para realizar ranking:
1- metodo centroide Chu y Tsao
2- metodo centroide Wang
3- metodo coeficiente variacional proporcional
4- metodo coeficiente variacional uniforme
5- metodo distancia muestra p
6- metodo de la distancia Wang
7- metodo de la distancia Yaou y Wu
8- metodo de la magnitud
Para salir pulse cualquier otra tecla
1: 5
Read 1 item
Introduce el valor de p positivo
1: 2
Read 1 item

El valor del indice para cada numero
1  =  0.886942313043338
2  =  1.01980390271856
3  =  1.16045967903528

Los numeros difusos ordenados son
1 <  2 <  3

Elige el metodo para realizar ranking:
1- metodo centroide Chu y Tsao
2- metodo centroide Wang
3- metodo coeficiente variacional proporcional
4- metodo coeficiente variacional uniforme
5- metodo distancia muestra p
6- metodo de la distancia Wang
7- metodo de la distancia Yaou y Wu
8- metodo de la magnitud
Para salir pulse cualquier otra tecla
1: 6
Read 1 item

El valor del indice para cada numero
1  =  0.715697018452796
2  =  0.775313556640867
3  =  0.835995746932297

Los numeros difusos ordenados son
1 <  2 <  3

Elige el metodo para realizar ranking:
1- metodo centroide Chu y Tsao
2- metodo centroide Wang
3- metodo coeficiente variacional proporcional
4- metodo coeficiente variacional uniforme
5- metodo distancia muestra p
6- metodo de la distancia Wang
7- metodo de la distancia Yaou y Wu
8- metodo de la magnitud
```

```
Para salir pulse cualquier otra tecla
1: 9
Read 1 item
Saliendo......[1] 0
```

Como podemos observar, hasta que no pulsamos salir, podemos continuar haciendo rankings con los métodos deseados sin la necesidad de volver a introducir el conjunto de números difusos.

5.3. Cálculo del índice para números difusos LR

El objetivo de esta parte es la obtención del índice de cualquiera de los métodos anteriores para un número difuso más general, es decir, de tipo LR. Todos los métodos aceptarán los mismos parámetros y tendrán la siguiente formulación:

`nombreMetodo(a,b,c,d,`ω`=NULL,L=NULL,R=NULL,LI=NULL, RI=NULL)`

En la Fig. 5.4 podemos ver el manual del método de Chu y Tsao con toda la información que obtenemos al ejecutar `help("CentroideChuYTsao")`.

CentroideChuYTsao {FuzzyNumbersRanking}

Funcion que calcula el indice del metodo del centroide de Wang para cualquier tipo de numero difuso.

Description

Funcion que calcula el indice del metodo del centroide de Wang para cualquier tipo de numero difuso pasandole la funcion L y R

Usage

`CentroideChuYTsao(a,b,c,d,w=NULL,L=NULL,R=NULL,LI=NULL,RI=NULL)`

Arguments

`a`	Extremo inferior del soporte
`b`	Extremo inferior del nucleo
`c`	Extremo superior del nucleo
`d`	Extremo superior del soporte
`w`	altura en el eje y del numero difuso. `w` por defecto vale 1
`L`	Funcion izquierda del numero difuso
`R`	Funcion derecha del numero difuso
`LI`	Funcion inversa de L
`RI`	Funcion inversa de R

Details

Los valores a,b,c,d tienen que estar ordenados en forma creciente, w mayor que cero y menor que 1. Por defecto vale 1. Las funcion L y R tienen que estar bien definidas. Las funciones LI y RI deben ser las inversas.

Value

Devuelve el valor del indice

Author(s)

msmaldonado

Examples

`CentroideChuYTsao(0.4,0.5,0.5,1,1,'x','-x+2','x','x-x+2')`

Figura 5.4: Manual del índice de Chu y Tsao

Como podemos observar sólo es obligatorio introducir los parámetros a,b,c,d.De esta manera si sólo introducimos esos valores, estaríamos ante un número difuso trapezoidal, por tanto nuestro método llamaría a *nombreMétodoTrapezoidal(a,b,c,d)* y obtendría el índice. Si además de los valores anteriores introducimos ω, tendríamos que utilizar el método de trapezoidal pero haciendo uso del valor asignado para el parámetro ω.

Si se introducen todos los argumentos, en primer lugar, comprobamos que las funciones están bien definidas, es decir, cumplen $L(a) = 0 = R(d)$ y $L(b) = \omega = R(c)$. Además también comprobamos que las funciones LI y RI se corresponden con las inversas de L y R respectivamente, y finalmente se obtendría el índice sobre estas funciones.

Para poder introducir por parámetros estas funciones y calcular el índice, necesitamos la ayuda de *Python* [46]. En este caso, sería necesaria la librería *RSymPy* [47] ya que esta es la librería matemática de *Python*. Por tanto, aunque estemos en el entorno de R, estamos haciendo llamadas a *Python*, lo que nos permitirá hacer las comprobaciones de que las funciones L y R están bien definidas así como que las funciones LI y RI son las inversas correspondientes. Una vez que hemos comprobado que los argumentos son correctos, realizaríamos el cálculo del índice.

A continuación se muestra la implementación de uno de los métodos: concretamente el de Chu y Tsao. Destacar que en la primera línea comprobamos si SymPy está instalado pero no cargado en memoria para cargarlo automáticamente y evitar posibles errores.

```
CentroideChuYTsao=function(a,b,c,d,w=NULL,L=NULL,R=NULL,LI=
    NULL,RI=NULL){
 #Comprobamos que SymPy este instalado y lo cargamos en
     memoria
  if (!require('rSymPy'))
  top("Debe instalar el paquete 'rSympy' para continuar")
  sympyStart()#iniciamos Sympy
 #si es un numero trapezoidal
   if(is.null(w) && is.null(L) && is.null(R)&& is.null(LI) &&
        is.null(RI)){
    CentroideChuYTsao Trapezoidal(a,b,c,d)
   }else if(!is.null(w) && !is.null(L) && !is.null(R)&& !is.
       null(LI) && !is.null(RI)){#se introducen todos los
       parametros
     if(a<b && b<=c && c<d && w>0 && w<=1){#parametros correctos
      #declaracion de funciones
      sympy("x = Symbol('x', positive = True, real= True)")#
          declaramos x como variable
      sympy(paste("L =",L))
    sympy(paste("R =",R))
    sympy(paste("LI =",LI))
    sympy(paste("RI =",RI))
    #comprobamos que la funcion L y R estan bien definidas
     if(sympy(paste("L.subs(x,",a,")"))==0 && sympy(paste("R.
         subs(x,",d,")"))==0  && sympy(paste("L.subs(x,",b,")"))
         ==w && sympy(paste("R.subs(x,",c,")"))==w ) {
   #Comprobamos que las funciones LI y RI son las inversas
      if(sympy("LI.subs({'x':L}) == L.subs({'x':LI})")=="True" &
          & sympy("RI.subs({'x':R}) == R.subs({'x':RI})")=="True"
          ){ #Si la composicion es igual
```

```
    #Calculamos las integrales para  x0
    sympy(paste("primeraI=integrate(L*x, (x, ",a,",",b,"))"))
    sympy(paste("segundaI=integrate(x, (x, ",b,",",c,"))"))
    sympy(paste("terceraI=integrate(R*x, (x, ",c,",",d,"))"))
    sympy(paste("fprimeraI=integrate(L, (x, ",a,",",b,"))"))
    sympy(paste("fsegundaI=integrate(1, (x, ",b,",",c,"))"))
    sympy(paste("fterceraI=integrate(R, (x, ",c,",",d,"))"))

    #valor del x0
    sympy("x0 = ((primeraI + segundaI + terceraI)/(fprimeraI + fsegundaI + fterceraI))")

    #Claculamos las integrales para y0
    sympy(paste("yprimeraI=integrate(x*RI, (x, ",0,",",w,"))"))
    sympy(paste("ysegundaI=integrate(x*LI, (x, ",0,",",w,"))"))
    sympy(paste("yfprimeraI=integrate(RI, (x, ",0,",",w,"))"))
    sympy(paste("yfsegundaI=integrate(LI, (x, ",0,",",w,"))"))

    #valor del y0
    sympy("y0 = ((yprimeraI + ysegundaI )/(yfprimeraI + yfsegundaI ))")

    #valor del indice
    sympy("float(x0*y0)")#con float devuelve la operacion en float
    }else{#si no se corresponden con las inversas
      cat(paste("Error: Las inversas no corresponden con las funciones"))
     }
    }else{#las funciones L y R no estan bien definidas
     cat(paste("Error: Las funciones L y R no estan bien definidas"))
    }
   }
 }else if(!is.null(w) && is.null(L) && is.null(R)&& is.null(LI) &&  is.null(RI)){#si solo tenemos valor de omega
  CentroideChuYTsaoTrapezoidal(a,b,c,d,w)
 }else{#hemos puesto mal los parametros o incompletos
   cat(paste("Error: Lectura incorrecta "))
 }
}
```

Todos los métodos aceptan los mismos parámetros excepto el método de las distancia de signo que además utiliza el parámetro p. En la función, el parámetro p se introduciría antes de ω. En este caso, este parámetro tiene que cumplir que $p > 0$ y es obligatorio introducirlo.

Para terminar esta sección, veamos un ejemplo para un número difuso general. No obstante, en primer lugar, consideramos un número trapezoidal, y así poder comprobar que los índices están bien calculados. Sea el número difuso trapezoidal $A = (0, 1, 1, 2)$, donde $\omega = 1$, $L(x) = x$ y $R(x) = -x + 2$. En este caso las inversas coinciden, es decir $L^{-1}(r) = r$ y $R^{-1}(r) = -r + 2$. Calculamos ahora el índice para el número difuso trapezoidal, introduciendo las funciones L y R. Las funciones se introducen 'entre comillas' como aparece a continuación.

```
> CentroideChuYTsao(0,1,1,2)
[1] 0.5
> CentroideChuYTsao(0,1,1,2,1,'x','-x+2','x','-x+2')
[1] "0.5"
```

Una vez que hemos comprobado que el funcionamiento de esta función es correcto, pasamos a ver el ejemplo en el que introducimos una función L para el número difuso anterior que no es lineal, $L(x) = x^2$ con $L^{-1}(r) = \sqrt{x}$ y calculamos el índice. También vamos a ilustrar el caso que la función L no esté bien definida o las inversas sean incorrectas.

```
> CentroideChuYTsao(0,1,1,2,1,'x**2','-x+2','sqrt(x)','-x+2')
[1] "0.541538461538"
> CentroideChuYTsao(0,1,1,2,1,'x**2 +1','-x+2','sqrt(x)','-x+2')
Error: Las funciones L y R no estan bien definidas
> CentroideChuYTsao(0,1,1,2,1,'x**2','-x+2','sqrt(x+1)','-x+2')
Error: Las inversas no corresponden con las funciones
```

5.4. Ejemplo de aplicación en Economía

En esta sección vamos a aplicar el conocimiento adquirido a lo largo de este proyecto al campo de la economía. Para ello vamos a considerar el precio del barril de Brent [48] por meses utilizando números difusos y vamos a obtener un ranking que nos indique la evolución de dichos precios.

Si se trata de una ordenación real, es decir, si trabajáramos con números reales, la ordenación se basaría en el precio medio del barril cada mes y la ordenación sería un orden de números reales. En este caso el precio correspondiente mes sería: $Enero = 55.4576$, $Febrero = 56.0425$, $Marzo = 52.5756$, $Abril = 53.8010$ y $Mayo = 51.4000$. Y por tanto el orden sería $Mayo < Marzo < Abril < Enero < Febrero$.

En el caso de ranking con números difusos, para evitar perder información, vamos a considerar los números difusos asociados a cada mes. En concreto vamos a obtener números difusos triangulares utilizando el siguiente método: calculamos la media de todos los precios diarios de ese mes, el valor de la media será $b = c = \bar{x}$ en la notación del número difuso trapezoidal. Seguidamente calculamos las desviación típica de los valores que son inferiores a la media $\sigma_{\text{ínf}}$, y análogamente utilizando los valores mayores que la media σ_{sup} (véase [22]). Una vez obtenidos estos datos, los parámetros a y d de nuestro número difuso serán $a = \bar{x} - \sigma_{\text{ínf}}$ y $d = \bar{x} + \sigma_{\text{sup}}$.

En este ejemplo hemos considerado los precios difusos del barril de Brent correspondientes a los meses de Enero, Febrero, Marzo, Abril y Mayo del año 2017. Los datos son los siguientes y su representación gráfica se puede ver en la Figura 5.5.

- $Enero = (54.8273, 55.4576, 56.0000)$.
- $Febrero = (55.6708, 56.0425, 56.2701)$.
- $Marzo = (51.9690, 52.5756, 54.0540)$.
- $Abril = (53.0404, 53.8010, 54.5333)$.
- $Mayo = (50.4170, 51.4000, 52.4040)$.

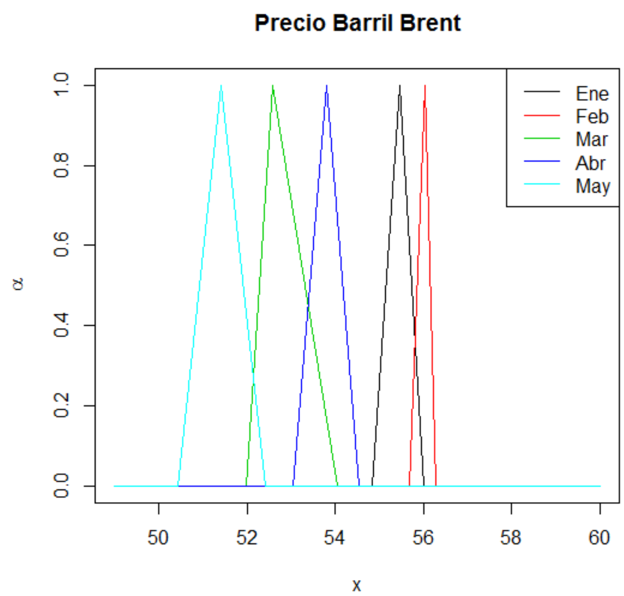


Figura 5.5: Precio del barril de Brent

La siguiente tabla muestra los resultados de los índices estudiados en esta memoria para cada número difuso, así como el ranking que se obtendría con cada uno de los métodos.

Método	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
Distancia Wang	55.4293	55.99	52.867	53.792	51.408
Resultados	*Mayo* $\prec$ *Marzo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
Distancia de signo $p = 1$	110.871	112.015	105.587	107.587	102.811
Resultados	*Mayo* $\prec$ *Marzo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
Distancia de signo $p = 2$	78.40	79.20	74.666	76.078	72.703
Resultados	*Mayo* $\prec$ *Marzo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
Magnitud	55.45	56.03	52.647	53.798	51.402
Resultados	*Mayo* $\prec$ *Marzo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
Distancia Yao y Wu	55.435	56.007	52.79	53.793	51.405
Resultados	*Mayo* $\prec$ *Marzo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
CV Uniforme	0.00432	0.002225	0.00827	0.00566	0.00788
Resultados	*Marzo* $\prec$ *Mayo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
CV Proporcional	0.00334	0.00173	0.00651	0.00438	0.006109
Resultados	*Marzo* $\prec$ *Mayo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
Centroide Wang	18.476	18.665	17.62	17.93	17.135
Resultados	*Mayo* $\prec$ *Marzo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
Centroide Chu y Tsao	27.717	28.004	26.396	26.896	25.702
Resultados	*Mayo* $\prec$ *Marzo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				
Chen	0.8225	0.933	0.415	0.568	0.217
Resultados	*Mayo* $\prec$ *Marzo* $\prec$ *Abril* $\prec$ *Enero* $\prec$ *Febrero*				

En este ejemplo, todos los métodos excepto el del CV proporcionan la misma ordenación de números difusos, que además coincide con el ranking que podríamos considerar razonable (ver la Figura 5.5).

Capítulo 6

Conclusiones

En primer lugar, comentar que los objetivos que inicialmente se marcaron para este trabajo han quedado cumplidos. El orden de realización de esta memoria ha seguido la misma estructura y organización que los capítulos, es decir, se comenzó trabajando la parte matemática, en concreto, se dio una introducción a los números difusos, para, posteriormente, trabajar con los métodos de ranking.

Una vez que la parte matemática estaba avanzada, empezamos la implementación de la librería, comenzando con los métodos para números difusos más sencillos, (triangulares y trapezoidales), ya que esta clase de números es muy utilizada por investigadores de distintas áreas de conocimiento. Esta parte finalizó con la implementación de la función que nos permite establecer rankings para un conjunto de números difusos aplicando uno de los métodos estudiados en la presente memoria. La implementación de esta parte se realizó por completo en el programa R, por lo que he aprendido un lenguaje nuevo que, a día de hoy, es muy utilizado.

De vuelta a la parte matemática, se introdujo una clase de números difusos más general, los números difusos de tipo LR, con la idea de poder utilizar números más generales en la librería. Para la implementación de esta parte utilicé el lenguaje *Python*, por lo que tuve que revisar mis conocimientos sobre este lenguaje y, más concretamente, sobre el uso de las funciones de la librería *SymPy*.

Para finalizar se propusieron unos ejemplos aplicados a la Economía con los que se pone de manifiesto todo el conocimiento y el trabajo adquiridos en este proyecto, así como algunos de los campos en los que aplicar dicho conocimiento. Además, también se incluye una de las técnicas para crear un número difuso a partir de cierta información o microdatos.

Trabajo Futuro

Como ya se comentó, a día de hoy, hay muchos índices que permiten establecer un ranking entre números difusos. Nosotros hemos seleccionado los más usados o aquellos que son mejoras de otros métodos que fueron implementados con anterioridad. Por tanto, el trabajo futuro de este proyecto consistiría en seguir estudiando otros métodos que no aparecen en este proyecto con la idea de añadirlos en la librería creada.

Una vez que hayan sido estudiados e incorporados a la librería estos métodos, lo que implicaría un conocimiento más amplio en este campo de investigación, el trabajo consistiría en el desarrollo de un método propio que permita establecer un ranking en un conjunto de números difusos. Este método tendría como objetivo intentar que los resultados sean los esperados para una amplia mayoría de números difusos y se analizaría el cumplimiento de los axiomas establecidos.

Índice de figuras

3.1. Núcleo y soporte 25
3.2. Número difuso crisp 26
3.3. Número difuso rectangular 27
3.4. Número difuso triangular 28
3.5. Número difuso trapezoidal 29
3.6. Número difuso tipo LR 30

4.1. Un ejemplo de inconsistencia de ranking. 38
4.2. Gráfica de los números difusos A y B del Ejemplo 4.2 45
4.3. Números difusos del Conjunto 1 51
4.4. Números difusos del Conjunto 2 52
4.5. Números difusos del Conjunto 3 53
4.6. Números difusos del Conjunto 4 54

5.1. Instalar una librería en R desde archivos locales 59
5.2. Manual del paquete 61
5.3. Manual de Chu y Tsao Trapezoidal 62
5.4. Manual del índice de Chu y Tsao 70
5.5. Precio del barril de Brent 74

Bibliografía

[1] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian, A new approach to universal approximation of fuzzy functions on a discrete set of points, Appl. Math. Model. **30** (2006) 1525–1534.

[2] S. Abbasbandy, M. Amirfakhrian, The nearest trapezoidal form of a generalized left right fuzzy number, Int. J. Approx. Reason. **43** (2006) 166–178.

[3] S. Abbasbandy, B. Asady, Ranking of fuzzy numbers by sign distance, Inform. Sci. **176** (2006) 2405–2416.

[4] S. Abbasbandy, B. Asady, Note on A new approach for defuzzification, Fuzzy Sets and Systems **128** (2002) 131–132.

[5] S. Abbasbandy, T. Hajjari. A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers, Comput. Math. Appl. **57** (2009) 413–419.

[6] S. Abbasbandy, T. Hajjari. An improvement on centroid point method for ranking of fuzzy numbers, J. Sci. I.A.U. **78** (2011) 109–119.

[7] B. Asady. The revised method of ranking LR fuzzy number based on deviation degree, Expert Systems with Applications **37** (2010) 5056–5060.

[8] M. Adamo, Fuzzy decision trees, Fuzzy Sets and Systems **128** (2002) 131–132; **4** (1980) 207–219.

[9] B. Asady, A. Zendehnam, Ranking fuzzy numbers by distance minimization, Appl. Math. Model. **31** (2007) 2589–2598.

[10] J.F. Baldwin, N.C.F. Guild, Comparison of fuzzy numbers on the same decision space, Fuzzy Sets and Systems **2** (1979) 213–233.

[11] S. Bass, H. Kwakernaak, Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets, Automatica **13** (1977) 47–58.

[12] S. Bodjanova . Median value and median interval of afuzzy number, Inform. Sci. **172** (2005) 73-89.

[13] G. Bortolan, R. Degani, A review of some methods for ranking fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems **15** (1985) 1–19.

[14] W.K. Chang, Ranking of fuzzy utilities with triangular membership functions, in: International Conference on Plicy Analysis and Informations Systems, Tamkang University, ROC, 1981, pp. 163–171.

[15] S. Chen, Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, Fuzzy Sets and Systems **17** (1985) 113–129.

[16] S.J. Chen, S.M. Chen. A new method for handling multicriteria fuzzy decisionmaking problems using FN-IOWA operators, Cybernetic and Systems **34** (2003) 109–137.

[17] S.J. Chen, C.L. Hwang, Fuzzy Multiple Attribute Decision Making, Spinger-Verlag, Berlin, 1992.

[18] L.H. Chen, H.W. Lu, An approximaite approach for ranking fuzzy numbers based on left and right dominance, Comput. Math. Appl. **41** (2001) 1589–1602.

[19] C.H. Cheng, A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method, Fuzzy Sets and Systems **95** (1998) 307–317.

[20] F. Choobineh, H. Li, An index for ordering fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems **54** (1993) 287–294.

[21] T. Chu, C. Tsao, Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and orginal point, Comput. Math. Appl. **43** (2002) 11–117.

[22] R. Coppi, P. D'Urso, P. Giordani, A. Santoro, Least squares estimation of a linear regression model with LR fuzzy response. Comput. Stat. Data Anal. 51 (2006) 267–286.

[23] D. Dubios, H. Prade, Operations on fuzzy numbers, J. System Sci. **9** (1978) 613–626.

[24] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and System: Theory and Application, Academic Press, New York, 1980.

[25] D. Dubois, H. Prade Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory Information Sciences **30** (1983) 18.

[26] A.N.S. Freeling Fuzzy sets and decision analysis IEEE Trans. Systems Man Cybernet. **10** (1980) 341–354.

[27] R. Goetschel, W. Voxman, Elementary calculus, Fuzzy Sets and Systems **18** (1986) 31–43.

[28] R. Jain, Decision-making in the presence of fuzzy variable, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **6** (1976) 698–703.

[29] R. Jain, A procedure for multi-aspect decision making using fuzzy sets, Int. J. Syst. Sci. **8** (1977) 1–7.

[30] A. Kauffman, M.M. Gupta, Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Application, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.

[31] E.S. Lee and R.L. Li, Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events, Comput. Math. Appl. **15** (1988) 887-896.

[32] M. Ma, M. Friedman, A. Kandel, A new fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets and Systems **108** (1999) 83–90.

[33] M. Ma, A. Kandel, M. Friedman, A new approach for defuzzification, Fuzzy Sets and Systems **111** (2000) 351–356.

[34] M. Modarres, S.S. Nezhad, Ranking fuzzy numbers by preference ratio, Fuzzy Sets and Systems **118** (2001).

[35] J.J. Saade, H. Schwarzlander, Ordering fuzzy sets over the real line: an approach based on decision making under uncertainty, Fuzzy Sets and Systems **50** (1992) 237–246.

[36] X. Wang, E.E. Kerre, Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), Fuzzy Sets and Systems **118** (2001) 375–385.

[37] Z.X. Wang, Y.J. Liu, Z.P Fan, B.Feng. Ranking L-R fuzzy numbers based on deviation degree, Inform. Sci. **176** (2009) 2070–2077.

[38] Y.J. Wang, H.Sh. Lee. The revised method of ranking fuzzy numbers with an area between the centroid and original points, Comput. Math. Appl. **55** (2008) 2033-2042.

[39] Y.M. Wang, J.B. Yang, D.L. Xu, K.S. Chin, On the centroids of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst. **157** (2006) 919–926.

[40] J. Yao, K. Wu, Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance, Fuzzy Sets and Systems **116** (2000) 275–288.

[41] R.R. Yager, On choosing between fuzzy subsets, Kybemetes **9** (1980) 151–154.

[42] R.R. Yager, A procedure for ordering fuzzy subests of the unit interval, Inf. Sci. **24** (1981) 143–161.

[43] H.J. Zimmermann, Fuzzy Sets Theory and its Application, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1991.

[44] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inf. Control **8** (1965) 338–353.

Enlaces Web

[45] Enlace Github al código implementado en este proyecto `https://github.com/msmaldonado/TFG`

[46] Python `https://www.python.org/`

[47] SymPy Development Team, SymPy: Python library for symbolic mathematics, 2016 `http://www.sympy.org/es/`

[48] Histórico del precio del barril de Brent `http://cincodias.com/mercados/materias_primas/petroleo_brent/1/historico/`