Kommutative Algebra

Maxim Smirnov

Universität Augsburg, Wintersemester 2023/2024
für Bachelor und Lehramt

Draft 11. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Ringe **5**
- 1.1 Ringe und Homomorphismen . . . 5
- 1.2 Polynomringe . . . 6
- 1.3 Ringe der formalen Potenzreihen . . . 7
- 1.4 Ideale und Faktorringe . . . 7
- 1.5 Nullteiler. Nilpotente. Einheiten. . . . 10
- 1.6 Primideale und maximale Ideale . . . 11
- 1.7 Nilradikal . . . 12
- 1.8 Operationen mit Ringen und Idealen . . . 13
- 1.9 Spektrum eines Ringes . . . 15

2 Moduln **17**
- 2.1 Moduln und Homomorphismen . . . 17
- 2.2 Untermoduln und Faktormoduln . . . 19
- 2.3 Direkte Summe und direktes Produkt . . . 20
- 2.4 Freie Moduln. Endlich Erzeugte Moduln. Torsion. . . . 20
- 2.5 Moduln über Hauptidealbereichen . . . 22
- 2.6 Moduln über nichtkommutativen Ringen . . . 24

3 Kategorientheorie **27**
- 3.1 Kategorien und Funktoren . . . 27
- 3.2 Exakte Sequenzen . . . 30
- 3.3 Additive und abelsche Kategorien . . . 32

4 Tensorprodukt **35**
- 4.1 Definition und erste Eigenschaften . . . 35
- 4.2 Restriktion und Erweiterung der Skalare . . . 38
- 4.3 Exaktheit des Tensorproduktes . . . 39
- 4.4 Tensorprodukt von Algebren . . . 41

5 Lokalisierung **42**
- 5.1 Lokalisierung von Ringen . . . 42
- 5.2 Lokalisierung von Moduln . . . 44
- 5.3 Lokale Eigenschaften . . . 46
- 5.4 Erweiterung und Kontraktion von Idealen . . . 47

6 Das Spektrum eines Rings **49**
- 6.1 Zariski-Topologie . . . 49
- 6.2 Garben . . . 50
- 6.3 Strukturgarbe auf Spec A . . . 52

7 Kettenbedingungen **54**
- 7.1 Definitionen und erste Eigenschaften . . . 54
- 7.2 Moduln endlicher Länge . . . 56

8 Noethersche Ringe **60**

9 Hilbertscher Nullstellensatz **63**

10 Artinsche Ringe **66**

11 Diskrete Bewertungsringe 70

Hauptreferenz: [1].

1 Ringe

1.1 Ringe und Homomorphismen

Definition 1.1. Ein Ring ist ein Tupel $(R, +, \cdot, 0, 1)$ bestehend aus einer Menge R, zweistelligen Verknüpfungen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation) und Elementen $0, 1 \in R$ mit den folgenden Eigenschaften:

R1 $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe (d.h. die Addition ist assoziativ, die Null ist das neutrale Element diesbezüglich, und jedes $x \in R$ hat ein Inverses $-x$).

R2 Die Multiplikation $\cdot \colon R \times R \to R$ ist assoziativ

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c, \in R.$$

R3 Das Element $1 \in R$, genannt die Eins, ist ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x \in R.$$

Dieses ist eindeutig definiert.

R4 Distributivität: für alle $a, b, c \in R$ gilt

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\ (b + c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a. \end{aligned}$$

R5 Ein Ring heißt kommutativ, wenn die Multiplikation kommutativ ist, d.h.

$$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R.$$

Bemerkung 1.2.

1. Wir werden fast ausschließlich kommutative Ringe betrachten, deswegen haben wir die Kommutativität in die Definition mit integriert.

2. Die obige Definition des Ringes schließt die Möglichkeit $1 = 0$ nicht aus. In diesem Fall folgt sofort, dass gilt $R = \{0\}$. Dieser Ring wird der Nullring genannt.

Beispiel 1.3.

1. $\mathbb{Z}$.

2. Jeder Körper ist ein Ring (z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

3. Polynomringe (später).

4. Funktionen auf einer Menge X mit Werten in $\mathbb{R}$ mit der üblichen punktweisen Addition und Multiplikation.

Definition 1.4. Seien R und S zwei Ringe. Eine Abbildung $f\colon R \to S$ heißt Ringhomomorphismus, wenn f mit den vorhandenen Strukturen verträglich ist, d.h.

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(ab) = f(a)f(b)$$
$$f(1) = 1$$

Beispiel 1.5.

1. Für jeden Ring R es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus in den Nullring.
2. Für jeden Ring R es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach R.
3. Seien A der Ring der $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf einer Menge X und $P \in X$ ein Punkt. Dann definiert man den Auswertungshomomorphismus

$$\varphi\colon A \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto f(P).$$

1.2 Polynomringe

Sei A ein Ring.

1) Ein Polynom in der Variablen x mit Koeffizienten in A ist ein Ausdruck der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_i \in A$. Die Addition und die Multiplikation definiert man auf die übliche Weise. Die Menge $A[x]$ aller Polynome in x mit Koeffizienten in A wird somit ein Ring.

Beachten Sie, dass die Polynome a priori keine Funktionen sind. Gegeben ein Polynom $P(x) \in A[x]$ kann man eine Funktion definieren

$$\widetilde{P}\colon A \to A$$
$$\widetilde{P}(a) := P(a).$$

Es kann aber passieren, dass zwei unterschiedliche Polynome dieselbe Funktion definieren.

2) Ein Polynom in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten in A ist eine endliche Summe der Form

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

Mit der üblichen Addition und Multiplikation ist die Menge $A[x_1, \ldots, x_n]$ aller Polynome ein Ring.

1.3 Ringe der formalen Potenzreihen

Eine formale Potenzreihe in x über einem Ring A ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots ,$$

wobei $a_i \in A$. Die Addition wird definiert als

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i .$$

Die Multiplikation wird definiert als

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\Big) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\Big) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \dots .$$

Mit diesen Verknüpfungen ist $A[[x]]$ ein kommutativer Ring.

1.4 Ideale und Faktorringe

Definition 1.6. Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine Untergruppe von R bezüglich der Addition.

1. S heißt ein Unterring, wenn $S \cdot S \subset S$ und $1 \in S$ (d.h. S ist ein Ring bezüglich der induzierten Multiplikation).
2. S heißt ein Ideal, wenn $S \cdot R \subset S$.

Definition 1.7.

1. Zu jeder Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Elementen $a_i \in R$ hat man das von den a_i erzeugte Ideal

   $$(a_i \mid i \in I).$$

   Das ist das kleinste Ideal, welches alle a_i enthält. Man sieht leicht, dass es aus allen Linearkombinationen

   $$r_1 a_{i_1} + \dots + r_n a_{i_n} , \qquad r_j \in R , i_k \in I$$

   besteht.
2. Ein Ideal J heißt endlich erzeugt, wenn es endlich viele Elemente $a_1, \dots a_n$ gibt, sodass gilt

   $$J = (a_1, \dots, a_n).$$

3. Eine besondere Rolle spielen die Ideale, die nur einen Erzeuger haben, d.h.

$$J = (x) = Rx.$$

Diese heißen Hauptideale.

Beispiel 1.8.

1. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ist ein Unterring, aber kein Ideal.
2. $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ist kein Unterring, da $1 \notin 2\mathbb{Z}$, aber ein Ideal.
3. Alle Ideal von $\mathbb{Z}$ sind Hauptideale (Übungsblatt 1).

Lemma 1.9. *Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus, dann ist das* Bild *von f*

$$\operatorname{Im} f := \{y \in S \mid \exists x \in R\colon f(x) = y\}$$

ein Unterring von S und der Kern *von f*

$$\operatorname{Ker} f := \{x \in R \mid f(x) = 0\}$$

ist ein Ideal von R.

Beweis. Gemacht in der Vorlesung. □

Lemma 1.10. *Ein Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ ist genau dann injektiv, wenn gilt $\operatorname{Ker} f = 0$.*

Beweis. Übungsblatt 1. □

Jetzt werden wir sehen, dass jedes Ideal als Kern eines Ringhomomorphismus entsteht.

Definition 1.11. Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal.

Erst betrachten wir R als eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition und $I \subset R$ als eine Untergruppe. Dann ist $I \subset R$ automatisch ein Normalteiler und man kann die Faktorgruppe R/I bilden. Die Elemente von R/I sind Nebenklassen $x + I$ mit $x \in R$ und die Addition wird als

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

definiert. Dadurch bekommen wir eine neue abelsche Gruppe R/I. Die Null in R/I ist die Nebenklasse $0 + I$.

Da R eigentlich ein Ring ist und $I \subset R$ ein Ideal ist, können wir die Faktorgruppe R/I mit einer Multiplikation ausstatten

$$(a + I) \cdot (b + I) := ab + I$$
$$1_{R/I} := 1 + I.$$

Die Wohldefiniertheit folgt daraus, dass I ein Ideal ist.

Es gibt einen natürlichen Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \pi\colon R &\to R/I \\ x &\mapsto x+I, \end{aligned}$$

und man sieht leicht, dass π surjektiv ist und es gilt

$$\operatorname{Ker}\pi = I.$$

Der Ring R/I wird Faktorring genannt. Den Homomorphismus $\pi\colon R \to R/I$ nennt man kanonische Projektion.

Satz 1.12 (Homomorphiesatz)**.** *Sei $R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$R/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} f$$

Beweis. Betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & S \\ R/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Es gibt einen eindeutigen wohldefinierten Homomorphismus $\overline{f}$, da folgendes wegen der Kommutativität gelten muss: $\overline{f}(a+I) = f(a)$.

Nach Konstruktion ist $\overline{f}$ injektiv. Das Bild von $\overline{f}$ ist gleich dem Bild von f. Dadurch erhalten wir die Aussage. $\square$

Satz 1.13 (Korrespondenzsatz für Ideale)**.** *Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Dann induziert die kanonische Projektion $\pi\colon R \to R/I$ eine Bijektion zwischen Idealen in R/I und Idealen in R, die I enthalten.*

Beweis. Die Bijektion ist gegeben durch

$$\alpha \mapsto \pi^{-1}(\alpha). \qquad (*)$$

Die Injektivität von $(*)$ folgt sofort aus: $\pi(\pi^{-1}(\alpha)) = \alpha$. Die Surjektivität folgt aus der Tatsache, dass für ein Ideal $J \subset R$, das I enthält, die Faktorgruppe J/I ein Ideal in R/I ist. $\square$

1.5 Nullteiler. Nilpotente. Einheiten.

Definition 1.14. Ein Element $x \in R$ heißt Nullteiler, wenn in R ein $y \neq 0$ existiert, sodass $xy = 0$. Ein Ring $R \neq 0$ ohne Nullteiler ($\neq 0$) heißt Integritätsbereich.

Z.B. sind $\mathbb{Z}$ und $k[x_1, \ldots, x_n]$ (hier ist k ein Körper) Integritätsbereiche.

Definition 1.15. Ein Element $x \in R$ heißt nilpotent, wenn es ein $n > 0$ gibt, sodass gilt $x^n = 0$.

Jedes nilpotente Element ist ein Nullteiler (wenn $R \neq 0$). Die Umkehrung ist aber falsch (Übungsblatt 1).

Definition 1.16. Ein Element $x \in R$ heißt Einheit, wenn es bezüglich der Multiplikation invertierbar ist, d.h. es existiert ein y in R, sodass $xy = 1$. Das Element y ist in diesem Fall eindeutig definiert und wird mit x^{-1} bezeichnet.

Lemma 1.17. *Eine formale Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in A[[x]]$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_0 \in A$ invertierbar ist.*

Beweis. Übungsblatt 1. □

Beispiel 1.18.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

Definition 1.19. Ein Ring $R \neq 0$ heißt Körper, wenn jedes $x \in R \setminus \{0\}$ eine Einheit ist.

Satz 1.20. *Sei R ein Ring $\neq 0$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *R ist ein Körper;*
2. *die einzigen Ideale in R sind (0) und (1);*
3. *jeder Homomorphismus $\varphi\colon R \to S$ mit $S \neq 0$ ist injektiv.*

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2) Sei $I \neq 0$ ein Ideal von R. Dann enthält I ein Element $x \neq 0$. Da x eine Einheit ist, gilt $I \supset (x) = R$. Somit gilt $I = R$.

2) $\Rightarrow$ 3) Betrachten wir den Kern von φ. Da der Kern ein Ideal ist, haben wir $\operatorname{Ker}\varphi = (0)$ oder $\operatorname{Ker}\varphi = (1)$. Da die zweite Variante nur im Fall $S = 0$ möglich ist, wird diese ausgeschlossen. Daraus folgt die Injektivität.

3) $\Rightarrow$ 1) Sei $x \in R$ eine Nichteinheit. Dann gilt $(x) \neq (1)$ und somit ist $S = R/(x)$ kein Nullring. Dann ist die kanonische Projektion $R \to R/I$ injektiv. Daraus folgt $(x) = 0$. □

1.6 Primideale und maximale Ideale

Definition 1.21. Sei $I \subset R$ ein echtes Ideal. Das Ideal I heißt

1. maximal $\iff$ es existiert kein echtes Ideal J mit $I \subset J$ und $I \neq J$.
2. Primideal $\iff$ wenn gilt $xy \in I$, dann gilt $x \in I$ oder $y \in I$.

Satz 1.22. *Sei $I \subset R$ ein Ideal.*

1. *I ist maximal $\iff$ R/I ist ein Körper.*
2. *I ist ein Primideal $\iff$ R/I ist ein Integritätsbereich.*

Beweis. 1) Korrespondenzsatz für Ideale.

2) Folgt sofort aus der Definition: $[x][y] = 0 \iff [x] = 0$ oder $[y] = 0$. □

Bemerkung 1.23. Nach diesem Satz sind alle maximalen Ideale auch Primideale. Die Umkehrung ist aber falsch (z.B. $(0) \subset \mathbb{Z}$).

Satz 1.24. *Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $I \subset S$ ein Primideal. Dann ist $f^{-1}(I) \subset R$ auch ein Primideal.*

Beweis. Erstens ist das Urbild eines Ideals ein Ideal, d.h. $f^{-1}(I)$ ist ein Ideal von R. Zweitens betrachten wir das folgende kommutative Diagramm (Homomorphiesatz anwenden):

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "\psi"] \arrow[d] & S \arrow[r] & S/I \\
R/\operatorname{Ker}\psi \arrow[urr, dashed, "\overline{\psi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Laut Homomorphiesatz ist $\overline{\psi}$ injektiv. Da $\operatorname{Ker}\psi = f^{-1}(I)$, können wir $R/\operatorname{Ker}\psi = R/f^{-1}(I)$ als Unterring von S/I betrachten. Laut Satz 1.22 ist S/I ein Integritätsbereich und somit ist $R/f^{-1}(I)$ es auch. Fertig nach Satz 1.22. □

Bemerkung 1.25. Die Aussage des Satzes gilt nicht für maximale Ideale (z.B. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

Primideale spielen eine besondere Rolle in der kommutativen Algebra und in der algebraischen Geometrie. Das folgende Resultat garantiert, dass jeder Ring ($\neq 0$) mindestens ein Primideal hat.

Theorem 1.26. *Jeder Ring $R \neq 0$ hat ein maximales Ideal.*

Beweis. Das Lemma von Zorn[1] auf das (nichtleere) partiell geordnete Menge von echten Idealen in R anwenden. Gegeben eine aufsteigende Kette von solchen Idealen α_i, deren obere Schranke ist gegeben durch $\cup_i \alpha_i$. □

[1] Sei P eine nichtleere partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge (=eine Kette) eine obere Schranke hat. Dann enthält P mindestens ein maximales Element.

Bemerkung 1.27. Für noethersche Ringe kann man das Theorem ohne Lemma von Zorn beweisen (später).

Korollar 1.28. *Für jedes Ideal $I \subset R$ mit $I \neq R$ existiert ein maximales Ideal, in welchem I enthalten ist.*

Beweis. Das Theorem auf den Ring R/I anwenden und den Korrespondenzsatz für Ideale benutzen. □

Korollar 1.29. *Jede Nichteinheit ist in einem maximalen Ideal enthalten.*

Beweis. Das Ideal (x) betrachten und Korollar anwenden. □

Definition 1.30. Ein Ring R heißt lokal, wenn es in R genau ein maximales Ideal gibt.

Beispiel 1.31. Jeder Körper ist lokal, $k[[x]]$ ist lokal, $k[x]/x^n$ ist lokal.

Satz 1.32.

1. *Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \neq (1)$ ein Ideal, sodass jedes $x \in R \setminus \mathfrak{m}$ eine Einheit ist. Dann ist R ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$.*

2. *Sei R ein Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R, sodass jedes Element von $1+\mathfrak{m}$ eine Einheit ist. Dann ist R ein lokaler Ring.*

Beweis. 1) Elemente eines Ideals $\neq (1)$ sind immer Nichteinheiten. Somit müssen alle Ideale in $\mathfrak{m}$ enthalten sein.

2) Betrachten wir ein $x \in R \setminus \mathfrak{m}$ und zeigen, dass es eine Einheit sein muss. Da $x \notin \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist, erzeugen (als Ideal) $\mathfrak{m}$ und x den ganzen Ring R. Somit gilt $1 = xy + t$ für $y \in R$ und $t \in \mathfrak{m}$. Daraus folgt $xy \in 1 + \mathfrak{m}$ und ist somit eine Einheit. Somit ist auch x eine Einheit. Jetzt Teil 1 anwenden. □

Lemma 1.33. *In einem Hauptidealbereich ist jedes Primideal entweder (0) oder ein maximales Ideal.*

Beweis. Da R ein Integritätsbereich ist, ist (0) ein Primideal (Satz 1.22).

Sei jetzt $\mathfrak{p} = (x)$ ein Primideal $\neq 0$ und $(y) \supset (x)$ ein echtes Ideal, welches (x) enthält. Dann haben wir: $x = ya \Rightarrow a \in (x) \Rightarrow a = xb \Rightarrow x = yxb \Rightarrow x(1-yb) = 0 \Rightarrow yb = 1 \Rightarrow (y) = R$. □

Beispiel 1.34. $\mathbb{Z}$ und $k[x]$ sind Hauptidealbereiche.

1.7 Nilradikal

Satz 1.35. *Die Menge $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Elemente in einem Ring R ist ein Ideal. Der Faktorring $R/\mathfrak{N}$ hat keine Nilpotente außer 0.*

Beweis. Sei x ein Nilpotent. Dann ist das Element ax auch nilpotent für jedes $a \in R$. Seien x, y zwei Nilpotente: $x^m = 0$ und $y^n = 0$. Dann ist auch $(x+y)^{m+n} = 0$. Somit ist $\mathfrak{N}$ ein Ideal.

Sei $\overline{x} = x + \mathfrak{N} \in R/\mathfrak{N}$ ein Nilpotent, d.h. $\overline{x}^n = 0$ für ein n. Somit gilt $x^n \in \mathfrak{N}$. Dann ist x auch ein Nilpotent in R, und somit in $\mathfrak{N}$ enthalten ist. Daraus folgt $\overline{x} = 0$. □

Satz 1.36. *Sei R ein Ring $\neq 0$. Es gilt*

$$\mathfrak{N} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \textit{Primideale von } R} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Sei $f \in R$ ein Nilpotent und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Wir haben: $f^n = 0 \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \mathfrak{p}$. Somit ist f in allen Primidealen enthalten.

Sei jetzt $f \in R$ kein Nilpotent. Wir möchten zeigen, dass es ein Primideal gibt, in welchem f nicht enthalten ist. Sei Σ die Menge aller Ideale α mit der Eigenschaft

$$n > 0 \Rightarrow f^n \notin \alpha.$$

Da $(0) \in \Sigma$ gilt, ist diese Menge nicht leer. Wie in Theorem 1.26 können wir hier auch das Lemma von Zorn anwenden und ein maximales Element von Σ erhalten, das wir mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen. Wir zeigen jetzt, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Seien $x, y \notin \mathfrak{p}$. Dann sind die Ideale $(x) + \mathfrak{p}$ und $(y) + \mathfrak{p}$ echt größer als $\mathfrak{p}$, und sind somit nicht in Σ enthalten. Also gilt

$$f^m \in (x) + \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad f^n \in (y) + \mathfrak{p}$$

für gewisse $m, n > 0$. Daraus folgt $f^{m+n} \in (xy) + \mathfrak{p}$. Somit ist $(xy) + \mathfrak{p}$ nicht in Σ und $xy \notin \mathfrak{p}$. □

1.8 Operationen mit Ringen und Idealen

Definition 1.37. 1) Seien I, J zwei Ideale. Die Summe von I und J ist ein Ideal von R, definiert als

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}.$$

Das Ideal $I + J$ ist das kleinste Ideal, welches I und J enthält. Analog kann man die Summe einer beliebigen Familie $\{I_s\}_{s \in S}$ von Idealen definieren.

2) Seien I, J zwei Ideale. Man definiert das Produkt als das Ideal erzeugt von den Produkten xy mit $x \in I$ und $y \in J$. Es gilt

$$IJ = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in J, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Analog kann man das Produkt einer endlichen Familie $\{I_1, \dots, I_n\}$ von Idealen definieren. Insbesondere können wir über Potenzen $I^n = I \dots I$ sprechen.

3) Der Schnitt $\cap_{s \in S} I_s$ einer beliebigen Familie $\{I_s\}_{s \in S}$ von Idealen ist ein Ideal.

Beispiel 1.38. Sei $R = \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(a) + (b) = gcd(a, b)$$
$$(a) \cap (b) = lcm(a, b)$$
$$(a)(b) = (ab)$$

Definition 1.39. Sei $I \subset R$ ein Ideal. Das Ideal

$$r(I) = \{x \in R \mid \exists n : x^n \in I\}$$

nennt man Radikal von I.

Beispiel 1.40. Sei $R = \mathbb{Z}$ und $I = (18)$. Dann gilt $r(I) = (6)$.

Satz 1.41. *Das Radikal von I ist der Schnitt aller Primideale, die I enthalten.*

Beweis. Satz 1.36 auf R/I anwenden (Übungsblatt 2). □

Definition 1.42. Seien R und S Ringe. Das direkte Produkt ist definiert als

$$R \times S = \{(x, y) \mid x \in R, y \in S\}$$

mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation. Die Null ist $(0, 0)$ und die Eins ist $(1, 1)$.

Das direkte Produkt ist mit den kanonischen Projektionen

$$\begin{aligned} &p_1 \colon R \times S \to R \\ &p_1(r, s) = r \\ &p_2 \colon R \times S \to S \\ &p_2(r, s) = s \end{aligned}$$

ausgestattet, und besitzt folgende universelle Eigenschaft: Für jeden Ring T und beliebige Ringhomomorphismen $f \colon T \to R$ und $g \colon T \to S$ gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\psi \colon T \to R \times S$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rrr, dashed, "\exists!\psi"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrrr, "g"] & & & R \times S \arrow[dll] \arrow[dr] & \\ & R & & & S \end{tikzcd}$$

Man kann zeigen, dass diese universelle Eigenschaft das direkte Produkt eindeutig definiert (Übungsblatt 3).

Analog kann man das Produkt einer beliebigen (auch unendlichen) Familie von Ringen definieren.

Beispiel 1.43. Es gilt $\mathbb{Z}/(6) = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3)$.

Allgemeiner gilt folgendes Lemma.

Lemma 1.44. *Sei R ein Ring, $I_1, \ldots, I_n$ Ideale und ψ der kanonische Homomorphismus*

$$R \to R/I_1 \times \cdots \times R/I_n.$$

Dann gilt:

1. *I_a und I_b sind koprim für $a \neq b \Rightarrow \prod_s I_s = \cap_s I_s$*
2. *ψ ist surjektiv $\iff$ I_a und I_b sind koprim für $a \neq b$*
3. *ψ ist injektiv $\iff$ $\cap_s I_s = (0)$*

Beweis. Übungsblatt 3. □

1.9 Spektrum eines Ringes

Definition 1.45. Sei R ein Ring. Die Menge aller Primideale wird Spektrum von R genannt und mit $\operatorname{Spec} R$ bezeichnet.

Vorerst ist $\operatorname{Spec} R$ nur eine Menge. Als Nächstes definieren wir eine Topologie darauf.

Definition 1.46. Eine Topologie auf einer Menge X ist ein Mengensystem T bestehend aus Teilmengen von X, den sogenannten offene Teilmengen, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $\emptyset$ und X sind offen;

2. die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen ist offen;

3. der Schnitt endlich vieler offener Teilmengen ist offen.

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Ein topologischer Raum ist eine Menge X ausgestattet mit einer Topologie T.

Bemerkung 1.47. Äquivalent kann man abgeschlossene Teilmengen benutzen, um eine Topologie zu definieren. Für diese soll gelten:

1. $\emptyset$ und X sind abgeschlossen;

2. die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen ist abgeschlossen;

3. der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen ist abgeschlossen.

Jetzt sind wir bereit um eine Topologie auf $\operatorname{Spec} R$ zu definieren.

Definition 1.48. Sei R ein Ring und $E \subset R$ eine Teilmenge. Die Menge aller Primideale von R, die E enthalten, bezeichnen wir mit $V(E)$. Diese wird Verschwindungsmenge von E genannt. Es ist leicht zu sehen, dass gilt $V(E) = V(\langle E \rangle)$. Somit genügt es $V(I)$, wobei $I \subset R$ ein Ideal ist, anzuschauen.

Lemma 1.49. *Es gelten folgende Eigenschaften:*

$$\begin{aligned}
&V(0) = \mathit{Spec}\, R \quad \mathit{und} \quad V(R) = \emptyset \\
&\cap_s V(I_i) = V(\sum_s I_s) \\
&V(I) \cup V(J) = V(IJ) \\
&V(I) = V(r(I))
\end{aligned}$$

Beweis. Die ersten zwei Punkte wurden in der Vorlesung bewiesen. Die letzten beiden werden auf Übungsblatt 4 gestellt. $\square$

Definition 1.50. Nach Lemma 1.49 erfüllen die Mengen $V(I)$ die Eigenschaften der abgeschlossen Teilmengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec} R$. Diese Topologie wird Zariski-Topologie genannt.

Beispiel 1.51.

1. Sei $R = K$ ein Körper. Das Nullideal ist das einzige Primideal. Somit hat die Menge $\operatorname{Spec} K$ nur einen Punkt. Die Topologie ist eindeutig.

2. Sei $R = \mathbb{Z}$. Die Primideale sind der Form (p) mit p einer Primzahl oder das Nullideal (0). Die abgeschlossenen Teilmengen sind der Form $V(n) = \{\text{Primteiler von } n\}$, die ganze Menge $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und die leere Teilmenge $\emptyset$.

   Eine amüsante Eigenschaft dieser Topologie ist Folgendes: Die Punkte der Form (p) mit einer Primzahl sind abgeschlossen. Im Gegensatz dazu ist der Punkt (0) nicht abgeschlossen: Die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, die (0) enthält ist $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ selbst, d.h. der Punkt (0) ist dicht in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Solche Punkte nennt man generische Punkte.

3. Sei $R = \mathbb{C}[x]$. Die Primideale sind von der Form $(x-a)$ mit $a \in \mathbb{C}$ oder das Nullideal (0). Die abgeschlossenen Teilmengen sind von der Form $V(f(x)) = \{\text{Nullstellen von } f(x)\}$. Auch in diesem Fall ist der Punkt (0) ein generischer Punkt.

Motivation: In der modernen algebraischen Geometrie ordnet man einem Ring R ein geometrisches Objekt zu: Sein Spektrum $\operatorname{Spec} R$ ausgestattet mit der Zariski-Topologie und einer Garbe von Funktionen darauf (kommt später). Solche geometrischen Objekte nennt man affine Schemata. Ein allgemeines Schema wird dann als eine Verklebung von affinen Schemata definiert.

Definition 1.52. Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dieser induziert eine natürliche Abbildung von Spektren

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\colon \operatorname{Spec} S &\to \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} &\mapsto f^{-1}(\mathfrak{p}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

(wohldefiniert nach Satz 1.24).

Definition 1.53. Eine Abbildung $\psi\colon X \to Y$ von topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn für jedes offenes $U \subset Y$ das Urbild $\psi^{-1}(U) \subset X$ auch offen ist.

Lemma 1.54. *Die Abbildung* (1.1) *ist stetig.*

Beweis. Sei $I \subset R$ ein Ideal. Es gilt (Übungsblatt 4)

$$\widetilde{f}^{-1}\big(V(I)\big) = V(f(I)).$$

Somit sind die Urbilder von abgeschlossenen Teilmengen abgeschlossen. Dann sind auch die Urbilder von offen Teilmengen offen. $\square$

2 Moduln

2.1 Moduln und Homomorphismen

Definition 2.1. Sei R ein Ring. Ein R-Modul ist eine abelsche Gruppe M (additiv geschrieben) ausgestattet mit einer „Wirkung“ von R

$$\begin{aligned}\mu\colon R \times M &\to M \\ (a, m) &\mapsto \mu(a, m) = a \cdot m\end{aligned}$$

die die folgenden Eigenschaften haben soll:

$$\begin{aligned}&(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x \\ &a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y \\ &(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \\ &1 \cdot x = x\end{aligned}$$

für alle $a, b \in R$ und $x, y \in M$.

Der Begriff eines Moduls verallgemeinert mehrere bekannte Begriffe.

Beispiel 2.2.
Kommutative Beispiele:

1. Moduln über einem Körper K sind K-Vektorräume.
2. Moduln über $\mathbb{Z}$ sind abelsche Gruppen.
3. Jeder Ring R ist ein R-Modul. Jedes Ideal $I \subset R$ ist ein R-Modul.
4. Für jeden Ring R ist das direkte Produkt R^n auch ein R-Modul.
5. Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann können wir S mit einer R-Modulstruktur ausstatten: $r \cdot m := f(r)m$ für $r \in R$ und $m \in S$.
6. Sei K ein Körper und $R = K[x]$. Ein Modul über R ist ein K-Vektorraum V mit einer K-linearen Abbildung $V \to V$.

Geometrische Motivation: Sei X ein Raum (topologischer Raum, glatte Mannigfaltigkeit, komplexe Mannigfaltigkeit, algebraische Varietät etc), $\mathcal{O}(X)$ der Ring von globalen Funktionen auf X, und $E \to X$ ein Vektorbündel. Dann ist die Menge $E(X)$ der globalen Schnitte von E ein Modul über $\mathcal{O}(X)$.

Definition 2.3.

1. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ von R-Moduln heißt ein Homomorphismus von R-Moduln (oder R-linear), wenn gilt

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$$

für alle $x, y \in M$ und $a \in R$.

2. Die Menge aller R-linearen Homomorphismen $f\colon M \to N$ bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Hom}_R(M, N).$$

Das ist auch ein R-Modul (mit der punktweisen Addition und Wirkung von R).

3. Die Endomorphismen

$$\mathrm{End}_R(M) := \mathrm{Hom}_R(M, M)$$

bilden einen (nichtkommutativen!) Ring.

4. Wie früher: ein Mono(Epi-, Iso-)morphismus ist ein injektiver (surjektiver, bijektiver) Homomorphismus.

Beispiel 2.4.

1. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $a \in R$ ein Element. Dann ist die Abbildung $m \mapsto am$ ein Homomorphismus.

2. Ein $f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ ist eindeutig durch $f(1)$ definiert. Dadurch erhalten wir einen Isomorphismus von R-Moduln

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(R, M) &\to M \\ f \quad &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

3. Homomorphismen $R^n \to R^m$ sind durch $n \times m$-Matrizen gegeben.

4. Sei R ein Integritätsring und $I \subset R$ ein Ideal. Dann gilt $\mathrm{Hom}_R(R/I, R) = 0$.

2.2 Untermoduln und Faktormoduln

Definition 2.5.

1. Sei M ein R-Modul. Eine Untergruppe $N \subset M$ heißt Untermodul, wenn diese bezüglich der Multiplikation mit R abgeschlossen ist.

2. Sei $N \subset M$ ein Untermodul. Die Faktorgruppe M/N hat eine natürliche R-Modul-Struktur: $a(m+N) = am+N$. Dieser Modul wird Faktormodul genannt. Die natürliche Abbildung $M \to M/N$ ist ein Homomorphismus von R-Moduln.

Definition 2.6. Sei $f\colon M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, dann sind der Kern und das Bild

$$\operatorname{Ker} f := \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$
$$\operatorname{Im} f := \{y \in N \mid \exists x \in M\colon f(x) = y\}$$

Untermoduln von M bzw. N.

Satz 2.7 (Homomorphiesatz)**.** *Sei $f\colon M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$M/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Im} f$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.8 (Korrespondenzsatz)**.** *Sei M ein R-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul. Dann induziert die kanonische Projektion $\pi\colon M \to M/N$ eine Bijektion zwischen Untermoduln von M/N und Untermoduln von M, die N enthalten.*

Beweis. Übung. □

Definition 2.9. Sei M ein R-Modul und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M.

1. Die Summe $\sum_i M_i$ ist die Menge aller endlichen Summen $\sum_i x_i$ mit $x_i \in M_i$. Diese ist der kleinste Untermodul von M, welcher alle M_i enthält.

2. Der Schnitt $\bigcap_{i\in I} M_i$ ist auch ein Untermodul von M.

Satz 2.10.

1. *Seien $M \supset M' \supset M''$ Moduln über R. Dann gilt*

$$(M/M'')/(M'/M'') \simeq M/M'$$

2. *Seien $M_{1,2} \subset M$ Untermoduln. Dann gilt*

$$(M_1 + M_2)\,/M_1 \simeq M_2/(M_1 \cap M_2).$$

Beweis. Übungsblatt 5. □

2.3 Direkte Summe und direktes Produkt

Definition 2.11. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln.

1. Die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ wird definiert als
$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \big\{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i,\ \text{endliche viele } m_i \neq 0\big\}.$$

2. Das direkte Produkt $\prod_{i\in I} M_i$ wird definiert als
$$\prod_{i\in I} M_i = \big\{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i\big\}.$$

Die beiden sind wieder R-Moduln mit den komponentenweisen Operationen. Ähnlich zu Ringen kann man die beiden auch durch universelle Eigenschaften definieren (später).

2.4 Freie Moduln. Endlich Erzeugte Moduln. Torsion.

Lemma 2.12. *Sei $R \neq 0$ ein Ring und $R^n \simeq R^m$ als R-Moduln. Dann gilt $m = n$.*

Beweis. Seien $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal, $M = R^m$ und $N = R^n$. Ein Isomorphismus $M \simeq N$ induziert einen Isomorphismus von Untermoduln[2] $\mathfrak{m}M \simeq \mathfrak{m}N$. Somit erhalten wir einen Isomorphismus $M/\mathfrak{m}M \simeq N/\mathfrak{m}N$. Also es gilt $(R/\mathfrak{m})^m \simeq (R/\mathfrak{m})^n$ als R-Moduln. Daraus folgt, dass $(R/\mathfrak{m})^m \simeq (R/\mathfrak{m})^n$ auch als $R/\mathfrak{m}$-Vektorräume isomorph sind und wir erhalten $m = n$. □

Definition 2.13. Sei M ein R-Modul.

1. M heißt frei $\iff$ $\exists$ ein Isomorphismus $M \simeq \bigoplus_{i\in I} R$.

2. M heißt frei vom Rang n $\iff$ $card(I) = n$ ist endlich.[3]

Beispiel 2.14. Eine Familie von Elementen $\{e_1, \dots, e_n\}$ von M heißt Basis, wenn jedes $m \in M$ eindeutig als Linearkombination $\sum_i a_i m_i$ mit $a_i \in R$ geschrieben werden kann.

$M = R^n$: Man sieht leicht, dass die Elemente
$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\dots \\ e_n &= (0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$
von R^n eine Basis bilden. Diese Basis werden wir Standardbasis von R^n nennen.

[2] Für einen R-Modul M und ein Ideal $\alpha \subset R$ definiert man den Untermodul
$$\alpha M := \{\sum_i a_i m_i \mid a_i \in \alpha, m_i \in M\}.$$

[3] Wohldefiniert nach dem Lemma.

Lemma 2.15. *Ein R-Modul M ist frei vom Rang $n \iff$ es gibt eine Basis von M mit n Elementen.*

Beweis. Übung. □

Lemma 2.16. *Sei M ein R-Modul und $f\colon M \to R^n$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann existiert eine Spaltung[4] $g\colon R^n \to M$ und ein Isomorphismus*

$$h\colon M \to R^n \oplus \operatorname{Ker} f.$$

Beweis. Sei $R^n = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n$. Wähle $m_i \in M$ mit $f(m_i) = e_i$ und definiere $g\colon R^n \to M$ als

$$g(c_1e_1 + \cdots + c_ne_n) = c_1m_1 + \cdots + c_nm_n.$$

Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{R^n}$. Nun definiere $h\colon M \to R^n \oplus \operatorname{Ker} f$ als

$$h(m) = (f(m), g(f(m)) - m).$$

Das ist ein Isomorphismus (Übungsblatt 5). □

Bemerkung 2.17. Nach Homomorphiesatz induziert jeder surjektive Homomorphismus $M \to N$ einen Isomorphismus $M/\operatorname{Ker} f \simeq N$. Es ist aber sehr selten, dass es eine Zerlegung $M \simeq N \oplus \operatorname{Ker} f$ gibt. Z.B. geht es für die kanonische Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht (Übungsblatt 5).

Definition 2.18. Ein R-Modul M heißt endlich erzeugt, wenn es einen surjektiven Homomorphismus $R^n \to M$ gibt. Äquivalent: ein R-Modul M ist endlich erzeugt, wenn es endlich viele Elemente $m_1, \ldots, m_n \in M$ gibt, sodass jedes $m \in M$ als R-Linearkombination von m_i's geschrieben werden kann. Solche Elemente werden Erzeuger von M genannt (die Zahl n ist nicht festgelegt).

Definition 2.19. Sei M ein R-Modul. Ein Element $m \in M$ heißt Torsionselement, wenn es ein $a \neq 0$ in R gibt, sodass gilt $am = 0$. Ein Modul ohne Torsionselemente $\neq 0$ heißt torsionsfrei.

Lemma 2.20. *Sei R ein Integritätsbereich und M ein R-Modul.*

1. *Die Menge $M_{tors} \subset M$ aller Torsionselemente ist ein Untermodul von M.*
2. *Der Faktormodul M/M_{tors} ist torsionsfrei.*

Lemma 2.21. *Sei M ein endlich erzeugter torsionsfreier Modul über einem Integritätsbereich R. Dann existiert eine Einbettung[5] $M \to R^d$.*

[4] D.h. $f \circ g = \mathrm{id}_{R^n}$.

[5] Einbettung = injektiver Homomorphismus.

Beweis. Sei K der Quotientenkörper von R und $x_1, \dots, x_n$ Erzeuger von M.

1. *Es gibt höchstens n linear unabhängige Elemente in M:* Sei $f\colon R^n \to M$ der Homomorphismus definiert durch $f(e_i) = x_i$. Seien $y_1, \dots, y_k$ linear unabhängig, dann ist der Untermodul aufgespannt von den y_i's isomorph zu R^k. Man kann schreiben $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ und dann zu R^n liften: $v_i := \sum_j a_{ij} e_j$. Es gilt $f(v_i) = y_i$. Da $y_1, \dots, y_k$ linear unabhängig in M sind, sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig in R^n. Somit sind diese auch in K^n linear unabhängig über K.

2. Sei $t_1, \dots, t_d$ eine maximale (größtmögliche) Familie von linear unabhängigen Elementen. Dann gilt
$$\sum_i Rt_i \simeq R^d.$$
Für jedes $x \in M$ sind die Elemente $\{x, t_1, \dots, t_d\}$ linear abhängig. Somit gilt
$$ax = \sum_i a_i t_i$$
mit $a \neq 0$. D.h. $ax \in \sum_i Rt_i$. Jetzt können wir x über $\{x_1, \dots, x_n\}$ variieren lassen und erhalten, dass es ein $a \in R \setminus \{0\}$ gibt, sodass
$$ax_j \in \sum_i Rt_i \qquad \forall j.$$
Daraus folgt $aM \subset \sum_i Rt_i$. Nun erhalten wir die gewünschte Einbettung als die Komposition
$$\begin{aligned} &M \overset{\simeq}{\to} aM \subset \sum_i Rt_i \overset{\simeq}{\to} R^d \\ &m \mapsto am. \end{aligned}$$

□

2.5 Moduln über Hauptidealbereichen

Theorem 2.22. *Sei R ein Hauptidealbereich. Dann ist jeder Untermodul eines freies R-Moduls vom Rang n auch frei vom Rang $\leq n$.*

Beweis. OBDA können wir direkt mit Untermoduln von R^n arbeiten. Der Beweis des Theorems ist durch die Induktion nach dem Rang gegeben.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$, d.h. wir befassen uns mit Untermoduln von R. Die Untermoduln von R sind genau die Ideale von R (gilt für beliebige Ringe). Da R ein Hauptidealbereich ist, sind alle Ideale frei vom Rang 1. Um das zu sehen, betrachten wir den Homomorphismus
$$\begin{aligned} R &\to R \\ a &\mapsto ax \end{aligned}$$

welcher injektiv ist, und dessen Bild das Ideal (x) ist.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für R^n mit $n \geq 1$ bekannt ist. Zu zeigen ist, dass jeder Untermodul $M \subset R^{n+1}$ frei vom Rang $\leq n+1$ ist. Sei $\pi\colon M \to R^n$ der Homomorphismus gegeben als die Komposition $M \subset R^{n+1} = R \oplus R^n \to R^n$. Nach der Induktionsannahme ist das Bild $\pi(M) \subset R^n$ frei vom Rang $\leq n$. Somit erhalten wir nach Lemma 2.16 eine Zerlegung

$$M \simeq N \oplus \operatorname{Ker} \pi,$$

wobei

$$\operatorname{Ker} \pi = M \cap (R \oplus 0).$$

Insbesondere ist $\operatorname{Ker} \pi$ ein Untermodul von $(R \oplus 0)$. Da alle Untermoduln von $R = R \oplus 0$ frei vom Rang ≤ 1 sind, sehen wir, dass M frei vom Rang $\leq n+1$ ist. □

Bemerkung 2.23. Übungsblatt 5:

1. Wenn R kein Hauptidealbereich ist, es also ein Ideal $I \subset R$ gibt, das kein Hauptideal ist, dann ist I kein freier R-Modul.

2. Wenn R ein Hauptidealring ist, aber einen Nullteiler $x \neq 0$ hat, dann ist das Hauptideal (x) kein freier R-Modul.

Korollar 2.24. *Endlich erzeugte torsionsfreie Moduln über einem Haupidealbereich sind frei.*

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 2.21 und Theorem 2.22. □

Korollar 2.25. *Jeder endlich erzeugte Modul M über einem Haupidealbereich R lässt sich als direkte Summe*

$$M \simeq R^n \oplus M_{tors}$$

schreiben.

Beweis. Nach Korollar 2.24 ist M/M_{tors} frei von endlichem Rang, d.h. $M/M_{tors} \simeq R^n$. Jetzt kann man Lemma 2.16 auf die kanonische Projektion $M \to M/M_{tors}$ anwenden. □

Theorem 2.26. *Jeder endlich erzeugte Torsionsmodul M (d.h. $M = M_{tors}$) über einem Haupidealbereich R lässt sich als direkte Summe*

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} R/(a_i).$$

schreiben.

Beweis. Ohne Beweis. □

2.6 Moduln über nichtkommutativen Ringen

In diesem Abschnitt sind Ringe nicht unbedingt kommutativ.

Definition 2.27. Sei R ein Ring.

- Ein R-Linksmodul ist eine abelsche Gruppe M (additiv geschrieben) ausgestattet mit einer linken „Wirkung“ von R

  $$\begin{aligned} \mu \colon R \times M &\to M \\ (a, m) &\mapsto \mu(a, m) = a \cdot m, \end{aligned}$$

  die die folgenden Eigenschaften haben soll:

  $$\begin{aligned} &(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x \\ &a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y \\ &(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \\ &1 \cdot x = x \end{aligned}$$

  für alle $a, b \in R$ und $x, y \in M$.

- Ein R-Rechtsmodul ist eine abelsche Gruppe M ausgestattet mit einer rechten „Wirkung“ von R

  $$\begin{aligned} \mu \colon M \times R &\to M \\ (m, a) &\mapsto \mu(m, a) = m \cdot a, \end{aligned}$$

  die die folgenden Eigenschaften haben soll:

  $$\begin{aligned} &x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b \\ &(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a \\ &x \cdot (a \cdot b) = (x \cdot a) \cdot b \\ &x \cdot 1 = x \end{aligned}$$

  für alle $a, b \in R$ und $x, y \in M$.

Homomorphismen, Untermoduln und Faktormoduln werden analog zum kommutativen Fall definiert.

Jetzt werden wir drei Klassen von Beispielen einführen.

2.6.1 Gruppendarstellungen

Sei G eine Gruppe (z.B. eine endliche Gruppe) und k ein Körper.

Eine Darstellung von G ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho\colon G \to GL(V)$, wobei V ein k-Vektorraum ist. Mit anderen Worten eine Darstellung ist eine lineare Wirkung von G auf V. Ein Homomorphismus von $\rho_1\colon G \to GL(V)$ nach $\rho_2\colon G \to GL(W)$ ist eine k-lineare Abbildung $\psi\colon V \to W$, die mit der Wirkung von G kommutiert, d.h. es gilt $\psi \circ \rho_1 = \rho_2$.

Der Gruppenring von G über k ist die Menge

$$k[G] = \Big\{ \sum_{g\in G} a_g g \mid \text{ nur endliche viele } a_g \text{ sind} \neq 0 \Big\}$$

mit der koeffizientenweisen Addition und mit der Multiplikation der Form

$$\big(\sum_{g\in G} a_g g\big) \cdot \big(\sum_{h\in G} b_h h\big) := \sum (a_g b_h)(gh).$$

Der Gruppenring ist genau dann kommutativ, wenn die Gruppe G abelsch ist.

Darstellungen von G = $k[G]$-Linksmoduln.

2.6.2 Köcherdarstellungen

Köcher, Köcherdarstellungen und Pfadalgebren wurden in der Vorlesung kurz eingeführt. Am besten schauen Sie noch diese Notizen von Michel Brion an.

2.6.3 $\mathcal{D}$-Moduln

Polynomielle Differentialoperatoren endlicher Ordnung in einer Variable x bilden einen nichtkommutativen Ring $\mathcal{D}$. Als Menge setzen wir

$$\mathcal{D} = \Big\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)\partial_x^i \mid a_i(x) \in k[x] \text{ nur endlich viele} \neq 0 \Big\}. \tag{2.1}$$

Die Addition:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)\partial_x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x)\partial_x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i(x) + b_i(x))\partial_x^i.$$

Die Multiplikation: erst formal ausmultiplizieren

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)\partial_x^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x)\partial_x^i = \sum a_i(x)\partial_x^i b_j(x)\partial_x^j$$

und dann in die Form (2.1) mit Hilfe von

$$[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$$

bringen. Z.B.

$$(x^2\partial_x + 1) \cdot x\partial_x = x^2\partial_x x\partial_x + x\partial_x = x^2(x\partial_x + 1)\partial_x + x\partial_x = x^3\partial_x^2 + (x + x^2)\partial_x.$$

Moduln über dem Ring $\mathcal{D}$ nennt man $\mathcal{D}$-Moduln. Diese und deren Verallgemeinerungen (auf mehrere Variablen etc.) spielen eine wesentliche Rolle in der Mathematik. LINK Solche Begriffe wie z.B. Vektorbündel mit Zusammenhang lassen sich auch in der Sprache von $\mathcal{D}$-Moduln auffassen.

Beispiel 2.28.

1. Der Polynomring $\mathcal{O} = k[x]$ mit der üblichen Ableitung ist ein $\mathcal{D}$-Linksmodul.

2. Sei $P \in \mathcal{D}$ ein Differentialoperator (z.B. $P = \partial_x^2 - 1$) und

$$Py = 0 \tag{2.2}$$

die dazugehörige Differentialgleichung (für $P = \partial_x^2 - 1$ heißt diese Airy–Gleichung). Man ordnet dem Operator P einen $\mathcal{D}$-Linksmodul zu

$$M = \mathcal{D}/\mathcal{D}P.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Lösungen von (2.2) in 1-zu-1-Beziehung stehen mit Homomorphismen von $\mathcal{D}$-Linksmoduln

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}).$$

3 Kategorientheorie

3.1 Kategorien und Funktoren

Definition 3.1. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist folgendes Datum:

1. Objekte: Eine Klasse von Objekten $Obj\,\mathcal{C}$ ist gegeben. Elemente von $Obj\,\mathcal{C}$ werden wir mit großen lateinischen Buchstaben $X, Y, Z \dots$ bezeichnen.

2. Morphismen: Für jedes Paar $X, Y \in Obj\,\mathcal{C}$ ist eine Menge $\mathrm{Hom}(X, Y)$ gegeben. Elemente von $\mathrm{Hom}(X, Y)$ nennt man Morphismen von X nach Y. Für ein $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ kann man alternativ schreiben $f : X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$.

3. Komposition: Für jedes Tripel $X, Y, Z \in Obj\,\mathcal{C}$ ist eine Kompositionsabbildung gegeben

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) &\to \mathrm{Hom}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

   Die Komposition muss assoziativ sein.

4. Identität: Für jedes $X \in Obj\,\mathcal{C}$ existiert $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{id}_X \circ f = f$$
$$g \circ \mathrm{id}_X = g$$

   für alle Morphismen f, g.[6]

Beispiel 3.2. Hier sind ein paar Beispiele von Kategorien, die wir schon gesehen haben.

1. *Sets* — die Kategorie der Mengen. Objekte sind Mengen, Morphismen sind Abbildungen.

2. *Groups* — die Kategorie der Gruppen. Objekte sind Gruppen, Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.

3. *Ab* — die Kategorie der abelschen Gruppen. Objekte sind abelsche Gruppen, Morphismen sind Gruppenhomomorphismen.

4. *Rings* — die Kategorie der kommutativen Ringen. Objekte sind Ringe, Morphismen sind Ringhomomorphismen.

5. $Vect_k$ — die Kategorie der k-Vektorräume. Objekte sind Vektorräume über k, Morphismen sind k-lineare Abbildungen.

6. R-Mod — die Kategorie der R-Moduln. Objekte sind R-Moduln, Morphismen sind Modulhomomorphismen.

[6] Die Identität ist dadurch eindeutig definiert.

7. Top — die Kategorie der topologischen Räume. Objekte sind topologische Räume, Morphismen sind stetige Abbildungen.

8. Sei R ein Ring (nicht unbedingt kommutativ). Dann kann man R-Mod und Mod-R definieren.

Definition 3.3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ ein Morphismus.

1. f heißt Monomorphismus $\iff$ aus $f \circ g_1 = f \circ g_2$ folgt $g_1 = g_2$.

2. f heißt Epimorphismus $\iff$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ folgt $g_1 = g_2$.

3. f heißt Isomorphismus $\iff$ f ist invertierbar, d.h. es existiert $g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$, sodass
$$g \circ f = id_X \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

4. $\mathrm{End}(X) := \mathrm{Hom}(X, X)$.

5. $Aut(X) =$ invertierbare Endomorphismen.

Bemerkung 3.4. Es folgt sofort, dass ein Isomorphismus immer ein Monomorphismus und Epimorphismus ist. Die Umkehrung ist aber falsch ($\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ in $Rings$).

Definition 3.5. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in Obj\, \mathcal{C}$ zwei Objekte. Ein Produkt von X und Y ist ein Objekt T von $\mathcal{C}$ ausgestattet mit zwei Morphismen $T \to X$ und $T \to Y$, sodass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: für jedes Objekt Z ausgestattet mit Morphismen $Z \to X$ und $Z \to Y$ existiert ein eindeutiger Morphismus $\psi \colon Z \to T$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, dashed, "\exists!\psi"] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& X & & Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wenn es existiert, ist ein Produkt eindeutig bis auf eine eindeutige Isomorphie definiert und wird mit $X \times Y$ bezeichnet.

Definition 3.6. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in Obj\, \mathcal{C}$ zwei Objekte. Ein Koprodukt von X und Y ist ein Objekt T von $\mathcal{C}$ ausgestattet mit Morphismen $X \to T$ und $Y \to T$, sodass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: für jedes Objekt Z ausgestattet mit Morphismen $X \to Z$ und $Y \to Z$ existiert ein eindeutiger Morphismus $\psi \colon T \to Z$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z & & T \arrow[ll, dashed, "\exists!\psi"'] & \\
& X \arrow[ul] \arrow[ur] & & Y \arrow[ul] \arrow[ulll]
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wenn es existiert, ist ein Koprodukt eindeutig bis auf eine eindeutige Isomorphie definiert und wird mit $X \coprod Y$ bezeichnet.

Definition 3.7. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien. Ein kovarianter Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist folgendes Datum:

1. Eine Abbildung $Obj\,\mathcal{C} \to Obj\,\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$;
2. Für jedes paar $X, Y \in Obj\,\mathcal{C}$ eine Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, sodass

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$$
$$F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi).$$

Ein kontravarianter Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist folgendes Datum:

1. Eine Abbildung $Obj\mathcal{C} \to Obj\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$;
2. Für jedes paar $X, Y \in Obj\mathcal{C}$ eine Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$, sodass

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$$
$$F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi).$$

Beispiel 3.8.

1. $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
2. $\mathrm{Hom}(T, -)\colon \mathcal{C} \to Sets$
3. Vergissfunktoren: $Top \to Sets$, R-Mod $\to Ab \to Sets$
4. $GL_n\colon Rings \to Groups$
5. $SL_n\colon Rings \to Groups$
6. $V \mapsto V^*$ ist kontravariant.
7. Spec : $Rings^{op} \to Top$

Bemerkung 3.9. Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ definiert man die duale Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ wie folgt: $Obj\,\mathcal{C}^{op} = Obj\,\mathcal{C}$ und $\forall X, Y \in \mathcal{C}^{op}$ definieren wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

Es ist leicht zu sehen, dass es eine Bijektion zwischen kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und kovarianten Funktoren $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ gibt.

Definition 3.10. Seien $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation (oder Morphismus von Funktoren) $\rho\colon F \to G$ ist folgendes Datum:

1. Für jedes $X \in \mathcal{C}$ ein Morphismus $F(X) \overset{\rho(X)}{\to} G(X)$;

2. Für jeden Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ soll das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\rho(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\rho(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

   kommutieren.

Bemerkung 3.11. $Funct(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist eine Kategorie (Übungsblatt 7).

Beispiel 3.12. $SL_n \to GL_n \to GL_1$

Man kann von Isomorphismen von Kategorien sprechen, aber dieser Begriff ist nicht besonders nützlich. Stattdessen führt man Kategorienäquivalenzen ein, welche sehr oft benutzt werden.

Definition 3.13. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt Äquivalenz, wenn es einen Funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt, sodass

$$F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$
$$G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$$

Beispiel 3.14. Sei $Vect_k^n$ die Kategorie der n-dimensionalen k-Vektorräume und sei $\mathcal{C}$ die Kategorie mit einem einzelnen Objekt k^n und linearen Abbildung $\mathrm{Hom}_k(k^n, k^n)$ als Morphismen. Der natürlich Inklusionsfunktor $\mathcal{C} \to Vect_k^n$ ist eine Kategorienäquivalenz.

3.2 Exakte Sequenzen

Sei R ein Ring.

Definition 3.15. Eine Sequenz von R-Moduln und Homomorphismen

$$\dots \to M_{i-1} \xrightarrow{f} M_i \xrightarrow{g} M_{i+1} \to \dots$$

heißt exakt am M_i, wenn gilt $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$. Die Sequenz heiß exakt, wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

Insbesondere gilt:

1. $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ ist exakt $\iff$ f ist injektiv
2. $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ ist exakt $\iff$ g ist surjektiv

3. Eine Sequenz
$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$
ist exakt $\iff$ f ist injektiv, g ist surjektiv und gilt
$$\mathrm{Coker}(f) = M/\operatorname{Im} f \simeq M''.$$
Solche exakte Sequenzen nennt man kurze exakte Sequenzen.[7]

Beispiel 3.16.

1. Gegeben ein R-Modul M und ein Untermodul $M' \subset M$, kann man immer die folgende k.e.S. betrachten
$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0.$$
2. Gegeben zwei R-Moduln M und N kann man immer die folgende k.e.S. betrachten
$$0 \to M \xrightarrow{f} M \oplus N \xrightarrow{g} N \to 0,$$
wobei $f(m) = (m, 0)$ und $g(m, n) = n$.
3. Man sagt, dass eine kurze exakte Sequenz
$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$
spaltet, wenn g einen Schnitt hat. D.h. es existiert $h\colon M'' \to M$ mit $g \circ h = \mathrm{id}_{M''}$. In diesem Fall ist die k.e.S. isomorph zu
$$0 \to M' \xrightarrow{f} f(M') \oplus h(M'') \xrightarrow{g} M'' \to 0.$$
4. Die k.e.S. $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ spaltet nicht.
5. Sei R ein Hauptidealbereich und M ein endlich erzeugter R-Modul. Die folgende k.e.S.
$$0 \to M_{tors} \to M \to M/M_{tors} \to 0$$
spaltet immer, da nach Korollar 2.24 M/M_{tors} frei ist (vgl. Lemma 2.16).

Satz 3.17. *Sei N ein R-Modul und*
$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$
eine kurze exakte Sequenz. Dann sind die induzierten Sequenzen
$$\begin{aligned} 0 &\to Hom(N, M') \to Hom(N, M) \to Hom(N, M'') \\ 0 &\to Hom(M'', N) \to Hom(M, N) \to Hom(M', N) \end{aligned}$$
exakt.

[7] kurze exakte Sequenz = k.e.S.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 3.18. Aus Satz 3.17 folgt, dass die Funktoren

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(N,-)&\colon R\text{-Mod} \to R\text{-Mod} \\ \mathrm{Hom}(-,N)&\colon (R\text{-Mod})^{op} \to R\text{-Mod} \end{aligned}$$

linksexakt sind.

3.3 Additive und abelsche Kategorien

Definition 3.19. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt additiv, wenn sie die folgende Eigenschaften hat:

1. $\forall\ X, Y \in \mathcal{C}$ ist die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ mit der Struktur einer abelschen Gruppe ausgestattet (insbesondere $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \neq \emptyset$, da wir immer $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ haben), und $\forall\ X, Y, Z \in \mathcal{C}$ ist die Kompositionsabbildung
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$
biadditiv, d.h. $\forall\, f, g, h$ gilt $(f+g)\circ h = f\circ h + g \circ h$ und $h \circ (f+g) = h\circ f + h \circ g$.

2. Es existiert ein Objekt $\mathbf{0}$, Nullobjekt genannt, sodass $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\mathbf{0}) = \{0\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0},X)$ $\forall\, X$, d.h. es gibt genau einen Morphismus von/nach $\mathbf{0}$.

3. $\forall\ X, Y \in \mathcal{C}$ existiert das Produkt $X \times Y$.

Beispiel 3.20. $Ab, R\text{-Mod}, Vect_k$ sind additive Kategorien.

Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $X, Y \in \mathcal{C}$. Mit Hilfe der universellen Eigenschaft von $X \times Y$ kann man einen Morphismus $X \to X \times Y$ definieren (betrachte $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$ und $X \xrightarrow{0} Y$). Analog kann man $Y \to X \times Y$ definieren.

Lemma 3.21. *Mit den obigen Morphismen $X \to X \times Y$ und $Y \to X \times Y$ hat $X \times Y$ die universelle Eigenschaft des Koprodukts.*

Beweis. Übungsblatt 8. □

Definition 3.22. Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus.

1. Ein Objekt T ausgestattet mit einem Morphismus $h\colon T \to X$ mit $f \circ h = 0$ heißt Kern von f, wenn die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: für jedes $\varphi\colon Z \to X$ mit $f \circ \varphi = 0$ existiert ein eindeutiger $\psi\colon Z \to T$ mit $\varphi = h \circ \psi$.
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & \\ T \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$
Wenn ein Kern $T \xrightarrow{h} X$ existiert, ist dieser eindeutig bis auf eine eindeutige Isomorphie definiert und mit $\mathrm{Ker}(f)$ bezeichnet.

2. Ein Objekt T ausgestattet mit einem Morphismus $h\colon Y \to T$ mit $h \circ f = 0$, heißt Kokern von f, wenn die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: für jedes $\varphi\colon Y \to Z$ mit $\varphi \circ f = 0$ existiert ein eindeutiger $\psi\colon T \to Z$ mit $\varphi = \psi \circ h$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

   Wenn ein Kokern $Y \xrightarrow{h} T$ existiert, ist dieser eindeutig bis auf eine eindeutige Isomorphie definiert und mit $\mathrm{Coker}(f)$ bezeichnet.

3. Das Bild von f wird als Kern vom Kokern definiert: $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\, f)$.

4. Das Kobild von f wird als Kokern vom Kern definiert: $\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f)$.

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus. Dann kann man die folgende Sequenz von Objekten und Morphismen betrachten

$$\mathrm{Ker}\,\varphi \xrightarrow{a} X \xrightarrow{b} \mathrm{Coim}\,\varphi \xrightarrow{c} \mathrm{Im}\,\varphi \xrightarrow{d} Y \xrightarrow{e} \mathrm{Coker}\,\varphi$$

mit der Eigenschaft $d \circ c \circ b = \varphi$. Hier sind a, b, d, e die Morphismen, die in den Definitionen von (Ko-)Kern und (Ko-)Bild vorkommen, und der Morphismus $\mathrm{Coim}\,\varphi \xrightarrow{c} \mathrm{Im}\,\varphi$ entsteht auf eine kanonische Weise (Übung). In solchen Kategorien wie *Ab* oder R-Mod ist $\mathrm{Coim}\,\varphi \xrightarrow{c} \mathrm{Im}\,\varphi$ immer ein Isomorphismus, aber nicht in beliebigen additiven Kategorien. Dies führt uns zur nächsten Definition.

Definition 3.23. Eine additive Kategorie $\mathcal{A}$ heißt abelsch, wenn:

1. in $\mathcal{A}$ beliebige Kerne und Kokerne existieren;

2. für jedes φ der kanonische Morphismus $\mathrm{Coim}\,\varphi \xrightarrow{c} \mathrm{Im}\,\varphi$ ein Isomorphismus ist.

Beispiel 3.24.

1. *Ab*, R-Mod sind abelsch.

2. Die Kategorie der freien abelschen Gruppen ist nicht abelsch! Für den Morphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}$ existieren zwar der Kern und der Kokern, aber der kanonische Morphismus $\mathrm{Coim}\,\varphi \to \mathrm{Im}\,\varphi$ ist kein Isomorphismus!

Definition 3.25. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Ein Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt additiv, wenn die Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist.

Der Begriff von exakten Sequenzen lässt sich auf allgemeine abelsche Kategorien übertragen.

Definition 3.26. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

1. F heißt exakt, wenn für jede k.e.S. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ in $\mathcal{A}$ die induzierte Sequenz
$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$$
exakt in $\mathcal{B}$ ist.

2. F heißt linksexakt, wenn für jede k.e.S. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ in $\mathcal{A}$ die induzierte Sequenz
$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z)$$
exakt in $\mathcal{B}$ ist.

3. F heißt rechtsexakt, wenn für jede k.e.S. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ in $\mathcal{A}$ die induzierte Sequenz
$$F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$$
exakt in $\mathcal{B}$ ist.

4 Tensorprodukt

4.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 4.1. Seien M, N, P Moduln über einem Ring R. Eine Abbildung

$$f\colon M \times N \to P$$

heißt bilinear, wenn gilt

$$\begin{aligned} f(x+y,z) &= f(x,z) + f(y,z) \\ f(ax,z) &= af(x,y) \\ f(z,x+y) &= f(z,x) + f(z,y) \\ f(z,ax) &= af(z,x). \end{aligned}$$

Satz 4.2. *Seien M, N zwei R-Moduln. Es existiert ein R-Modul T und eine R-bilineare Abbildung $g\colon M \times N \to T$, sodass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: für jeden R-Modul P und jede R-bilineare Abbildung $f\colon M \times N \to P$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus von R-Moduln $\psi\colon T \to P$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] \\ & P \end{tikzcd}$$

kommutiert. Das Paar $g\colon M \times N \to T$ ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie definiert.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus der universellen Eigenschaft.
Existenz: Wir geben eine explizite Konstruktion von T. Sei C der freie R-Modul mit der Basis (x, y) mit $x, y \in M \times N$, d.h.

$$C := \bigoplus_{x,y \in M \times N} R(x,y).$$

Nun sei $D \subset C$ ein Untermodul von C erzeugt durch

$$\begin{aligned} &(x+x',y) - (x,y) - (x',y) \\ &(x,y+y') - (x,y) - (x,y') \\ &(ax,y) - a(x,y) \\ &(x,ay) - a(x,y). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jetzt definiere

$$T := C/D.$$

Die natürliche Abbildung g

$$\begin{aligned}&M \times N \to C \to T\\&(x,y) \mapsto (x,y) \mapsto x \otimes y\end{aligned}$$

ist bilinear. Jetzt bleibt uns nur die universelle Eigenschaft für $g\colon M \times N \to T$ zu überprüfen.

Sei $f\colon M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung. Erst definieren wir einen Homomorphismus $C \to P$, indem wir jedes Basiselement (x,y) nach $f(x,y)$ abbilden. Da f bilinear ist, liegen die Elemente (4.1) im Kern. Jetzt erhalten wir nach Homomorphiesatz $\psi\colon T \to P$. $\square$

Bemerkung 4.3.

1. Der Modul T wird mit $M \otimes_R N$ bezeichnet und Tensorprodukt von M und N über R genannt. Die bilineare Abbildung g ist ein Teil dieser Struktur. Die explizite Konstruktion aus dem Beweis $T = C/D$ werden wir nicht mehr brauchen.
2. Das Bild von $(x,y) \in M \times N$ in $M \otimes_R N$ bezeichnen wir mit $x \otimes y$.
3. Da die Abbildung $M \times N \to M \otimes_R N$ bilinear ist, gilt

$$\begin{aligned}&(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y\\&x \otimes (y+y') = x \otimes y + x \otimes y'\\&(ax) \otimes y = a(x \otimes y)\\&x \otimes (ay) = a(x \otimes y)\end{aligned}$$

4. Als R-Modul ist $M \otimes_R N$ von den Elementen der Form $x \otimes y$ erzeugt, d.h. jedes Element in $M \otimes_R N$ ist eine endliche Summe der Form $\sum_i x_i \otimes y_i$.
5. $x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0$.
6. In $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt $2 \otimes \bar{1} = 0$, aber nicht in $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beispiel 4.4.

1. Sei k ein Körper und V, W endlich dimensionale k-Vektorräume. Wenn $e_1, \ldots, e_n$ und $f_1, \ldots, f_m$ Basen von V und W sind. Dann ist $\{e_i \otimes f_j\}$ eine Basis von $V \otimes_k W$. Insbesondere haben wir

$$\dim_k \left(V \otimes_k W\right) = \dim_k V \cdot \dim_k W.$$

2. Es gilt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq 0$. Wir haben

$$2(a \otimes b) = 0 = 3(a \otimes b) \quad \forall a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Somit ist jedes Element von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gleich Null.

3. Allgemeiner gilt dies $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq 0$, wenn m und n koprim sind (Übungsblatt 9).

4. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Übungsblatt 9).

5. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/gcd(m,n)\mathbb{Z}$ (Übungsblatt 9).

6. $R/I \otimes_R R/J \simeq R/I + J$ (Übungsblatt 9).

7. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

8. Allgemeiner gilt $M \otimes_R K = 0$ für einen Torsionsmodul M über einem Integritätsbereich R und $K = Quot(R)$.

Satz 4.5. *Seien $M_1, \dots, M_n$ Moduln über R. Es existiert ein R-Modul T und eine R-multilineare Abbildung $g\colon M_1 \times \dots \times M_n \to T$, sodass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: für jeden R-Modul P und jede R-multilineare Abbildung $f\colon M_1 \times \dots \times M_n \to P$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus von R-Moduln $\psi\colon T \to P$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] \\ & P \end{tikzcd}$$

kommutiert. Das Paar $g\colon M_1 \times \dots \times M_n \to T$ ist eindeutig bis auf eine eindeutige Isomorphie definiert.

Satz 4.6. *Seien M, N, P Moduln über R. Es existieren Isomorphismen von R-Moduln*

1. $M \otimes N \cong N \otimes M$

2. $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P) \cong M \otimes N \otimes P$

3. $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

4. $R \otimes M \cong M$

gegeben durch

1. $x \otimes y \mapsto y \otimes x$

2. $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$

3. $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$

4. $a \otimes x \mapsto ax$.

Beweis. Siehe [AM] und Übungsblatt 9. $\square$

Definition 4.7. Seien $f\colon M \to M'$ und $g\colon N \to N'$ Homomorphismen von R-Moduln. Definiere einen Homomorphismus von R-Moduln

$$\begin{aligned} f \otimes g\colon M \otimes N &\to M' \otimes N' \\ (f \otimes g)(x \otimes y) &= f(x) \otimes g(y). \end{aligned}$$

Definition 4.8. Sei R ein Ring und N ein R-Modul. Dann definiert man einen Funktor

$$\begin{aligned} - \otimes_R N\colon R\text{-Mod} &\longrightarrow R\text{-Mod} \\ M &\longmapsto M \otimes_R N \\ M_1 \xrightarrow{f} M_2 &\longmapsto M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M_2 \otimes_R N \end{aligned}$$

4.2 Restriktion und Erweiterung der Skalare

Definition 4.9. Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

1. Auf jedem S-Modul N kann man eine R-Modulstruktur definieren als

$$ax = f(a)x.$$

   Betrachtet als R-Modul bezeichnen wir N mit ${}_RN$. Dadurch erhalten wir einen Funktor

$$\begin{aligned} S\text{-Mod} &\to R\text{-Mod} \\ N &\mapsto {}_RN, \end{aligned}$$

   welcher Restriktion der Skalare genannt wird.

2. Das Tensorprodukt mit S über R liefert einen Funktor

$$\begin{aligned} - \otimes_R S : R\text{-Mod} &\to S\text{-Mod} \\ M &\mapsto M_S := M \otimes_R S, \end{aligned}$$

   welcher Erweiterung der Skalare genannt wird.

Lemma 4.10. *Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus.*

1. *Sei N ein endlich erzeugter S-Modul. Wenn S endlich erzeugt als Modul über R ist, dann ist ${}_RN$ auch ein endlich erzeugter R-Modul.*

2. *Wenn M ein endlich erzeugter R-Modul ist, ist M_S endlich erzeugt als S-Modul.*

Beweis.

1. Seien $x_1, \dots, x_n \in N$ beliebige Erzeuger von N über S und $s_1, \dots, s_m \in S$ beliebige Erzeuger von S über R. Dann wird N von den Elementen $s_i x_j$ als R-Modul erzeugt.

2. Seien $x_1, \dots, x_n \in M$ beliebige Erzeuger von M über R. Dann erzeugen $x_1 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1$ den Modul $M \otimes_R S$ als S-Modul.

□

Lemma 4.11. *Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von R-Moduln*

$$Hom_S(M_S, N) \cong Hom_R(M, {}_RN).$$

Beweis. Übungsblatt 9. □

Bemerkung 4.12. In der Sprache der Kategorientheorie bedeutet das obige Lemma, dass der Skalarerweiterungsfunktor linksadjungiert zum Skalarrestriktionsfunktor ist.

4.3 Exaktheit des Tensorproduktes

Satz 4.13. *Seien M, N, P Moduln über R. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von R-Moduln*

$$Hom_R(M \otimes_R N, P) \cong Hom_R(M, Hom_R(N, P)). \tag{4.2}$$

Beweis. Die Bijektion (4.2) ist als Komposition der Bijektion

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \xrightarrow{\cong} \{R\text{-bilineare Abbildungen } M \times N \to P\},$$

welche aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes folgt, und der Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \{R\text{-bilineare Abbildungen } M \times N \to P\} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P)) \\ \varphi & \mapsto & x \mapsto \varphi(x, -) \end{array}$$

gegeben. □

Bemerkung 4.14. In der Sprache der Kategorientheorie bedeutet Isomorphismus (4.2), dass der Funktor $- \otimes_R N$ linksadjungiert zum Funktor $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ ist.

Gleich werden wir das folgende Lemma brauchen, das eine etwas stärkere Version von Satz 3.17 ist.

Lemma 4.15.

1. *Die Sequenz von R-Moduln*

$$M' \to M \to M'' \to 0$$

ist genau dann exakt, wenn für jeden R-Modul P die Sequenz

$$0 \to Hom_R(M'', P) \to Hom_R(M, P) \to Hom_R(M', P)$$

exakt ist.

2. *Die Sequenz von R-Moduln*

$$0 \to M' \to M \to M''$$

ist genau dann exakt, wenn für jeden R-Modul P die Sequenz

$$0 \to Hom_R(P, M') \to Hom_R(P, M) \to Hom_R(P, M'')$$

exakt ist.

Beweis. Übungsblatt 9. □

Satz 4.16. *Sei R ein Ring und N ein R-Modul. Der Funktor*

$$\begin{aligned} - \otimes_R N \colon R\text{-}Mod &\to R\text{-}Mod \\ M &\mapsto M \otimes_R N \end{aligned}$$

ist rechtsexakt.

Beweis. Sei N ein R-Moduln und

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \tag{4.3}$$

eine k.e.S. von R-Moduln. Zu zeigen ist, dass die induzierte Sequenz

$$M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$$

exakt ist. Dafür betrachten wir einen beliebigen R-Modul P und wenden den Funktor $\mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_R(N, P))$ auf (4.3) an. Dadurch erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', \mathrm{Hom}_R(N, P)) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P)) \to \mathrm{Hom}_R(M', \mathrm{Hom}_R(N, P)), \tag{4.4}$$

da nach Satz 3.17 der Hom-Funktor linksexakt ist. Jetzt wenden wir (4.2) an (4.4) an und bekommen eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'' \otimes N, P) \to \mathrm{Hom}_R(M \otimes N, P) \to \mathrm{Hom}_R(M' \otimes N, P). \tag{4.5}$$

Jetzt folgt die Aussage aus Lemma 4.15. □

Beispiel 4.17. Betrachten wir die k.e.S. $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ und tensorieren diese mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann bekommen wir die Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0,$$

die keine k.e.S. ist! Also ist $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kein exakter Funktor. Wir bekommen aber daraus den Isomorphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Da der Funktor $- \otimes_R N$ nicht für jeden R-Modul N exakt ist, führt man den folgenden Begriff ein.

Definition 4.18. Ein R-Modul N heißt flach, wenn der Funktor $- \otimes_R N$ exakt ist.

Beispiel 4.19. $M = R^n$ ist flach.

4.4 Tensorprodukt von Algebren

Definition 4.20. Ein Ring S ausgestattet mit einem Ringhomomorphismus $R \to S$ heißt R-Algebra.

Bemerkung 4.21. Gegeben eine R-Algebra $R \to S$, kann man S als R-Modul betrachten:

$$r \cdot s := f(r)s.$$

Umgekehrt: Gegeben ein R-Modul M, welcher zusätzlich mit einer R-bilinearen Multiplikation $M \times M \to M$ ausgestattet ist (assoziativ, kommutativ und mit Eins), kann man einen Ringhomomorphismus $R \to M$ definieren

$$\begin{aligned} R &\to M \\ r &\mapsto r1_M \end{aligned}$$

und eine R-Algebra Struktur auf M erhalten.

Definition 4.22. Seien $f\colon R \to S$ und $g\colon R \to T$ Algebren über R. Die Multiplikation

$$\begin{aligned} (S \otimes_R T) \times (S \otimes_R T) &\to (S \otimes_R T) \\ ((a \otimes b), (c \otimes d)) \quad &\mapsto \quad ac \otimes bd \end{aligned}$$

zusammen mit dem Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} R &\to S \otimes_R T \\ r &\mapsto f(r) \otimes g(r) \end{aligned}$$

stattet $S \otimes_R T$ mit der Struktur einer R-Algebra aus.

Beispiel 4.23.

1. Seien $R = k$, $S = k[x]$, $T = k[y]$. Dann gilt $k[x] \otimes_k k[y] \simeq k[x, y]$.
2. $k[x] \otimes_{k[x,y]} k[y] \simeq k$ (Übungsblatt 9).
3. $(R/I) \otimes_R (R/J) \simeq R/(I + J)$ (Übungsblatt 9).

5 Lokalisierung

5.1 Lokalisierung von Ringen

Definition 5.1. Sei A ein Ring. Eine Teilmenge $S \subset A$ heißt multiplikativ abgeschlossen, wenn gilt
$$S \cdot S \subset S \quad \text{und} \quad 1 \in S.$$

Definition 5.2. Seien A ein Ring und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A. Definiere eine Relation auf der Menge $A \times S$ als
$$(a, s) \sim (b, t) \iff (at - bs)u = 0 \quad \text{für ein } u \in S.$$

Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, und somit ist sie eine Äquivalenzrelation.[8] Wir bezeichnen mit $\frac{a}{s}$ die Äquivalenzklasse von (a, s) und mit $S^{-1}A$ die Menge der Äquivalenzklassen.

Man stattet $S^{-1}A$ mit einer Ringstruktur aus via
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$
$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

Diese ist wohldefiniert.[9] Der Ring $S^{-1}A$ wird Lokalisierung von A bezüglich S genannt.

Es gibt einen kanonischen Ringhomomorphismus
$$\pi\colon A \to S^{-1}A$$
$$a \mapsto \frac{a}{1}.$$

Bemerkung 5.3. Die Lokalisierung $\pi\colon A \to S^{-1}A$ hat folgende Eigenschaften:

1. $s \in S \Rightarrow \pi(s)$ ist invertierbar in $S^{-1}A$;
2. $\pi(a) = 0 \Rightarrow as = 0$ für ein $s \in S$;
3. Jedes Element von $S^{-1}A$ ist von der Form $\frac{\pi(a)}{\pi(s)}$ mit $a \in A$ und $s \in S$.

Beispiel 5.4.

1. **Quotientenkörper:** Sei A ein Integritätsbereich und $S = A \setminus \{0\}$. Dann wird $S^{-1}A$ Quotientenkörper von A genannt.
2. **Lokalisierung an einem Primideal:** Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $S = A \setminus \mathfrak{p}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Die Lokalisierung $S^{-1}A$ bezeichnet man üblicherweise mit $A_{\mathfrak{p}}$.

[8] Übungsblatt 10

[9] Übungsblatt 10

3. **Lokalisierung an einem Element:** Sei A ein Ring und $f \in A$ ein Element. Dann ist $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Die Lokalisierung $S^{-1}A$ bezeichnet man üblicherweise mit A_f.

4. Was ist $\mathbb{C}[t]_t$? Das ist der Ring von Laurent-Polynomen $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

5. Wenn gilt $S = \{1\}$, dann bekommen wir $S^{-1}A = A$.

6. $S^{-1}A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in S$.

Satz 5.5. *Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, sodass $f(S) \subset B^*$. Dann lässt sich f eindeutig über die Lokalisierung $S^{-1}A$ faktorisieren*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt sofort, dass für den Homomorphismus $\bar{f}$ gelten muss

$$\bar{f}\left(\frac{a}{s}\right) = f(a)f(s)^{-1}.$$

Man muss nur überprüfen, dass durch diese Formel $\bar{f}$ wohldefiniert ist, d.h. aus $a/s = b/t$ folgt $\bar{f}(a/s) = \bar{f}(b/t)$. Wir haben

$$a/s = b/t \iff \exists u \in S\colon (at - bs)u = 0 \Rightarrow$$
$$(f(a)f(t) - f(b)f(s))f(u) = 0 \Rightarrow f(a)f(s)^{-1} = f(b)f(t)^{-1}.$$

□

Aus dem Satz ziehen wir jetzt ein Korollar, welches ähnlich zu Bemerkung 5.3 aussieht.

Korollar 5.6. *Sei $g\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus mit den Eigenschaften*

1. *$s \in S \Rightarrow g(s)$ ist invertierbar in B;*

2. *$g(a) = 0 \Rightarrow as = 0$ für ein $s \in S$;*

3. *Jedes Element von B ist der Form $\frac{g(a)}{g(s)}$ mit $a \in A$ und $s \in S$.*

Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $h\colon S^{-1}A \to B$, sodass $g = h \circ \pi$.

Beweis. Übungsblatt 10. □

5.2 Lokalisierung von Moduln

Definition 5.7. Seien A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, und M ein A-Modul. Man definiert $S^{-1}M$ analog zu $S^{-1}A$. Erst definiert man eine Äquivalenzrelation auf $M \times S$

$$(m, s) \sim (n, t) \iff (mt - ns)u = 0 \quad \text{für ein } u \in S,$$

dann die Gruppenstruktur

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{mt + ns}{st},$$

dann die $S^{-1}A$-Modul Struktur

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{st}.$$

Gegeben ein Homomorphismus von A-Moduln $f\colon M_1 \to M_2$, definiert man einen induzierten Morphismus auf Lokalisierungen als

$$\begin{aligned} S^{-1}f\colon S^{-1}M_1 &\to S^{-1}M_2 \\ \frac{x}{s} &\mapsto \frac{f(x)}{s} \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass wir auf diese Weise einen Funktor

$$S^{-1}\colon A\text{-Mod} \to S^{-1}A\text{-Mod}$$

bekommen.

Beispiel 5.8. Wie für Ringe gibt es zwei wichtige Klassen von Beispielen:

1. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ haben wir $M_{\mathfrak{p}}$;
2. Für ein Element $f \in A$ haben wir M_f.

Satz 5.9. *Der Lokalisierungsfunktor ist exakt.*

Beweis. Betrachten wir die exakte Sequenz

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''.$$

Aus $g \circ f = 0$ folgt $S^{-1}g \circ S^{-1}f = 0$. Somit haben wir $\operatorname{Im} S^{-1}f \subset \operatorname{Ker} S^{-1}g$.

Jetzt zeigen wir die Inklusion $\operatorname{Ker} S^{-1}g \subset \operatorname{Im} S^{-1}f$. Sei $m/s \in \operatorname{Ker} S^{-1}g$, d.h. $g(m)/s = 0$ in $S^{-1}M''$. Dann $\exists t \in S$, sodass gilt $tg(m) = 0$ in M''. Daraus folgt $g(tm) = 0$ und somit gilt $tm \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Nun gibt es ein $m' \in M'$, sodass $f(m') = tm$. Somit gilt Folgendes in $S^{-1}M$:

$$\frac{m}{s} = \frac{f(m')}{st} = (S^{-1}f)\Big(\frac{m'}{st}\Big) \in \operatorname{Im} S^{-1}f.$$

□

Satz 5.10. *Es gibt einen Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln*

$$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$$

gegeben durch

$$\frac{a}{s} \otimes m \mapsto \frac{am}{s}.$$

Beweis. Die Surjektivität ist klar. Wir zeigen nur die Injektivität. Sei $x \in S^{-1}A \otimes_A M$ ein beliebiges Element

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i.$$

Man kann x auf folgende Weise umschreiben

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} \otimes \widetilde{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s} \otimes \widetilde{\widetilde{m}}_i = \frac{1}{s} \otimes \sum \widetilde{\widetilde{m}}_i$$

$$\widetilde{m}_i = a_i m_i\,, \quad \widetilde{\widetilde{m}}_i = t_i \widetilde{m}_i\,, \quad s = s_1 \dots s_n\,, \quad t_i = s_1 \dots s_{i-1} \hat{s}_i s_{i+1} \dots s_n.$$

Somit reicht es, die Elemente der Form $x = \frac{1}{s} \otimes m$ zu betrachten. Das Bild von $\frac{1}{s} \otimes m$ ist m/s. Wir haben

$$\frac{m}{s} = 0 \iff \exists u \in S \colon mu = 0 \Rightarrow \frac{1}{s} \otimes m = \frac{u}{su} \otimes m = \frac{1}{su} \otimes um = 0.$$

□

Korollar 5.11. *$S^{-1}A$ ist ein flacher A-Modul.*

Beweis. Nach Satz 5.10 ist der Funktor $S^{-1}A \otimes_A -$ isomorph zum Lokalisierungsfunktor $S^{-1}(-)$. Letzterer ist exakt nach Satz 5.9. □

Satz 5.12. *Seien M, N zwei A-Moduln. Dann gibt es einen Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln*

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \xrightarrow{\cong} S^{-1}(M \otimes_A N)$$

gegeben durch (d.h. als lineare Fortsetzung von)

$$\frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \longmapsto \frac{m \otimes n}{st}.$$

Beweis. Wir wenden Satz 5.10 und die Eigenschaften des Tensorprodukts aus Satz 4.6 an. (Man beachte, dass Assoziativität auch gilt, wenn die Tensorprodukte über verschiedenen Ringen gebildet werden, s. dazu [AM], Exercise 2.15 on p. 27)

$$\begin{aligned} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N &\cong (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) \\ &\cong \big((S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}A\big) \otimes_A N \\ &\cong (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_A N \\ &\cong S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_A N) \cong S^{-1}(M \otimes_A N). \end{aligned}$$

Da wir alle diese Isomorphismen explizit kennen, lässt sich leicht sehen, dass der Isomorphismus durch obige Vorschrift gegeben ist. □

Satz 5.13. *Sei M ein A-Modul und seien $N, P \subset M$ Untermoduln. Dann gilt:*

1. $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$
2. $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$
3. $S^{-1}(M/N) \cong (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ *als $S^{-1}A$-Moduln.*

Beweis. Der erste Punkt ist klar nach Definition.
Zu Punkt 2: Die Inklusion $\subset$ ist klar. Sei also $w \in S^{-1}N \cap S^{-1}P$, d.h. wir können schreiben $w = \frac{n}{s} = \frac{p}{t}$ für gewisse $n \in N$, $p \in P$, $s, t \in S$. Somit ist $(nt - ps)u = 0$ für ein $u \in S$. Es folgt $ntu = psu$ und dieses Element liegt daher in $N \cap P$. Wir sehen, dass gilt $w = \frac{ntu}{stu}$ und daher ist $w \in S^{-1}(N \cap P)$.
Zu Punkt 3: Wende den exakten Funktor S^{-1} auf die kurze exakte Sequenz $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ an. $\square$

5.3 Lokale Eigenschaften

Eine Eigenschaft eines Moduls (oder auch Homomorphismus) heißt *lokal*, falls sich ihre Gültigkeit überprüfen lässt, indem man sie für alle Lokalisierungen an Primidealen testet. Die folgenden drei Sätze geben drei solche Eigenschaften an: Die Eigenschaft, der Nullmodul zu sein, ist lokal. Ebenso sind Injektivität und Flachheit lokale Eigenschaften.

Satz 5.14. *Sei M ein A-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $M = 0$;
2. $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p} \subset A$;
3. $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m} \subset A$.

Beweis. Offensichtlich folgt 2. aus 1. Da maximale Ideale prim sind, folgt auch 3. aus 2. Es bleibt also zu zeigen 3. $\Rightarrow$ 1.: Angenommen, $M \neq 0$, dann existiert ein $x \in M$ mit $x \neq 0$. Sei $\mathfrak{a} := \operatorname{ann}(x) := \{r \in R \mid rx = 0\} \subset R$ das Annihilatorideal von x. Es gilt $\mathfrak{a} \neq R$ (denn sonst wäre $1 \cdot x = 0$). Also ist $\mathfrak{a}$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ enthalten (nach Korollar 1.28). Nach Voraussetzung ist $M_{\mathfrak{m}} = 0$, d.h. in $M_{\mathfrak{m}}$ gilt $\frac{x}{1} = \frac{0}{1}$. Dies bedeutet $(x \cdot 1 - 0 \cdot 1)u = 0$ (also $xu = 0$) für ein $u \in R \setminus \mathfrak{m}$. Somit wäre u ein Ringelement, welches x annihiliert, aber nicht in $\mathfrak{m}$, also insbesondere nicht in $\mathfrak{a}$ liegt. Widerspruch, da $\mathfrak{a}$ das Annihilatorideal ist. $\square$

Satz 5.15. *Sei $\varphi\colon M \to N$ ein A-Modulhomomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. φ *ist injektiv;*
2. $\varphi_{\mathfrak{p}}$ *ist injektiv für alle Primideale* $\mathfrak{p} \subset A$;
3. $\varphi_{\mathfrak{m}}$ *ist injektiv für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m} \subset A$.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Sei φ injektiv, dann ist die Sequenz $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N$ exakt, also (nach Satz 5.9) auch die Sequenz $0 \to M_\mathfrak{p} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}$ für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p} \subset A$. Also ist $\varphi_\mathfrak{p}$ injektiv.
2. folgt offensichtlich aus 3.
3. $\Rightarrow$ 1.: Betrachte die exakte Sequenz $0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to M \xrightarrow{\varphi} N$. Es ist damit auch $0 \to (\operatorname{Ker}\varphi)_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m}$ exakt und es folgt, dass $(\operatorname{Ker}\varphi)_\mathfrak{m} \cong \operatorname{Ker}(\varphi_\mathfrak{m})$ (für ein beliebiges maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A$). Nach Voraussetzung (3.) ist $\operatorname{Ker}(\varphi_\mathfrak{m}) = 0$, also folgt $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ nach Satz 5.14. $\square$

Eine analoge Aussage gilt, wenn man „injektiv“ jeweils an jeder Stelle ersetzt durch „surjektiv“, „bijektiv“ oder „die Nullabbildung“.

Satz 5.16. *Sei M ein A-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *M ist ein flacher A-Modul;*
2. *$M_\mathfrak{p}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{p}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$;*
3. *$M_\mathfrak{m}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{m}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Sei M ein flacher A-Modul. Wir wollen zeigen, dass der Funktor $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} -$ exakt ist. Setzen wir $S = A \setminus \mathfrak{p}$, so gilt:

$$M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} - \cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} - \cong (M \otimes_A S^{-1}A) \otimes_{S^{-1}A} - \cong M \otimes_A (S^{-1}A \otimes_{S^{-1}A} -) \cong M \otimes_A -,$$

also sind $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} -$ und $M \otimes_A -$ isomorph als Funktoren auf $A_\mathfrak{p}$-Moduln (welche insbesondere A-Moduln sind, daher macht diese Aussage Sinn). Von letzterem Funktor war die Exaktheit vorausgesetzt.
2. $\Rightarrow$ 3.: klar.
3. $\Rightarrow$ 1.: Zu zeigen ist: Der Funktor $M \otimes_A -$ ist exakt. Da Tensorprodukte immer rechtsexakt sind, reicht es zu zeigen, dass der Funktor Injektivität erhält. Sei also $N \xrightarrow{\varphi} P$ ein injektiver A-Modulhomomorphismus.
Dann ist $N_\mathfrak{m} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{m}} P_\mathfrak{m}$ injektiv für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$ (da Lokalisieren exakt ist). Nach Voraussetzung (3.) ist $M_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m} \xrightarrow{\mathrm{id}_{M_\mathfrak{m}} \otimes \varphi_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} P_\mathfrak{m}$ immer noch injektiv, somit auch $(M \otimes_A N)_\mathfrak{m} \xrightarrow{(\mathrm{id}_M \otimes \varphi)_\mathfrak{m}} (M \otimes_A P)_\mathfrak{m}$ wegen Satz 5.12. Schließlich folgt die Injektivität von $M \otimes_A N \to M \otimes_A P$ aus Satz 5.15. $\square$

5.4 Erweiterung und Kontraktion von Idealen

Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $i\colon A \to S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$ die natürliche Abbildung.

Definition 5.17. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ heißt $S^{-1}\mathfrak{a} \subset S^{-1}A$ seine Erweiterung in $S^{-1}A$.
Für ein Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$ heißt $i^{-1}\mathfrak{b} \subset A$ seine Kontraktion in A.

Man beachte hierbei, dass ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ein A-Modul ist (genauer ein A-Untermodul von A selbst). Somit meint $S^{-1}\mathfrak{a}$ die Lokalisierung als Modul.

Es ist leicht zu sehen, dass Erweiterung und Kontraktion wieder Ideale sind.

Satz 5.18. *1. Jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$ ist von der Form $\mathfrak{b} = S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein $\mathfrak{a} \subset A$.*

2. Es gibt eine 1:1-Korrespondenz (Bijektion von Mengen), gegeben durch Kontraktion und Erweiterung

$$\{\textit{Primideale in } S^{-1}A\} \xleftrightarrow{\textit{1:1}} \{\textit{zu } S \textit{ disjunkte Primideale in } A\}$$
$$\mathfrak{q} \longmapsto i^{-1}(\mathfrak{q})$$
$$S^{-1}\mathfrak{p} \longleftarrow\!\shortmid\, \mathfrak{p}$$

Beweis. Zu 1.: Setze $\mathfrak{a} := i^{-1}(\mathfrak{b})$. Wir zeigen die Gleichheit $\mathfrak{b} = S^{-1}(\mathfrak{a})$. Sei also $b = \frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$. Dann gilt (da $\mathfrak{b}$ ein Ideal ist) $\frac{x}{1} = s \cdot \frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$ und damit $x \in \mathfrak{a}$. Also ist $\frac{x}{s} \in S^{-1}\mathfrak{a}$. Die andere Inklusion ist noch einfacher: Ist $\frac{x}{s} \in S^{-1}(i^{-1}(\mathfrak{b}))$ für ein ein $x \in i^{-1}(\mathfrak{b})$ (d.h. $\frac{x}{1} \in \mathfrak{b}$), dann ist auch $\frac{x}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{x}{1} \in \mathfrak{b}$, da $\mathfrak{b}$ ein Ideal in $S^{-1}A$ ist.
Zu 2.: Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der beiden Abbildungen. Die Abbildung von links nach rechts ist wohldefiniert, da die Kontraktion eines Primideals $\mathfrak{q}$ wieder ein Primideal ist (Satz 1.24). Außerdem kann dieses keine Elemente aus S enthalten, sonst wäre $1 \in \mathfrak{q}$.
Die Abbildung von rechts nach links ist wohldefiniert, d.h. $S^{-1}\mathfrak{p}$ ist ein Primideal: Seien $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}A$ ($a, b \in A$, $s, t \in S$) mit $\frac{ab}{st} \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Das bedeutet, dass $\frac{ab}{st} = \frac{p}{u}$ für ein $p \in \mathfrak{p}$ und ein $u \in S$, also gilt $(abu - pst)v = 0$ in A für ein $v \in S$. Es folgt somit $abuv = pstv$ und die rechte Seite liegt sicher in $\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ Primideal war, muss einer der Faktoren a, b, u, v in $\mathfrak{p}$ liegen. Für u und v ist das nicht möglich, da diese in S liegen und $\mathfrak{p}$ disjunkt zu S vorausgesetzt war. Schließlich folgt $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ oder $\frac{b}{t} \in S^{-1}\mathfrak{p}$.
Die beiden Abbildungen sind invers zueinander: $S^{-1}(i^{-1}(\mathfrak{q}))$ gilt nach Teil 1. Außerdem ist $i^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$ für ein zu S disjunktes Primideal $\mathfrak{p}$ (Übungsblatt 11). $\square$

Insbesondere bedeutet dies für die Lokalisierung an einem Primideal das Folgende.

Korollar 5.19. *Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Kontraktion und Erweiterung geben eine Bijektion*

$$\{\textit{Primideale in } A_{\mathfrak{p}}\} \xleftrightarrow{\textit{1:1}} \{\textit{Primideale } I \textit{ in } A \textit{ mit } I \subset \mathfrak{p}\}$$

6 Das Spektrum eines Rings

6.1 Zariski-Topologie

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. In Abschnitt 1.9 haben wir bereits die Zariski-Topologie auf der Menge aller Primideale $\operatorname{Spec} R$ gesehen, deren abgeschlossene Mengen genau solche von der Form

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subset \mathfrak{p}\}$$

für ein beliebiges Ideal $I \subset R$ sind.

Die offenen Mengen der Zariski-Topologie sind folglich genau solche von der Form

$$D(I) := \operatorname{Spec} R \setminus V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

Für diese gilt analog zu Lemma 1.49:

Lemma 6.1.

$$D(0) = \emptyset \quad \textit{und} \quad D(R) = \mathit{Spec}\, R$$
$$\cup_s D(I_i) = D(\sum_s I_s)$$
$$D(I) \cap D(J) = D(IJ)$$

Ist $f \in R$ und $(f) \subset R$ das von f erzeugte Ideal, so schreiben wir $D(f) := D((f)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Offene Mengen dieser Form haben die folgende schöne Eigenschaft:

Satz 6.2. *Die Mengen der Form $D(f)$ für ein $f \in R$ bilden eine* Basis *der Zariski-Topologie, d.h. jede offene Menge lässt sich als Vereinigung von Mengen der Form $D(f)$ schreiben.*

Beweis. Der Beweis ist eine einfache Rechnung: Sei $I \subset R$ ein Ideal. Dann ist

$$D(I) = D(\sum_{f \in I} (f)) = \cup_{f \in I} D(f).$$

□

Bemerkung 6.3. Die Zariski-Topologie hat folgende Eigenschaften:

- Die einpunktige Menge $\{\mathfrak{p}\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.
- Ist R nullteilerfrei, so ist (0) ein Primideal und es gilt: Der Abschluss der einpunktigen Menge $\{(0)\}$ ist ganz $\operatorname{Spec} R$.
- Die Zariski-Topologie ist im Allgemeinen nicht Hausdorff (d.h. für zwei verschiedene Punkte gibt es keine offenen Umgebungen, welche disjunkt sind).

6.2 Garben

Sei X ein topologischer Raum. Wir führen in diesem Kapitel den Begriff einer Garbe ein, mit dessen Hilfe wir lokale Informationen (z.B. lokale Funktionen auf einem Raum) besser handhaben können.

Definition 6.4. Sei X ein topologischer Raum. Die Kategorie der offenen Mengen $\mathbf{Op}_X$ ist gegeben durch die Objekte

$$Obj(\mathbf{Op}_X) := \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$$

und für je zwei Objekte U, V der Morphismenmenge

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Op}_X}(U,V) := \begin{cases} \{U \hookrightarrow V\} & \text{falls } U \subset V \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 6.5. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X (mit Werten in einer Kategorie $\mathcal{C}$) ist ein kontravarianter Funktor von $\mathbf{Op}_X$ nach $\mathcal{C}$.

Meist wird $\mathcal{C}$ eine Kategorie von Mengen mit Struktur (abelsche Gruppen, Ringe, R-Moduln etc.) sein. Ist z.B. $\mathcal{C} = Ab$, so besteht eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ aus:

- einer abelschen Gruppe $\mathcal{F}(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subset X$,
- einem Gruppenhomomorphismus $r_{UV} = \mathcal{F}(U \hookrightarrow V)\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ für jede Teilmengenbeziehung $U \subset V$,

sodass gilt (Funktoraxiome):

- $r_{UU} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$,
- $r_{UV} \circ r_{VW} = r_{UW}$ für jede Teilmengenbeziehung $U \subset V \subset W$.

Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen Schnitte von $\mathcal{F}$ auf U und r_{UV} wird oft als Restriktionsabbildung bezeichnet.

Beispiel 6.6.

1. konstante Prägarbe:
   $\mathcal{F}(U) := \mathbb{Z}$ für alle $U \subset X$ offen.
   Restriktionsabbildungen sind Identitäten. (Anstelle von $\mathbb{Z}$ kann ein beliebiges Objekt verwendet werden.)

2. Prägarbe der stetigen reellwertigen Funktionen:
   $\mathcal{F}(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$
   und für $U \subset V$ ist $r_{UV}\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch $f \mapsto f|_U$.

3. Prägarbe der beschränkten Funktionen (analog zu 2.)

Erfüllt eine Prägarbe ein zusätzliches Axiom, so bezeichnen wir sie als Garbe. Wir formulieren dieses Axiom nun in der Situation, dass $\mathcal{C}$ die Kategorie abelscher Gruppen (oder Ringen) ist. In diesem Fall können wir von *Elementen* von $\mathcal{F}(U)$ sprechen und die Nullgruppe (oder der Nullring), das terminale Objekt von $\mathcal{C}$ ist. [10]

Definition 6.7. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ (auf X mit Werten in $\mathcal{C}$) heißt Garbe, falls gilt:
Ist $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine beliebige offene Überdeckung von U und ist weiter $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ gegeben für alle $i \in I$, sodass die s_i eine *kompatible Familie* bilden, d.h. für alle $i, j \in I$ gelte $r_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$, dann existiert ein eindeutiges $s \in \mathcal{F}(U)$, sodass $r_{U_i, U}(s) = s_i$.

Insbesondere für die leere Teilmenge gilt es immer $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

Die Idee dieser Eigenschaft ist also: „Aus lokalen Daten lässt sich das globale Datum (eindeutig) rekonstruieren". Man sagt auch oft: Lokale Schnitte (welche kompatibel sind, also jeweils auf der Überlappung $U_i \cap U_j$ übereinstimmen) lassen sich eindeutig zum einem globalen Schnitt „verkleben".

Beispiel 6.8.

1. Die konstante Prägarbe aus Beispiel 6.6 ist keine Garbe: $F(\emptyset) \neq 0$.

   Sogar wenn wir die Definition der konstanten Prägarbe anpassen würden, sodass gilt $F(\emptyset) = 0$. Dann können wir folgendes Argument anwenden. Betrachte dazu eine unzusammenhängende Menge $U = U_1 \cup U_2$ (mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$). Ein lokaler Schnitt $s_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ ist eine ganze Zahl, ebenso $s_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ (Kompatibilität ist hier eine leere Bedingung, also immer erfüllt). Sind aber s_1 und s_2 verschieden, so gibt es kein passendes $s \in \mathcal{F}(U)$ (denn dies müsste auch eine (einzelne) ganze Zahl sein).

   Im Buch von Ravi Vakil [3] im Abschnitt 2.2.10 gibt es eine interessant Diskussion zu diesem Beispiel. In Abschnitten 2.2.1–2.2.10 finden Sie mehr zu Garben.

   Es gibt allerdings auch die sogenannte *konstante Garbe*: Sie kann zum Beispiel definiert werden als die (Prä-)Garbe der lokal konstanten Funktionen. Dann wäre in obigem Beispiel $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}^2$, die Restriktionsabbildungen zu $\mathcal{F}(U_1)$ und $\mathcal{F}(U_2)$ wären die Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente und wir könnten somit $s := (s_1, s_2)$ wählen.

2. Die Prägarbe der stetigen Funktionen ist eine Garbe.

3. Die Prägarbe der beschränkten Funktionen erfüllt das Garbenaxiom nicht: Sei z.B. $X = \mathbb{R}$, wähle $U = \mathbb{R}$, die Überdeckung $U = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$, wobei U_k das Intervall $(k, k+2)$ bezeichnet, und sei $s_k \in \mathcal{F}(U_k)$ gegeben durch die Funktion $f(x) = x^2$. Dann würden die s_k sich zwar eindeutig zu einer Funktion $U \to \mathbb{R}$ verkleben lassen (nämlich zur Funktion x^2), diese ist aber nicht beschränkt auf ganz U und somit existiert kein passendes $s \in \mathcal{F}(U)$.

[10] For more general categories see https://en.wikipedia.org/wiki/Sheaf_(mathematics)

Grundsätzlich gilt: Prägarben von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften bilden genau dann eine Garbe, wenn die entsprechende Eigenschaft *lokal* ist (d.h. lokal überprüft werden kann). Das ist beispielsweise bei Stetigkeit der Fall („Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn sie an jedem Punkt stetig ist.“), aber nicht bei Beschränktheit (eine lokal beschränkte Funktion muss nicht global beschränkt sein).

Bemerkung 6.9. Das Garbenaxiom aus Definition 6.7 lässt sich auch anders formulieren: Für jede offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

exakt. Die Abbildungen sind hierbei gegeben durch $s \mapsto (r_{U_i,U}(s))_{i \in I}$ und $(s_i)_{i \in I} \mapsto (r_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) - r_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j))$.
Ist $\mathcal{C}$ keine Kategorie von Mengen mit Struktur (d.h. können wir nicht über Elemente sprechen), aber eine Kategorie, in der Produkte existieren, so kann man diese Abbildungen ebenfalls definieren (mithilfe der universellen Eigenschaft von Produkten).

Unser Ziel ist es nun, $\operatorname{Spec} R$ mit einer Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$ von „guten“ Funktionen auszustatten. Betrachten wir das Beispiel $R = k[x]$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k. Dann ist $\operatorname{Spec} R = \{(x - a) \mid a \in k\} \cup \{(0)\}$, d.h. abgesehen vom sogenannten generischen Punkt (0) besteht das Spektrum aus einen Punkt für jedes Element von k. Funktionen auf ganz $\operatorname{Spec} R$ sollen Polynomfunktionen sein, d.h. $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R) := R$.
Jetzt fragen wir uns, was eine sinnvolle Definition für Funktionen auf kleineren offenen Mengen wäre, beispielsweise auf $D(f)$, $f \in k[x]$. $D(f)$ ist die Menge aller Primideale, die f nicht enthalten. Abgesehen vom Ideal (0) sind das alle $(x - a)$, wo a keine Nullstelle von f ist (beachte. dass k algebraisch abgeschlossen ist und f somit in Linearfaktoren zerfällt). Anschaulich hat f also auf $D(f)$ keine Nullstelle. Eine sinnvolle Definition könnte also die folgende sein: Lokale Funktionen auf $D(f)$ sind gebrochen-rationale Funktionen, bei denen eine Potenz von f im Nenner steht. Dies entspricht genau der Lokalisierung von R an f also $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D(f)) := R_f$.

6.3 Strukturgarbe auf Spec A

Let us now define the structure sheaf of $\mathcal{O}$ on $\operatorname{Spec} A$. We define the sections of $\mathcal{O}$ over an open subset $U \subset \operatorname{Spec} A$ as

$$s \colon U \to \sqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}},$$

such that

1. $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ for all $\mathfrak{p} \in U$;
2. locally it is given by a fraction of elements in A, i.e. for any $\mathfrak{p} \in U$ there exists a neighborhood $V \subset U$ of $\mathfrak{p}$ and elements $a, f \in A$ such that $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{f}$ and $f \notin \mathfrak{q}$ for all $\mathfrak{q} \in V$.

Using pointwise addition, multiplication and unit, we see that the set $\mathcal{O}(U)$ is a commutaive ring. We also have the natural restrictions $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ for $V \subset U$, which obviously satisfy the sheaf condition. Thus, we have defined the structure sheaf

$$\mathcal{O} \quad \text{or} \quad \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}.$$

Definition 6.10. The pair $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ is called the *spectrum of A.*

Satz 6.11. *Let A be a ring and $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O})$ its spectrum. We have*

1. *For any $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ we have $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$.*
2. *For any $f \in A$ we have $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$.*
3. *In particular, we have $\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}) \cong A$.*

Beweis. Maybe later. See [2, Chapter II, Proposition 2.2]. □

Above we used $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, which stands for the stalk of $\mathcal{O}$ at $\mathfrak{p}$. See [2, p. 62] for details.

7 Kettenbedingungen

7.1 Definitionen und erste Eigenschaften

Lemma 7.1. *Sei Σ eine partiell geordnete Menge (die Relation bezeichnen wir mir $\leq$). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Jede aufsteigende Sequenz $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ in Σ wird stationär.*

2. *Jede nichtleere Teilmenge von Σ hat ein maximales Element.*

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2) Nehmen wir an, dass 2) nicht gilt, d.h. es existiert eine nichtleere Teilmenge $T \subset \Sigma$ ohne maximalen Elemente. Dann können wir induktiv eine streng aufsteigende Sequenz in T konstruieren.

2) $\Rightarrow$ 1) Sei $x_1, x_2, \dots$ eine aufsteigende Sequenz in Σ. Da die Menge $(x_i)_{i\geq 1}$ ein maximales Element hat, wird diese Sequenz stationär. □

Definition 7.2. Sei M ein Modul über einem Ring R.

1. M heißt noethersch[11] $\iff$ jede aufsteigende Kette von Untermoduln wird stationär.

2. M heißt artinsch[12] $\iff$ jede absteigende Kette von Untermoduln wird stationär.

Beispiel 7.3.

1. Endliche abelsche Gruppen (als $\mathbb{Z}$-Moduln betrachtet) sind noethersch und artinsch.

2. Der Ring $\mathbb{Z}$ betrachtet als $\mathbb{Z}$-Modul ist noethersch, aber nicht artinsch (z.B. $(2) \supset (4) \supset (8) \supset \dots$).

3. Der Ring $k[x]$ betrachtet als Modul über sich selbst ist noethersch, aber nicht artinsch.

4. Der Polynomring in unendlich vielen Variablen $k[x_1, x_2, \dots]$ ist weder noethersch noch artinsch.

Satz 7.4. *M ist noethersch $\iff$ jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.*

Beweis. $\Rightarrow$) Sei $N \subset M$ ein beliebiger Untermodul und Σ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln von N. Da der Nullmodul in Σ liegt, ist Σ nichtleer und hat nach Lemma 7.1 ein maximales Element N_0. Gälte $N_0 \neq N$, könnten wir N_0 vergrößern, indem wir den Untermodul $N_0 + Rx$ mit $x \in N \setminus N_0$ betrachten und dadurch einen Widerspruch zur Maximalität von N_0 erhalten. Somit gilt $N_0 = N$ und der Modul N ist endlich erzeugt.

$\Leftarrow$) Sei $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln. Betrachten wir den Untermodul $N = \bigcup_i M_i$, welcher nach Voraussetzung endlich erzeugt ist, und seien $x_1, \dots, x_r$ beliebige Erzeuger von N. Es ist klar, dass es $n_i \geq 1$ existieren, sodass $x_i \in M_{n_i}$. Somit gilt $N = M_n$ mit $n = max_i(n_i)$ und die Kette wird stationär. □

[11] Nach Emmy Noether.
[12] Nach Emil Artin.

Bemerkung 7.5.

1. Insbesondere folgt aus dem obigen Satz, dass jeder noetherscher Modul M endlich erzeugt ist.

2. Ein Untermodul von einem endlich erzeugten Modul ist nicht immer endlich erzeugt (z.B. $(x_1, x_2, \dots) \subset k[x_1, x_2, \dots]$).

3. Sogar wenn ein Untermodul N von einem endlich erzeugten Modul M endlich erzeugt ist, ist die minimale Anzahl der Erzeuger von N nicht unbedingt durch die minimale Anzahl der Erzeuger von M begrenzt.

Satz 7.6. *Sei $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt:*

1. *M ist noethersch $\iff$ M' und M'' sind noethersch.*

2. *M ist artinsch $\iff$ M' und M'' sind artinsch.*

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage. Die zweite ist analog.

$\Rightarrow$) Eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M' (bzw. M'') definiert eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Somit wird diese stationär.

$\Leftarrow$) Sei (L_i) eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Dann ist $\alpha^{-1}(M)$ ist eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M' und $\beta(M)$ ist eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M''. Da die beide induzierte Ketten stationär werden, wird auch L_n stationär. □

Korollar 7.7. *Eine endliche direkte Summe von noetherschen (bzw. artinschen) Moduln ist noethersch (bzw. artinsch).*

Beweis. Benutzen Sie Satz 7.6 und die kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_n \to \oplus_{i=1}^{n} M_i \to \oplus_{i=1}^{n-1} M_i \to 0,$$

um die Aussage induktiv zu beweisen. □

Definition 7.8. Ein Ring R heißt noethersch (bzw. artinsch), wenn er noethersch (bzw. artinsch) als Modul über sich selbst ist.

Beispiel 7.9.

1. Jeder Körper ist noethersch und artinsch.

2. $\mathbb{Z}$ ist noethersch, aber nicht artinsch.

3. $k[x]$ ist noethersch, aber nicht artinsch.

4. $k[x_1, x_2, \dots]$ ist weder noethersch noch artinsch.

5. Hauptidealringe sind noethersch (nach Satz 7.4), aber nicht unbedingt artinsch.

Satz 7.10. *Seien R ein noetherscher (bzw. artinscher) Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M noethersch (bzw. artinsch).*

Beweis. Da M endlich erzeugt ist, existiert $n > 0$ und ein surjektiver Homomorphismus von R-Moduln $R^n \to M$. Somit ist M ein Faktormodul von R^n. Der Modul R^n ist noethersch (bzw. artinsch) nach Korollar 7.7 und als Faktormodul von einem noetherschen (bzw. artinschen) Modul ist M nach Satz 7.6 auch noethersch (bzw. artinsch). □

Satz 7.11. *Seien R ein noetherscher (bzw. artinscher) Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Dann ist der Faktorring R/I auch noethersch (bzw. artinsch).*

Beweis. Als R-Modul ist R/I noethersch (bzw. artinsch) nach Satz 7.6. Daraus folgt, dass er auch als R/I-Modul noethersch (bzw. artinsch) ist. □

7.2 Moduln endlicher Länge

Definition 7.12. Sei R ein Ring und M ein R-Modul.

1. M heißt einfach $\iff$ die einzige Untermoduln von M sind 0 und M.

2. Eine Kompositionsreihe von M ist eine absteigende Kette von echten Untermoduln der Form
$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0,$$
sodass die Quotienten M_i/M_{i+1} einfache Moduln sind. Die Zahl n wird Länge der Kompositionsreihe genannt. Die Quotienten M_i/M_{i+1} nennt man Kompositionsfaktoren.

Beispiel 7.13.

1. Sei k ein Körper und V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum. Es gilt
$$V \text{ ist einfach } \iff \dim_k V = 1.$$

2. Eine abelsche Gruppe A ist genau dann einfach (als $\mathbb{Z}$-Modul), wenn gilt $A \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p Primzahl. Nach Satz von Lagrange ist die Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ einfach. Somit ist eine Richtung sofort klar. Umgekehrt: sei $x \in A$ ein Element $\neq 0$. Dann erzeugt dieses Element eine Untergruppe $(x) \subset A$ (ein Untermodul) der Form $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (der Fall $n = 0$ ist auch erlaubt). Da A einfach ist, gilt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = A$ mit n Primzahl.

Satz 7.14. *Wenn M eine Kompositionsreihe der Länge n hat, dann ist jede Kompositionsreihe von M der Länge n, und jede Kette von Untermoduln in M zu einer Kompositionsreihe erweitert werden kann.*

Beweis. Sei $l(M)$ die Länge der kürzesten Kompositionsreihe von M. Der Beweis geht in drei Schritten:

1) *Sei $N \subset M$ ein echter Untermodul. Dann gilt $l(N) < l(M)$.* Sei $M_\bullet$ eine Kompositionsreihe von M der Länge $l(M)$. Betrachten wir die Untermoduln $N_i := N \cap M_i$. Dann ist $N_\bullet$ eine Kette von Untermoduln von N. Die natürliche Inklusion $N_i/N_{i+1} \subset M_i/M_{i+1}$ zusammen mit der Tatsache, dass M_i/M_{i+1} einfach ist, implizieren, dass gilt $N_i/N_{i+1} = 0$ oder $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$. Wenn gilt $N_i/N_{i+1} = 0$, dann lassen wir diesen Schritt weg. Auf diese Weise erhalten wir eine Kompositionsreihe von N mit der Länge $\leq l(M)$. Somit haben wir gezeigt $l(N) \leq l(M)$.

Sei nun $l(N) = l(M)$, dann haben wir $N_{i+1}/N_i = M_{i+1}/M_i$ für alle i. Daraus folgt sofort $M_{n-1} = N_{n-1}$. Induktiv kann man weiter zeigen, dass gilt $M = N$ (Übung).

2) *Jede Kette in M ist der Länge $\leq l(M)$.* Sei $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k = 0$ eine Kette der Länge k. Dann gilt $l(M) > l(M_1) > \cdots > l(M_k) = 0$. Daraus folgt sofort $k \leq l(M)$.

3) Betrachten wir eine beliebige Kompositionsreihe von M. Nach Teil 2 ist die Länge dieser Kompositionsreihe $\leq l(M)$. Da $l(M)$ schon die kleinste Länge ist, bekommen wir $= l(M)$.

Betrachten wir nun eine beliebige echt absteigende Kette von Untermoduln von M. Wir wenden Teil 2 an. Die Kompositionsreihen von M sind genau die Ketten der Länge $\ell(M)$. Wenn die Länge $< l(M)$ ist, dann ist diese Kette keine Kompositionsreihe und wir können noch weitere neue Terme einfügen bis die Länge $= l(M)$ ist. □

Satz 7.15. *Ein R-Modul M hat eine Kompositionsreihe $\iff$ M ist artinsch und noethersch.*

Beweis. $\Rightarrow$) Wenn M eine Kompositionsreihe hat, sind alle Ketten in M endlich. Somit ist M noethersch und artinsch.

$\Leftarrow$) Wir konstruieren eine Kompositionsreihe für M. Da M noethersch ist, hat er nach Lemma 7.1 ein maximales Untermodul M_1. Der Modul M_1 ist auch noethersch nach Satz 7.6 und hat analog ein maximales Untermodul M_1. Auf diese Weise erhalten wir eine echt absteigende Kette $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$, welche stationär wird, da M nach Voraussetzung auch artinsch ist. □

Definition 7.16. Ein R-Modul M heißt Modul endlicher Länge, wenn er eine Kompositionsreihe hat. Nach Satz 7.15 gilt es genau dann, wenn M noethersch und artinsch ist. Nach Satz 7.14 haben alle Kompositionsreihen von M die gleiche Länge, welche wir mit $\ell_R(M)$ bezeichnen und die Länge von M nennen.

Beispiel 7.17.

1. Sei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum. Dann gilt $\ell_k(V) = \dim_k V$.

2. Für $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul gilt $\ell_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 1$.

3. Sei M ein einfacher R-Modul. Dann gilt $\ell_R(M) = 1$.

4. Sei $R = \mathbb{C}[x, y]$ und $M = \mathbb{C}[x, y]/(x, y) \simeq \mathbb{C}$. Dann gilt $\ell_R(M) = 1$.

Lemma 7.18. *Die Länge ist additiv auf kurzen exakten Sequenzen.*

Beweis. Sei $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln endlicher Länge. Zu zeigen: $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$.

Gegeben eine Kompositionsreihe für M' bekommen wir eine Kette in M indem wir α darauf anwenden. Gegeben eine Kompositionsreihe für M'' bekommen wir eine Kette in M indem wir β^{-1} darauf anwenden. Die zwei Ketten zusammen geben eine Kompositionsreihe für M. □

Theorem 7.19 (Jordan-Hölder)**.** *Sei M ein Modul endlicher Länge. Seien $(A_i)_{0\leq i\leq n}$ und $(B_i)_{0\leq i\leq n}$ zwei Kompositionsreihen. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den Mengen von Kompositionsfaktoren $\{A_i/A_{i+1}\}$ und $\{B_i/B_{i+1}\}$, sodass die entsprechende Kompositionsfaktoren isomorph sind.*

Beweis. Der Beweis geht induktiv nach $\ell(M)$. Wir betrachten einen konkreten Fall und die allgemeine Aussage wird dem Leser als Übung gelassen.

1. $\ell(M) = 0 \iff M = 0$.

2. $\ell(M) = 1 \iff M$ ist einfach.

3. $\ell(M) = 2$ — der erste interessante Fall.

   Seien

$$
\begin{aligned}
M = A_0 \supset A_1 \supset A_2 = 0 \\
M = B_0 \supset B_1 \supset B_2 = 0
\end{aligned}
$$

   zwei unterschiedliche Kompositionsreihen von M. Aus der Definition von Kompositionsreihen folgt sofort, dass die Moduln $A_1, B_1, M/A_1, M/B_1$ einfach sind. Daraus bekommen wir: $A_1 \cap B_1 = 0$ und $A_1 + B_1 = M$. Nun haben wir

$$
\begin{aligned}
&M/A_1 = (A_1 + B_1)/A_1 \simeq B_1/(A_1 \cap B_1) = B_1 \\
&M/B_1 \simeq A_1.
\end{aligned}
$$

4. $\ell(M) = 3$ — der Induktionsschritt.

   Seien

$$
\begin{aligned}
M = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 = 0 \qquad (7.1)\\
M = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 = 0
\end{aligned}
$$

zwei Kompositionsreihen. Wir unterscheiden zwei Fälle: $A_1 = B_1$ und $A_1 \neq B_1$. Wenn gilt $A_1 = B_1$, dann sind wir sofort fertig, da wir die Aussage für Moduln der Länge 2 schon kennen und $\ell(A_1) = 2$.

Sei nun $A_1 \neq B_1$. Genau wie früher haben wir $A_1 + B_1 = M$. Wir definieren zwei neue Ketten

$$\begin{aligned} M \overset{\neq}{\supset} A_1 \overset{\neq}{\supset} A_1 \cap B_1 \supset A_2 \cap B_1 \supset 0 \\ M \underset{\neq}{\supset} B_1 \underset{\neq}{\supset} B_1 \cap A_1 \supset B_2 \cap A_1 \supset 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Die Länge dieser Kette ist 4. Da gilt $\ell(M) = 3$, sind diese Ketten nicht strikt absteigend (und können keine Kompositionsreihen sein). Aus der Definition sehen wir, dass die erste zwei Inklusionen (von der linken Seite) strikt sind. Also nur in den letzten zwei Inklusionen können nicht strikte Inklusionen vorkommen. Schauen wir diese nun genauer an:

$$\begin{aligned} A_1 \cap B_1 \supset A_2 \cap B_1 \supset 0 \\ B_1 \cap A_1 \supset B_2 \cap A_1 \supset 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Da gilt $\ell(A_1 \cap B_1) = 1$, muss eine von den beiden Inklusionen in jeder Kette von (7.3) eine Gleichheit sein. Somit sehen wir, dass die Kompositionsfaktoren von (7.3) isomorph sind (bis auf eine Permutation).

Jetzt schauen wir uns die Kompositionsfaktoren von (7.2) an. Wie früher bekommen wir

$$M/A_1 \simeq B_1/(A_1 \cap B_1) \quad \text{und} \quad M/B_1 \simeq A_1/(A_1 \cap B_1).$$

Somit sind auch die Kompositionsfaktoren von (7.2) isomorph (bis auf eine Permutation).

Um den Beweis zu beenden, merken wir, dass man die Kompositionsfaktoren von (7.1) bekommt, wenn man aus den Kompositionsfaktoren von (7.2) den Null-Modul rauswirft.

□

8 Noethersche Ringe

Lemma 8.1. *Ein Ring R ist noethersch genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist.*

1. *Jede nichtleere Menge von Idealen von R hat ein maximales Element.*
2. *Jede aufsteigende Kette von Idealen von R wird stationär.*
3. *Jedes Ideal von R ist endlich erzeugt.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 7.1 und Satz 7.4. □

Satz 8.2. *Sei R ein noetherscher Ring und $f\colon R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Dann ist S auch noethersch.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 7.11, da gilt $S \simeq R/\operatorname{Ker} f$. □

Satz 8.3. *Sei $R \subset S$ ein Unterring. Wenn R noethersch ist und S als R-Modul endlich erzeugt ist, dann ist S auch ein noetherscher Ring.*

Beweis. Nach Satz 7.10 ist S noethersch als R-Modul. Somit ist er auch als S-Modul noethersch. □

Beispiel 8.4.

1. Nach dem obigen Satz ist der Ring $\mathbb{Z}[i]$ noethersch.
2. Sei k ein Körper. Wir werden gleich beweisen, dass der Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch ist. Somit nach Satz 8.2 bekommen wir viele Beispiele von noetherschen Ringen, indem wir Faktorringe von $k[x_1, \ldots, x_n]$ betrachten.

Satz 8.5. *Sei R ein noetherscher Ring und $T \subset R$ ein multiplikatives System. Dann ist $T^{-1}R$ auch noethersch.*

Beweis. Übungsblatt 13. □

Korollar 8.6. *Sei R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Dann ist $R_\mathfrak{p}$ auch noethersch.*

Theorem 8.7 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist der Polynomring $R[x]$ auch noethersch.*

Beweis. Sei $I \subset R[x]$ ein Ideal. Die Leitkoeffizienten von Polynomen in I bilden ein Ideal $J \subset R$ (Übungsblatt 13). Da R noethersch ist, ist das Ideal J endlich erzeugt. Seien $a_1, \ldots, a_n$ Erzeuger von J. Für jedes $i \in [1, n]$ existiert ein Polynom $f_i \in R[x]$ der Form $f_i = a_i x^{r_i} +$ (Terme von kleinerem Grad). Die Polynome f_i erzeugen ein Ideal $I' \subset J \subset R[x]$.

Sei $f = ax^m +$ (Terme von kleinerem Grad) ein Element von I. Wenn gilt $m \geq r := \max_i (r_i)$, dann können wir folgendes machen: 1) wir schreiben a als $a = \sum_i u_i a_i$ mit $u_i \in R$;

2) die Differenz $f - \sum_i u_i f_i x^{m-r_i}$ liegt in I und ist vom Grad $< m$. Wenn wir dieses Prozedere mehrmals iterieren, bekommen wir ein Polynom g vom Grad $< r$. Somit haben wir eine Zerlegung $f = g + h$ mit $h \in I'$.

Sei M der R-Untermodul von $R[x]$ erzeugt durch $1, x, \dots, x^{r-1}$. Wir haben eben gezeigt, dass gilt $I = (I \cap M) + I'$. Da M endlich erzeugt ist, ist er auch noethersch nach Satz 7.10. Somit ist sein Untermodul $I \cap M$ auch endlich erzeugt als R-Modul nach Satz 7.4. Wenn $g_1, \dots, g_m$ den R-Modul $I \cap M$ erzeugen, folgt sofort daraus, dass $f_1, \dots, f_n$ und $g_1, \dots, g_m$ das Ideal I erzeugen. Somit ist I endlich erzeugt und $R[x]$ ist noethersch. $\square$

Korollar 8.8. *Wenn R noethersch ist, ist auch $R[x_1, \dots, x_n]$ noethersch.*

Beweis. Induktion. $\square$

Definition 8.9. Sei S eine R-Algebra, d.h. der Ring S, welcher mit einem Ringhomomorphismus $R \to S$ ausgestattet ist. Die Algebra S heißt endlich erzeugt über R, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

1. Es gibt endliche viele Elemente $a_1, \dots, a_n$ in S, sodass jedes Element in S als Polynom in a_i's mit Koeffizienten in R geschrieben werden kann.

2. Es existiert ein surjektiver Homomorphismus von R-Algebren $f\colon R[x_1, \dots, x_n] \to S$, d.h. f ist ein Ringhomomorphismus und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R[x_1, \dots, x_n] \arrow[rr, "f"] & & S \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

   soll kommutieren, wobei die diagonalen Pfeile die entsprechenden R-Algebra Strukturen auf $R[x_1, \dots, x_n]$ und S definieren.

Aus der Definition folgt sofort, dass S zur Faktoralgebra $R[x_1, \dots, x_n]/I$ (als R-Algebra) isomorph ist.

Korollar 8.10. *Sei S eine endlich erzeugte R-Algebra. Ist R noethersch, dann ist auch S noethersch. Insbesondere, jede endlich erzeugte Algebra über einem Körper ist noethersch.*

Beweis. Es existieren ein n und ein surjektiver Ringhomomorphismus $R[x_1, \dots, x_n] \to S$. Da $R[x_1, \dots, x_n]$ noethersch ist (Theorem 8.7), ist auch S noethersch (Satz 8.2). $\square$

Satz 8.11. *Seien $R \subset S \subset T$ Ringe. Weiter, sei R noethersch, T endlich erzeugt als R-Algebra und endlich erzeugt als S-Modul. Dann ist S endlich erzeugt als R-Algebra.*

Beweis. Seien $x_1, \dots, x_m$ Erzeuger von T als R-Algebra und $y_1, \dots, y_n$ Erzeuger von T als S-Modul. Dann gilt

$$x_i = \sum_j a_{ij} y_j \qquad a_{ij} \in S \tag{8.1}$$

$$y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k \qquad b_{ijk} \in S \tag{8.2}$$

Sei nun $S_0 \subset S$ die R-Algebra erzeugt durch alle a_{ij} und b_{ijk}. Da R noethersch ist und S_0 endlich erzeugt als R-Algebra ist, folgt nach Korollar 8.10, dass S_0 noethersch ist.

Sei nun $x \in T$ ein Element. Aus Formeln (8.1) und (8.2) folgt sofort, dass gilt

$$x = \sum_i \alpha_i y_i \qquad \alpha_i \in S_0.$$

Somit ist T endlich erzeugt als S_0-Modul. Da S_0 noethersch ist, bekommen wir nach Satz 7.10, dass T ein noetherscher S_0-Modul ist. Somit ist dann auch S ein noetherscher S_0-Modul (Satz 7.4). Endlich, da S_0 eine endlich erzeugte R-Algebra ist, ist auch S endlich erzeugt als R-Algebra. □

Satz 8.12. *Seien k ein Körper und E/k eine endlich erzeugte k-Algebra. Ist E ein Körper, dann ist die Körpererweiterung E/k eine endliche algebraische Erweiterung von k.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass E/k algebraisch ist. Die Endlichkeit folgt dann automatisch, da E eine endlich erzeugte k-Algebra ist.

Widerspruchsbeweis: Nehmen wir an, dass die Körpererweiterung E/k nicht algebraisch ist. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Erzeuger von E als k-Algebra. Dann kann man die x_i's so umnummerieren, dass $x_1, \ldots, x_r$ algebraisch unabhängig über k sind, und die restlichen $x_{r+1}, \ldots, x_n$ algebraisch über $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ sind. Die Körpererweiterung E/F ist dann automatisch endlich (und natürlich algebraisch). Nun können wir auf $k \subset F \subset E$ Satz 8.11 anwenden. Somit ist $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ endlich erzeugt als k-Algebra. Widerspruch! □

Korollar 8.13. *Seien k ein Körper, R/k eine endlich erzeugte k-Algebra und $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Dann ist der Körper $R/\mathfrak{m}$ eine endliche algebraische Erweiterung von k. Insbesondere, wenn k algebraisch abgeschlossen ist, gilt $R/\mathfrak{m} \simeq k$.*

Beweis. Satz 8.12 auf $R/\mathfrak{m} \simeq k$ anwenden. □

Korollar 8.14. *Sei $k = \bar{k}$. Dann ist jedes maximale Ideal von $\mathfrak{m} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ der Form $(x - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ mit $a_i \in k$.*

Beweis. Gemacht in der Vorlesung. □

9 Hilbertscher Nullstellensatz

Dieses Kapitel basiert sich auf [Hartshorne, Kapitel I, §1].

In der klassischen algebraischen Geometrie arbeitet man über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Somit setzen wir in diesem Kapitel immer $k = \bar{k}$ voraus (z. B. $k = \mathbb{C}$).

Definition 9.1. Affiner Raum $\mathbb{A}^n$ über dem Körper k ist k^n (als Menge, keine Vektorraumstruktur). Also ein Punkt von $\mathbb{A}^n$ ist ein n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in k$.

Jedes Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ kann man als eine Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\to k \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto f(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

betrachten und seine Verschwindungsmenge

$$V(f) \coloneqq \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0\}$$

definieren. Analog definiert man auch die Verschwindungsmenge einer Familie von Polynomen

$$V(f_1, \ldots, f_m) \coloneqq \{P \in \mathbb{A}^n \mid f_i(P) = 0 \quad \forall i\},$$

oder sogar eines Ideals $J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$

$$V(J) \coloneqq \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0 \quad \forall f \in J\}.$$

Bemerkung 9.2.

1. Es gilt

$$\begin{aligned} V(f) &= V((f)) \\ V(f_1, \ \ldots, f_n) &= V((f_1, \ \ldots, f_n)) \end{aligned}$$

2. Da nach Theorem 8.7 jedes Ideal von $k[x_1, \ldots, x_n]$ endlich erzeugt ist, genügt es, Verschwindungsmengen der Form $V(f_1, \ldots, f_m)$ anzuschauen.

Definition 9.3. Eine Teilmenge von $Y \subset \mathbb{A}^n$ heißt algebraisch, wenn es ein Ideal J mit $Y = V(J)$ gibt.

Satz 9.4. *Die folgenden Eigenschaften folgen sofort aus der Definition.*

1. $V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 J_2)$.

2. $\cap_\alpha V(J_\alpha) = V(\sum_\alpha J_\alpha)$.

3. $\mathbb{A}^n = V(0)$ *und* $\emptyset = V(k[x_1, \ldots, x_n])$.

Dieser Satz zeigt, dass man die algebraischen Teilmengen benutzen kann, um eine Topologie auf $\mathbb{A}^n$ zu definieren.

Definition 9.5. Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n$ ist die Topologie, deren abgeschlossene Teilmengen genau die algebraischen Teilmengen sind.

Beispiel 9.6. Eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^1$ ist eine Vereinigung von endlich vielen Punkten.

Definition 9.7. Sei X ein topologischer Raum. Eine nichtleere Teilmenge $Y \subset X$ heißt irreduzibel, wenn es keine echten abgeschlossenen Teilmengen $Y_{1,2} \subset Y$ mit der Eigenschaft $Y = Y_1 \cup Y_2$ gibt.

Beispiel 9.8.

1. Die affine Gerade $\mathbb{A}^1$ ist irreduzibel (auch $\mathbb{A}^n$).
2. Die algebraische Menge $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$ ist nicht irreduzibel.

Definition 9.9. Eine affine algebraische Varietät ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^n$ (mit der induzierten Topologie).

Jetzt möchten wir einer Teilmenge von $\mathbb{A}^n$ ein Ideal von $k[x_1, \ldots, x_n]$ zuordnen.

Definition 9.10. Einer Teilmenge $Y \subset \mathbb{A}^n$ ordnen wir das Ideal

$$I(Y) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(P) = 0 \quad \forall P \in Y\}.$$

Satz 9.11. *Die Zuordnungen $J \mapsto V(J)$ und $Y \mapsto I(Y)$ besitzen die folgenden grundlegenden Eigenschaften.*

1. $J_1 \subset J_2 \Rightarrow V(J_1) \supset V(J_2)$.
2. $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$.
3. $\forall Y_{1,2} \subset \mathbb{A}^n$ *gilt* $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.
4. $\forall J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ *gilt* $I(V(J)) = \sqrt{J}$.
5. $\forall Y \subset \mathbb{A}^n$ *gilt* $V(I(Y)) = \bar{Y}$.

Beweis. Die Aussagen (1), (2) und (3) sind klar. Die Aussage (4) ist als Hilbertscher Nullstellensatz bekannt. Die Aussage (5) lassen wir als eine Übung (Blatt 14). □

Theorem 9.12 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Seien $k = \bar{k}$ und $J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Dann gilt*

$$I(V(J)) = \sqrt{J}.$$

Beweis. Die Definition von $\sqrt{J}$ lautet

$$\sqrt{J} = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \exists n \colon f^n \in J\}.$$

Somit ist die Inklusion

$$\sqrt{J} \subset I(V(J))$$

sofort klar. Weiter, für ein $f \notin \sqrt{J}$ werden wir gleich einen Punkt $P \in V(J)$ mit $f(P) \neq 0$ finden.

Sei nun $f \notin \sqrt{J}$. Somit existiert nach Satz 1.36 ein Primideal $\mathfrak{p} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ mir den Eigenschaften $J \subset \mathfrak{p}$ und $f \notin \mathfrak{p}$. Betrachten wir nun die Homomorphismen von k-Algebren

$$k[x_1, \dots, x_n] \to k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p} \to (k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p})_{\bar{f}},$$

wobei der erste Homomorphismus die kanonische Projektion auf den Faktorring ($g \mapsto \bar{g} := g + \mathfrak{p}$) ist, und der zweite die Lokalisierung ist.

Alle drei k-Algebren sind endlich erzeugte k-Algebren[13]. Sei $\mathfrak{m} \subset C = (k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p})_{\bar{f}}$ ein maximales Ideal. Nach Korollar 8.13 haben wir $C/\mathfrak{m} \simeq k$. Somit haben wir nun die folgenden Homomorphismen von k-Algebren

$$k[x_1, \dots, x_n] \to k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p} \to (k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p})_{\bar{f}} \to C/\mathfrak{m} \simeq k.$$

Das Bild von x_i unter der Komposition dieser Abbildungen bezeichnen wir mit a_i. Auf diese Weise erhalten wir einen Punkt $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Einerseits, da (das Bild von) $\bar{f}$ in C invertierbar ist, liegt es nicht in $\mathfrak{m}$. Somit gilt $f(P) \neq 0$. Andererseits, haben wir $P \in V(J)$, da für jedes Polynom $g \in J$ gilt $g(P) = 0$. $\square$

Korollar 9.13. *Die Zuordnungen $J \mapsto V(J)$ und $Y \mapsto I(Y)$ geben eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den radikalen Idealen von $k[x_1, \dots, x_n]$ und den algebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}^n$. Unter dieser Bijektion entsprechen die irreduziblen algebraischen Teilmengen den Primidealen.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort. Die zweite Aussage haben wir in der Vorlesung bewiesen. $\square$

[13] Warum!?

10 Artinsche Ringe

Satz 10.1. *Sei R ein artinscher Ring. Dann ist jedes Primideal maximal.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Dann ist $S = R/\mathfrak{p}$ ein artinscher Integritätsbereich. Sei $x \neq 0$ ein Element von S. wir haben eine absteigende Kette von Idealen

$$(x) \supset (x^2) \supset \dots .$$

Da S artinsch ist, wird diese Kette stationär: $(x^n) = (x^{n+1}) = \dots$. Dann haben wir $x^n = x^{n+1}y$ mit $y \in S$. Da S ein Integritätsbereich ist, können wir x^n kürzen und bekommen $1 = xy$. Somit ist x invertierbar in S. Da x ein beliebiges Element war, ist S ein Körper. Somit ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. □

Satz 10.2. *Sei R ein artinscher Ring. Dann hat R nur endlich viele maximale Ideale.*

Beweis. Sei Σ die Menge von endlichen Schnitten $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_r$ von maximalen Idealen. Da R artinsch ist, hat diese Menge ein minimales Element $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$ (Lemma 7.1). Sei nun $\mathfrak{m}$ ein belibiges maximales Ideal. Wegen Minimalität von $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$ gilt

$$\mathfrak{m} \cap (\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n.$$

Daraus folgt sofort

$$(\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n) \subset \mathfrak{m}.$$

Nach Lemma 10.3 gibt es ein l, sodass gilt $\mathfrak{m}_l \subset \mathfrak{m}$. Somit bekommen wir $\mathfrak{m}_l = \mathfrak{m}$. □

Lemma 10.3. *Sei R ein Ring, $I_1, \dots, I_n$ Ideale und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Falls gilt $I_1 \cap \dots \cap I_n \subset \mathfrak{p}$, dann existiert ein l, sodass $I_l \subset \mathfrak{p}$.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, d.h. für jedes l gibt es ein $x_l \in I_l$ mit $x_l \notin \mathfrak{p}$. Dann haben wir $x_1 \dots x_n \in \prod_l I_l \subset \cap_l I_l \subset \mathfrak{p}$ und erhalten ein Widerspruch, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. □

Satz 10.4. *Sei R ein artinscher Ring. Dann ist das Nilradikal $\mathfrak{N}$ nilpotent.*

Beweis. Da R artinsch ist, wird die Kette

$$\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}^2 \supset \mathfrak{N}^3 \supset \dots$$

stationär. D.h. es existiert ein k, sodass $\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1} = \dots = I$. Wir müssen zeigen, dass gilt $I = 0$.

Wir werden annehmen, dass gilt $I \neq 0$ und bekommen ein Widerspruch.

Sei $I \neq 0$. Dann ist die Menge

$$\Sigma := \{J \subset R \mid JI \neq 0\}$$

nichtleer, da gilt $I \in \Sigma$. Sei J ein minimales Element in Σ (R ist artinsch). Dann gibt es ein $x \in J$, sodass gilt $xI \neq 0$. Somit gilt auch $(x)I \neq 0$. Aus der Inklusion $(x) \subset J$ und Minimalität von J bekommen wir $(x) = J$. Weiter, für das Ideal xI aus der Gleichung

$$(xI)I = xI^2 = xI \neq 0,$$

und aus der Inklusion $xI \subset J = (x)$ bekommen wir $xI = (x)$ (nochmal Minimalität von J benutzen). Somit gilt

$$x = xy \quad \text{mit} \quad y \in I.$$

Nun haben wir

$$x = xy = xy^2 = xy^3 = \dots.$$

Da gilt $I = \mathfrak{N}^k \subset \mathfrak{N}$, ist y ein Nilpotent. D.h. es gibt ein n, sodass $x = xy^n = 0$. Und wir bekommen ein Wiederspruch mit $xI \neq 0$. □

Definition 10.5. Sei R ein Ring ($\neq 0$) und $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen (echte Inklusionen). Die Zahl n nennt man Länge der Kette. Die Krulldimension von R ist Supremum der Längen von Ketten von Primidealen.

Beispiel 10.6.

1. $\dim k = 0$
2. $\dim \mathbb{Z} = 1 = \dim k[x]$
3. $\dim k[x]/(x^2) = 0$

Theorem 10.7. *R ist artinsch $\iff$ R ist noethersch und* $\dim R = 0$.

Um dieses Theorem zu beweisen brauchen wir noch ein paar Vorbereitungen.

Lemma 10.8. *Sei V ein k-Vektorraum. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *V hat endliche Dimension;*
2. *V hat endliche Länge;*
3. *jede aufsteigende Kette von k-Unterräumen in V wird stationär;*
4. *jede absteigende Kette von k-Unterräumen in V wird stationär.*

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann gilt $\dim_k V = \ell_k(V)$.

Beweis. Blatt 15. □

Lemma 10.9. *Sei R ein Ring, in welchem das Nullideal ein Produkt $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n$ von Kopien von maximalen Idealen ist (Wiederholungen erlaubt). Dann ist R noethersch genau dann, wenn R artinsch ist.*

Beweis. Betrachten wir die Kette

$$R \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n = 0.$$

Jeder Quotient $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_i$ ist ein $R/\mathfrak{m}_i$-Vektorraum. Jetzt folgt die Aussage aus Lemma 10.8 und Satz 7.6. □

Definition 10.10. Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Das Ideal I heißt irreduzibel, wenn aus $I = J_1 \cap J_2$ folgt $I = J_1$ oder $I = J_2$.

Lemma 10.11. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist jedes Ideal ein endlicher Schnitt von irrduziblen Idealen.*

Beweis. Sei Σ die Menge der Idealen von R, welche als endlicher Schnitt von irreduziblen Idealen nicht dargestellt werden können. Wir möchten zeigen, dass Σ leer ist.

Angenommen Σ ist nicht leer. Da R noethersch ist, hat Σ ein maximales Element I. Das Ideal I ist dann automatisch reduzibel, d.h. $I = J_1 \cap J_2$ mit $J_l \neq I$. Da jedes J_l nicht in Σ liegt (wegen Maximalität von I), d.h. jedes J_l ist ein endlicher Schnitt von irreduziblen Idealen, ist auch I ein endlicher Schnitt von irreduziblen Idealen. Widerspruch. □

Lemma 10.12. *Sei R ein noetherscher Ring und I ein irreduzibles Ideal. Dann ist das Radikal $\sqrt{I}$ ein Primideal.*

Beweis. Es genügt den Fall $I = (0)$ zu betrachten (warum?). In diesem Fall gilt $\sqrt{(0)} = \mathfrak{N}$. *Beweisstrategie:* wir nehmen an, dass $\sqrt{(0)}$ kein Primideal ist, und folgern daraus, dass das Ideal (0) reduzibel sein muss. Seien $x, y \notin \sqrt{(0)}$ mit $xy \in \sqrt{(0)}$, d.h. xy ist ein Nilpotent, aber weder x noch y ist Nilpotent. Somit gibt es ein n, sodass $(xy)^n = 0$, aber $x^n \neq 0$ und $y^n \neq 0$. Schauen wir uns nun die folgende aufsteigende Kette von Idealen

$$Ann(x^n) \subset Ann(x^{n+1}) \subset \ldots$$

an. Da R noethersch ist, wird diese Kette stationär, d.h. es existiert ein m, sodass $Ann(x^m) = Ann(x^{m+1}) = \ldots.$

Wir möchten nun zeigen, dass gilt $(x^m) \cap (y^n) = (0)$. Dazu betrachten wir erst ein Element $a \in (y^n)$. Aus $(xy)^n = 0$ folgt sofort $ax^m = 0$. Jetzt, nehmen wir zusätzlich an, dass gilt $a \in (x^m)$, d.h. $a = bx^m$ mit $b \in R$. Daraus folgt sofort $ax^m = bx^{2m} = 0$. Somit liegt b in $Ann(x^{2m}) = Ann(x^m)$. Jetzt gilt also $bx^m = 0$ und somit auch $a = bx^m = 0$.

Wir haben gezeigt, dass gilt $(x^m) \cap (y^n) = (0)$ mit $(x^m) \neq 0$ und $(y^n) \neq (0)$. Somit ist das Ideal (0) reduzibel. □

Lemma 10.13. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann enthält jedes Ideal eine Potenz seines Radikals.*

Beweis. Blatt 15 □

Beweis von Theorem 10.7:

$\Rightarrow$) Nach Satz 10.1 sind alle Primideale in R maximal. Daraus folgt sofort $\dim R = 0$. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ die maximale Ideale von R (nach Satz 10.2 gibt es nur endlich viele). Für eine positive Zahl k gilt

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^k \subset (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^k \subset (\cap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i)^k = \mathfrak{N}^k.$$

Nach Satz 10.4 ist $\mathfrak{N}$ Nilpotent und somit existiert es ein k, sodass gilt $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^k = (0)$. Jetzt ist R noetersch nach Lemma 10.9.

$\Leftarrow$) Da R noethersch ist, können wir das Nullideal als schnitt von irreduziblen Idealen schreiben (Lemma 10.11)

$$(0) = I_1 \cap \cdots \cap I_n.$$

Sei nun $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal. Wir haben

$$\mathfrak{p} \supset (0) \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \supset \sqrt{(0)} = \cap_l \sqrt{I_l}.$$

Nach Lemma 10.3 gibt es ein l, sodass gilt $\sqrt{I_l} \subset \mathfrak{p}$. Somit liegt einer von $\sqrt{I_l}$'s in jedem Primideal. Daher sind $\sqrt{I_l}$'s die minimale Primideale.

Aus $\dim R = 0$ folgt nun, dass es in R nur endlich viele Primideale gibt $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ (alle automatisch maximal).

Betrachten wir jetzt das Nilradikal $\mathfrak{N} = \cap_i \mathfrak{m}_i$. Nach Lemma 10.13 ist $\mathfrak{N}$ Nilpotent, d.h. es gibt ein k, sodass gilt $\mathfrak{N}^k = 0$. Daher folgern wir

$$(\cap_i \mathfrak{m}_i)^k = 0 \Rightarrow \prod_i \mathfrak{m}_i^k = 0.$$

Jetzt nach Lemma 10.9 folgt, dass R artinsch ist.

11 Diskrete Bewertungsringe

Definition 11.1. Eine diskrete Bewertung auf einem Körper K ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $v\colon K^* \to \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$v(x+y) \geq min(v(x), v(y)). \tag{11.1}$$

Die Teilmenge von K

$$R := \{x \in K^* \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$$

ist ein Ring, genannt Bewertungsring von v oder von K. Manchmal ist es nützlich $v(0) := +\infty$ zu setzen.

Beispiel 11.2. Hier sind ein paar Standardbeispiele.

1. Sei $K = \mathbb{Q}$. Dann für jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ kann man eine diskrete Bewertung auf $\mathbb{Q}$ definieren. Dafür schreiben wir ein $x \in \mathbb{Q}^*$ als

   $$x = p^m y,$$

   mit y koprim zu p und setzen

   $$v_p(x) := m.$$

   Der Bewertungsring ist der lokale Ring $\mathbb{Z}_{(p)}$.

2. Sei $K = \mathbb{C}(x)$. Dann für jedes $a \in \mathbb{C}$ definieren wir eine diskrete Bewertung auf K, indem wir die Potenz von $(x-a)$ in dem Element $\frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{C}(x)$ nehmen. Zum Beispiel:

   $$v_0\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2.$$

3. $K = \mathbb{C}((x))$.

Definition 11.3. Ein Integritätsbereich R heißt diskreter Bewertungsring, wenn R der Bewertungsring einer diskreten Bewertung auf dem Quotientenkörper $Quot(R)$ ist.

Lemma 11.4. *Sei R ein diskreter Bewertungsring.*[14] *Dann gilt:*

1. *R ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$;*

2. *$\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal;*

3. *Jedes Ideal $I \neq 0$ ist der Form $\mathfrak{m}^k$;*

4. *R ist noethersch;*

[14] Notation: $K = Quot(R)$, v die entsprechende diskrete Bewertung.

5. $\dim R = 1$

6. $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$;

Beweis.

1. Es genügt zu zeigen, dass jedes $x \in R \setminus \mathfrak{m}$ invertierbar ist. Dazu betrachten wir ein $x \in R \setminus \mathfrak{m}$. Sei nun x^{-1} sein Inverses in K. Wir zeigen, dass x^{-1} in R liegt. Wir haben

$$x \in R \setminus \mathfrak{m} \iff v(x) = 0 \Rightarrow v(x^{-1}) = 0 \Rightarrow x^{-1} \in R.$$

2. Sei $I \neq 0$ ein Ideal. Sei $x \in I$ ein Element mit der Eigenschaft

$$v(x) = min_{y \in I} v(y).$$

Nun bemerken wir Folgendes. Seien $a, b \in R$ mit $v(a) = v(b)$. Dann gilt $a = ub$ mit u invertierbar. Da in R ein Element z mit $v(z) = 1$ gibt, bekommen wir

$$I = \{y \in R \mid v(y) \geq v(x)\}.$$

3. Wir haben alle Ideale explizit beschrieben und sehen sofort, dass jede aufsteigende Kette stationär wird.

4. Es gibt nur zwei Primideale: (0) und $\mathfrak{m}$. Die Aussage folgt.

5. Einerseits, wir haben $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq 0$. Andererseits, die Klasse $x + \mathfrak{m}^2$ erzeugt $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als k-Vektorraum. Die Aussage folgt.

□

Theorem 11.5. *Sei R ein noetherscher lokaler Integritätsbereich von Dimension 1, $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal und $k = R/\mathfrak{m}$ der Quotientenkörper. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

1. *R ist ein diskreter Bewertungsring;*

2. *$\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal;*

3. *$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$;*

4. *Jedes Ideal $I \neq 0$ in R ist der Form $\mathfrak{m}^k$;*

5. *Es gibt $x \in R$, sodass jedes Ideal $I \neq 0$ in R ist der Form (x^k) mit $k \geq 0$.*

Beweis.

1) $\Rightarrow$ 2): Lemma 11.4.(2).

2) $\Rightarrow$ 3): Einerseits, wie in Lemma 11.4.(6) erzeugt $x + \mathfrak{m}^2$ den Quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als k-Vektorraum. Andererseits, nach Lemma 11.6, haben wir $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq 0$.

3) $\Rightarrow$ 4): Übung ☺

4) $\Rightarrow$ 5): Nach Lemma 11.6 gibt es ein $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Nun folgt es sofort aus 4), dass $\mathfrak{m} = (x)$. Somit haben wir $\mathfrak{m}^k = (x^k)$.

5) $\Rightarrow$ 1): Natürlich gilt für das maximale Ideal $\mathfrak{m} = (x)$ und für alle andere Ideale ($\neq 0$) (x^k). Definiere nun die Bewertung von $a \in R$

$$v(a) = k,$$

wobei k ist das einzige k mit der Eigenschaft $(a) = (x^k)$. □

Lemma 11.6. *Sei R ein lokaler notherscher Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Dann haben wir zwei Möglichkeiten:*

1. $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ *für alle* n;
2. $\exists n$ *sodass* $\mathfrak{m}^n = 0$ *und in diesem Fall ist* R *artinsch.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es ein n mit $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ gibt. Nach Nakayama folgern wir sofort $\mathfrak{m}^n = 0$. Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Wir haben

$$0 = \mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{p} \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{m}^n} = \mathfrak{m} \subset \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{m}.$$

Somit gibt es in R nur ein Primideal und $\dim R = 0$. Nach Theorem 10.7 ist R artinsch. □

Literatur

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[3] Ravi Vakil. *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry, July 31, 2023 version.*