تمرینات فصل چهار

نام: امیرحسام بهمن‌خواه نام: مریم رضائی نام: محمدحسین فرخی

1. مسأله‌ی کوله‌پشتی را در نظر بگیرید: n عنصر با وزن‌های معلوم $w_1, w_2, \ldots, w_n$ و ارزش‌های معلوم $v_1, v_2, \ldots, v_n$ و یک کوله‌پشتی با ظرفیت W، داده شده‌اند؛ باارزش‌ترین زیرمجموعه‌ای از این عناصر را پیدا کنید که بتوان آنها را درون کوله‌پشتی جا داد.

الف) الگوریتم جستجوی کامل برای مسأله کوله‌پشتی را با شبه‌کد توصیف کنید.

ب) کارایی زمانی الگوریتم را با نماد مجانبی O بیان کنید.

پ) برنامه‌ای برای پیاده‌سازی الگوریتم بنویسید. و بزرگ‌ترین مقداری از n را که به ازای آن، برنامه، روی رایانه شما، در کمتر از 1 دقیقه قادر به تولید خروجی باشد، پیدا کنید.

جواب:

1 – الف) با استفاده از روشی شبیه به جستجوی سطری در ماتریس و به کارگیری یک ماتریس کمکی، ابتدا زیرمجموعه‌ی مورد نظر از پر ارزش‌ترین عناصر را پیدا می‌کنیم و سپس با پیمایش در ماتریس مقادیر مجموعه را یافته و در یک لیست قرار می‌دهیم تا به عنوان خروجی برگردانیم.

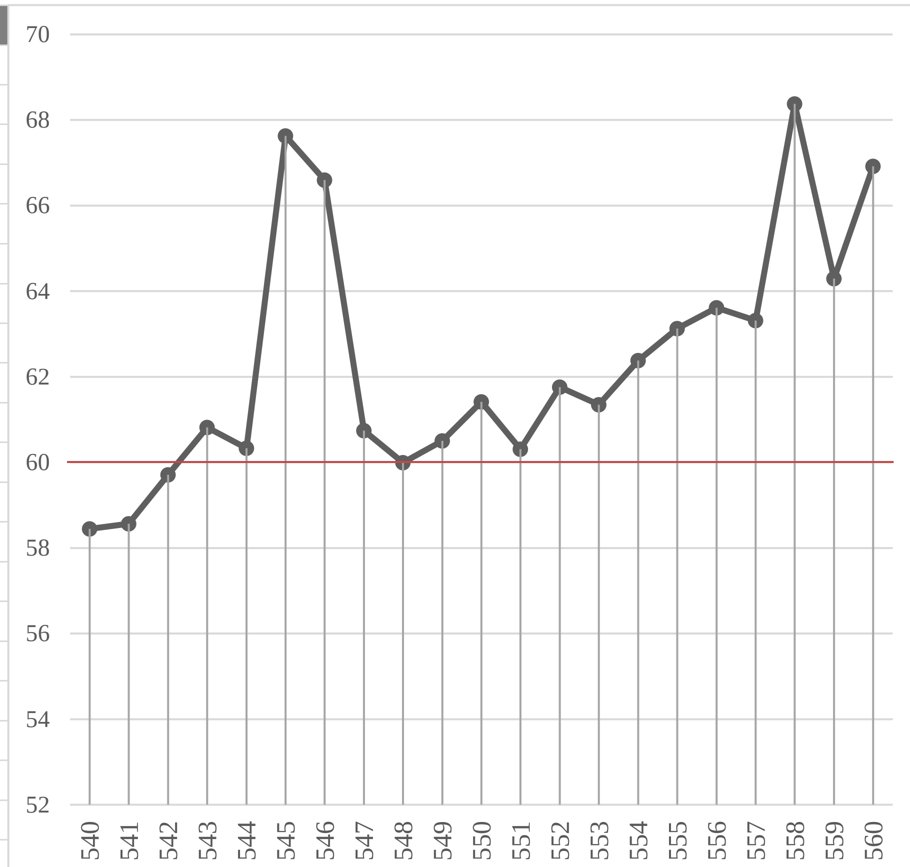
کارکرد الگوریتتم به این شکل است که اگر ابعاد i و j ماتریس کمکیِ خالی را به ترتیب تعداد عناصر و ظرفیت کوله‌پشتی در نظر بگیریم، هر خانه دارای مجموع ارزش‌های پر ارزش‌ترین عناصری است که index آن‌ها کوچکتر مساوی iِ خانه باشد و جمع وزنشان کوچکتر مساوی jِ آن. با تشکیل این ماتریس و سپس حرکت از آخرین خانه‌ی آن به بالا تا جایی که جمع ارزش‌ها تغییر کند (یعنی عنصرِ هم index با iِ خانه در ارزش تغییری داده و در کوله‌پشتی قرار داده شده است) و سپس به چپ با شرط قبل، می‌توانیم عناصر مورد نظر را بیابیم و در یک آرایه خروجی دهیم. شبه کد الگوریتم این بخش در صفحه‌ی بعد به طور کامل قابل مشاهده است.

1 – ب) از آنجا که الگوریتم از سه بخش مستقل تشکیل شده است که دو بخش اول دو حلقه‌ی تودرتو با $n \times capacity$ تکرار و بخش سوم یک حلقه با n تکرار است، کارایی زمانی الگوریتم بر اساس جفت حلقه‌ی تودرتوی اول محاسبه می‌شود (که برای ساخت ماتریس کمکی‌ست) و برابر با $O(n \times capacity)$ می‌باشد.

```
Algorithm: Backpack(capacity, n, weights[w1, …, wn], values[v1, …, vn])
    // finds most valuable subset whose sum of weights does not exceed the capacity
    // Input: list weights of n weights, list values of n values, the capacity, n
    // Output: subset of most valuable elements
    matrix ← [[0 for w ← 0 to capacity] for i ← 0 to n]
    SelectedItems ← list()
    for i ← 0 to n do
        for w ← 0 to capacity do
            if i = 0 or w = 0 then
                matrix[i][w] ← 0
            elif weights[i – 1] ≤ w then   // weight of item i – 1
                previous ← matrix[i – 1][w]
                new ← values[i – 1] + matrix[i – 1][w – weights[i – 1]]
                matrix[i][w] ← max(previous, new)
            else then
                matrix[i][w] ← matrix[i – 1][w]
    totval ← matrix[n][capacity]    // max possible amount for total value
    w ← capacity
    for i ← n to 0 do
        if totval < 1 then
            break   // reached end of backtracking in matrix
        if totval = matrix[i – 1][w] then
            continue   // total value in this row equal to total value in above index
        else then   // if above value in column (same capacities) differs
            SelectedItems.append(weights[i – 1])   // current item is included in pack
            totval ← totval – values[i – 1]
            w ← w – weights[i – 1]
    return SelectedItems
```

1 – پ) با کمک ماژول‌های time و random در پایتون، لیست‌های تصادفی با طول‌های متفاوت برای وزن‌ها و ارزش‌ها درست شدند و با در نظر گرفتن ظرفیت به اندازه‌ی میانگین وزن‌ها، برنامه چندبار و با بازه‌ی مختلف n اجرا شد تا بازه‌ای که زمان اجرایش در حدود یک دقیقه بود یافت و انتخاب شود. در آخر اعداد صحیح درون این بازه (که از $n = 540$ تا 560 بود) تک تک امتحان شدند که نتایج آن بر حسب ثانیه در زیر آورده شده و کد برنامه (و مشخصات کامپیوتر) در پیوست 1 ذکر شده است.

Length (n)	Time (s)
540	58.446
541	58.564
542	59.713
543	60.815
544	60.33
545	67.632
546	66.601
547	60.744
548	59.996
549	60.501
550	61.417
551	60.308
552	61.76
553	61.35
554	62.38
555	63.126
556	63.612
557	63.315
558	68.38
559	64.296
560	66.92



---

2. نسخه غیربازگشتی (پایین – به - بالا) الگوریتم مرتب‌سازی درجی را در نظر بگیرید:

ALGORITHM $InsertionSort(A[0..n-1])$

// Sorts a given array by insertion sort
// Input: An array $A[0..n-1]$ of n orderable elements
// Output: Array $A[0..n-1]$ sorted in nondecreasing order

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
    $v \leftarrow A[i]$
    $j \leftarrow i-1$
    while $j \geq 0$ **and** $A[j] > v$ **do**
        $A[j+1] \leftarrow A[j]$
        $j \leftarrow j-1$
    $A[j+1] \leftarrow v$

الف) الگوریتم مرتب‌سازی درجی را به شکل بازگشتی (بالا- به- پایین) بنویسید. و آنگاه با تشکیل رابطه‌های بازگشتی و حل آنها، کارایی زمانی الگوریتم را در بهترین حالت و در بدترین حالت تعیین کنید. کارایی فضایی الگوریتم چقدر است؟ از نظر مصرف حافظه، کدام یک از دو الگوریتم بازگشتی یا غیربازگشتی کاراتر است؟

ب) از آنجا که نسخه غیربازگشتی الگوریتم، در زمان اجرا از پشته استفاده نمی‌کند، انتظار ما این است که در عمل، الگوریتم غیربازگشتی، اندکی سریع‌تر باشد از الگوریتم بازگشتی. درستی این ادعا را با نوشتن و اجرای برنامه‌های پیاده‌سازِ دو الگوریتم غیربازگشتی و بازگشتی (روی ورودی‌های مختلف) تحقیق کنید.

پ) نسخه غیربازگشتی الگوریتم مرتب‌سازی درجی را به گونه‌ای تغییر دهید که در هر تکرار خود، برای یافتن مکان درج یک عدد در زیرآرایه مرتب، از جستجوی دودویی استفاده کند (نه از جستجوی خطی). آیا با این تغییر، به الگوریتمی خواهیم رسید که کارایی آن در بدترین حالت $\Theta(n\log n)$ باشد؟ در پاسخ به این پرسش، کارایی زمانی الگوریتم حاصل را اندازه بگیرید.

جواب:

2 – الف) در بازگشتی کردن الگوریتم مرتب‌سازی درجی، با یک فراخوانی در هر مرحله، $n-1$ عنصر اول آرایه را مرتب می‌کنیم و سپس عنصر nام را با عناصر قبل مقایسه کرده و در جای خود قرار می‌دهیم. برای رابطه‌ی بازگشتی آن، در هر سری فراخوانی یک بازگشت برای یکی کمتر از پارامتر داشته و یک حلقه‌ی جدا داریم که تعداد تکرار آن به مقدار پارامتر ورودی‌ست. اگر آرایه مرتب باشد هیچگاه وارد حلقه نشده و کارایی $O(n)$ خواهد بود. در بهترین حالت، آرایه یک عضو دارد یعنی $C(1) = 1$ پس کارایی $O(1)$ می‌باشد. اما در بدترین حالت آرایه عکس حالت مرتب چیده شده است پس تمامی حلقه‌ها را وارد می‌شود. یعنی:

$$C(n) = C(n-1) + n \longrightarrow C(n) = C(n-2) + (n-1) + n$$

$$\longrightarrow C(n) = C(1) + 2 + 3 + \cdots + n$$
$$\longrightarrow C(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in O(n^2)$$

برای کارایی فضایی الگوریتم غیر بازگشتی مرتب‌سازی درجی مشاهده می‌کنیم که هیچ متغیر بزرگ اضافه‌ای علاوه بر آرایه‌ی ورودی تشکیل نمی‌شود پس کارایی فضایی آن $O(1)$ است، درحالی که برای الگوریتم بازگشتی، در هر فراخوانی داده‌ها در پشته‌ی فراخوانی ذخیره می‌شوند که طول آن در نهایت به طول اصلی آرایه‌ی ورودی خواهد بود؛ بنابراین کارایی فضایی $O(n)$ می‌باشد.

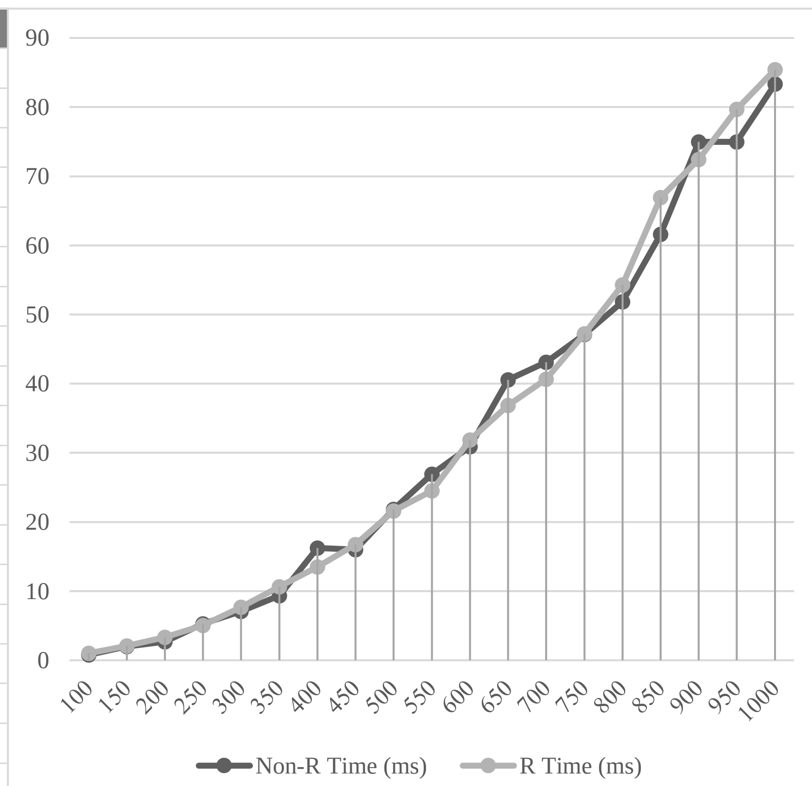
Algorithm: RecursiveInsertionSort($A[0\ldots n-1]$)

// implements insertion sort algorithm recursively
// Input: array A
// Output: sorts array A

if $n \le 1$ **then**
  return // ends recursion
RecursiveInsertionSort($A[:n-1]$)
$temp \leftarrow A[n-1]$
$pick \leftarrow n-2$
while $pick \ge 0$ **and** $A[pick] > temp$ **then**
  $A[pick+1] \leftarrow A[pick]$
  $pick \leftarrow pick - 1$
$A[pick+1] \leftarrow temp$

2 – ب) کد پایتون برنامه‌های نوشـــته شـــده برای اندازه‌گیری زمان اجرای الگوریتم بازگشـــتی و غیربازگشـــتی مرتب‌سازی درجی در پیوست 2 قرار داده شده است. داده‌های استخراج شده از فایل CSV خروجی در جدول و نمودار در زیر بر حسـب میلی‌ثانیه نمایش داده شـده‌اند. مشـاهده می‌کنیم زمان اجرای الگوریتم بازگشـتی به جز چند حالت استثنا، به طور کلی کمی از الگوریتم غیربازگشتی بیشتر است.

Length	Non-R (ms)	R (ms)
100	0.79	1.008
150	2.003	2.063
200	2.681	3.325
250	5.273	5.025
300	7.082	7.679
350	9.333	10.647
400	16.241	13.508
450	16.01	16.745
500	21.829	21.611
550	26.911	24.504
600	30.897	31.873
650	40.572	36.862
700	43.087	40.638
750	47.128	47.246
800	51.849	54.302
850	61.632	66.907
900	74.969	72.446
950	74.958	79.688
1000	83.337	85.432



2 – پ) الگوریتم جستجوی دودویی، خود یک الگوریتم بازگشتی‌ست و می‌توانیم به راحتی با نوشتن جداگانه‌ی آن و فراخوانی در میان الگوریتم مرتب سازی درجی، جایگاه مورد نظر برای قرار دادن عنصر را بیابیم و سپس آن را در موقعیت قرار دهیم. اما جالب‌تر است که از آنجا که مرتب‌سازی درجی‌مان غیربازگشتی‌ست، جستجو را هم باز کرده و به صورت یک حلقه درون خود الگوریتم مرتب‌سازی تعبیه کنیم. در این حلقه با مقایسه‌ی عنصر با بقیه‌ی عناصر آرایه و همچنین تعیین اینکه قبل یا بعد آن‌ها باید قرار گیرد، جایگاه مورد نظر پیدا می‌شود.

Algorithm: BinaryInsertionSort(A[0…n – 1])

// implements insertion sort algorithm with non-recursive binary search

// Input: array A

// Output: sorts array A

for $pick \leftarrow 0$ **to** n **do**

$\quad value \leftarrow A[pick]$

$\quad left \leftarrow 0$

$\quad right \leftarrow n - 1$

$\quad$**while** $left < right$ **do**

$\quad\quad mid \leftarrow \text{int}(left/2 + right/2)$

$\quad\quad$**if** $A[left] = value$ **then**

$\quad\quad\quad temp \leftarrow left$

$\quad\quad$**if** $A[right] = value$ **then**

$\quad\quad\quad temp \leftarrow right$

$\quad\quad$**if** $A[mid] = value$ **then**

$\quad\quad\quad temp \leftarrow mid$

$\quad\quad$**if** $A[mid] > value$ **then**

$\quad\quad\quad right \leftarrow mid$

$\quad\quad$**else then**

$\quad\quad\quad left \leftarrow mid$

$\quad A \leftarrow A[:temp] + [value] + A[temp:pick] + A[pick+1:]$

برای کارایی زمانی الگوریتم حاصل مشاهده می‌کنیم که حلقه‌ی for بیرونی حتماً n بار تکرار را دارد و حلقه‌ی

while درونی که جستجوی دودویی‌ست، تنها $\log n$ تکرار دارد؛ اما با این وجود نمی‌توانیم سریع نتیجه بگیریم که کارایی زمانی الگوریتم وابسته به حاصل ضرب این دو حلقه‌ی تودرتوست، زیرا در خط آخر درون حلقه‌ی for عنصر مورد نظر را از جای خود برداشته و با هل دادن عناصر بزرگتر از آن به راست، آن را در مکان مورد نظر قرار می‌دهیم. واضح است که در بدترین حالت که آرایه برعکس چیده شده باشد، این عنصر همواره به اول آرایه رفته و همه‌ی عناصر را به راست هل می‌دهد؛ پس هر بار n جابه‌جایی انجام داده و کارایی همواره $O(n^2)$ است.

تنها در حالتی که نوع داده به شکلی باشد که قیمت مقایسه از جابه‌جایی بیشتر باشد، الگوریتم دارای جستجوی دودویی از خطی کاراتر خواهد بود زیرا تعداد مقایسه‌های آن در بدترین حالت خطی–لگاریتمی‌ست.

---

3. الگوریتم اقلیدس، الگوریتم تقلیل‌وحلی است که بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح m و n را مبتنی بر رابطه بازگشتی $\gcd(m,n) = \gcd(n, m \bmod n)$ محاسبه می‌کند.

الف) درستی رابطه بازگشتی

$$\gcd(m,n) = \begin{cases} 2\gcd(m/2\,, n/2) & \text{if } m \text{ and } n \text{ are even} \\ \gcd(m, n/2) & \text{if } m \text{ is odd and } n \text{ is even} \\ \gcd((m-n)/2\,, n) & \text{if } m \text{ and } n \text{ are odd} \end{cases}$$

را ثابت کنید.

ب) مبتنی بر این رابطه بازگشتی، یک الگوریتم تقلیل‌وحل دیگر برای محاسبه ب.م.م دو عدد صحیح بنویسید.

پ) با این فرض که اعداد m و n، آنقدر بزرگ باشند که نتوان عملیات حسابی روی آنها را در زمان $\Theta(1)$ به انجام رساند، کارایی زمانی الگوریتم اقلیدس و کارایی زمانی الگوریتمی را که نوشته‌اید، اندازه بگیرید. کدام یک از این دو الگوریتم تقلیل‌وحل، کاراتر است؟

جواب:

3 – الف) برای اثبات درستی رابطه‌ی بازگشتی ارائه شده نیاز است صحت هر شرط را بر اساس قوانین ریاضی نشان دهیم تا ببینیم که با هر تغییر، مقدار ب.م.م. حفظ شده و تساوی برقرار است. اگر $m \geq n > 0$:

در شرط اول برای زمانی که هر دو عدد داده شده زوج باشند، بنابر تعریف ب.م.م. می‌دانیم که عدد 2 حتماً در مقدار ب.م.م. آن‌ها خواهد بود، پس می‌توانیم آن 2 را خارج کرده و اعداد را بر 2 تقسیم کنیم تا این مقسوم‌الیه مشترکشان حذف شود. اما در حالتی که تنها یکی از اعداد زوج باشد (شرط دوم)، بر اساس ب.م.م. داریم که 2 در ب.م.م. آن‌ها نخواهد بود، پس عدد زوج را تا جای ممکن با رابطه‌ی بازگشتی بر 2 تقسیم می‌کنیم تا زوج

بودن آن بر طرف شود. در آخر تنها حالتی می‌ماند که هر دو عدد فرد باشند و برای اثبات درستی محاسبه‌ی ارائه شده برای ب.م.م. در این شرط داریم که اگر $a = \gcd(m, n)$ بنابراین $a \mid m$ و $a \mid n$. همچنین با خواص عاد کردن داریم $a \mid m - n$. از طرفی می‌دانیم m و n هر دو فرد هستند پس تفریق آن‌ها زوج خواهد بود و از آنجا که مقدار a ب.م.م. دو عدد فرد بود و زوج نیست، می‌توانیم تفریق را بر 2 تقسیم کنیم و عدد حاصل را کوچکتر کنیم پس $a \mid \frac{m-n}{2}$ و بنابراین $a = \gcd\left(\frac{m-n}{2}, n\right)$.

این رابطه بازگشتی تا جایی که ممکن است ادامه پیدا می‌کند، یعنی مقادیر چپی عدد کوچکتر تا جایی از عدد بزرگتر کم می‌شوند که عدد بزرگتر، بیت‌های قابل توجه خود را (که به تعداد تفاوت طول بیتی دو عدد هستند) از دست داده و نتواند به چپ جابه‌جا شود.

3 – ب) با تعمیم رابطه‌ی داده شده و اضافه کردن شروطی برای مقایسه‌ی اعداد در هر بار فراخوانی بازگشتی تابع و تعیین عدد بزرگتر و همچنین شرط صفر بودن، الگوریتم زیر را می‌نویسیم.

Algorithm: BinaryGCD(*m*, *n*)

// implements and generalizes the binary division to calculate GCD

// Input: two numbers *m* and *n*

// Output: the greatest common divisor of *m* and *n*

if |*n*| > |*m*| **then**

  return BinaryGCD(*n*, *m*)

elif *n* = 0 **then**

  return *m*

elif *m* **and** *n* **are even then** // can check their remainder in division by two with %

  return 2 × BinaryGCD(*m*/2, *n*/2)

elif *m* **is even and** *n* **is odd then**

  return BinaryGCD(*m*/2, *n*)

elif *n* **is even and** *m* **is odd then**

  return BinaryGCD(*m*, *n*/2)

else then

  return BinaryGCD((|*m*| – |*n*|)/2, *n*)

3 – پ) در تحلیل کارایی الگوریتم اقلیدس اصـلی $\gcd(a, b)$، بنابر اثبات ارائه شـده توسـط گابریل لامه تعداد مراحل اجرا شـده توسـط الگوریتم با دنباله‌ی فیبوناچی ارتباط دارد به طوری که اگر تعداد این تکرارها n باشـد، کوچکترین اعدادی که این امر برایشـان صدق کند اعدادی در دنباله‌ی فیبوناچی F هسـتند که اگر عدد کوچکتر ورودی b باشد، آنگاه $F_{n+1} \le b$ و $F_{n+2} \le a$ که هر کدام بزرگترین اعدادی در دنباله‌ی فیبوناچی هستند که از ورودی‌ها کوچکتر یا مساوی‌اند. بنابراین د کارایی زمانی آن برای n تکرار به کمک نسبت طلایی φ داریم:

$$b \ge F_{n+1} \ge \varphi^{n-1} \xrightarrow{take\ \log_\varphi} n-1 \le \log_\varphi b \xrightarrow{\times \log_{10}\varphi > \frac{1}{5}} \frac{n-1}{5} < \log_{10}\varphi \log_\varphi b = \log_{10} b$$
$$\longrightarrow n \le 5\log_{10} b \xrightarrow{h=\log_{10} b} n \le 5h \to n \in \mathrm{O}(h) \xrightarrow{\text{mod } is\ \mathrm{O}(h)\ as\ h\ is\ number\ of\ digits} n \in \mathrm{O}(h^2)$$

از طرفی برای الگوریتم داده شده (که الگوریتم دودویی ب.م.م. و الگوریتم استاین نیز خوانده می‌شود) از آنجا که تنها از تقسیم بر دو اسـتفاده می‌شـود و در کامپیوتر اعداد به طور دودویی شـناخته شـده و با آن‌ها کار می‌شـود، قیمت خود تقسـیم کمتر اسـت. اگر پارامتر را بر اسـاس تعداد بیت‌های عدد بزرگتر بگیریم که این تعداد بیت‌ها $m = \lfloor \log_2 a \rfloor + 1$ می‌باشـد، تعداد مراحل تفریق و جابه‌جایی به راسـتِ اجرا شـده توسـط الگوریتم در بدترین حالت با آن برابر بوده و الگوریتمی خطی داریم. اما چون که اعداد بزرگ هسـتند و خود اعمال تفریق و جابه‌جایی بیتی $\mathrm{O}(m)$ زمان می‌برند، کارایی زمانی الگوریتم $\mathrm{O}(m^2)$ است.

مشاهده می‌کنیم که کارایی زمانی هر دو الگوریتمِ ب.م.م. مربعی بوده و تفاوت زیادی ندارند. با این وجود قابل به ذکر است که الگوریتم دودویی در هر حال تعداد اعمال بیتی کمتری را نسبت به الگوریتم اصلی انجام می‌دهد و مدلی بهینه شـده از آن اسـت، این در حالی‌سـت که کارایی زمانی الگوریتم اقلیدس مقداری از الگوریتم اسـتاین کمتر اســـت زیرا h لگاریتم عدد کوچکتر در مبنای ده اســـت و m لگاریتم عدد بزرگتر در دو و می‌دانیم همواره $\log_{10} n \le \log_2 n$ پس برای مقادیر بزرگ، توان دوی این اعداد از هم دورتر می‌شوند.

---

4. الگوریتم درج در درخت دودویی جستجو را در نظر بگیرید:

Algorithm $TreeInsert(T, r, x)$

// Implements the nonrecursive tree − insert

// Input: A binary search tree T rooted at r, and an element x

// Output: The binary search tree T, modified to contain the new element x

```
t ← null
while r ≠ null do
    t ← r
    if key(x) < key(r)
        r ← left(r)
    else
        r ← right(r)
parent(x) ← t
```

```
if  t = null
     r ← x
elif  key(x) < key(t)
     left(t) ← x
else
     right(t) ← x
```

الف) الگوریتم درج را به شکل بازگشتی بنویسید. و آنگاه با تشکیل یک رابطه بازگشتی و حل آن در حالات خاص، کارایی زمانی الگوریتم در بهترین حالت و در بدترین حالت را تعیین کنید. کارایی فضایی الگوریتم را نیز تعیین کنید. از نظر مصرف حافظه، کدام یک از دو الگوریتم بازگشتی یا غیربازگشتی کاراتر است؟

ب) یک درخت دودویی جستجوی n گره‌ای را می‌توان با درج یک به یک عناصر در درخت ابتدائاً تهی ساخت. با تحلیل‌های دقیق ریاضی نشان دهید که کارایی زمانی الگوریتم ساخت درخت، در بدترین حالت $\Theta(n^2)$ و در بهترین حالت $\Theta(n \log n)$ خواهد بود.

پ) یکی از مواردی که بدترین حالت کارایی زمانی الگوریتم ساخت درخت، رخ خواهد داد، وقتی خواهد بود که مقدار همه‌ی عناصری که قرار است در درخت درج شوند، یکسان باشند. اما با ترفندهایی می‌توان کارایی الگوریتم $TreeInsert$ را در چنین مواردی بهتر کرد:

- یک ترفند این است که الگوریتم به گونه‌ای تغییر داده شود که در هنگام درج یک عنصر، اگر کلید آن با کلید یک گره برابر باشد، متناوباً به سمت چپ و سمت راست آن گره حرکت کند. مثلاً اگر الگوریتم بخواهد تعدادی عنصر را درخت درج کند و مقدار چهار عنصر از آن عناصر 5 باشد، بعد از آنکه اولین 5 را در درخت درج کرد، آنگاه برای درج دومین 5 ، وقتی در طول مسیر حرکت خود به گره‌ای برسد که مقدار 5 در آن ذخیره شده باشد، مسیر سمت چپ (راست) گره را انتخاب می‌کند؛ و برای درج سومین 5 ، وقتی در طول مسیر حرکت خود به گره‌ای برسد که مقدار آن 5 باشد، مسیر سمت راست (چپ) گره را انتخاب می‌کند؛ و برای درج چهارمین مقدار 5 ، وقتی در طول مسیر حرکت خود به گره‌ای برسد که مقدار آن 5 باشد، باز مسیر سمت چپ (راست) گره را انتخاب می‌کند.
- ترفند دیگر این است که الگوریتم به گونه‌ای تغییر داده شود که اگر در هنگام درج یک عنصر، کلید آن با کلید یک گره برابر باشد، گره‌ای جدید ایجاد می‌کند و کلید را در آن ذخیره می‌کند و آن را به گره موجود اضافه می‌کند (اگر چنین لیستی از گره‌های حاوی مقادیر یکسان، قبلاً ایجاد شده باشد، الگوریتم صرفاً گره‌ای جدید به لیست اضافه می‌کند و کلید را در آن ذخیره می‌کند).

اگر رفتار الگوریتم درج، برای درج کلیدهای تکراری در یک درخت، طبق ترفند اول تغییر داده شود، کارایی بدترین حالت الگوریتم ساخت درخت، برای درج n عنصر با کلیدهای مساوی چقدر خواهد بود؟ طبق ترفند دوم چطور؟

جواب:

4 – الف) برای بازگشـتی کردن الگوریتم کافی‌ست در هر بار فراخوانی بازگشـتی، فرزند چپ یا راسـت گره‌ای که روی آن هسـتیم را بسـته به بزرگتر یا کوچکتر بودن مقدار آن از عنصر مورد نظر برای درج، به عنوان ریشـه‌ی یک زیردرخت به تابع داده و عملیات بازگشتی را تا جایی ادامه دهیم که گره خالی باشد یا برابر با عنصر باشد.

```
Algorithm: RecursiveTreeInsert(Tree, root, x)
    // implements tree insertion algorithm recursively
    // Input: root of Tree and element x to insert into tree
    // Output: modifies Tree to contain x as leaf
    if root.value = None then
        root ← x
        return    // stops recursion
    else then
        if root.value < x then
            RecursiveTreeInsert(Tree, root.right, x)
        else then
            RecursiveTreeInsert(Tree, root.left, x)
```

در این الگوریتم برای هر بار فراخوانی الگوریتم، با فرض اینکه مقایسـه و جایگذاری عنصـر کاراییِ ثابت دارد، یک عمل ثابت و یک فراخوانی بازگشــتی تابع برای نصــف درخت یا به زبان دیگر، زیردرختی از درخت داده شــده با نیمی از عناصر آن داریم. همچنین در بهترین حالت فراخوانی بازگشتی انجام نشده و کارایی ثابت است، پس:

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + O(1) \end{cases} \xrightarrow{complexity} T(n) = T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + 1 = T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor\right) + 1 + 1 = T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^3}\right\rfloor\right) + 3$$

$$\xrightarrow{for\ all\ n = 2^k} T(2^k) = \begin{cases} O(1) & k = 0 \\ T(2^{k-1}) + O(1) \end{cases} \xrightarrow{complexity} T(2^k) = T(2^{k-1}) + 1 = T(2^{k-2}) + 1 + 1$$

$$= T\left(2^{k-i}\right) + i = \cdots = T(2^{k-k}) + k \xrightarrow{k = \log_2 n} T(n) = T(1) + \log n \in O(\log n)$$

البته این محاسـبات برای ارتفاع $height = \lfloor \log n \rfloor$ در یک درخت است که ارتفاع معمول یک درخت دودویی

متعادل و کمترین ارتفاع ممکن برای یک درخت دودویی کج می‌باشد. از آنجایی که بیشترین مقدار ممکن برای ارتفاع یک درخت دودویی $n-1$ است، الگوریتم در بدترین حالت تا انتهای بلندترین شاخه‌ی درخت رفته و گره‌ها را بررسی می‌کند، پس کارایی آن $O(n)$ خواهد بود.

از طرفی با بررسی الگوریتم غیر بازگشتی مشاهده می‌کنیم که متغیر بزرگی اضافه بر درخت تشکیل نمی‌شود، پس کارایی فضایی آن $O(1)$ است؛ در حالی که در الگوریتم بازگشتی با هر فراخوانی یک پشته شکل می‌گیرد که به علت پیش رفتن یک‌طرفه‌ی الگوریتم به اندازه ارتفاع درخت، کارایی فضایی آن را $O(h)$ یعنی همان $O(\log n)$ می‌کند. بنابراین الگوریتم غیر بازگشتی از نظر حافظه نسبت به بازگشتی کاراتر است.

4 – ب) در ساخت یک درخت دودویی با درج عناصر به کمک الگوریتم بالا، در بهترین حالت ترتیبِ دادن عناصر به الگوریتم به گونه‌ای‌ست که درخت متعادل شده و ارتفاع آن کمترین حالت ممکن یعنی $\lfloor\log n\rfloor$ شود، زیرا در این صورت تعداد گره‌های visit شده برای قرار دادن عنصر بنابر محاسبات ریاضی بخش الف $\log n$ خواهد بود. این تحلیل را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$T(n)=\begin{cases}O(1) & n=1\\ T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+O(1)\end{cases}\xrightarrow{complexity}T(n)=T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+1=T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor\right)+2=T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^3}\right\rfloor\right)+3$$

$$\xrightarrow{height=\lfloor\log n\rfloor}T(n)=T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^h}\right\rfloor\right)+h=T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^{\lfloor\log n\rfloor}}\right\rfloor\right)+\lfloor\log n\rfloor=T(1)+\lfloor\log n\rfloor\in O(\log n)$$

از آن‌جا که عملیات برای n عنصر انجام می‌شود، کارایی زمانی الگوریتم در بهترین حالت $O(n\log n)$ است. اما در بدترین حالت، عناصر به ترتیب از کوچک به بزرگ به الگوریتم داده می‌شوند و به همین علت از آنجا که هربار کلید گره‌ها را مقایسه می‌کند و بر اساس بزرگ و کوچکی‌شان به چپ و راست می‌رود، همواره درخت تشکیل شده کج و نامتعادل خواهد بود (یا عناصر تکراری‌اند و همه در یک طرف قرار می‌گیرند) به طوری که ارتفاع آن بیشترین حالت ممکن و برابر با $n-1$ به دست می‌آید. پس برای n عنصر هر کدام $n-1$ مقایسه داشته و کارایی در بدترین حالت $O(n^2)$ می‌باشد.

4 – پ) در ترفند اول، از آنجا که عناصر تکراری همه در یک طرف جمع نشده و ارتفاع به شکل متعادل‌تری افزایش میابد (عملاً مانند حالت عادی هر بار تکرار حلقه بر دو تقسیم می‌شود) پس ارتفاع حدوداً سقف پایینی $\log n$ بوده و کارایی زمانی آن بنا بر بخش الف، در بهترین حالت $O(n\log n)$ خواهد بود (مگر اینکه عوامل دیگری باعث کجی درخت شوند). در ترفند دوم ارتفاع حتی کمتر خواهد بود زیرا گره‌ای جداگانه به عنوان فرزند ایجاد نشده و به ارتفاع اضافه نمی‌شود. پس تعداد مقایسه‌ها کمتر می‌شود اما کارایی زمانی همان $O(n\log n)$ باقی می‌ماند که بهترین حالت ممکن است (مگر اینکه باز عواملی دیگر باعث کجی شوند و کارایی $O(n^2)$ شود).

5. یکی از مسائل الگوریتمی که در عمل زیاد با آن مواجه می‌شویم، مسأله پیدا کردن همه عناصری در یک مجموعه است که مقدار آنها برابر یا بین دو مقدار خاص باشد. برای مثال:

- کارمند آموزش یک دانشگاه بزرگ ممکن است ملزم به ایجاد لیستی از دانشجویان دانشگاه باشد که معدل آنها برابر یا بین دو مقدار خاص باشد؛
- یک شهروند ممکن است بخواهد در یک فروشگاه اینترنتی، کالاهایی (مثلاً کتاب‌هایی) را بیابد که قیمت آنها برابر یا بین دو مقدار خاص باشد؛
- بازرس یک سازمان دولتی بزرگ ممکن است نیازمند تعیین افرادی در سازمان باشد که میزان حقوق آنها برابر یا بین دو مقدار خاص باشد.

این مسائل در واقع نوعی مسأله جستجو هستند؛ بیان کلی و دقیق این نوع مسأله جستجو این است: مجموعه S شامل n عنصر و دو مقدار k_1 و k_2 داده شده است. همه عناصری در مجموعه S را که مقدار آنها برابر یا بین دو مقدار k_1 و k_2 باشد، بیابید.

طراحی یک الگوریتم جستجوی کارا برای حل چنین مسأله‌ای، مستلزم این است که داده‌ها به شکلی مناسب در حافظه چیده شده باشند.

الف) با این فرض که عناصر مجموعه S، عدد باشند و به ترتیبی نامعلوم در یک آرایه ذخیره شده باشند، الگوریتمی برای حل مسأله طراحی کنید. کارایی زمانی الگوریتمی که به آن رسیده‌اید، چقدر است؟

ب) اکنون با این فرض که عناصر مجموعه S، عدد باشند و به ترتیب صعودی (نانزولی) در یک آرایه ذخیره شده باشند. الگوریتمی کارا برای حل مسأله طراحی کنید. کارایی زمانی الگوریتمی که به آن رسیده‌اید، چقدر است؟

پ) آرایه مرتب گرچه مفید است اما در وضعیتی که علاوه بر جستجو در مجموعه S، بخواهیم عنصری را به مجموعه اضافه کنیم یا عنصری را از مجموعه حذف کنیم، گزینه مناسبی برای چینش داده‌ها در حافظه نیست. در چنین وضعیتی بهتر این است که عناصر به شکل یک درخت دودویی جستجو (د.د.ج) در حافظه چیده شوند. پس با این فرض که عناصر مجموعه S، عدد باشند و در گره‌های یک د.د.ج ذخیره شده باشند، الگوریتمی کارا برای حل مسأله طراحی کنید. کارایی زمانی الگوریتمی که به آن رسیده‌اید، چقدر است؟

جواب:

5 – الف) از آنجایی که مجموعه‌ی S نامرتب است و ما تمام عناصری را می‌خواهیم که در بازه‌ی داده شده قرار دارند، نیاز است که حتماً تک تک عناصر را بررسی کنیم. با استفاده از یک حلقه برای پیش رفتن خطی در مجموعه‌ی ورودی، کارایی زمانی این الگوریتم $O(n)$ است که n تعداد اعضای مجموعه است.

```
Algorithm: Non-SortedArraySearchInterval(S[0…n – 1], k1, k2)
    // finds all set elements in given interval
    // Input: set S, lower bound k1, upper bound k2
    // Output: list of elements between upper and lower bounds
    verified ← list()
    for elements in S do
        if element ≥ k1 and element ≤ k2 then
            verified.append(element)
    return verified
```

5 – ب) حال که مجموعه مرتب است می‌توانیم با تغییر در الگوریتم جستجوی دودویی، index حدهای پایین و بالای بازه در آرایه (و یا در صورت وجود نداشتن خود مقادیر، عناصری که به آن‌ها نزدیک تر هستند) را بیابیم که کارایی این بخش $O(\log n)$ خواهد بود. اگر قصد ما یافتن تعداد عناصر درون بازه بود، می‌توانستیم با کم کردن مقادیر indexها، پاسخ را در کارایی مرتبه‌ی لگاریتمی پیدا کنیم. اما از آنجا که می‌خواهیم خود عناصر را بازگردانیم و طبیعت صورت سوال از ما می‌خواهد که تمام عناصر بازه را بازگردانیم، نیاز است حتماً در مجموعه پیش رفته و عناصر میان این دو index را خروجی دهیم که در بدترین حالت این به معنای بررسی کردن حداقل یک بار تمامی عناصر مجموعه است. پس کارایی زمانی الگوریتم برابر با $O(n)$ می‌باشد.

راه دیگری برای حل مسئله این است که مانند بخش الف در مجموعه پیش رفته و عناصر را با حد بسته‌ی بالا و پایین مقایسه کنیم و موارد یافت شده را در آرایه‌ای ذخیره کنیم. از آنجا که این حل بسیار ساده بوده و کارایی زمانی آن همچنان $O(n)$ است در حالی که تغییر و استفاده از جستجوی دودویی راهکار جالب‌تری می‌باشد، در صفحه‌ی بعد، شبه کد الگوریتم با استفاده از جستجوی دودویی نوشته شده است.

Algorithm: SortedArraySearchInterval($S[0…n – 1], k_1, k_2$)

```
// finds all sorted set elements in given interval
// Input: set S, lower bound k1, upper bound k2
// Output: list of elements between upper and lower bounds
if S[0] > k2 or S[n – 1] < k1 then
    return "out of range"
if S[0] ≥ k1 then
    lower ← 0
elif S[0] < k1 then
    low ← 0
    high ← n – 1
    while low ≤ high do
        mid ← int((high + low)/2)
        if S[mid] ≥ k1 then
            high ← mid – 1
        else then
            low ← mid + 1
    lower ← low
if S[n – 1] ≤ k2 then
    upper ← n – 1
elif S[n – 1] > k2 then
    low ← 0
    high ← n – 1
    while low ≤ high do
        mid ← int((high + low)/2)
        if S[mid] ≤ k2 then
            low ← mid + 1
        else then
            high ← mid – 1
    upper ← high
verified ← S[lower:upper]
return verified
```

5 – پ) برای جســتجو در یک د.د.ج. دارای داده‌های مسـئله، در الگوریتم بازگشــتی جســتجوی درخت به شـکلی تغییر می‌دهیم که کلید هر گره‌ها با حدهای بازه مقایســـه کند و درصـــورت موجود بودن آن در بازه، آن گره را بازگرداند و الگوریتم را به شکل بازگشـتی برای دو فرزند چپ و راست گره اجرا کند تا جایی که به انتهای درخت و یا پایان بازه برسد.

شبه کد زیر به شکل تابع سازنده پایتون نوشته شده است اما می‌توان مقادیر را در پشته‌ای قرار داد و در آخر آن را به عنوان خروجی بازگرداند. این پشـته می‌تواند به عنوان یک ویژگی برای درخت تعریف شـده باشد یا می‌تواند به عنوان ورودی انتخابی پنجم در هر بار فراخوانی بازگشتی به تابع ورودی داده شود و در آخر بازگردانده شود.

Algorithm: BinaryTreeSearchInterval(*Tree*, *root*, *k*$_1$, *k*$_2$)

// yields all set elements in given interval using binary search tree recursively

// Input: *Tree* and the *root* to search from, lower bound k_1, upper bound k_2

// Output: elements between upper and lower bounds (yields as generator)

if *root*.value = *None* **or** *root*.value < k_1 **or** *root*.value > k_2 **then**

  return // stops recursion

elif $k_1 \le$ *root*.value $\le k_2$ **then**

  yield *root*

  BinaryTreeSearchInterval(*Tree*, *root*.left, k_1, k_2)

  BinaryTreeSearchInterval(*Tree*, *root*.right, k_1, k_2)

برای تحلیل کارایی زمانی الگوریتم بالا رابطه‌ی بازگشــتی آن را می‌نویسـیم. در هر مرحله، دو فراخوانی بازگشــتی برای زیر درخت (با نصف گره‌های درخت قبل) داشته و یک عملیات ثابت داریم، پس می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{T(1)=O(1)} T(n) = 2\times T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + 1 = 4\times T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor\right) + 2 + 1 = \cdots = 2^i T\left(\left\lfloor\frac{n}{2^i}\right\rfloor\right) + \sum_{j=1}^{i} 2^{j-1}$$

$$\xrightarrow{n=2^k} T(2^k) = 2^i T\left(\left\lfloor\frac{2^k}{2^i}\right\rfloor\right) + \sum_{j=1}^{i} 2^{j-1} = 2^k T\left(\left\lfloor\frac{2^k}{2^k}\right\rfloor\right) + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} = 2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2^0$$

$$\xrightarrow{k=\log_2 n} T\left(2^{\log n}\right) = 2^{\log n} + 2^{(\log n)-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^{\log n} + \frac{2^{\log n}}{2} + \frac{2^{\log n}}{4} + \cdots + \frac{2^{\log n}}{2^{\log n}}$$

$$\xrightarrow{2^{\log n}=n} T(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{n} = n \times \frac{1-\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2}} = 2n \times \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 2n - 1 \in O(n)$$

از آنجایی که در بخش ب توضـــیح دادیم که کارایی زمانی الگوریتم نمی‌تواند کمتر از خطی باشـــد، می‌توانیم با الگوریتم ساده اندیشانه و خطی DFS بر روی درخت نیز به شکل زیر، به جستجو در آن بپردازیم.

Algorithm: TreeDFSSearchInterval(*Tree*, *k*$_1$, *k*$_2$)

// finds all set elements in given interval using binary search tree

// Input: *Tree*, lower bound k_1, upper bound k_2

// Output: list of elements between upper and lower bounds

verified ← list()

S ← stack()

S.push(*Tree*.root)

while *S* **is not** *Empty* **do**

  node ← *S*.pop()

  if *node* **is not** *visited* **then**

    mark *node* **as** *visited*

    if $k_1 \le node \le k_2$ **then**

      verified.append(*node*)

    for all edges from *node* **to** *neighbor* **in** *Tree*.Edges(*node*) **do**

      S.push(*neighbor*)

return *verified*

---

6. شـــما در نقش تحلیلگر داده‌ها، می‌خواهید از دو پایگاه داده مجزا، داده‌هایی را (که بازیابی آنها وقتگیر اســت) بازیابی و تحلیل کنید. فرض کنید هر پایگاه شامل n مقدار عددی است (یعنی در مجموع $2n$ مقدار موجود است) و اینکه هیچ دو مقداری یکسان نیستند. تنها راهی که شما می‌توانید به این مقادیر دسترسی داشته باشید، این است که از پایگاه داده‌ها پرســش کنید؛ در هر بار پرســش، می‌توانید مقدار k را به یکی از دو پایگاه داده بدهید تا آن پایگاه داده، k اُمین مقدار از نظر کوچکی را که شامل می‌شود، برگرداند.

شما دوست دارید که میانه مجموعه $2n$ مقداری را که طبق تعریف، n اُمین مقدار مجموعه از نظر کوچکی است، تعیین کنید. از آنجا که پرسش‌ها وقتگیر هستند، شـما دوسـت دارید که میانه را با کمترین تعداد پرسـش ممکن، تعیین کنید. الگوریتمی ارائه کنید که مقدار میانه را با حداکثر $O(\log n)$ پرسش پیدا کند.

جواب: با مقایســه‌ی میانه‌های دو آرایه به طور بازگشــتی و روش تقلیل و حل برای بررســی زیرمجموعه‌هایی از آرایه‌های اصلی می‌توانیم الگوریتم زیر را بنویسیم. این الگوریتم تا جایی پیش می‌رود که طول آرایه‌ها به یکی از شــرط‌های اولیه ارائه شــده برســد. از آنجایی که الگوریتم برای هر بار فراخوانی بازگشــتی طول آرایه‌ها را نصــف می‌کند، عملکردی شبیه به جستجوی دودویی دارد و کارایی آن در بدترین حالت $O(\log n)$ است.

Algorithm: FindMedian(*A*[0…*n* – 1], *B*[0…*n* – 1])

// finds median of two data sets with containing numbers with sorted indices
// Input: two data sets *A* and *B* with *n* elements
// Output: median of the union of both sets

if *n* = 0 **then**

return 0

elif *n* = 1 **then**

return (*A*[0] + *B*[0]) / 2

elif *n* = 2 **then**

return (max(*A*[0], *B*[0]) + min(*A*[1], *B*[1])) / 2

else then

if *n* **is even then** // *n* % 2 = 0

medianA ← (*A*[*n*/2] + *A*[*n*/2 – 1]) / 2

medianB ← (*B*[*n*/2] + *B*[*n*/2 – 1]) / 2

if *medianA* > *medianB* **then** // length becomes *n*/2 + 1

return FindMedian(*A*[:*n*/2 + 1], *B*[*n*/2 – 1:])

else then

return FindMedian(*A*[*n*/2 – 1:], *B*[:*n*/2 + 1])

else then

medianA ← *A*[int(*n*/2)] // division gives floor so we round it down

medianB ← *B*[int(*n*/2)]

if *medianA* > *medianB* **then**

return FindMedian(*A*[:int(*n*/2) + 1], *B*[int(*n*/2):])

else then

return FindMedian(*A*[int(*n*/2):], *B*[:int(*n*/2) + 1])

7. یک مالک قهوه فروشی‌های زنجیره‌ای، قهوه‌های اعلا و گرانی را با نام‌های زیبای ایتالیایی می‌فروشد. از آنجا که بیشتر مشتریان او دانشجویان دانشگاه هستند و او متوجه شده است که خیابانی در یک شهر دانشگاهی بزرگ وجود دارد که در امتداد آن، n خوابگاه دانشجویی وجود دارد اما قهوه فروشی در آن خیابان وجود ندارد، تصمیم گرفته است که یک قهوه فروشی جدید را در جایی از این خیابان دایر کند که طبق معیاری، فاصله از آن تا خوابگاه‌های مختلف، بهینه باشد.

او از شما خواسته است که الگوریتمی برای حل مسأله‌اش طراحی کنید. برای ساده کردن مسأله، خیابان را یک خط تصور می‌کنیم و هر خوابگاه را یک نقطه d_i (عددی حقیقی) روی این خط. به علاوه، ما برای هر $1 \leq i \leq n$ ، مقدار p_i را که تعداد افرادی است که در خوابگاه d_i زندگی می‌کنند، می‌دانیم. با در اختیار داشتن این داده‌ها، شما می‌خواهید x ای (مکان قهوه فروشی) را پیدا کنید که مقدار تابع فاصله زیر را کمینه کند.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i|d_i - x|$$

با این مفروضات، یک الگوریتم کارا را برای پیدا کردن نقطه x ای که با قرار گرفتن قهوه فروشی در آنجا، طبق تابع فوق، فاصله آن از خوابگاه‌ها، به حداقل خواهد رسید، طراحی و توصیف کنید. زمان اجرای الگوریتم شما چقدر است؟ **جواب:**

برای اینکه تابع فاصله‌ی داده شده کمینه کند، باید هرکدام از جملات سری کمترین مقدار ممکن باشند؛ یعنی ضرب جمعیت هر خوابگاه در فاصله‌ی آن تا محل خوابگاه کوچکترین حالت باشد. می‌دانیم که در محاسبه فواصل نسبی و نقاط روی یک محور، می‌توانیم مبدا را (که برای فاصله در تابع بالا نسبت به جایگاه کافی‌شاپ است) برای تمامی نقاط به نقطه‌ای دیگر (یعنی ابتدای خیابان) تغییر دهیم و آن را بر عدد ثابت جمع جمعیت‌ها تقسیم کنیم و همچنان نسبت و خواص (کمینه شدن) را حفظ کنیم. پس داریم:

$$\frac{f}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{p_1 d_1 + \cdots + p_n d_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} d_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} d_n$$

$$= w_1 d_1 + w_2 d_2 + \cdots + w_n d_n = \sum_{i=1}^{n} w_i d_i = x \qquad with\ w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$$

بنابراین تابع فاصله، زمانی کمینه می‌کند که مقدار x از خوابگاه‌ها فاصله‌ای متناسب با جمعیت آن‌ها داشته باشد یعنی برابر با میانگین وزنی مقادیر باشد. برای نوشتن الگوریتمی که میانگین وزنی مقادیر نامرتب داده شده را بیابد، می‌توانیم با گرفتن داده‌ها به صورت آرایه‌ای از زوج مرتب‌ها (برای هر d_i، p_i آن را نیز داریم)، به کمک روش بازگشتی داده‌ها را نصف کرده و در هر دو بخشِ کاهش یافته پیش رویم تا جایی که به دو خوابگاه برسیم و برای

دو خوابگاه میانگین وزنی را بیابیم. آنگاه به عقب برگردیم و هر بار این میانگین یافت شده (و جمعیتی که برای آن تا به حال محاسبه شده) را به عنوان کاندیدی برای x در نظر گرفته و میان خود xها میانگین وزنی به دست آوریم تا در آخر به x مورد نظر برسیم.

Algorithm: RecursiveNon-SortedWeightedAverage(*Dorms*[(d_1, p_1), …, (d_n, p_n)])

// calculates weighted average of non-sorted array recursively

// Input: array *Dorms* of ordered pairs of d_i and p_i

// Output: location *x* and the general *population* it supports, as a pair

if *n* = 1 **then**

  return *Dorms*[0]

elif *n* = 2 **then**

  numerator ← *Dorms*[0][0] × *Dorms*[0][1] + *Dorms*[1][0] × *Dorms*[1][1]

  population ← *Dorms*[0][1] + *Dorms*[1][1]

  return [*numerator* / *population*, *population*]

else then

  half ← int(*n* / 2)

  first ← RecursiveNon–SortedWeightedAverage(*Dorms*[:*half*])

  second ← RecursiveNon–SortedWeightedAverage(*Dorms*[*half*:])

  numerator ← *first*[0] × *first*[1] + *second*[0] × *second*[1]

  population ← *first*[1] + *second*[1]

  return [*numerator* / *population*, *population*]

از آنجا که الگوریتم حتماً تمامی خوابگاه‌ها را یک بار بررسی می‌کند، کارایی زمانی آن $O(n)$ می‌باشد. محاسبات ریاضی تحلیل آن و رابطه‌ی بازگشتی‌اش دقیقاً به مانند پاسخ سوال 5 پ است که به طور مفصل ذکر شده است.

لازم به ذکر است که می‌توانستیم به سادگی در آرایه پیش رویم و مقادیر جمعیت را با هم جمع کرده و ضرب جمعیت در جایگاه خوابگاه‌ها را نیز جمع کنیم، سپس در یک تقسیم نهایی میانگین وزنی را با الگوریتمی خطی به دست آوریم؛ اما از آنجا که حل ارائه شده در ابتدا جالب تر بود، به آن پرداختیم.

8. پلیس شهر رایانستان، همه خیابان‌های شهر را یک طرفه کرده است. با وجود این، شهردار رایانستان ادعا می‌کند که هنوز راهی برای رانندگی قانونی از هر تقاطعی در شهر به هر تقاطع دیگر آن، وجود دارد. چون مخالفان شهردار قانع نمی‌شوند و شهر هم بسیار بزرگ است، برای تعیین درستی یا نادرستی ادعای شهردار، یک برنامه رایانه‌ای لازم است. و از آنجا که انتخابات شورای شهر به زودی برگزار خواهد شد و شهردار خدمتگزار هم نگران از دست دادن فرصت عظیم خدمت به شهروندان است، به سراغ شما آمده است. شما می‌دانید که با توجه به بزرگی شهر و زمان اندکی که برای شهردار موجود است، تنها باید به دنبال الگوریتمی خطی برای اثبات درستی ادعای شهر بود.

الف) این وضعیت را به شکل یک مسأله نظریه گراف، مدل کنید و آنگاه الگوریتمی برای حل آن ارائه کنید که زمان اجرای آن (برحسب اندازه ورودی‌هایش) خطی باشد.

ب) شهردار باهوش رایانستان، به این هم فکر کرده است که در صورتی که با الگوریتم شما، نادرستی ادعای او مشخص شد، به فکر طرح کردن ادعای ضعیف‌تری باشد: اینکه اگر شما از ساختمان شهرداری رانندگی را شروع کنید، خیابان‌های یک طرفه را بپیمایید و به هر جایی که ممکن بود برسید، باز همیشه راهی برای آنکه به طور قانونی رانندگی کنید تا به ساختمان شهرداری برگردید، خواهید داشت.

این ادعای ضعیف‌تر شهردار را هم به شکل یک مسأله نظریه گراف، مدل کنید و باز الگوریتمی خطی ارائه کنید که با آن بتوان درستی یا نادرستی ادعا را تحقیق کرد. **جواب:**

8 – الف) در یک گراف جهت‌دار می‌توان به سادگی با کمک پیماش عمقی یا سطحی، از یک رأس دلخواه شروع کرد و سنجید که آیا گراف همبند قوی‌ست یا خیر. اگر شهر را گرافی در نظر گیریم که تقاطع‌های آن رئوس و خیابان‌های آن یال‌های جهت‌دار باشند، می‌توانیم با کمک پیماش عمقی الگوریتمی خطی بنویسیم که از رأسی شروع به پیمایش کرده و تعداد رأس‌هایی که می‌تواند به آن‌ها مسیری پیدا کند را با تعریف یک شمارنده بشمارد. در پایان پیماش انجام شده، اگر شمارنده برابر با تعداد رأس‌ها بود، گراف همبندی قوی دارد.

البته باید توجه کرد که شرط مقایسه‌ی شمارنده باید پس از اتمام پیمایش از یک نقطه‌ی شروع دلخواه بررسی شود و نباید نقطه‌ی شروع‌های متفاوت بررسی شوند زیرا آنگاه پیمایش عمقی همواره تمامی رئوس را بازدید خواهد کرد و دیگر همبندی قوی بررسی نخواهد شد. در صفحه‌ی بعد الگوریتم شرح داده شده با استفاده از پیمایش عمقی غیربازگشتی پیاده‌سازی شده است که به کمک یک پشته برای شبیه‌سازی پشته‌ی خودکار ایجاد شده در توابع بازگشتی، رئوس بازدید شده را ذخیره کرده و برای هرکدام حلقه را تکرار می‌کند. الگوریتم کارایی $O(|V| + |E|)$ دارد زیرا هر رأس و یال درون لیست‌های مجاورت را حداکثر یک بار بازدید می‌کند.

```
Algorithm: IsDirectedGraphStronglyConnectedDFS(G)
    // implements iterative DFS to check if directed graph is strongly connected
    // Input: graph G of city
    // Output: returns False if not strongly connected, else returns True
    for v in G do   // pick any vertex to start from
        mark v as visited
        counter ← 1
        S ← stack(v)   // let S be a stack and push v into it
        while S is not empty
            v ← S.pop()
            for edge(v, w) in G.Edges(v) do   // for all w adjacent to v
                if w is not visited then
                    mark w as visited
                    counter ← counter + 1
                    S.push(w)
        if counter ≠ length(G.Vertices) then return False
        else return True
```

8 – ب) می‌دانیم که الگوریتم پیمایش عمقی بر روی گراف جهت‌دار در اصل درحال تشکیل یک درخت است؛ یعنی زمانی از یک رأس دوری به خودش وجود دارد که در یکی از نواده‌های خود نیز باشد. بنابراین می‌توانیم با استفاده از پیمایش عمقی از ساختمان شهرداری شروع کرده و مسیرهایی که می‌توان طی کرد را بازدید کنیم؛ اگر در جایی از این مسیرها باز به ساختمان شهرداری رسیدیم یعنی دور وجود داشته و ادعای شهردار درست است، در غیر این صورت غلط است.

شبه کد الگوریتم در صفحه‌ی بعد قرار داده شده‌است. در این الگوریتم، گراف شهر است و رأس ورودی ساختمان شهرداری که در صورت رسیدن به آن در رأس‌های بازدید نشده با پیماش، وجود دوره را تایید می‌کنیم. کارایی الگوریتم که از DFS بر گرافی با لیست‌های مجاورت استفاده می‌کند $O(|V| + |E|)$ می‌باشد.

Algorithm: DoesCycleExistDFS(*G*, *v*)

```
// implements iterative DFS to check if there exists a cycle from given vertex
// Input: graph G of city and vertex v to check cycle for
// Output: returns False if no cycle exists, else returns True
S ← stack(v)   // let S be a stack and push v into it
start ← v   // store the beginning vertex
while S is not empty
    v ← S.pop()
    for edge(v, w) in G.Edges(v) do   // for all w adjacent to v
        if w is not visited then
            if w = start then   // beginning was never marked as visited
                return True
            else mark w as visited
            S.push(w)
return False
```

---

9. آرایه $A[0 \cdots n-1]$ شامل یک «عنصر اکثریت» است، اگر بیشتر از $\lfloor n/2 \rfloor$ عناصر آن، یکسان باشند. الگوریتمی کارا طراحی کنید که آرایه‌ای را به عنوان ورودی بگیرد و مشخص کند که آیا آرایه، یک عنصر اکثریت دارد یا خیر، و در صورت وجود عنصر اکثریت، آن را پیدا کند. در حالت کلی، عناصر آرایه، لزوماً از دامنه‌های مرتب مانند اعداد صحیح نیستند و به همین دلیل، نمی‌توان برای حل مسأله، از مقایسه‌هایی به شکل «آیا $A[i] > A[j]$ است؟» استفاده کرد. (مثلاً فکر کنید که عناصر آرایه، فایل‌های GIF باشند.) اما شما می‌توانید به پرسش‌هایی به شکل «آیا $A[i] = A[j]$ است؟» در زمان ثابت، پاسخ دهید.

الف) الگوریتمی ساده‌اندیشانه برای این مسأله طراحی کنید. کارایی زمانی الگوریتم شما باید $\Theta(n^2)$ باشد و کارایی فضایی آن $\Theta(1)$.

ب) الگوریتمی تقلیل‌وحل برای این مسأله طراحی کنید. کارایی زمانی الگوریتم شما باید $\Theta(n)$ باشد و کارایی فضایی آن $\Theta(1)$.

پ) اکنون الگوریتم تقلیل‌وحلی طراحی کنید که با آن بتوان عنصر یا عناصری را که بیشتر از $\lfloor n/4 \rfloor$ بار در آرایه تکرار شده باشند، پیدا کرد. ارایی زمانی الگوریتم شما باید $\Theta(n)$ باشد و کارایی فضایی آن $\Theta(1)$.

جواب:

9 – الف) در الگوریتم ساده‌اندیشانه، با دو حلقه تمامی عناصر را مقایسه کرده و تکراری‌ها را می‌شماریم. سپس تعداد را با جزء صحیح نصف طول آرایه مقایسه می‌کنیم و در صورت بزرگ‌تر بودنش، آن عنصر را به عنوان عنصر مورد نظر ذخیره می‌کنیم. پر واضح است که آرایه نمی‌تواند بیشتر از یک عنصر اکثریت داشته باشد، زیرا تعداد آن باید از نصف تعداد کل بیشتر باشد. در آخر عنصر ذخیره شده را باز می‌گردانیم. از آنجا که الگوریتم دو حلقه‌ی تودرتو دارد که هر کدام دقیقاً به تعداد طول آرایه تکرار می‌شوند، کارایی زمانی آن دقیقا $\Theta(n^2)$ می‌باشد و کارایی فضایی آن $\Theta(1)$ زیرا متغیر بزرگی اضافه بر ورودی ایجاد نمی‌کند.

```
Algorithm: MajorityElementBruteForce(A[0…n – 1])
    // compares all elements two by two and counts duplicates to find majority element
    // Input: array A with n elements
    // Output: returns majority element if one exists, else returns None
    majority ← None
    for i ← 0 to n – 1 do
        count ← 0
        for j ← 0 to n – 1 do
            if A[i] = A[j] then count ← count + 1
        if count > int(n / 2) then majority ← A[i]
    return majority
```

9 – ب) در بخش الف با الگوریتمی ساده‌اندیشانه این سوال حل شد، اما در آن الگوریتم بسیاری از مقایسات چند بار تکرار شده و کارایی زمانی بی علت افزایش میافت. راهکاری هوشمندانه‌تر این است که به خاصیت عنصر اکثریت دقت کنیم. همانطور که گفته شد، در یک آرایه تنها یک عنصر اکثریت می‌تواند وجود داشته باشد که تعداد تکرار آن حتماً از بقیه‌ی عناصر بیشتر است. پس اگر هر تکرار یک عنصر را با هر نابرابری یک عنصر دیگر با آن خط زده و کنار بگذاریم، عنصر اکثریت حتماً تا آخر باقی می‌ماند.

این همان الگوریتم مور و بویر است که با پیاده‌سازی آن در قدم اول و بررسی عنصر اکثریت بودن نتیجه (چون ممکن است در آرایه عنصر اکثریت ناموجود باشد) در قدم دوم به کمک مقایسه‌ی تعداد تکرارهایش با نصف پارامتر، پاسخ را میابیم. کارایی زمانی الگوریتم دو بخشی حاصل خطی‌ست زیرا هر بخشِ مستقل با حلقه‌ای به تعداد طول آرایه تکرار می‌شود پس $\Theta(n + n) = \Theta(n)$.

```
Algorithm: MajorityElementLinear(A[0…n – 1])
        // finds majority element in linear time using Boyer and Moore's algorithm
        // Input: array A with n elements
        // Output: returns majority element if one exists, else returns None
        majority ← None    // the candidate for having most count
        repeat ← 0
        for i ← 0 to n – 1 do
                if A[i] = majority then repeat ← repeat + 1
                else repeat ← repeat – 1
                if repeat = 0 then   // candidate was cancelled out so pick new candidate
                        majority ← A[i]
                        repeat ← 1
        count ← 1   // now we count the repetitions of majority candidate
        for i ← 0 to n – 1 do
                if A[i] = majority then count ← count + 1
        if count > int(n / 2) then return majority
        else return None
```

9 – پ) با تعمیم الگوریتم استفاده شده در بخش ب می‌توان این مسئله را حل کرد. می‌دانیم حداکثر سه عنصر در آرایه وجود دارند که تعداد تکرارشان بزرگتر از یک چهارم است. پس با تشکیل لیستی سه عضوی همزمان روی سه کاندید عملیات انجام می‌دهیم. به مانند قبل در آرایه پیش رفته و اگر به عنصری مانند یکی از کاندیدها برخوردیم، به شمارنده‌ی آن اضافه می‌کنیم؛ تفاوت در اینجاست که اگر عنصر جدید بود یا آن را به عنوان کاندید جدید قرار می‌دهیم یا (در صورت پر بودن لیست سه عضوی) از شمارنده‌ی هر سه کاندید یکی کم می‌کنیم و اگر شمارنده‌ی کاندیدی صفر شد، آن را از لیست کاندیدها حذف می‌کنیم.

در آخر سه کاندیدی که در لیست باقی خواهند ماند پر تکرارترین عناصر آرایه هستند که با پیش رفتن دوباره در آرایه‌ی اصلی، تعداد تکرار هر کدام را محاسبه کرده و درصورت برقراری شرط، آن‌ها را برمی‌گزینیم. از آنجا که این الگوریتم در نهایت، دو حلقه‌ی تودرتو داشته که یکی به اندازه‌ی طول آرایه و دیگری به تعداد 3 کاندید تکرار می‌شود، کارایی زمانی برابر است با $\Theta(3n) = \Theta(n)$. همچنین متغیر بزرگی اضافه بر ورودی تشکیل نشده است پس کارایی فضایی برای هر مقدار پارامتر همواره ثابت است. شبه کد در صفحه‌ی بعد قابل مشاهده است.

```
Algorithm: K-MajorityElementLinear(A[0…n – 1])
    // finds elements with counts more than n / 4 using Boyer and Moore's algorithm
    // Input: array A with n elements
    // Output: returns list of at most three elements, or empty if none found
    candidates ← [None, None, None]
    repeats ← [0, 0, 0]
    for i ← 0 to n – 1 do
        new ← True
        for j ← 0 to 2 do   // if element is a repeat of candidates
            if A[i] = candidates[j] then
                repeats[j] ← repeats[j] + 1
                new ← False
        if new then   // if element is not a repeat of candidates
            filled ← True
            for j ← 0 to 2 do   // if it can be made new candidate
                if candidates[j] is None then
                    candidates[j] ← A[i]
                    repeats[j] ← 1
                    filled ← False
                    break  // new candidate assigned so stop iteration
            if filled then   // if we already have three candidates
                for j ← 0 to 2 do
                    repeats[j] ← repeats[j] – 1
                    if repeats[j] = 0 then   // if candidate is cancelled out
                        candidates[j] ← None
    results ← list()    // now we count the repetitions of candidates
    for j ← 0 to 2 do
        count ← 0
        for i ← 0 to n – 1 do
            if A[i] = candidates[j] then count ← count + 1
        if count > int(n / 4) then
            results.append(candidates[j])
    return results
```

10. یکی از دوستان ما تصمیم گرفته است که سفری کوتاه مدت و کم‌هزینه به قاره آفریقا داشته باشد تا از نزدیک به سیر در پهناورترین پارک‌های ملی آفریقا بپردازد. او نقشه کامل جاده‌های پارک‌های ملی آفریقا را تهیه کرده است و می‌خواهد تمام جاده‌های هر پارک ملی را به طور کامل طی کند و در عین حال، زمان و هزینه گردش خود در پارک‌های ملی را به حداقل برساند؛ اما با قیدهایی مواجه است:

- از آنجا که حیات وحش آفریقا پر است از انواع درندگان و گوشتخواران و او نمی‌خواهد خطر کند، در تمام طول گردش سوار بر خودرو خواهد بود.
- از آنجا که نگران است مردم بومی یا مسافران دیگر، ناقل یک بیماری مسری باشد، او می‌خواهد که تنها با راننده (که راهنمای او نیز به حساب می‌آید) به گشت در پارک‌های ملی بپردازد. پس باید به تنهایی همه هزینه یک بار گردش کامل در پارک را بپردازد.

از آنجا که پولی که دوست مسافر ما برای گردش کامل در پارک‌ها باید بپردازد نسبتاً زیاد است، به دنبال راهی است که هزینه گشت کامل در هر پارک را به حداقل برساند؛ هزینه گردش او وقتی به حداقل خواهد رسید که مسافت کوتاه‌تری را با خودرو طی کند.

آیا می‌توانید الگوریتمی قابل‌فهم و کارا طراحی کنید تا این دوست را در پیدا کردن کم‌هزینه‌ترین مسیرهای حرکت در پارک‌های ملی کمک کنید؟ اگر فرضاً m تعداد جاده‌های یک پارک ملی باشد، کارایی الگوریتم‌تان برحسب m چقدر خواهد بود؟

<u>جواب:</u>

اگر نقشه‌ی پارک را یک گراف بی‌جهت در نظر بگیریم که جاده‌ها همان یال‌ها باشند، فرد نیاز دارد که کمترین مسیر یعنی کمترین تعداد یال را طی کند. برای پیدا کردن مسیر می‌توانیم با اندکی تغییر از روش یافتن دور اویلری در گراف استفاده کنیم.

می‌دانیم اگر گرافی دارای رأس با درجه‌ی فرد باشد، فاقد مسیر اویلری است؛ در نتیجه می‌توانیم با اضافه کردن یال‌های مناسب تکراری به گراف حاصل، چندبار طی کردن جاده را شبیه‌سازی کنیم تا در مسیر اجرای الگوریتم اویلری به مشکل برنخوریم. بعد از آماده شدن گراف با استفاده از الگوریتم Fleury مسیر مورد نظر جهت دور اویلری را به دست می‌آوریم. مراحل کلی اجرای الگوریتم به شکل زیر است:

1) برای هر رأس ابتدا فرد یا زوج بودن درجه رأس (تعداد یال‌های متصل به آن) را برسی می‌کنیم تا از وجود یا عدم وجود دور اویلری آگاه شویم. در صورت زوج بودن همه رأس‌ها به مرحله‌ی 3 می‌رویم و در غیر این صورت (یعنی اگر رأسی درجه‌اش فرد بود)، مرحله‌ی 2 را اجرا می‌کنیم و سپس مرحله‌ی 3 را.

2) با استفاده از ترفند زیر، یال‌هایی به گراف اضافه می‌کنیم تا دارای مسیر اویلری شود:

i. برای هر رأس در گراف، اگر از درجه فرد بود و یک همسایه با درجه فرد داشت، یال بین آن دو را به گراف اضافه و تکرار می‌کنیم؛ اگر همسایه فرد نداشت به مرحله بعد می‌رویم.
ii. رأس با درجه فرد را با یک یال به رأسی با درجه‌ی زوج که به آن متصل است باز وصل می‌کنیم.

3) با شروع از رأسی به بررسی یال‌های مناسب بعدی می‌پردازیم، دو حالت برای مناسب بودن وجود دارد:

i. یال تنها یالِ متصل به رأس باشد (در مراحل بعدی ممکن است این حالت پیش بیاید)؛
ii. حذف شدن یال بر در دسترس بودن رأس‌های دیگر تأثیر منفی می‌گذارد.

4) ابتدا یال مناسب یافت شده را خروجی می‌دهیم، سپس رأس مبدأ را علامت گذاری می‌کنیم و آن را به رأس انتهایی یال انتخاب شده تغییر می‌دهیم و دوباره به مرحله‌ی 3 بر می‌گردیم.

لازم به ذکر است که منظور از ایجاد یال جدید، احداث جاده نبوده و انتخاب جاده‌ای موجود برای باز گذر کردن از آن است. کد پایتون الگوریتم در پیوست 3 قابل مشاهده است و توضیحات مخصوص هر بخش از الگوریتم در کامنت‌های کدِ پیوست شده آورده شده است. از آنجایی که بخش EulerCircuitHelp نوعی از تابع DFS می‌باشد و درون آن نیز از NextEdgeValid که خود شکلی از DFS بوده استفاده شده است، کارایی زمانی الگوریتم برای رأس‌ها و تقاطع‌های به تعداد n و یال‌ها و جاده‌های m برابر با $O((n+m)^2)$ می‌باشد.

حالتی کامل‌تر نیز برای حل این سوال وجود دارد. یعنی اگر برای طی کردن هر جاده از مسیر هزینه‌ی متفاوتی داشته باشیم، می‌توانیم ابتدا نقشه پارک را به شکل یک گراف بی‌جهتِ وزن‌دار شبیه‌سازی کنیم (که وزن هر یال برابر با طول آن جاده باشد) و سپس از الگوریتم زیر استفاده کنیم:

1) بررسی می‌کنیم که آیا گراف شامل دور اویلری‌ست یا نه (یعنی درجه‌ی همه‌ی رئوس آن زوج است یا خیر). اگر پاسخ بله است، به مرحله‌ی 3 پرش می‌کنیم. در غیر این صورت به مرحله‌ی زیر می‌رویم و پس از تکمیل آن مرحله‌ی 3 را اجرا می‌کنیم.

2) با ترفند زیر، درجه‌ی تمام رئوس گراف را زوج می‌کنیم:

i. رئوس فرد را لیست کرده و برای تمام جفت رأس‌های ممکن از رئوس فرد لیست ایجاد می‌کنیم.
ii. برای هر جفت از رئوس، با در نظر گرفتن تمام حالات ممکن (یعنی بررسی وزن یال‌های موجود متصل به آن و رئوسی که هر کدام به آن متصل هستند) کم هزینه‌ترین یال‌ها و راه برای متصل کردن آنها را به دست می‌آوریم.
iii. مجموعه جفت‌های رأس منحصر به فرد با کمترین هزینه‌ی ممکن را پیدا کرده و با اضافه کردن یال‌های موجود کم هزینه‌ی یافت شده، گراف را کامل می‌کنیم تا دارای دور اویلری باشد.

3) با استفاده از الگوریتم Fleury (مراحل 3 و 4 ذکر شده در الگوریتم قبل) مسیر اویلری را برای گراف به دست می‌آوریم و همراه با جمع وزن یال‌ها (هزینه سفر) به عنوان خروجی برمی‌گردانیم.

تفاوت این الگوریتم با الگوریتم قبل در مرحله‌ی دوی آن‌هاست که در گراف وزن‌دار نیاز است وزن یال (جاده‌ای) که برای تکرار انتخاب می‌کنیم کمترین مقدار ممکن باشد. به علت شباهت (و البته طولانی بودن و پیچیدگی بیش از حد مرحله‌ی دوم)، کد این الگوریتم دیگر نوشته نشده است. کارایی زمانی آن نیز وابسته به همان مرحله‌ی دوم، بیشتر از الگوریتم مختص به گراف بی‌وزن بوده و سه حلقه‌ی تودرتوی مورد نیاز برای حل مرحله‌ی دو، کارایی را از مرتبه‌ی مکعبی می‌کند.

پیوست 1

```
# ANALYSIS OF BACKPACK ALGORITHM (question 1)

def Backpack(capacity, n, weights, values):
	matrix = [[0 for w in range(capacity + 1)] for i in range(n + 1)]
	SelectedItems  = []
	for i in range(n + 1):
		for w in range(capacity + 1):
			if i == 0 or w == 0:
				matrix[i][w] = 0
			elif weights[i – 1] <= w:
				previous = matrix[i - 1][w]
				new = values[i – 1] + matrix[i – 1][w – weights[i – 1]]
				matrix[i][w] = max(previous, new)
			else:
				matrix[i][w] = matrix[i – 1][w]
	totval = matrix[n][capacity]
	w = capacity
	for i in range(n, 0, – 1):
		if totval <= 0:
			break
		if totval == matrix[i – 1][w]:
			continue
		else:
			SelectedItems.append(weights[i – 1])
			totval = totval – values[i – 1]
			w = w – weights[i – 1]
	return SelectedItems

lengths = list()
for i in range(540, 561):
	lengths.append(i)

import random
import timeit
import csv

csvlines = [['Length (n)', 'Time (second)']]
```

```
code = '''
from __main__ import Backpack
from __main__ import capacity
from __main__ import n
from __main__ import weights
from __main__ import values'''

for l in lengths:
    weights = random.sample(range(l), l)
    values = random.sample(range(l), l)
    capacity = int(sum(weights)/2)
    n = l
    time = timeit.timeit(setup = code,
                         stmt = 'Backpack(capacity, n, weights, values)',
                         number = 1)
    time = round(time, 3)
    csvlines.append([l, time])

with open('Q1.csv', 'w', newline='') as csvfile:
    writer = csv.writer(csvfile)
    writer.writerows(csvlines)

# Results extracted from program run on:
# Python 3.9.2; Windows 10; AMD FX-9830p CPU
# (quad core with single tread and 3.4 G Hertz processing speed).
```

پیوست 2

```
# ANALYSIS OF RECURSIVE INSERTION SORT (question 2)

def RecursiveInsertionSort(NList, n):
	if n <= 1:
		return
	RecursiveInsertionSort(NList, n – 1)
	temp = NList[n – 1]
	pick = n – 2
	while pick >= 0 and NList[pick] > temp:
		NList[pick + 1] = NList[pick]
		pick –= 1
	NList[pick + 1] = temp

lengths = list()
for i in range(10, 101, 5):
	lengths.append(i * 10)

import timeit
import random
import csv
csvlines = [['Length', 'Time (ms)']]
code = '''
from __main__ import RecursiveInsertionSort
from __main__ import array'''

for l in lengths:
	array = random.sample(range(l), l)
	time = timeit.timeit(setup = code,
	                     stmt = 'RecursiveInsertionSort(array,len(array))',
	                     number = 1)
	time = round(time, 6) * 1000
	csvlines.append([l, time])

with open('recursivetime.csv', 'w', newline='') as csvfile:
	writer = csv.writer(csvfile)
	writer.writerows(csvlines)
```

```
# ANALYSIS OF ITERATIVE INSERTION SORT (question 2)

def InsertionSort(NList):
    for pack in range(1, len(NList)):
        temp = NList[pack]
        pick = pack – 1
        while pick >= 0 and NList[pick] > temp:
            NList[pick + 1] = NList[pick]
            pick –= 1
        NList[pick + 1] = temp

lengths = list()
for i in range(10, 101, 5):
    lengths.append(i * 10)

import timeit
import random
import csv
csvlines = [['Length', 'Time (ms)']]
code = '''
from __main__ import InsertionSort
from __main__ import array'''

for l in lengths:
    array = random.sample(range(l), l)
    time = timeit.timeit(setup = code,
                         stmt = 'InsertionSort(array)',
                         number = 1)
    time = round(time, 6) * 1000
    csvlines.append([l, time])

with open('nonrecursivetime.csv', 'w', newline='') as csvfile:
    writer = csv.writer(csvfile)
    writer.writerows(csvlines)

# Results extracted from program run on:
# Python 3.9.2; Windows 10; AMD FX-9830p CPU
# (quad core with single tread and 3.4 G Hertz processing speed).
```

پیوست 3

```
# Python program to find Eulerian Trail in a given graph (question 10)

from collections import defaultdict

# class to represent an undirected graph
# using adjacency list representation
class Graph:

	def __init__(self, vertices):
		self.Vertices = vertices		# vertices
		self.graph = defaultdict(list)	# default-dictionary to store graph
		self.Time = 0

	# method to add edge (u, v) to graph
	def addEdge(self, u, v):
		self.graph[u].append(v)
		self.graph[v].append(u)

	# method to remove edge (u, v) from graph
	def removEdge(self, u, v):
		for index, key in enumerate(self.graph[u]):
			if key == v:
				self.graph[u].pop(index)
		for index, key in enumerate(self.graph[v]):
			if key == u:
				self.graph[v].pop(index)

	# DFS-based method to count reachable vertices from v
	def DFSCount(self, v, visited):
		count = 1
		visited[v] = True
		for i in self.graph[v]:
			if visited[i] == False:
				count = count + self.DFSCount(i, visited)
		return count

	# method to check if edge (u, v) can be
	# considered as next edge in Euler Circuit
	def NexEdgeValid(self, u, v):
```

```
        # the edge (u, v) is valid in one of the following cases:
        # 1) if v is the only adjacent vertex of u
        if len(self.graph[u]) == 1:
            return True

        # 2) if there are multiple adjacents, then (u, v) is not a bridge
        # do following steps to check if (u, v) is a bridge
        else:
            # 2 – i) count of vertices reachable from u
            visited =[False]*(self.Vertices)
            count1 = self.DFSCount(u, visited)

            # 2 – ii) remove edge (u, v) then
            # count vertices reachable from u
            self.removEdge(u, v)
            visited =[False]*(self.Vertices)
            count2 = self.DFSCount(u, visited)

            # 2 – iii) add the edge back to the graph
            self.addEdge(u, v)

            # 2 – iv) if count1 is greater, then edge (u, v) is a bridge
            return False if count1 > count2 else True

    # method to yield Euler Circuit starting from vertex u
    def EulerCircuitHelp(self, u):
        # recur for all the vertices adjacent to this vertex
        for v in self.graph[u]:
            if self.NexEdgeValid(u, v):          # if edge (u, v) is not removed
                yield ([u, v])                   # and is a valid next edge
                self.removEdge(u, v)
                self.EulerCircuitHelp(v)

    # main method to print Eulerian Trail
    # it first finds an odd degree vertex (if there is any)
    # and then calls EulerCircuitHelp() to return the path
    def EulerCircuit(self):
        u = 0
        for i in range(self.Vertices):
            if len(self.graph[i]) % 2 != 0:
                u = i
                break
        return self.EulerCircuitHelp(u)
```

```python
# main function to find path
def NationalParkTour(Map):

    # we must make the map Eulerian by simultaneously
    # adding needed duplicate edges to make all vertices even
    # these duplicates are the streets that will be travelled twice

    for vertex in Map.Vertices:
        if len(Map.graph[vertex]) % 2 != 0:
            for secondvertex in Map.graph[vertex]:
                if len(Map.graph[secondvertex]) % 2 != 0:
                    Map.addEdge(vertex,secondvertex)
                    break
                else:
                    continue
        if len(Map.graph[vertex]) % 2 != 0:
            for secondvertex in Map.graph[vertex]:
                Map.addEdge(vertex,secondvertex)
                break
        else:
            continue

    Path = list(Map.EulerCircuit())
    return Path
```