Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy
Wydział Matematyki, Fizyki i Techniki
Instytut Matematyki

*Michał Jezierski*

# *Funktory równościowo definiowalne*

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Andrzeja Prószyńskiego

Bydgoszcz 2008

# Spis treści

# Wstęp

Podstawowym przedmiotem naszych rozważań są funktory wyznaczone przez równościowo definiowalne klasy odwzorowań. Mówimy, że klasa odwzorowań pomiędzy $R$-modułami $X$ i $Y$ jest równościowo definiowalna, jeżeli spełnia określony zestaw warunków typu równości, tzn. warunków postaci

$$\sum_{k=1}^{n} r_{ij} f\big(\sum_{j=1}^{m} s_{ijk} x_k\big) = 0, \qquad i \in I,$$

dla pewnych ustalonych elementów $r_{ij}, s_{ijk}$ pierścienia $R$ oraz dowolnych elementów $x_k \in X$. Przykładem równościowo definiowalnej klasy odwzorowań może być klasa $R$-homomorfizmów, klasa odwzorowań kwadratowych, bądź klasa wszystkich odwzorowań dla pustego układu warunków.

Każda równościowo definiowalna klasa odwzorowań wyznacza funktor dwóch zmiennych, który dowolnym $R$-modułom $X$ i $Y$ przyporządkowuje zbiór wszystkich odwzorowań z $X$ do $Y$ będących elementami danej równościowo definiowalnej klasy. Funktor ten nazywamy równościowo definiowalnym lub krótko ED-funktorem, przy czym pojęcie to pochodzi od A. Prószyńskiego ([4],[5]). Okazuje się, że ED-funktory są reprezentowalne. Celem tej pracy jest udowodnienie Twierdzenia 15, które podaje warunki równoważne charakteryzujące funktory równościowo definiowalne. Jeden z tych warunków mówi, że funktor reprezentujący zachowuje granice proste i ciągi Grothendiecka pierwszego rodzaju.

W pierwszych rozdziałach przedstawiamy kolejno podstawy teorii modułów, podstawy teorii funktorów oraz ciągi Grothendiecka i granice proste.

Zasadniczą rolę odgrywa funktor modułu wolnego $\mathcal{F}$, reprezentujący funktor Map wszystkich odwzorowań pomiędzy $R$-modułami, który omawiamy w Rozdziale 4. Natomiast w ostatnim rozdziale omawiamy ED-funktory i dowodzimy wspomnianego powyżej Twierdzenia 15, które je charakteryzuje.

Praca jest próbą możliwie najbardziej elementarnego wyłożenia wyników pochodzących z paragrafu 3.1 książki [3] (str. 72-80). W związku z tym wiele fragmentów dowodów zostało całkowicie zmienionych, a inne zostały przedstawione bardziej szczegółowo. Podjęto też próbę modyfikacji pewnych stosowanych pojęć w celu nadania im większej operatywności w tej pracy. Przykładem jest pojęcie zachowywania granic prostych przez funktor.

# Rozdział 1

# Moduły

W rozdziale pierwszym wprowadzamy podstawowe pojęcia algebry przemiennej. Zakładamy przy tym, że znane są fakty z podstawowego kursu algebry. Rozdział w znacznej części oparty jest na książce Balcerzyka [2]. Pewne podstawowe fakty pochodzą z książki [1]. Poza tym wprowadzamy $R$-moduł $\mathrm{Map}(X, Y)$ i dowodzimy pewnych jego elementarnych własności.

Niech $R$ będzie pierścieniem przemiennym z jedynką.

**Definicja 1** *$R$-modułem nazywamy trójkę $(X, +, \cdot)$, w której $X$ jest niepustym zbiorem, $+ : X \times X \to X$, $\cdot : R \times X \to X$ oraz dla wszystkich elementów $r, r' \in R$, $x, x' \in X$ spełnione są następujące warunki:*

1. *$X$ jest grupą abelową względem działania $+$,*
2. *$r(x + x') = rx + rx'$,*
3. *$(r + r')x = rx + r'x$,*
4. *$(rr')x = r(r'x)$,*
5. *$1x = x$.*

W dalszej części zamiast pisać *"X jest R-modułem"* będziemy często pisali $X \in R\text{-Mod}$. Element neutralny względem dodawania będziemu oznaczać 0 i nazywać zerem $R$-modułu $X$, natomiast element przeciwny do $x$ będziemy oznaczać przez $-x$.

**Definicja 2** *Niech $X$ będzie $R$-modułem. Podzbiór $X_0$ modułu $X$ nazywamy podmodułem modułu $X$, o ile dla dowolnych $x, x' \in X_0$ oraz $r \in R$ spełnione są następujące warunki:*

1. $x + x' \in X'$,
2. $rx \in X'$.

Bezpośrednio sprawdza się, że podmoduł $X'$ modułu $X$ jest też $R$-modułem względem działań określonych w $X$.

Niech $X, Y \in R$-Mod. Homomorfizmem $R$-modułów (lub krótko $R$-homomorfizmem) nazywamy odwzorowanie $f : X \to Y$ takie, że $f(x+x') = f(x)+f(x')$ oraz $f(rx) = rf(x)$ dla wszystkich $x, x' \in X$, $r \in R$. *Jądrem* $R$-homomorfizmu $f : X \to Y$ nazywamy zbiór $\ker(f) = \{x \in X\, ;\, f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$, natomiast zbiór $\mathrm{im}(f) = \{f(x)\, ;\, x \in X\}$ nazywamy jego *obrazem*. Jądro homomorfizmu $f : X \to Y$ jest podmodułem modułu $X$, natomiast $\mathrm{im}(f)$ jest podmodułem modułu $Y$.

$R$-homomorfizm $f : X \to Y$ nazywamy *monomorfizmem*, jeśli $\ker(f) = 0$, tzn. $f$ jest różnowartościowe, a *epimorfizmem*, gdy $\mathrm{im}(f) = Y$, tzn. $f$ jest *na*. $R$-homomorfizm $f$ jest izomorfizmem, jeśli jest monomorfizmem i epimorfizmem. Istnieje wówczas odwzorowanie odwrotne $f^{-1}$, które też jest homomorfizmem.

Podmodułowi $X'$ modułu $X$ odpowiada *moduł ilorazowy* $X/X'$, którego elementami są wszystkie warstwy $\bar{x} = x + X' = \{x + x'\ ;\ x' \in X'\}$ elementów $x \in X$ względem $X'$, przy czym działania określone są wzorami

$$(x + X') + (x' + X') = (x + x') + X', \qquad r(x + X') = rx + X',$$

dla dowolnych $x, x' \in X$, $r \in R$. Ponadto obowiązuje następująca reguła porównywania warstw:

$$x + X' = x' + X' \;\Leftrightarrow\; x - x' \in X'.$$

Odwzorowanie $\nu : X \to X/X'$ określone wzorem $\nu(x) = x + X'$ jest $R$-homomorfizmem, który nazywamy *homomorfizmem kanonicznym* lub *homomorfizmem naturalnym*.

Poniższe twierdzenie znane jest jako *twierdzenie o homomorfizmach R-modułów*, a jego dowód jest analogiczny jak w teorii pierścieni lub teorii grup.

**Twierdzenie 1** *Niech $f : X \to Y$ będzie R-homomorfizmem oraz niech $X'$ będzie podmodułem R-modułu $X$. Jeżeli $X' \subset \ker(f)$, to istnieje dokładnie jeden R-homomorfizm $\bar{f} : X/X' \to Y$ taki, że $\bar{f}(x + X') = f(x)$. W szczególności mamy izomorfizm R-modułów*

$$X\big/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f).$$

**Lemat 1** *Niech $X_0$ będzie podzbiorem R-modułu $X$. Zbiór $X'$ wszystkich elementów postaci $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n$, $r_1, \ldots, r_n \in R$, $x_1, \ldots, x_n \in X_0$, $n = 1, 2, \ldots$ jest podmodułem modułu $X$.*

*dowód:* Niech $x, x' \in X'$. Zatem

$$x = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n, \quad x' = r_1'x_1' + \ldots + r_m'x_m',$$

gdzie $r_i, r_j' \in R, x_i, x_j' \in X_0$ dla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Stąd

$$x + x' = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n + r_1'x_1' + \ldots + r_m'x_m' \in X'.$$

Jeżeli $r \in R$, to

$$rx = r(r_1x_1 + \ldots + r_nx_n) = r(r_1x_1) + \ldots + r(r_nx_n) =$$
$$= (rr_1)x_1 + \ldots + (rr_n)x_n \in X'. \square$$

**Definicja 3** *Podmoduł $X'$ określony w powyższym lemacie nazywamy podmodułem generowanym przez zbiór $X_0$, a zbiór $X_0$ nazywamy zbiorem generatorów podmodułu $X'$.*
*Podmoduł generowany przez zbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ oznaczamy $R\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Podobnie jak w teorii przestrzeni liniowych możemy wprowadzić pojęcie zewnętrznej sumy prostej $R$-modułów $X$ i $Y$.

**Definicja 4** *Niech* $X, Y \in R$-Mod. *Zbiór wszystkich par* $(x, y)$, *gdzie* $x \in X$, $y \in Y$, *wraz z działaniami*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$
$$r(x, y) = (rx, ry),$$

*gdzie* $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ *oraz* $r \in R$, *nazywamy zewnętrzną sumą prostą* $R$*-modułów* $X$ *i* $Y$ *i oznaczamy* $X \oplus Y$.

Z podstawowego kursu algebry wiemy, że zewnętrzna suma prosta dwóch przestrzeni liniowych jest przestrzenią liniową. Analogicznie można udowodnić następujący

**Lemat 2** *Zbiór* $X \oplus Y$ *jest* $R$*-modułem względem działań określonych powyżej.*

Przez $\mathrm{Map}(X, Y)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich odwzorowań pomiędzy $R$-modułami $X$ i $Y$. Podobnie $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ oznaczać będzie zbiór wszystkich $R$-homomorfizmów z modułu $X$ do $Y$. Oczywiście $\mathrm{Hom}_R(X, Y) \subset \mathrm{Map}(X, Y)$.

**Lemat 3** $\mathrm{Map}(X, Y)$ *jest* $R$*-modułem względem działań dodawania oraz mnożenia odwzorowań przez skalar, określonych wzorami*

$$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x),$$
$$(r\alpha)(x) = r\big(\alpha(x)\big),$$

*gdzie* $\alpha, \beta \in \mathrm{Map}(X, Y)$, $r \in R$ *oraz* $x$ *jest dowolnym elementem* $R$*-modułu* $X$.

*dowód:* Zauważmy, że $\mathrm{Map}(X, Y)$ jest grupą abelową względem określonego powyżej dodawania. Jej elementem neutralnym jest odwzorowanie zerowe, $0(x) = 0$ oraz dla dowolnego $\alpha \in \mathrm{Map}(X, Y)$ określone jest odwzorowanie $-\alpha$ takie, że $\alpha(x) + (-\alpha)(x) = 0$, tzn. $(-\alpha)(x) = -\alpha(x)$ dla dowolnego $x \in X$. Jest to oczywiście element przeciwny do $\alpha$. Ponadto, dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathrm{Map}(X, Y)$, $r, r' \in R$ oraz dla dowolnego $x \in X$ otrzymujemy

$$\big(r(\alpha + \beta)\big)(x) = r\big((\alpha + \beta)(x)\big) = r\big(\alpha(x) + \beta(x)\big) = r\big(\alpha(x)\big) + r\big(\beta(x)\big) =$$
$$= (r\alpha)(x) + (r\beta)(x) = (r\alpha + r\beta)(x),$$

co oznacza, że $r(\alpha+\beta) = r\alpha + r\beta$. Mamy również

$$\big((r+r')\alpha\big)(x) = (r+r')\big(\alpha(x)\big) = r\big(\alpha(x)\big) + r'\big(\alpha(x)\big) = (r\alpha)(x) + (r'\alpha)(x) = \\ = (r\alpha + r'\alpha)(x),$$

skąd $(r+r')\alpha = r\alpha + r'\alpha$. Podobnie $r(r'\alpha) = (rr')\alpha$, gdyż

$$\big(r(r'\alpha)\big)(x) = r\big((r'\alpha)(x)\big) = r\big(r'(\alpha(x))\big) = (rr')\big(\alpha(x)\big) = \big((rr')\alpha\big)(x).$$

Ponieważ $(1\alpha)(x) = 1\big(\alpha(x)\big) = \alpha(x)$, zatem $1\alpha = \alpha$.
Stąd $\mathrm{Map}(X,Y) \in R$-Mod. □

Analogicznie jak w teorii przestrzeni liniowych można wykazać, że jeżeli $f, g : X \to Y$ są $R$-homomorfizmami, to $f+g : X \to Y$ oraz $rf : X \to Y$ są również $R$-homomorfizmami dla $r \in R$. Ponieważ $\mathrm{Hom}_R(X,Y) \subset \mathrm{Map}(X,Y)$, zatem prawdziwy jest następujący

**Lemat 4** $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ *jest podmodułem* $R$*-modułu* $\mathrm{Map}(X,Y)$ *dla dowolnych* $X, Y \in R$-Mod. □

Mając dane $R$-moduły $X, Y, X', Y'$ oraz homomorfizmy $f : X' \to X$, $g : Y \to Y'$ możemy określić homomorfizm $\mathrm{Map}(f,g) : \mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X',Y')$, który dowolnemu $\alpha \in \mathrm{Map}(X,Y)$ przyporządkowuje złożenie $g \circ \alpha \circ f$. W szczególności $\mathrm{Map}(\mathrm{id}_X, g)$ oznaczać będziemy przez $g_*$, a $\mathrm{Map}(f, \mathrm{id}_Y)$ przez $f^*$, przy czym $g_*(\alpha) = g \circ \alpha$ oraz $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$. $\mathrm{Map}(f,g)$ jest istotnie homomorfizmem, gdyż biorąc $x \in X'$ oraz $\alpha, \beta \in \mathrm{Map}(X,Y)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\big(g \circ (\alpha+\beta) \circ f\big)(x) &= g\big((\alpha+\beta)(f(x))\big) = \\ &= g\big(\alpha(f(x)) + \beta(f(x))\big) = g\big(\alpha(f(x))\big) + g\big(\beta(f(x))\big) = \\ &= (g \circ \alpha \circ f)(x) + (g \circ \beta \circ f)(x) = \\ &= (g \circ \alpha \circ f + g \circ \beta \circ f)(x),\end{aligned}$$

co oznacza, że

$$g \circ (\alpha+\beta) \circ f = g \circ \alpha \circ f + g \circ \beta \circ f$$

i w rezultacie

$$\mathrm{Map}(f,g)(\alpha+\beta) = \mathrm{Map}(f,g)(\alpha) + \mathrm{Map}(f,g)(\beta).$$

Niech $r \in R$. Wówczas

$$\big(g \circ (r\alpha) \circ f\big)(x) = g\big((r\alpha)(f(x))\big).$$

Ponieważ $g$ jest $R$-homomorfizmem oraz $(r\alpha)(y) = r\big(\alpha(y)\big)$ dla dowolnego $y \in X$, zatem

$$g\big((r\alpha)(f(x))\big) = r\Big(g\big(\alpha(f(x))\big)\Big).$$

Stąd

$$\big(g \circ (r\alpha) \circ f\big)(x) = r\Big(\big(g \circ \alpha \circ f\big)(x)\Big)$$

i w rezultacie

$$\mathrm{Map}(f, g)(r\alpha) = r\big(\,\mathrm{Map}(f, g)(\alpha)\big),$$

co kończy dowód faktu, że $\mathrm{Map}(f, g)$ jest $R$-homomorfizmem.

Zauważmy, że $\mathrm{Map}(f, g)\big|\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ jest $R$-homomorfizmem prowadzącym do $\mathrm{Hom}_R(X', Y')$. Homomorfizm ten oznaczać będziemy przez $\mathrm{Hom}_R(f, g)$. W szczególności $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_X, g)$ oznaczać będziemy przez $g_*$, a $\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_Y)$ przez $f^*$, przy czym $g_*(\alpha) = g \circ \alpha$ oraz $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$.

Rozważmy $\alpha, \beta \in \mathrm{Map}(X, Y)$ oraz dowolny $N \in R$-Mod. Wówczas dla dowolnego $R$-homomorfizmu $f : Y \to N$ mamy $f \circ (\alpha \pm \beta) = f \circ \alpha \pm f \circ \beta$. Powyższą własność będziemy często wykorzystywać w dalszych rozważaniach.

## 1.1 Ciągi dokładne

**Definicja 5** *Mówimy, że ciąg $R$-modułów i $R$-homomorfizmów (skończony lub nieskończony)*

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{f_{i+1}} X_{i+1} \longrightarrow \cdots \tag{1.1}$$

*jest dokładny w $X_i$, o ile $\mathrm{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$. Mówimy, że ciąg (1.1) jest dokładny, jeżeli dla każdego $i$, dla którego istnieją $f_i$ i $f_{i+1}$, ciąg (1.1) jest dokładny w $X_i$.*

**Lemat 5** *Ciąg*

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

*jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest epimorfizmem.*

*dowód:* Jądrem jedynego homomorfizmu $Y \to 0$ jest $Y$. Stąd dokładność ciągu (1.2) oznacza, że $\mathrm{im}(f) = Y$, co jest równoważne temu, że $f$ jest epimorfizmem. □

**Lemat 6** *Ciąg*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \tag{1.3}$$

*jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest monomorfizmem.*

*dowód:* Obraz jedynego homomorfizmu $0 \to X$ jest podmodułem zerowym modułu $X$. Stąd dokładność ciągu (1.3) oznacza, że $\ker f = 0$, co jest równoważne temu, że $f$ jest monomorfizmem. □

Z powyższych dwóch lematów otrzymujemy następujący

**Wniosek 1** *Ciąg*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

*jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest izomorfizmem.*

Kolejny fakt jest fragmentem twierdzenia o lewostronnej dokładności funktora $\mathrm{Hom}_R$. Samo twierdzenie nie będzie nam potrzebne, za to w Rozdziale 3 udowodnimy pewną jego wersję związaną z ciągami Grothendiecka (Twierdzenie 5).

**Lemat 7** *Ciąg*

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \tag{1.5}$$

*jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $N \in R$-Mod dokładny jest ciąg*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Y, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(X, N). \tag{1.6}$$

*dowód:*

($\Rightarrow$): Niech ciąg (1.5) będzie dokładny oraz niech $g \in \mathrm{Hom}_R(Y, N)$. Niech $f^*(g) = 0$, tzn. $g \circ f = 0$. Wówczas $g|\,\mathrm{im}(f) = 0$. Ponieważ $\mathrm{im}(f) = Y$, zatem $g = 0$, skąd $f^*$ jest monomorfizmem.

($\Leftarrow$): Niech ciąg (1.6) będzie dokładny dla dowolnego $N \in R$-Mod. Zatem

$$f^* : \operatorname{Hom}_R\big(Y, Y/\operatorname{im}(f)\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R\big(X, Y/\operatorname{im}(f)\big)$$

jest monomorfizmem. Niech $g \in \operatorname{Hom}_R\big(Y, Y/\operatorname{im}(f)\big)$ będzie homomorfizmem naturalnym. Wówczas $g|\operatorname{im}(f) = 0$, tzn. $f^*(g) = g \circ f = 0$. Stąd $g = 0$, gdyż $f^*$ jest monomorfizmem, a zatem $\operatorname{im}(f) = Y$, co oznacza, że $f$ jest epimorfizmem. □

## 1.2 Moduły wolne

**Definicja 6** *Zbiór $B = \{e_i\}_{i\in I}$ nazywamy bazą $R$-modułu $X$, o ile dowolny element $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = \sum\limits_{i\in I} r_i e_i$, gdzie $r_i \in R$, $i \in I$ oraz $r_i = 0$ dla prawie wszystkich $i \in I$.*

**Definicja 7** *$R$-moduł $X$ nazywamy wolnym, o ile moduł ten posiada bazę.*

**Twierdzenie 2** ([2], Twierdzenie 1.8)*Niech $B \subset X$ będzie bazą $R$-modułu wolnego $X$. Wówczas dowolne odwzorowanie $\alpha : B \to Y$ o wartościach w $R$-module $Y$ może być jednoznacznie przedłużone do $R$-homomorfizmu $\bar{\alpha}$, tzn. diagram*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\alpha"] & X \\ & Y \end{tikzcd}$$

*w którym $i$ oznacza odwzorowanie włożenia, może być jednoznacznie uzupełniony do diagramu przemiennego*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\alpha"] & X \arrow[d, dashed, "\bar{\alpha}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

*dowód:* Niech $B = \{e_i\}_{i\in I}$. Dowolny element $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci kombinacji liniowej elementów bazy,

$$x = \sum_{i\in I} r_i e_i, \tag{1.7}$$

gdzie $r_i \in R$, dla $i \in I$ oraz prawie wszystkie $r_i$ są zerami. Ponieważ $\bar{\alpha}$ ma być $R$-homomorfizmem, zatem musi być

$$\bar{\alpha}\Big(\sum_{i\in I} r_i e_i\Big) = \sum_{i\in I} r_i \bar{\alpha}(e_i).$$

Ponadto $\bar{\alpha}$ ma być przedłużeniem $\alpha$, zatem

$$\bar{\alpha}\Big(\sum_{i\in I} r_i e_i\Big) = \sum_{i\in I} r_i \alpha(e_i).$$

Wobec tego istnieje co najwyżej jedno takie $\bar{\alpha}$ i określone jest powyższym wzorem. Zauważmy, że dzięki jednoznaczności przedstawienia elementu $x$ w postaci (1.7) odwzorowanie $\bar{\alpha}$ jest określone poprawnie powyższym wzorem. Ponadto $\bar{\alpha}\big| B = \alpha$, gdyż dla dowolnego $e_i \in B$ mamy $\bar{\alpha}(e_i) = \alpha(e_i)$. Pozostaje pokazać, że $\bar{\alpha}$ jest $R$-homomorfizmem. Niech $x = \sum\limits_{i\in I} r_i e_i$ oraz $x' = \sum\limits_{i\in I} s_i e_i$, gdzie $r_i, s_i \in R$. Wówczas

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(x + x') &= \bar{\alpha}\Big(\sum_{i\in I} r_i e_i + \sum_{i\in I} s_i e_i\Big) = \bar{\alpha}\Big(\sum_{i\in I} (r_i + s_i) e_i\Big) = \\ &= \sum_{i\in I} (r_i + s_i)\alpha(e_i) = \sum_{i\in I} r_i \alpha(e_i) + \sum_{i\in I} s_i \alpha(e_i) = \\ &= \bar{\alpha}(x) + \bar{\alpha}(x').\end{aligned}$$

Niech teraz $r \in R$. Wówczas

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(rx) &= \bar{\alpha}\Big(r\sum_{i\in I} r_i e_i\Big) = \bar{\alpha}\Big(\sum_{i\in I} (rr_i) e_i\Big) = \sum_{i\in I} (rr_i)\alpha(e_i) = \\ &= r\Big(\sum_{i\in I} r_i \alpha(e_i)\Big) = r\bar{\alpha}(x).\end{aligned}$$

Stąd $\bar{\alpha}$ jest $R$-homomorfizmem będącym przedłużeniem odwzorowania $\alpha$. $\square$

W przyszłych rozważaniach ważną rolę będzie odgrywać twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [2].

**Twierdzenie 3** ([2], Twierdzenie 1.9) *Dla każdego zbioru $X$ istnieje $R$-moduł wolny, którego bazą jest zbiór równoliczny z $X$.*

# Rozdział 2

# Funktory

Poniższy rozdział poświęcony jest pojęciu funktora i podobnie jak Rozdział 1 oparty jest w znacznej części na książce [2]. Rozważamy zarówno funktory jednej zmiennej jak i dwóch zmiennych. Wprowadzamy przede wszystkim funktor Map, który odegra zasadniczą rolę w kolejnych rozdziałach. W dalszej części wprowadzamy pojęcie podfunktora i funktora odwzorowań oraz podamy pewne ważne przykłady. Na zakończenie definiujemy przekształcenie funktorów oraz mówimy co to znaczy, że funktor jest reprezentowalny.

**Definicja 8** *Mówimy, że określony jest funktor kowariantny* $F : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$, *jeśli*

1. *dla każdego $R$-modułu $X$ określony jest $R$-moduł $F(X)$,*
2. *dla każdego $R$-homomorfizmu $f : X \to X'$ określony jest $R$-homomorfizm $F(f) : F(X) \to F(X')$,*
3. *spełnione są warunki*
   (a) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, *o ile złożenie $g \circ f$ istnieje,*
   (b) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

**Definicja 9** *Mówimy, że określony jest funktor kontrawariantny* $F : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$, *jeśli*

1. *dla każdego $R$-modułu $X$ określony jest $R$-moduł $F(X)$,*

2. *dla każdego R-homomorfizmu* $f : X \to X'$ *określony jest R-homomorfizm* $F(f) : F(X') \to F(X)$,

3. *spełnione są warunki*

   (a) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, *o ile złożenie* $g \circ f$ *istnieje,*

   (b) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Podamy teraz jedno z czterech możliwych uogólnienień powyższych dwóch definicji na przypadek funktorów dwóch argumentów. Jest to ta wersja, którą będziemy wykorzystywali.

**Definicja 10** *Mówimy, że określony jest funktor dwóch zmiennych* $A : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$, *kontrawariantny względem pierwszej zmiennej i kowariantny względem drugiej zmiennej, o ile spełnione są następujące warunki:*

1. *dla dowolnych R-modułów* $X, Y$ *określony jest R-moduł* $A(X, Y)$,

2. *dla dowolnych R-homomorfizmów* $f : X' \to X$, $g : Y \to Y'$ *określony jest R-homomorfizm* $A(f, g) : A(X, Y) \to A(X', Y')$,

3. *spełnione są warunki*

   (a) $A(g \circ f, f' \circ g') = A(f, f') \circ A(g, g')$, *o ile złożenia* $g \circ f$ *oraz* $f' \circ g'$ *istnieją,*

   (b) $A(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{A(X,Y)}$.

W przyszłości będziemy taki funktor nazywać po prostu funktorem dwóch zmiennych. Podobnie przez funktor jednej zmiennej będziemy rozumieć funktor kowariantny.

**Lemat 8** Map *jest funktorem dwóch zmiennych, jeśli* $\mathrm{Map}(X, Y)$ *i* $\mathrm{Map}(f, g)$ *określimy tak jak w Rozdziale* 1.

*dowód:* Jeżeli $X, Y \in R\text{-Mod}$, to $\mathrm{Map}(X, Y)$ jest $R$-modułem na podstawie Lematu 3. W Rozdziale 1 wykazaliśmy również, że jeżeli $f : X' \to X$ oraz

$g : Y \to Y'$ są $R$-homomorfizmami, to $\mathrm{Map}(f, g) : \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(X', Y')$ jest $R$-homomorfizmem, który dowolnemu $\alpha \in \mathrm{Map}(X, Y)$ przyporządkowuje odwzorowanie $g \circ \alpha \circ f$.

Niech teraz $f : X'' \to X'$, $g : X' \to X$ oraz $g' : Y \to Y'$, $f' : Y' \to Y''$ będą $R$-homomorfizmami. Wówczas dla dowolnego $\alpha \in \mathrm{Map}(X, Y)$ mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}(g \circ f, f' \circ g')(\alpha) &= (f' \circ g') \circ \alpha \circ (g \circ f) = f' \circ (g' \circ \alpha \circ g) \circ f = \\ &= \mathrm{Map}(f, f')(g' \circ \alpha \circ g) = \mathrm{Map}(f, f')\big(\mathrm{Map}(g, g')(\alpha)\big).\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathrm{Map}(g \circ f, f' \circ g') = \mathrm{Map}(f, f') \circ \mathrm{Map}(g, g').$$

Ponadto

$$\mathrm{Map}(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y)(\alpha) = \mathrm{id}_Y \circ \alpha \circ \mathrm{id}_X = \alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Map}(X,Y)}(\alpha),$$

zatem Map jest funktorem. □

## 2.1 Funktory odwzorowań

**Definicja 11** *Niech $F : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ będzie funktorem.*
*Mówimy, że $G$ jest podfunktorem funktora $F$ (co zapisujemy $G \subset F$), o ile dla każdego $X \in R\text{-Mod}$ określony jest podmoduł $G(X) \subset F(X)$ oraz dla dowolnego $R$-homomorfizmu $f : X \to Y$ mamy $F(f)\big(G(X)\big) \subset G(Y)$. Wówczas $G : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ jest funktorem, przy czym $G(f) = \mathcal{F}(f)\big|G(X)$ jest $R$-homomorfizmem z $G(X)$ do $G(Y)$.*

**Definicja 12** *Niech $A : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ będzie funktorem dwóch zmiennych. Mówimy, że $B$ jest podfunktorem funktora $A$ (co zapisujemy $B \subset A$), o ile dla dowolnych $X, Y \in R\text{-Mod}$ określony jest podmoduł $B(X, Y) \subset A(X, Y)$ oraz dla dowolnych $R$-homomorfizmów $f : X' \to X$, $g : Y \to Y'$ mamy $A(f, g)\big(B(X, Y)\big) \subset B(X', Y')$. Wówczas $B$ jest funktorem dwóch zmiennych, przy czym $B(f, g) = A(f, g)\big|B(X, Y)$ jest $R$-homomorfizmem z $B(X, Y)$ do $B(X', Y')$.*

**Definicja 13** *Dowolny podfunktor funktora* Map *nazywamy funktorem odwzorowań.*

PRZYKŁAD 1 $\mathrm{Hom}_R$ *jest funktorem odwzorowań. Istotnie, w Lemacie 3 wykazaliśmy, że* $\mathrm{Hom}_R(X,Y) \subset \mathrm{Map}(X,Y)$ *oraz* $\mathrm{Map}(f,g)\big|\,\mathrm{Hom}_R(X,Y) = \mathrm{Hom}_R(X',Y')$ *dla dowolnych $R$-homomorfizmów* $f : X' \to X$, $g : Y \to Y'$. *Wobec tego* $\mathrm{Hom}_R \subset \mathrm{Map}$, *co oznacza, że* $\mathrm{Hom}_R$ *jest funktorem odwzorowań.*

PRZYKŁAD 2 *Niech* $\mathrm{Hom}_R^2$ *będzie funktorem dwóch zmiennych, który dowolnym $R$-modułom $X$ i $Y$ przyporządkowuje zbiór wszystkich odwzorowań kwadratowych pomiędzy modułami $X$ i $Y$, tzn. takich odwzorowań* $\alpha \in \mathrm{Map}(X,Y)$, *dla których* $\alpha(rx) = r^2\alpha(x)$ *dla* $r \in R$, $x \in X$ *oraz odwzorowanie stowarzyszone* $B_\alpha : X \times X \to Y$ *określone wzorem* $B_\alpha(x,y) = \alpha(x+y) - \alpha(x) - \alpha(y)$ *jest dwuliniowe.*

*Wówczas* $\mathrm{Hom}_R^2$ *jest funktorem odwzorowań. Istotnie, niech dane będą $R$-homomorfizmy* $f : X' \to X$ *i* $g : Y \to Y'$ *oraz niech* $\alpha : X \to Y$ *będzie odwzorowaniem kwadratowym. Pokażemy, że* $\mathrm{Map}(f,g)(\alpha) = g \circ \alpha \circ f$ *jest też odwzorowaniem kwadratowym. Po pierwsze, dla dowolnych* $r \in R$, $x' \in X'$ *otrzymujemy*

$$\begin{aligned}(g \circ \alpha \circ f)(rx') &= g\big(\alpha\big(f(rx')\big)\big) = g\big(\alpha\big(rf(x')\big)\big) = \\ &= g\big(r^2\alpha\big(f(x')\big)\big) = r^2 g\big(\alpha\big(f(x')\big)\big) = \\ &= r^2\big((g \circ \alpha \circ f)(x)\big).\end{aligned}$$

*Pozostaje pokazać, że odwzorowanie stowarzyszone* $B_{g\circ\alpha\circ f}$ *określone wzorem*

$$B_{g\circ\alpha\circ f}(x',y') = (g \circ \alpha \circ f)(x'+y') - (g \circ \alpha \circ f)(x') - (g \circ \alpha \circ f)(y')$$

*jest dwuliniowe względem* $x', y' \in X'$. *Pokażemy że* $B_{g\circ\alpha\circ f}$ *jest $R$-homomorfizmem ze względu na pierwszą zmienną. Uzasadnienie liniowości względem drugiej zmiennej będzie analogiczne. Niech* $x', x'', y' \in X'$ *oraz* $r, s \in R$. *Zauważmy, że*

$$\begin{aligned}&B_{g\circ\alpha\circ f}(x',y') = (g \circ \alpha \circ f)(x'+y') - (g \circ \alpha \circ f)(x') - (g \circ \alpha \circ f)(y') = \\ &= g\Big(\alpha\big(f(x') + f(y')\big)\Big) - g\Big(\alpha\big(f(x')\big)\Big) - g\Big(\alpha\big(f(y')\big)\Big) = \\ &= g\Big(\alpha\big(f(x') + f(y')\big) - \alpha\big(f(x')\big) - \alpha\big(f(y')\big)\Big) = g\Big(B_\alpha\big(f(x'), f(y')\big)\Big).\end{aligned}$$

*Wobec tego*

$$\begin{aligned} B_{g\circ\alpha\circ f}(rx'+sx'',y') &= g\Big(B_\alpha\big(f(rx'+sx''),f(y')\big)\Big) = \\ &= g\Big(rB_\alpha\big(f(x'),f(y')\big)+sB_\alpha\big(f(x''),f(y')\big)\Big) = rg\Big(B_\alpha\big(f(x'),f(y')\big)\Big)+ \\ &+ sg\Big(B_\alpha\big(f(x''),f(y')\big)\Big) = rB_{g\circ\alpha\circ f}(x',y')+sB_{g\circ\alpha\circ f}(x'',y'). \end{aligned}$$

*Stąd $B_{g\circ\alpha\circ f}$ jest odwzorowaniem dwuliniowym, a zatem $g\circ\alpha\circ f$ jest odwzorowaniem kwadratowym. Wobec tego $\mathrm{Map}(f,g)(\alpha)\in \mathrm{Hom}^2_R(X',Y')$, a więc $\mathrm{Hom}^2_R$ jest funktorem odwzorowań.*

PRZYKŁAD 3 *Niech $R=\mathbb{Z}$ oraz niech $A$ będzie funktorem, który dowolnym $X,Y\in\mathbb{Z}$-Mod przyporządkowuje zbiór $A(X,Y)$ wszystkich takich odwzorowań z $X$ do $Y$, że obraz dowolnego $x\in X$ jest skończonego rzędu. Inaczej mówiąc, $\alpha\in A(X,Y)$ dokładnie wtedy, gdy dla dowolnego $x\in X$ istnieje takie $n$, że $n\alpha(x)=0$. Tak określony funktor $A$ jest funktorem odwzorowań. Istotnie, niech $f:X'\to X$ oraz $h:Y\to Y'$ będą $\mathbb{Z}$-homomorfizmami. Rozważmy odwzorowanie $\alpha\in A(X,Y)$. Wówczas $\mathrm{Map}(f,h)(\alpha)=h\circ\alpha\circ f$. Należy pokazać, że dla dowolnego $x'\in X'$ obraz $(h\circ\alpha\circ f)(x')$ jest skończonego rzędu. Ponieważ $f(x')\in X$, zatem $\alpha\big(f(x')\big)$ jest skończonego rzędu, tzn. istnieje takie $n$, że $n\alpha\big(f(x')\big)=0$. Wówczas*

$$n(h\circ\alpha\circ f)(x') = nh\big(\alpha(f(x'))\big) = h\big(n\alpha(f(x'))\big) = h(0)=0.$$

*Stąd $h\circ\alpha\circ f\in A(X',Y')$. Pokazaliśmy w ten sposób, że*

$$\mathrm{Map}(f,h)\big(A(X,Y)\big)\subset A(X',Y'),$$

*co oznacza, że $A\subset \mathrm{Map}$.*

## 2.2 Przekształcenia funktorów

**Definicja 14** *Niech $F,G: R\text{-Mod}\to R\text{-Mod}$ będą funktorami. Mówimy, że określone jest przekształcenie funktorów $\varphi:F\to G$, o ile dla dowolnego $R$-modułu $X$ określony jest $R$-homomorfizm $\varphi_X:F(X)\to G(X)$ oraz spełniony jest następujący warunek:*

*jeśli $X'$ jest dowolnym $R$-modułem oraz $f : X \to X'$ dowolnym $R$-homomorfizmem, to diagram*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(X') \arrow[r, "\varphi_{X'}"] & G(X') \end{tikzcd}$$

*jest przemienny, tzn. $G(f) \circ \varphi_X = \varphi_{X'} \circ F(f)$.*

*W szczególności, jeżeli dla dowolnego $X \in R\text{-Mod}$ homomorfizm $\varphi_X$ jest izomorfizmem, to mówimy, że przekształcenie $\varphi$ jest izomorfizmem funktorów oraz, że funktory $F$ i $G$ są izomorficzne, co zapisujemy $F \simeq G$. Mówimy także w tym wypadku, że istnieje naturalny izomorfizm $F(X) \simeq G(X)$.*

**Definicja 15** *Niech $A, B : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ będą funktorami dwóch zmiennych. Mówimy, że określone jest przekształcenie funktorów $\varphi : A \to B$, o ile dla dowolnych $R$-modułów $X, Y$ określony jest $R$-homomorfizm $\varphi_{X,Y} : A(X,Y) \to B(X,Y)$ oraz spełniony jest następujący warunek:*

*jeśli $X', Y'$ są dowolnymi $R$-modułami oraz $f : X' \to X$, $g : Y \to Y'$ dowolnymi $R$-homomorfizmami, to diagram*

$$\begin{tikzcd} A(X,Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "A(f,g)"] & B(X,Y) \arrow[d, "B(f,g)"] \\ A(X',Y') \arrow[r, "\varphi_{X',Y'}"] & B(X',Y') \end{tikzcd}$$

*jest przemienny, tzn. $B(f,g) \circ \varphi_{X,Y} = \varphi_{X',Y'} \circ A(f,g)$.*

*W szczególności, jeżeli dla dowolnych $X, Y \in R\text{-Mod}$ homomorfizm $\varphi_{X,Y}$ jest izomorfizmem, to mówimy, że przekształcenie $\varphi$ jest izomorfizmem funktorów oraz, że funktory $A$ i $B$ są izomorficzne, co zapisujemy $A \simeq B$. Mówimy także w tym wypadku, że istnieje naturalny izomorfizm $A(X,Y) \simeq B(X,Y)$.*

**Definicja 16** *Mówimy, że funktor odwzorowań $A$ jest reprezentowalny, a dokładniej reprezentowany przez funktor $F : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$, jeśli $A \simeq \mathrm{Hom}_R\big(F(\_), \_\big)$, tzn. istnieje naturalny izomorfizm $A(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\big(F(X), Y\big)$.*

# Rozdział 3

# Ciągi Grothendiecka i granice proste

## 3.1 Ciągi Grothendiecka

Ciągi Grothendiecka stanowią odpowiednik ciągów dokładnych w sytuacji, gdy rozważamy odwzorowania niekoniecznie będące homomorfizmami pomiędzy obiektami, które są zbiorami z ewentualnymi dodatkowymi strukturami. W naszych rozważaniach ograniczymy się jednak do ciągów $R$-modułów i $R$-homomorfizmów. Czytelnika zainteresowanego tematem odsyłamy do pracy [6] oraz artykułu [3]. Informacje na ten temat można również znaleźć w [4] i [5]. Treść następujących dwóch paragrafów pochodzi głównie z pracy [3].

### 3.1.1 Ciągi Grothendiecka pierwszego rodzaju

**Definicja 17** *Ciąg $R$-modułów i $R$-homomorfizmów*

$$X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{g} Z$$

*nazywamy ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju, jeżeli*

1. *$g$ jest epimorfizmem,*

2. *dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$ następujące warunki są równoważne:*

   (a) $g(y_1) = g(y_2)$,

   (b) *istnieje $x \in X$ taki, że $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$.*

*Przy tym implikacja* (b)$\Rightarrow$(a) *oznacza, że* $g \circ f_1 = g \circ f_2$.

**Twierdzenie 4** ([3], str. 222) *Ciąg*

$$X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{g} Z \tag{3.1}$$

*jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg*

$$X \xrightarrow{f_1 - f_2} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

*jest dokładny i dla dowolnego* $y \in Y$ *istnieje* $x \in X$ *taki, że* $y = f_1(x) = f_2(x)$.

*dowód:*

($\Rightarrow$): Oczywiście $g$ jest epimorfizmem z założenia. Dla dowodu dokładności pozostaje pokazać, że $\operatorname{im}(f_1 - f_2) = \ker(g)$. Zauważmy najpierw, że do $\operatorname{im}(f_1 - f_2)$ należą takie $y \in Y$, które dają się przedstawić w postaci $y = f_1(x) - f_2(x)$ dla pewnego $x \in X$. Mamy także

$$\ker(g) = \big\{y \in Y\ ;\ g(y) = 0\big\} = \big\{y \in Y\ ;\ g(y) = g(0)\big\}.$$

Ponieważ ciąg (3.1) jest ciągiem Grothendiecka, zatem równość $g(y) = g(0)$ równoważna jest temu, że istnieje taki $x \in X$, dla którego $y = f_1(x)$ i $f_2(x) = 0$. Stąd

$$\ker(g) = \big\{y \in Y\ ;\ \underset{x\in X}{\exists}\ y = f_1(x) - f_2(x)\ \wedge\ f_2(x) = 0\big\} \subset \operatorname{im}(f_1 - f_2).$$

Wprost z definicji wynika, że $g \circ f_1 = g \circ f_2$, więc $g \circ (f_1 - f_2) = 0$, co jest równoważne temu, że $\operatorname{im}(f_1 - f_2) \subset \ker(g)$. Zatem $\operatorname{im}(f_1 - f_2) \subset \ker(g)$ i ostatecznie $\operatorname{im}(f_1 - f_2) = \ker(g)$, co dowodzi, że ciąg (3.2) jest dokładny. Ponadto, bezpośrednio z warunku *2.* (przy $y_1 = y_2$) wynika, że dla dowolnego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ taki, że $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$.

($\Leftarrow$): Oczywiście $g$ jest epimorfizmem. Jeśli $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$, to $g(y_1) - g(y_2) = g\big((f_1 - f_2)(x)\big) = 0$, gdyż $\operatorname{im}(f_1 - f_2) \subset \ker(g)$.
Niech $g(y_1) = g(y_2)$; wówczas $y_1 - y_2 \in \ker(g)$. Ponieważ ciąg (3.2) jest dokładny, zatem $y_1 - y_2 \in \operatorname{im}(f_1 - f_1)$. Stąd istnieje $x' \in X$ taki, że $y_1 - y_2 = (f_1 - f_2)(x')$, zatem $y_1 - f_1(x') = y_2 - f_2(x')$. Z założenia

$$y_1 - f_1(x') = y_2 - f_2(x') = f_1(x'') = f_2(x'')$$

dla pewnego $x'' \in X$. Zatem $y_1 = f_1(x' + x'')$ i $y_2 = f_2(x' + x'')$. Kładąc $x = x' + x''$ otrzymujemy $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$. □

**Lemat 9** ([3], Remark 2.4) *Jeżeli ciąg*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

*jest dokładny, to ciąg*

$$X \oplus Y \underset{(0,\mathrm{id}_Y)}{\overset{(f,\mathrm{id}_Y)}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{g} Z \tag{3.4}$$

*jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju, gdzie* $(f, \mathrm{id}_Y)(x, y) = f(x) + y$ *oraz* $(0, \mathrm{id}_Y)(x, y) = y$ *dla* $(x, y) \in X \oplus Y$.

*dowód:* Ciąg (3.3) jest dokładny, zatem $g$ jest epimorfizmem i warunek *1.* w definicji ciągu Grothendiecka jest spełniony. Pozostaje pokazać równoważność poniższych dwóch warunków:

(*a*) $g(y_1) = g(y_2)$,

(*b*) $\underset{(x',y') \in X \oplus Y}{\exists} y_1 = f(x') + y' \ \wedge \ y_2 = y'$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) : Niech $y_1 = f(x') + y'$ oraz $y_2 = y'$ dla pewnego $(x', y') \in X \oplus Y$. Wówczas

$$g(y_1) = g\big(f(x') + y'\big) = g\big(f(x')\big) + g(y').$$

Ciąg (3.3) jest dokładny, skąd wynika, że $g \circ f = 0$, zatem $g\big(f(x')\big) = 0$. Stąd

$$g(y_1) = g(y') = g(y_2).$$

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*) : Niech $g(y_1) = g(y_2)$. Wówczas $g(y_1 - y_2) = 0$, co oznacza, że $y_1 - y_2 \in \ker(g)$. Ponieważ $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$, zatem $y_1 - y_2 \in \mathrm{im}(f)$, skąd istnieje $x' \in X$ taki, że $f(x') = y_1 - y_2$. Przyjmując $y' = y_2$ otrzymujemy $y_1 = f(x') + y'$ oraz $y_2 = y'$, co należało udowodnić. □

Pokazuje się, że dla dowolnego $R$-modułu $Z$ istnieje ciąg dokładny (3.3), w którym $X$ i $Y$ są wolnymi $R$-modułami. Wówczas w ciągu Grothendiecka (3.4) moduły $X \oplus Y$ oraz $Y$ są wolne.

PRZYKŁAD 4 *Rozważmy ciąg $\mathbb{Z}$-modułów i $\mathbb{Z}$-homomorfizmów*

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

*w którym $f(n) = 2n$ oraz $\nu$ jest homomorfizmem naturalnym, tzn. $\nu(n) = = n + 2\mathbb{Z}$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Powyższy ciąg jest dokładny, gdyż $\ker(\nu) = 2\mathbb{Z} = \operatorname{im}(f)$, zatem, na podstawie Lematu 9, ciąg*

$$\mathbb{Z}^2 \underset{(0,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})}{\overset{(f,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

*jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju, przy czym $(f, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})(n, m) = = 2n + m$ oraz $(0, id_{\mathbb{Z}})(n, m) = m$ dla dowolnego $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.*

**Lemat 10** *Niech $g : Y \to Z$ będzie epimorfizmem oraz niech $i$ będzie włożeniem $\ker(g)$ w $Y$. Wówczas ciąg*

$$ker(g) \oplus Y \underset{(0,\mathrm{id}_Y)}{\overset{(i,\mathrm{id}_Y)}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{g} Z \tag{3.5}$$

*jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju.*

*dowód:* Zauważmy, że ciąg

$$\ker(g) \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

jest dokładny, wobec czego, na podstawie Lematu 9, ciąg (3.5) jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju. □

### 3.1.2 Ciągi Grothendiecka drugiego rodzaju

**Definicja 18** *Ciąg $R$-modułów i $R$-homomorfizmów*

$$X \xrightarrow{g} Y \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Z$$

*nazywamy ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju, jeżeli*

1. *$g$ jest monomorfizmem,*

2. *dla dowolnego $y \in Y$ następujące warunki są równoważne:*

(a) $f_1(y) = f_2(y)$,

(b) *istnieje* $x \in X$ *taki, że* $y = g(x)$.

*Przy tym implikacja* (b)$\Rightarrow$(a) *oznacza, że* $f_1 \circ g = f_2 \circ g$.

**Lemat 11** *Ciąg*

$$X \xrightarrow{g} Y \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Z \tag{3.6}$$

*jest ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f_1 - f_2} Z \tag{3.7}$$

*jest dokładny.*

*dowód:*

($\Rightarrow$): Załóżmy, że ciąg (3.6) jest ciągiem Grothendiecka. Należy pokazać, że ciąg (3.7) jest dokładny. Wystarczy pokazać, że $\ker(f_1 - f_2) = \operatorname{im}(g)$. Mamy

$$\begin{aligned} \ker(f_1 - f_2) &= \big\{ y \in Y \ ; \ (f_1 - f_2)(y) = 0 \big\} = \big\{ y \in Y \ ; \ f_1(y) = f_2(y) \big\} \\ &= \big\{ y \in Y \ ; \ \underset{x \in X}{\exists} \ y = g(x) \big\} = \operatorname{im}(g). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$): Załóżmy, że ciąg (3.7) jest dokładny, skąd $\ker(f_1 - f_2) = \operatorname{im}(g)$. Niech $f_1(y) = f_2(y)$. Wówczas $y \in \ker(f_1 - f_2)$. Ponieważ $\ker(f_1 - f_2) \subset \operatorname{im}(g)$, zatem istnieje $x \in X$ taki, że $y = g(x)$.

Rozważmy $x \in X$ taki, że $y = g(x)$. Wówczas $y \in \operatorname{im}(g)$. Ponieważ $\ker(f_1 - f_2) \supset \operatorname{im}(g)$, zatem $f_1(y) = f_2(y)$, co kończy dowód faktu, że ciąg (3.6) jest ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju. $\square$

**Lemat 12** *Niech*

$$X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{g} Z \tag{3.8}$$

*będzie ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju. Niech* $A$ *będzie funktorem odwzorowań oraz niech* $N$ *będzie dowolnym* $R$*-modułem. Wówczas*

$$A(Z, N) \xrightarrow{g^*} A(Y, N) \underset{f_2^*}{\overset{f_1^*}{\rightrightarrows}} A(X, N) \tag{3.9}$$

*jest ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $\varphi \in A(Y, N)$ *istnieje dokładnie jedno uzupełnienie diagramu przemiennego*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \\ & N & \end{tikzcd}$$

*tzn. takiego, że* $\varphi \circ f_1 = \varphi \circ f_2$*, do diagramu przemiennego*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & N & \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

*tzn. takiego, że dodatkowo* $\psi \circ g = \varphi$*, gdzie* $\psi \in A(Z, N)$*.*

*dowód:*

$(\Rightarrow)$ : Bezpośrednio z Definicji 18 otrzymujemy, że skoro $f_1^*(\varphi) = \varphi \circ f_1 =$ $= \varphi \circ f_2 = f_2^*(\varphi)$, to istnieje $\psi \in A(Z, N)$ takie, że $g^*(\psi) = \varphi$, tzn. $\psi \circ g = \varphi$. Zauważmy ponadto, że istnienie dokładnie jednego $\psi$ jest równoważne temu, że $g^*$ jest monomorfizmem.

$(\Leftarrow)$ : Załóżmy, że istnieje $\psi \in A(Z, N)$ takie, że $g^*(\psi) = \psi \circ g = \varphi$ dla $\varphi \in A(Y, N)$. Wówczas $g$ jest epimorfizmem oraz

$$f_1^*(\varphi) = \varphi \circ f_1 = \psi \circ g \circ f_1 = \psi \circ g \circ f_2 = \varphi \circ f_2 = f_2^*(\varphi),$$

gdyż $g \circ f_1 = g \circ f_2$ z założenia.

Jeżeli teraz $f_1^*(\varphi) = f_2^*(\varphi)$, tzn. $\varphi \circ f_1 = \varphi \circ f_2$, to z założenia wynika, że istnieje dokładnie jedno $\psi \in A(Z, N)$ takie, że $\varphi = \psi \circ g$, tzn. $g^*(\psi) = \varphi$. $\square$

**Wniosek 2** *Niech*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \tag{3.11}$$

*będzie ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju oraz niech* $N$ *będzie dowolnym* $R$*-modułem. Wówczas*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(Z, N) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Map}(Y, N) \arrow[r, shift left, "f_1^*"] \arrow[r, shift right, "f_2^*"'] & \mathrm{Map}(X, N) \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

*jest ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju.*

*dowód:* Zgodnie z poprzednim lematem pokażemy, że diagram (3.10) można jednoznacznie uzupełnić odwzorowaniem $\psi \in \mathrm{Map}(X, Y)$. Ponieważ $g$ jest epimorfizmem, więc każdy element $z \in Z$ jest postaci $z = g(y)$ dla pewnego $y \in Y$. Odwzorowanie $\psi : Z \to N$ ma uzupełniać diagram (3.10), wobec czego musi być określone wzorem $\psi(z) = \varphi(y)$, dla $z = g(y)$, $\varphi \in \mathrm{Map}(Y, N)$. Wobec tego $\psi$ jest wyznaczone jednoznacznie. Odwzorowanie $\psi$ jest poprawnie określone. Istotnie, niech $z = g(y) = g(y')$. Ciąg (3.11) jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju, co oznacza, że istnieje $x \in X$, dla którego $y = f_1(x)$ i $y' = f_2(x)$. Stąd

$$\varphi(y) = \varphi\big(f_1(x)\big) = \varphi\big(f_2(x)\big) = \varphi(y').$$

Zatem $\psi$ jest poprawnie określone i jest jedynym uzupełnieniem diagramu (3.10). Z Lematu 12 wynika, że (3.12) jest ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju. $\square$

**Twierdzenie 5** *Ciąg*

$$X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{g} Z \tag{3.13}$$

*jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $N \in R$-Mod *ciąg*

$$\mathrm{Hom}_R(Z, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(Y, N) \overset{f_1^*}{\underset{f_2^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_R(X, N) \tag{3.14}$$

*jest ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju oraz dla dowolnego* $y \in Y$ *istnieje* $x \in X$ *taki, że* $y = f_1(x) = f_2(x)$.

*dowód:*
($\Rightarrow$): Wystarczy zauważyć, że odwzorowanie $\psi$ określone we Wniosku 2 jest $R$-homomorfizmem. Istotnie, niech $z = g(y)$ oraz $z' = g(y')$ dla pewnych $y, y' \in Y$. Wówczas

$$\psi(z + z') = \varphi(y + y') = \varphi(y) + \varphi(y') = \psi(z) + \psi(z'),$$

gdyż $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(Y, N)$. Ponadto, jeżeli $r \in R$, to

$$\psi(rz) = \varphi(ry) = r\varphi(y) = r\psi(z),$$

skąd $\psi \in \mathrm{Hom}_R(Y, N)$.

$(\Leftarrow)$ : Niech (3.14) będzie ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju. Zauważmy, że jeżeli $g^*$ jest monomorfizmem, to $g$ jest epimorfizmem na podstawie Lematu 7. Niech $N = Y/\operatorname{im}(f_1 - f_2)$ oraz niech $\nu : Y \to Y/\operatorname{im}(f_1 - f_2)$ będzie homomorfizmem naturalnym. Wówczas $\nu \in \ker(f_1 - f_2)^*$, gdyż $\nu \circ (f_1 - f_2) = 0$. Zatem $\nu \circ f_1 = \nu \circ f_2$, co oznacza, że $f_1^*(\nu) = f_2^*(\nu)$. Wobec tego istnieje $\psi \in \mathrm{Hom}_R(Z, N)$ takie, że $\nu = \psi \circ g$.
Jeżeli $g(y_1) = g(y_2)$, to $y_1 - y_2 \in \ker(g)$. Zatem $\psi\big(g(y_1 - y_2)\big) = \psi(0) = 0$, skąd $\nu(y_1 - y_2) = 0$. Oznacza to, że $y_1 - y_2 \in \operatorname{im}(f_1 - f_2)$, wobec czego istnieje $x' \in X$ taki, że $y_1 - y_2 = f_1(x') - f_2(x')$. Stąd $y_1 - f_1(x') = y_2 - f_2(x')$, więc z założenia wynika, że $y_1 - f_1(x') = f_1(x'')$ oraz $y_2 - f_2(x') = f_2(x'')$ dla pewnego $x'' \in X$. Kładąc $x = x' + x''$ otrzymujemy, że $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$.

Pozostaje udowodnić, że jeżeli $f_1^* \circ g^* = f_2^* \circ g^*$, to $f_1 \circ g = f_2 \circ g$ (dla każdego $R$-modułu $N$). Oznaczmy

$$h = g \circ f_1 - g \circ f_2.$$

Wówczas $h^* : \mathrm{Hom}_R(Y, N) \to \mathrm{Hom}_R(X, N)$ i $h^* = f_1^* \circ g^* - f_2^* \circ g^* = 0$ dla każdego $N \in R$-Mod. W szczególności dla $N = Y$ otrzymujemy, że $h^*(\mathrm{id}_Y) = 0$, skąd $h = 0$. Wobec tego $g \circ f_1 = g \circ f_2$. $\square$

## 3.2 Granice proste

Celem tego podrozdziału jest przedstawienie podstawowych faktów dotyczących prostych systemów $R$-modułów oraz ich granic. Czytelnika zainteresowanego dokładniejszym omówieniem tematu odsyłamy do książki [2].

**Definicja 19** *Niech $S$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym relacją $\leq$. Zbiór $S$ nazywamy zbiorem skierowanym, o ile spełniony jest następujący warunek:*

*jeśli $\alpha, \beta \in S$, to istnieje $\gamma \in S$ takie, że $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$.*

Przykład 5 *Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem oraz niech $S$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $X$. Wówczas $S$ jest zbiorem skierowanym względem relacji zawierania $\subset$.*

Każdy zbiór liniowo uporządkowany jest zbiorem skierowanym. Zbiór częściowo uporządkowany zawierający element największy jest skierowany.

**Definicja 20** *Niech $S$ będzie zbiorem skierowanym. Systemem prostym $R$-modułów nad zbiorem $S$ nazywamy układ $\{X_\alpha, f_\beta^\alpha\}$, gdzie $X_\alpha \in R\text{-Mod}$ dla $\alpha \in S$ oraz $f_\beta^\alpha : X_\alpha \to X_\beta$ jest $R$-homomorfizmem dla $\alpha \leq \beta$, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1. $f_\alpha^\alpha = \mathrm{id}_{X_\alpha}$, $\alpha \in S$,
2. *jeśli $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, to diagram*

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\beta^\alpha"] \arrow[dr, "f_\gamma^\alpha"'] & X_\beta \arrow[d, "f_\gamma^\beta"] \\ & X_\gamma \end{tikzcd}$$

   *jest przemienny, tzn. $f_\gamma^\beta \circ f_\beta^\alpha = f_\gamma^\alpha$.*

**Definicja 21** *Niech $\{X_\alpha, f_\beta^\alpha\}$ będzie systemem prostym $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$. Granicą tego systemu nazywamy $R$-moduł $X$ wraz z odwzorowaniami $f^\alpha : X_\alpha \to X$, $\alpha \in S$, o ile spełnione są warunki:*

1. *dla dowolnych $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \leq \beta$, diagram*

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\beta^\alpha"] \arrow[dr, "f^\alpha"'] & X_\beta \arrow[d, "f^\beta"] \\ & X \end{tikzcd}$$

   *jest przemienny, tzn. $f^\beta \circ f_\beta^\alpha = f^\alpha$,*

2. *jeśli $Y \in R\text{-Mod}$ oraz dla dowolnego $\alpha \in S$ określone są $R$-homomorfizmy $g^\alpha : X_\alpha \to Y$ takie, że diagramy*

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\beta^\alpha"] \arrow[dr, "g^\alpha"'] & X_\beta \arrow[d, "g^\beta"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

*są przemienne dla wszystkich $\alpha \leq \beta$, to istnieje dokładnie jeden $R$-homomorfizm $g : X \to Y$ taki, że wszystkie diagramy*

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f^\alpha"] \arrow[dr, "g^\alpha"'] & X \arrow[d, dashed, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

*są przemienne, tzn. $g \circ f^\alpha = g^\alpha$ dla $\alpha \in S$.*

Granicę systemu prostego $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ oznaczamy $\varinjlim\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ lub $\varinjlim X_\alpha$.

**Twierdzenie 6** ([2], Twierdzenie 2.14) *Jeśli $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ jest prostym systemem $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$, to istnieje granica $\varinjlim X_\alpha$ i jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.*

Powyższego twierdzenia nie dowodzimy między innymi dlatego, że nigdzie nie będziemy korzystali z konstrukcji $\varinjlim X_\alpha$.

**Lemat 13** *Niech $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ będzie skierowaną rodziną podmodułów $R$-modułu $X$, tzn. $X_\alpha \subset X_\beta$ o ile $\alpha \leq \beta$. Niech $f^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ będą włożeniami dla $\alpha \leq \beta$. Wówczas $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ jest prostym systemem $R$-modułów. Ponadto, jeżeli $X = \bigcup_{\alpha\in S} X_\alpha$, to $\varinjlim X_\alpha = X$, przy czym $f^\alpha : X_\alpha \to X$ są włożeniami.*

*dowód:* Oczywiście $f^\alpha_\alpha = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ oraz dla $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ diagramy

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f^\alpha_\beta"] \arrow[dr, "f^\alpha_\gamma"'] & X_\beta \arrow[d, "f^\beta_\gamma"] \\ & X_\gamma \end{tikzcd}$$

są przemienne, skąd $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ jest prostym systemem $R$-modułów. Niech $X = \bigcup_{\alpha\in S} X_\alpha$. Wówczas dla dowolnych $\alpha, \beta$, $\alpha \leq \beta$ diagramy

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f^\alpha_\beta"] \arrow[dr, "f^\alpha"'] & X_\beta \arrow[d, "f^\beta"] \\ & X \end{tikzcd}$$

są przemienne, gdyż $f^\alpha$, $f^\beta$ oraz $f^\alpha_\beta$ są włożeniami. Niech $Y$ będzie dowolnym $R$-modułem oraz niech dla dowolnego $\alpha$ określone będą $R$-homomorfizmy $g^\alpha : X_\alpha \to Y$ takie, że diagramy

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f^\alpha_\beta"] \arrow[dr, "g^\alpha"'] & X_\beta \arrow[d, "g^\beta"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

są przemienne. Należy określić odwzorowanie $g : X \to Y$ w ten sposób, aby diagramy

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f^\alpha"] \arrow[dr, "g^\alpha"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

były przemienne dla wszystkich $\alpha \in S$. Zauważmy, że jeżeli $x \in X$, to istnieje takie $\alpha \in S$, że $x \in X_\alpha$. Z przemienności diagramów (3.15) wynika, że $g(x) = g^\alpha(x)$, zatem w szczególności $g$ jest co najwyżej jedno. Odwzorowanie $g$ jest poprawnie określone. Istotnie, niech $x \in X_\alpha$ oraz $x \in X_\beta$. Wówczas istnieje wskaźnik $\gamma$ taki, że $\alpha, \beta \leq \gamma$. Stąd

$$g^\alpha(x) = g^\gamma\big(f^\alpha_\gamma(x)\big) = g^\gamma(x) = g^\gamma\big(f^\beta_\gamma(x)\big) = g^\beta(x).$$

Oczywiście z definicji wynika, że $g$ uzupełnia diagramy (3.15). Pozostaje pokazać, że $g$ jest $R$-homomorfizmem. Niech $x, x' \in X$. Wobec tego istnieją $\alpha$ i $\beta$ takie, że $x \in X_\alpha$ i $x' \in X_\beta$. Ponieważ $S$ jest zbiorem skierowanym, zatem istnieje $\gamma$ takie, że $\alpha, \beta \leq \gamma$ oraz $x, x' \in X_\gamma$, skąd $x + x' \in X_\gamma$. Wówczas

$$g(x + x') = g^\gamma(x + x') = g^\gamma(x) + g^\gamma(x') = g(x) + g(x').$$

Niech $r \in R$. Wówczas, jeśli $x \in X_\alpha$, to $rx \in X_\alpha$, więc

$$g(rx) = g^\alpha(rx) = rg^\alpha(x) = rg(x).$$

Wobec tego $X = \varinjlim X_\alpha$. $\square$

PRZYKŁAD 6 ([2], Przykład 13, Przykład 19) *Niech $X$ będzie dowolnym $R$-modułem. Rozważym zbiór $S$ wszystkich skończonych (odp. co najwyżej przeliczalnych) podzbiorów zbioru $X$. Jeśli $\alpha \in S$ oraz $\alpha = X'$, to przez $X_\alpha$ oznaczmy podmoduł $RX'$. Jeśli $\beta \in S$ oraz $\alpha \leq \beta$, to $X_\alpha \subset X_\beta$ i $R$-homomorfizm $f^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ określamy jako włożenie, tzn. $f^\alpha_\beta(x) = x$ dla $x \in X_\alpha$. Wówczas $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ jest prostym systemem $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$ oraz $\varinjlim X_\alpha = X$.*

*Zauważmy, że $\{X_\alpha\}_{\alpha\in S}$ jest skierowaną rodziną podmodułów $R$-modułu $X$. Wobec tego $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ jest prostym systemem $R$-modułów na podstawie powyższego lematu. Ponadto $X = \bigcup\limits_{\alpha\in S} X_\alpha$, gdyż dowolny element $x \in X$ jest elementem skończenie generowanego $R$-modułu $Rx$. Z Lematu 13 wynika zatem, że $R$-moduł $X$ wraz z włożeniami $f^\alpha : X_\alpha \to X$ jest granicą prostą systemu $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$.*

Zanotujmy jeszcze twierdzenie, z którego będziemy często korzystali:

**Twierdzenie 7** ([2], Twierdzenie 2.12, Twierdzenie 2.16) *Jeśli $R$-moduł $X$ wraz z $R$-homomorfizmami $f^\alpha : X_\alpha \to X$ jest granicą systemu prostego $\{X_\alpha, f^\alpha\}$, to $X = \bigcup\limits_\alpha \operatorname{im}(f^\alpha)$ oraz $\ker(f^\alpha) = \bigcup\limits_{\beta\geq\alpha} \ker(f^\alpha_\beta)$.*

**Definicja 22** *Niech $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ będzie dowolnym prostym systemem $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$. Niech $X$ wraz z $R$-homomorfizmami $f^\alpha : X_\alpha \to X$ będzie granicą prostą tego systemu. Mówimy, że funktor $F : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ zachowuje granice proste jeżeli $F(X)$ wraz z $R$-homomorfizmami $F(f^\alpha)$ jest granicą prostą systemu $\big\{F(X_\alpha), F(f^\alpha_\beta)\big\}$.*

**Definicja 23** *Niech $S$ będzie zbiorem skierowanym oraz niech $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ i $\{Y_\alpha, g^\alpha_\beta\}$ będą prostymi systemami $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$. Homomorfizmem systemów*

$$\varphi : \{X_\alpha, f^\alpha_\beta\} \to \{Y_\alpha, g^\alpha_\beta\}$$

*nazywamy taką rodzinę $R$-homomorfizmów $\varphi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in S}$, że dla każdego $\alpha \in S$*

*oraz dla wszystkich $\beta$ takich, że $\alpha \leq \beta$ diagramy*

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f^\alpha_\beta"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"] & X_\beta \arrow[d, "\varphi_\beta"] \\ Y_\alpha \arrow[r, "g^\alpha_\beta"] & Y_\beta \end{tikzcd} \tag{3.16}$$

*są przemienne.*

Zauważmy, że jeśli $\phi : F \to G$ jest przekształceniem funktorów, to dla dowolnego systemu prostego $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ mamy homomorfizm systemów

$$\varphi = \{\varphi_\alpha\} : \big\{F(X_\alpha), F(f^\alpha_\beta)\big\} \to \big\{G(X_\alpha), G(f^\alpha_\beta)\big\},$$

gdzie $\varphi_\alpha = \phi(X_\alpha) : F(X_\alpha) \to G(X_\alpha)$.

Niech $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ i $\{Y_\alpha, g^\alpha_\beta\}$ będą prostymi systemami $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$ i niech $\varphi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in S}$ będzie homomorfizmem systemów. Wówczas dla dowolnych $\alpha \leq \beta$ diagram

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[rr, "f^\alpha_\beta"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"] & & X_\beta \arrow[d, "\varphi_\beta"] \\ Y_\alpha \arrow[rr, "g^\alpha_\beta"] \arrow[dr, "g_\alpha"] & & Y_\beta \arrow[dl, "g_\beta"] \\ & \varinjlim Y_\alpha & \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

jest przemienny, wobec czego istnieje dokładnie jedno uzupełnienie diagramów

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[rr, "f^\alpha_\beta"] \arrow[dr, "f^\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "g^\alpha \circ \varphi_\alpha"'] & & X_\beta \arrow[dl, "f^\beta"'] \arrow[ddl, bend left, "g^\beta \circ \varphi_\beta"] \\ & \varinjlim X_\alpha & \\ & \varinjlim Y_\alpha & \end{tikzcd} \tag{3.18}$$

do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[rr, "f^\alpha_\beta"] \arrow[dr, "f^\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "g^\alpha \circ \varphi_\alpha"'] & & X_\beta \arrow[dl, "f^\beta"'] \arrow[ddl, bend left, "g^\beta \circ \varphi_\beta"] \\ & \varinjlim X_\alpha \arrow[d, dashed] & \\ & \varinjlim Y_\alpha & \end{tikzcd} \tag{3.19}$$

które będziemy oznaczać przez $\varinjlim \varphi_\alpha$. Wobec tego $\varinjlim \varphi_\alpha$ jest jedynym uzupełnieniem wszystkich diagramów

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f^\alpha"] & Y_\alpha \arrow[d, "g^\alpha"] \\ \varinjlim X_\alpha \arrow[r, "\varinjlim \varphi_\alpha"] & \varinjlim Y_\alpha \end{tikzcd} \tag{3.20}$$

W przyszłości będzie nam potrzebne

**Twierdzenie 8** ([2], Twierdzenie 4.12) *Niech* $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ *i* $\{Y_\alpha, g^\alpha_\beta\}$ *będą prostymi systemami* $R$*-modułow nad zbiorem skierowanym* $S$*. Niech* $X$ *wraz z* $R$*-homomorfizmami* $f^\alpha : X_\alpha \to X$ *będzie granicą systemu* $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ *oraz niech* $Y$ *wraz z* $R$*-homomorfizmami* $g^\alpha : Y_\alpha \to Y$ *będzie granicą systemu* $\{Y_\alpha, g^\alpha_\beta\}$*. Niech* $\varphi : \{X_\alpha, f^\alpha_\beta\} \to \{Y_\alpha, g^\alpha_\beta\}$*,* $\varphi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in S}$ *będzie homomorfizmem systemów. Wówczas*

$$\ker(\varinjlim \varphi_\alpha) = \bigcup_\alpha f^\alpha\big(\ker(\varphi_\alpha)\big).$$

# Rozdział 4

# Funktor modułu wolnego $\mathcal{F}$

Poniższy rozdział wprowadza funktor modułu wolnego $\mathcal{F}$. Podajemy pewne istotne własności, między innymi to, że $\mathcal{F}$ zachowuje granice proste (Twierdzenie 9) oraz to, że funktor $\mathcal{F}$ reprezentuje funktor Map (Lemat 15).

Przypomnijmy, że zgodnie z Lematem 3 dla każdego zbioru $X$ istnieje $R$-moduł wolny, którego bazą jest zbiór $X$. Wobec tego prawdziwy jest następujący

**Wniosek 3** *Dla każdego $R$-modułu $X$ istnieje $R$-moduł wolny $\mathcal{F}(X)$, którego bazą jest zbiór $X$.*

Niech $x$ będzie dowolnym elementem $R$-modułu $X$. Wówczas odpowiadający mu element bazy $R$-modułu $\mathcal{F}(X)$ oznaczamy przez $[x]$. Zatem istnieje kanoniczne włożenie $i : X \to \mathcal{F}(X)$, $i(x) = [x]$, które nie jest $R$-homomorfizmem, gdyż $[x + y] \neq [x] + [y]$ oraz $[rx] \neq r[x]$, o ile $r \neq 1$.

W dalszych rozważaniach zasadniczą rolę odgrywa następujące twierdzenie będące wnioskiem z Twierdzenia 2

**Wniosek 4** *Dowolne odwzorowanie $\alpha : X \to Y$ można jednoznacznie przedłużyć do $R$-homomorfizmu $\bar{\alpha} : \mathcal{F}(X) \to Y$, dla którego diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

*jest przemienny. Homomorfizm $\bar{\alpha}$ jest określony na bazie wzorem $\bar{\alpha}([x]) = \alpha(x)$.*

Zauważmy, że $\mathcal{F}$ możemy traktować jako funktor kowariantny, który dowolnemu $X \in R$-Mod przyporządkowuje $\mathcal{F}(X) \in R$-Mod. Istotnie, jeżeli $f : X \to X'$ jest $R$-homomorfizmem, to $\mathcal{F}(f)$ jest $R$-homomorfizmem, będącym jedynym uzupełnieniem diagramu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X' \arrow[d, "i'"] \\ \mathcal{F}(X) & \mathcal{F}(X') \end{tikzcd}$$

do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X' \arrow[d, "i'"] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[r, dashed, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{F}(X') \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Takie jedyne uzupełnienie istnieje, gdyż na podstawie Twierdzenia 2 odwzorowaniu $i' \circ f$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie $R$-homomorfizm $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X')$. Z przemienności diagramu (4.1) wynika zatem, że

$$\big(\mathcal{F}(f)\big)([x]) = \big[f(x)\big].$$

Ponadto $\mathcal{F}(f)$ jest $R$-homomorfizmem, zatem dla dowolnego $\sum\limits_{x\in X} r_x[x] \in \mathcal{F}(X)$ mamy

$$\big(\mathcal{F}(f)\big)\big(\sum_{x\in X} r_x[x]\big) = \sum_{x\in X} r_x[f(x)],$$

gdzie $r_x \in R$, $x \in X$. Ponadto, jeżeli $f : X \to X'$ oraz $g : X' \to X''$ są $R$-homomorfizmami, to

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g \circ f)([x]) &= \big[(f \circ g)(x)\big] = \big[f\big(g(x)\big)\big] = \big(\mathcal{F}(f)\big)\big[g(x)\big] = \\ &= \big(\mathcal{F}(f)\big)\Big(\big(\mathcal{F}(g)\big)([x])\Big) = \big(\mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)\big)\big([x]\big), \end{aligned}$$

zatem $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$. Również

$$\big(\mathcal{F}(\mathrm{id}_X)\big)([x]) = [\mathrm{id}_X(x)] = [x] = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}(x),$$

skąd $\mathcal{F}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X)}$. Pokazaliśmy tym samym, że warunki Definicji 8 są spełnione, zatem $\mathcal{F} : R$-Mod $\to R$-Mod jest rzeczywiście funktorem.

W następnym rozdziale przydatny będzie następujący

**Lemat 14** *Niech $f : X' \to X$, $g : Y \to Y$ będą $R$-homomorfizmami oraz niech $\alpha : X \to Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem. Wówczas*

(1) $g \circ \bar{\alpha} = \overline{g \circ \alpha}$,

(2) $\overline{\alpha \circ f} = \bar{\alpha} \circ \mathcal{F}(f)$.

(3) $\overline{g \circ \alpha \circ f} = g \circ \bar{\alpha} \circ \mathcal{F}(f)$.

*dowód:* Ponieważ po obu stronach równości (1) i (2) występują homomorfizmy i złożenia homomorfizmów określone na modułach wolnych $\mathcal{F}(X)$ i $\mathcal{F}(X')$, więc wystarczy sprawdzić te równości na elementach bazy. Niech $x \in X$, wówczas

$$(g \circ \bar{\alpha})([x]) = g\big(\bar{\alpha}([x])\big) = g\big(\alpha(x)\big) = (g \circ \alpha)(x) = \overline{(g \circ \alpha)}([x]),$$

skąd $g \circ \bar{\alpha} = \overline{g \circ \alpha}$. Podobnie

$$\begin{aligned}\big(\bar{\alpha} \circ \mathcal{F}(f)\big)\big([x]\big) &= \bar{\alpha}\big(\mathcal{F}(f)([x])\big) = \bar{\alpha}\big([f(x)]\big) = \\ &= \alpha\big(f(x)\big) = (\alpha \circ f)(x) = \overline{(\alpha \circ f)}\big([x]\big).\end{aligned}$$

skąd $\bar{\alpha} \circ \mathcal{F}(f) = \overline{\alpha \circ f}$.

Wzór (3) jest prostą konsekwencją wzorów (1) i (2). Istotnie, kładąc $\beta = g \circ \alpha$ otrzymujemy

$$\overline{g \circ \alpha \circ f} = \overline{\beta \circ f} = \bar{\beta} \circ \mathcal{F}(f) = \overline{g \circ f} \circ \mathcal{F}(f) = g \circ \bar{\alpha} \circ \mathcal{F}(f). \ \square$$

Rozważmy dowolny podfunktor $K$ funktora $\mathcal{F}$. Wówczas możemy określić nowy funktor $\mathcal{F}/K$ kładąc $(\mathcal{F}/K)(X) = \mathcal{F}(X)/K(X)$ dla dowolnego $X \in R$-Mod. Niech $f : X \to Y$ będzie dowolnym $R$-homomorfizmem oraz niech $\nu_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)/K(X)$, $\nu_Y : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(Y)/K(Y)$ będą homomorfizmami naturalnymi. Ponieważ $\mathcal{F}(f)\big(K(X)\big) \subset K(Y)$, więc $\big(\nu_Y \circ \mathcal{F}(f)\big)\big(K(X)\big) = 0$, wobec czego, na podstawie Twierdzenia 1, istnieje dokładnie jeden $R$-homomorfizm $\mathcal{F}(X)/K(X) \to \mathcal{F}(Y)/K(Y)$, który oznaczać będziemy przez $(\mathcal{F}/K)(f)$, dla którego

$$\big((\mathcal{F}/K)(f)\big)\big(u + K(X)\big) = \big(\nu_Y \circ \mathcal{F}(f)\big)(u) = \mathcal{F}(f)(u) + K(Y),$$

gdzie $u \in \mathcal{F}(X)$. Wobec tego, jeżeli $u = \sum_{x\in X} r_x[x]$, gdzie $r_x \in R$, $x \in X$, to

$$\big((\mathcal{F}/K)(f)\big)\Big(\sum_{x\in X} r_x[x] + K(X)\Big) = \sum_{x\in X} r_x\big[f(x)\big] + K(Y).$$

Pozostaje pokazać, że $\mathcal{F}/K$ jest funktorem. Niech $f : Y \to Z$ oraz $g : X \to Y$ będą $R$-homomorfizmami. Wówczas, dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}/K)(f\circ g)\big([x]+K(X)\big) &= [(f\circ g)(x)] + K(Z) = \big[f\big(g(x)\big)\big] + K(Z) = \\ &= (\mathcal{F}/K)(f)\Big([g(x)] + K(Y)\Big) = (\mathcal{F}/K)(f)\Big((\mathcal{F}/K)(g)([x]+K(X))\Big) = \\ &= \Big((\mathcal{F}/K)(f)\circ(\mathcal{F}/K)(g)\Big)\big([x]+K(X)\big).\end{aligned}$$

Ponadto

$$(\mathcal{F}/K)(\mathrm{id}_X)\big([x]+K(X)\big) = [x] + K(X) = \mathrm{id}_{(\mathcal{F}/K)(X)}\,\big([x]+K(X)\big),$$

zatem $(\mathcal{F}/K)(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{(\mathcal{F}/K)(X)}$, co kończy dowód faktu, że $\mathcal{F}/K$ jest funktorem.

Okazuje się, że istnieje ważny związek pomiędzy funktorami $\mathcal{F}$ i Map. Z kolejnego lematu wynika bowiem, że funktor Map jest reprezentowalny, a $\mathcal{F}$ jest jego funktorem reprezentującym.

**Lemat 15** *Niech $\varphi_{X,Y}$ będzie odwzorowaniem, które dowolnemu $f \in \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X), Y\big)$ przyporządkowuje odwzorowanie $f\circ i \in \mathrm{Map}(X,Y)$, gdzie $i(x) = [x]$. Wówczas dla dowolnych $X, Y \in R$-Mod odwzorowanie $\varphi_{X,Y}$ jest $R$-izomorfimem oraz dla dowolnych $R$-homomorfizmów $g : Y \to Y'$, $h : X' \to X$ diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X), Y\big) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(\mathcal{F}(h),g)"] & \mathrm{Map}(X,Y) \arrow[d, "\mathrm{Map}(h,g)"] \\ \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X'), Y'\big) \arrow[r, "\varphi_{X',Y'}"] & \mathrm{Map}(X',Y') \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

*jest przemienny.*

*dowód:* Zauważmy najpierw, że $\varphi_{X,Y}$ jest $R$-homomorfizmem, gdyż dla dowolnych $x \in X$, $r \in R$ oraz dowolnych $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X), Y\big)$ mamy

$$\begin{aligned}\big(\varphi_{X,Y}(h_1+h_2)\big)(x) &= \big((h_1+h_2)\circ i\big)(x) = (h_1+h_2)\big(i(x)\big) = h_1\big(i(x)\big) + h_2\big(i(x)\big) = \\ &= (h_1\circ i)(x) + (h_2\circ i)(x) = (h_1\circ i + h_2\circ i)(x) = \\ &= \big(\varphi_{X,Y}(h_1) + \varphi_{X,Y}(h_2)\big)(x), \\ \big(\varphi_{X,Y}(rh_1)\big)(x) &= \big((rh_1)\circ i\big)(x) = (rh_1)\big(i(x)\big) = rh_1\big(i(x)\big) = r\big((h_1\circ i)(x)\big) \\ &= \big(r(h_1\circ i)\big)(x) = \big(r\varphi_{X,Y}(h_1)\big)(x).\end{aligned}$$

Zatem $\varphi_{X,Y}(h_1+h_2) = \varphi_{X,Y}(h_1) + \varphi_{X,Y}(h_2)$ oraz $\varphi_{X,Y}(rh_1) = r\varphi_{X,Y}(h_1)$, co oznacza, że $\varphi_{X,Y}$ jest $R$-homomorfizmem. Ponadto, z Wniosku 4 wynika, że odpowiedniość ta jest wzajemnie jednoznaczna, zatem $\varphi_{X,Y}$ jest $R$-izomorfizmem.

Niech $f \in \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X), Y\big)$ oraz niech $i$ będzie włożeniem $X$ w $\mathcal{F}(X)$, natomiast $i'$ niech będzie włożeniem $X'$ w $\mathcal{F}(X')$. Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned}&\Big(\varphi_{X',Y'}\circ \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(h), g\big)\Big)(f) = \varphi_{X',Y'}\Big(\mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(h), g\big)(f)\Big) = \\ &= \varphi_{X',Y'}\big(g\circ f\circ \mathcal{F}(h)\big) = g\circ f\circ \mathcal{F}(h)\circ i'.\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\big(\mathrm{Map}(h,g)\circ\varphi_{X,Y}\big)(f) = \mathrm{Map}(h,g)(\varphi_{X,Y}) = g\circ f\circ i\circ h.$$

Aby pokazać, że zachodzi równość $g\circ f\circ\mathcal{F}(h)\circ i' = g\circ f\circ i\circ h$ wystarczy pokazać, że $\mathcal{F}(h)\circ i' = i\circ h$. Zauważmy jednak, że równość ta wynika bezpośrednio z określenia $\mathcal{F}(h)$. Stąd

$$\mathrm{Map}(h,g)\circ\varphi_{X,Y} = \varphi_{X',Y'}\circ\mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(h), g\big),$$

co oznacza, że diagram (4.2) jest przemienny. □

**Wniosek 5** *Istnieje naturalny izomorfizm* $\mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X), Y\big) \simeq \mathrm{Map}(X,Y)$. *Oznacza to, że funktor* Map *jest reprezentowalny, przy czym* $\mathcal{F}$ *jest jego funktorem reprezentującym.*

**Twierdzenie 9** *Funktor* $\mathcal{F}$ *zachowuje granice proste.*

*dowód:* : Niech $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ będzie prostym systemem $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$ oraz niech $R$-moduł $X$ będzie granicą tego systemu. Pokażemy, że $\mathcal{F}(X)$ wraz z $R$-homomorfizmami $\mathcal{F}(f^\alpha)$ jest granicą systemu $\big\{\mathcal{F}(X_\alpha), \mathcal{F}(f^\alpha)\big\}$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest funktorem, zatem dla dowolnego $\alpha \in S$, z przemienności diagramów

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f^\alpha_\beta"] \arrow[dr, "f^\alpha"'] & X_\beta \arrow[d, "f^\beta"] \\ & X \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

wynika, że diagramy

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X_\alpha) \arrow[r, "\mathcal{F}(f^\alpha_\beta)"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(f^\alpha)"'] & \mathcal{F}(X_\beta) \arrow[d, "\mathcal{F}(f^\beta)"] \\ & \mathcal{F}(X) \end{tikzcd}$$

są również przemienne. Niech $Y$ będzie dowolnym $R$-modułem oraz niech dla dowolnego $\alpha \in S$ określone będą $R$-homomorfizmy $g_\alpha : \mathcal{F}(X_\alpha) \to Y$ takie, że diagramy

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X_\alpha) \arrow[r, "\mathcal{F}(f^\alpha_\beta)"] \arrow[dr, "g^\alpha"'] & \mathcal{F}(X_\beta) \arrow[d, "g^\beta"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

są przemienne dla wszystkich $\alpha \leq \beta$.
Należy określić odwzorowanie $g : \mathcal{F}(X) \to Y$ w taki sposób, aby diagramy

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X_\alpha) \arrow[r, "\mathcal{F}(f^\alpha)"] \arrow[dr, "g^\alpha"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

były przemienne dla wszystkich $\alpha \in S$. Ponieważ $X = \varinjlim X_\alpha$, zatem $X = \bigcup_\alpha \operatorname{im}(f^\alpha)$, co oznacza, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje $x_\alpha \in X_\alpha$ taki, że $x = f^\alpha(x_\alpha)$. Z przemienności diagramów (4.4) wynika, że $g\big([x]\big) = g^\alpha\big([x_\alpha]\big)$. Odwzorowanie $g$ jest poprawnie określone. Istotnie, jeżeli $x = f^\beta(x_\beta)$, to istnieje taki element $\gamma \in S$, że $\alpha, \beta \leq \gamma$. Chcemy pokazać, że $g^\alpha\big([x_\alpha]\big) = g^\beta\big([x_\beta]\big)$. Zauważmy, że jeżeli $x = f^\alpha(x_\alpha) = f^\beta(x_\beta)$, to $x = f^\gamma\big(f^\alpha_\gamma(x_\alpha)\big) = f^\gamma\big(f^\beta_\gamma(x_\beta)\big)$, skąd $f^\alpha_\gamma(x_\alpha) - f^\beta_\gamma(x_\beta) \in \ker(f^\gamma)$. Z Twierdzenia 7 wynika zatem, że istnieje taki element $\delta \in S$, że $\gamma \leq \delta$ i $f_\delta^\gamma\big(f_\gamma^\alpha(x_\alpha) - f_\gamma^\beta(x_\beta)\big) = 0$, skąd $f_\delta^\alpha(x_\alpha) = f_\delta^\beta(x_\beta)$. Wobec tego

$$g^\alpha\big([x_\alpha]\big) = g^\delta\big([f_\delta^\alpha(x_\alpha)]\big) = g^\delta\big([f_\delta^\beta(x_\beta)]\big) = g^\beta\big([x_\beta]\big),$$

skąd $g$ jest poprawnie określone. Pozostaje pokazać, że $g$ jest $R$-homomorfizmem. Istotnie, jeżeli $x = f^\alpha(x_\alpha)$ oraz $x' = f^\alpha(x'_\alpha)$, to

$$g\big([x] + [x']\big) = g^\alpha\big([x_\alpha] + [x'_\alpha]\big) = g^\alpha\big([x_\alpha]\big) + g^\alpha\big([x'_\alpha]\big) = g\big([x]\big) + g\big([x']\big).$$

Podobnie dla $r \in R$ otrzymujemy

$$g\big(r[x]\big) = g^\alpha\big(r[x_\alpha]\big) = rg^\alpha\big([x_\alpha]\big) = rg\big([x]\big),$$

skąd $g$ jest $R$-homomorfizmem. Zatem funktor $\mathcal{F}$ zachowuje granice proste. $\square$

# Rozdział 5

# Funktory równościowo definiowalne

Rozdział 5 oparty został na pracy [4] oraz na artukule [5]. W pierwszej kolejności dowodzimy Twierdzenia 11 charakteryzującego reprezentowalne funktory odwzorowań, po czym wprowadzamy pojęce równościowo definiowalnej klasy odwzorowań oraz pojęcie ED-funktora. Następnie dowodzimy Twierdzenia 15 charakteryzującego ED-funktory i będące głównym wynikiem tej pracy.

## 5.1 Odpowiedniość pomiędzy funktorami odwzorowań, a podfunktorami funktora $\mathcal{F}$

Niech $\mathscr{K}$ oznacza klasę wszystkich podfunktorow funktora $\mathcal{F}$. Podobnie niech $\mathscr{A}$ oznacza klasę wszystkich funktorów odwzorowań z $X$ do $Y$ oraz niech $\bar{\mathscr{A}}$ będzie podklasą wszystkich reprezentowalnych funktorów odwzorowań z $X$ do $Y$. Rozważmy odwzorowania $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{K}$, $\Psi : \mathscr{K} \to \mathscr{A}$ określone następująco: $\Phi(A) = K_A$ oraz $\Psi(K) = A_K$, gdzie

$$K_A(X) = \big\{u \in \mathcal{F}(X)\ ;\ \forall_{Y \in R\text{-Mod}}\ \forall_{\alpha \in A(X,Y)}\ \bar{\alpha}(u) = 0\big\},$$

$$A_K(X,Y) = \big\{\alpha \in \mathrm{Map}(X,Y)\ ;\ \bar{\alpha}\big(K(X)\big) = 0\big\},$$

przy czym $\bar{\alpha} : \mathcal{F}(X) \to Y$, $\bar{\alpha}\big(\sum_{x\in X} r_x[x]\big) = \sum_{x\in X} r_x\alpha(x)$ dla $r_x \in R$, $x \in X$.

**Lemat 16** *$K_A$ jest podfunktorem funktora $\mathcal{F}$.*

*dowód:* Wprost z określenia $K_A$ wynika, że $K_A(X) \subset \mathcal{F}(X)$ dla dowolnego $R$-modułu $X$. Pozostaje pokazać, że $\big(\mathcal{F}(f)\big)\big(K_A(X)\big) \subset K_A(Y)$.

Niech $u \in K_A(X)$ oraz niech $\alpha \in A(Y, Z)$ dla dowolnie wybranego $R$-modułu $Z$. Korzystając z Lematu 14 otrzymujemy

$$\bar{\alpha}\Big(\big(\mathcal{F}(f)\big)(u)\Big) = \big(\bar{\alpha} \circ \mathcal{F}(f)\big)(u) = \overline{(\alpha \circ f)}(u).$$

Ponieważ $\alpha \circ f : X \to Z$ jest $R$-homomorfizmem oraz $u \in K_A(X)$, zatem $\overline{(\alpha \circ f)}(u) = 0$, co oznacza, że $\big(\mathcal{F}(f)\big)(u) \in K_A(Y)$. Wobec tego

$$\big(\mathcal{F}(f)\big)\big(K_A(X)\big) \subset K_A(Y),$$

co dowodzi, że $K_A$ jest podfunktorem funktora $\mathcal{F}$. $\square$

**Lemat 17** *$A_K$ jest podfunktorem funktora* Map.

*dowód:* Bezpośrednio z określenia $A_K$ otrzymujemy, że $A_K(X, Y) \subset \mathrm{Map}(X, Y)$. Niech $\alpha \in A_K(X, Y)$ oraz niech dane będą $R$-homomorfizmy $f : X' \to X$ i $g : Y \to Y'$. Wówczas $\mathrm{Map}(f, g)(\alpha) = g \circ \alpha \circ f$. Należy pokazać, że $g \circ \alpha \circ f \in A_K(X', Y')$, tzn. $\overline{(g \circ \alpha \circ f)}\big(K(X')\big) = 0$. Z Lematu 14 wynika, że $\overline{g \circ \alpha \circ f} = g \circ \bar{\alpha} \circ \mathcal{F}(f)$. Ponadto $\mathcal{F}(f)\big(K(X')\big) \subset K(X)$ oraz $\bar{\alpha}\big(K(X)\big) = 0$, zatem $\overline{(g \circ \alpha \circ f)}\big(K(X')\big) = \big(g \circ \bar{\alpha} \circ \mathcal{F}(f)\big)\big(K(X')\big) = 0$. Wobec tego $g \circ \alpha \circ f \in$ $\in A_K(X', Y')$ i $A_K \subset \mathrm{Map}$. $\square$

**Lemat 18** *Funktor $A_K$ jest reprezentowalny, a jego funktorem reprezentującym jest $\mathcal{F}/K$.*

*dowód:* Z Twierdzenia 2 wynika, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy odwzorowaniami z $X$ do $Y$, a homomorfizmami z $\mathcal{F}(X)$ do $Y$ dająca naturalny izomorfizm $\mathrm{Map}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X), Y\big)$. Następnie z Twierdzenia 1 wynika, że homomorfizmom z $\mathcal{F}(X)$ do $Y$, które zerują się na $K(X)$, odpowiadają wzajemnie jednoznacznie homomorfizmy z $\mathcal{F}(X)/K(X)$ do $Y$. Stąd otrzymujemy, że $A_K(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X)/K(X), Y\big)$. $\square$

Podamy teraz twierdzenie, które jest szczególnym przypadkiem znacznie ogólniejszego faktu, zwanego w literaturze Lematem Yonedy (zob. np. [7], Twierdzenie 4.3.2).

**Twierdzenie 10** *Jeśli* $\Phi : \mathrm{Hom}_R(X, \_) \to \mathrm{Hom}_R(Y, \_)$ *jest przekształceniem funktorów, to istnieje jedyny R-homomorfizmu* $\varphi : Y \to X$ *taki, że* $\Phi(Z) = \varphi^*$ *dla dowolnego* $Z \in R\text{-Mod}$*, a zatem* $\big(\Phi(Z)\big)(f) = f \circ \varphi^*$ *dla* $f \in \mathrm{Hom}_R(X, Z)$*.*

W oparciu o ten fakt udowodnimy

**Twierdzenie 11** *Każdy reprezentowalny funktor odwzorowań A jest postaci* $A_K$ *dla pewnego podfunktora K funktora* $\mathcal{F}$*.*

*dowód:* Niech $G$ będzie funktorem reprezentującym $A$. Ponieważ funktor Map jest reprezentowany przez $\mathcal{F}$, zatem włożenie $A(X, Y)$ w $\mathrm{Map}(X, Y)$ indukuje przekształcenie funktorów $\mathrm{Hom}_R\big(G(X), Y\big) \to \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X), Y\big)$, wobec czego diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R\big(G(X), Y\big) \arrow[r, "\varphi_X^*"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_R\big(\mathcal{F}(X), Y\big) \arrow[d, "\simeq"] \\
A(X, Y) \arrow[r, hook] & \mathrm{Map}(X, Y)
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Przekształcenie $\varphi_X^*$ jest monomorfizmem i na mocy Twierdzenia 10 pochodzi od jedynego $R$-homomorfizmu $\varphi_X : \mathcal{F}(X) \to G(X)$, który jest epimorfizmem na mocy Lematu 7. Niech $K(X) = \ker(\varphi_X)$. Z Twierdzenia 1 wynika zatem, że $G(X) \simeq \mathcal{F}(X)/K(X)$. Niech $g : G(X) \to Y$ będzie dowolnym $R$-homomorfizmem. Z przemienności powyższego diagramu oraz z faktu, że $R$-homomorfizmowi $\bar{\alpha} = \varphi_X^*(g) : \mathcal{F}(X) \to Y$ wzajemnie jednoznacznie odpowiada odwzorowanie $\alpha = \bar{\alpha} \circ i = g \circ \varphi_X \circ i \in \mathrm{Map}(X, Y)$ otrzymujemy

$$A(X, Y) = \Big\{\alpha \in \mathrm{Map}(X, Y)\ ;\ \underset{g \in \mathrm{Hom}_R(\mathcal{F}(X), Y)}{\exists}\ \bar{\alpha} = g \circ \varphi_X\Big\}.$$

Ponieważ $(g \circ \varphi_X)\big(K(X)\big) = 0$, zatem również $\bar{\alpha}\big|K(X) = 0$, wobec czego

$$A(X, Y) = \Big\{\alpha \in \mathrm{Map}(X, Y)\ ;\ \bar{\alpha}\big|K(X) = 0\Big\} = A_K(X, Y).\ \Box$$

**Twierdzenie 12** ([4], Lemat 3.1.1) *Określone powyżej przyporządkowania* $\Phi$ *oraz* $\Psi$ *ustalają wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość typu Galois (tzn. odwracającą zawierania) pomiędzy reprezentowalnymi funktorami odwzorowań z X od Y, a podfunktorami funktora* $\mathcal{F}$*. Ponadto* $\bar{A} = A_{K_A}$ *jest najmniejszym reprezentowalnym funktorem odwzorowań zawierającym wyjściowy funktor A, czyli tzw. powłoką reprezentowalną funktora A.*

*dowód:* Zauważmy na początku, że $\Phi$ i $\Psi$ odwracają zawierania. Istotnie, niech $A$ i $B$ będą funktorami odwzorowań takimi, że $A \subset B$. Wówczas, jeżeli $u \in K_B(X)$, to dla dowolnego $\beta \in B(X,Y)$ mamy $\bar{\beta}(u) = 0$. Ponieważ $A \subset B$, zatem również dla dowolnego $\alpha \in A(X,Y)$ mamy $\bar{\alpha}(u) = 0$. Stąd $K_B \subset K_A$, co oznacza, że $\Phi(B) \subset \Phi(A)$.

Niech teraz $K$ i $L$ będą podfunktorami funktora $\mathcal{F}$ takimi, że $K \subset L$. Wówczas, jeżeli $\alpha \in A_L(X,Y)$, to $\bar{\alpha}\big(L(X)\big) = 0$. Ponieważ $K \subset L$, zatem również $\bar{\alpha}\big(K(X)\big) = 0$. Stąd $A_L \subset A_K$, co oznacza, że $\Psi(L) \subset \Psi(K)$.

W dalszej części pokażemy, że $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathscr{K}}$ oraz $\Psi \circ \big(\Phi|\bar{\mathscr{A}}\big) = \mathrm{id}_{\bar{\mathscr{A}}}$, tzn. $K = K_{A_K}$ i $A = A_{K_A}$ dla reprezentowalnego funktora odwzorowań $A$ oraz podfunktora $K$ funktora $\mathcal{F}$. Mamy

$$K_{A_K}(X) = \big\{u \in \mathcal{F}(X)\ ;\ \forall_{Y \in R\text{-Mod}}\ \forall_{\alpha \in A_K(X,Y)}\ \bar{\alpha}(u) = 0\big\},$$
$$A_{K_A}(X,Y) = \big\{\alpha \in \mathrm{Map}(X,Y)\ ;\ \bar{\alpha}\big(K_A(X)\big) = 0\big\}.$$

Niech $u \in K(X)$. Wówczas dla dowolnego odwzorowania $\alpha \in A_K(X,Y)$ wprost z określenia $A_K$ otrzymujemy równość $\bar{\alpha}(u) = 0$, skąd $K \subset K_{A_K}$. Podobnie, jeżeli $\alpha \in A(X,Y)$, to $\bar{\alpha}\big(K_A(X)\big) = 0$, zatem $A \subset A_{K_A}$.

Niech teraz $u \in K_{A_K}(X)$. Rozważmy $Y = \mathcal{F}(X)/K(X)$ oraz homomorfizm naturalny $\bar{\alpha} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)/K(X)$, któremu wzajemnie jednoznacznie odpowiada odwzorowanie $\alpha = \bar{\alpha} \circ i : X \to Y$, gdzie $i$ jest włożeniem $X$ w $\mathcal{F}(X)$. Przy tych założeniach $\bar{\alpha}\big(K(X)\big) = 0$, więc $\alpha \in A_K(X,Y)$. Wobec tego $\bar{\alpha}(u) = 0$, co oznacza, że $u \in K(X)$. Zatem $K_{A_K} \subset K$ i ostatecznie $K = K_{A_K}$. Pokazaliśmy, że $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathscr{K}}$.

Pokażemy teraz, że $\bar{A} = A_{K_A}$ zawiera się w dowolnym reprezentowalnym funktorze odwzorowań, zawierającym wyjściowy funktor $A$. Niech $B$ będzie reprezentowalnym funktorem odwzorowań, oraz niech $A \subset B$. Z Twierdzenia 11 otrzymujemy $B = A_K$ dla pewnego podfunktora $K$ funktora $\mathcal{F}$. Ponieważ $A \subset B$ i $K \subset K_{A_K} = K_B$, zatem $K \subset K_B \subset K_A$. Stąd $A_{K_A} \subset A_K = B$. Oznacza to, że każdy reprezentowalny funktor odwzorowań $B$ zawiera się w $\bar{A}$. Stąd $\bar{A}$ jest powłoką reprezentowalną funktora $A$. W szczególności jeżeli $A \in \bar{\mathscr{A}}$, to możemy przyjąć $B = A$ i otrzymujemy $A_{K_A} \subset A$. Ponieważ $A \subset A_{K_A}$, więc

$A_{K_A} = A$, tzn. $\Psi \circ \left(\Phi|\bar{\mathscr{A}}\right) = \mathrm{id}_{\bar{\mathscr{A}}}$. $\square$

## 5.2 Warunki typu równości i ED-funktory

**Definicja 24** *Przez warunek typu równości będziemy rozumieli związek postaci*

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \alpha\big(\sum_{k=1}^{m} s_{jk} x_k\big) = 0,$$

*gdzie* $\alpha : X \to Y$ *jest odwzorowaniem pomiędzy* $R$*-modułami,* $r_j, s_{jk} \in R$ *oraz* $x_k \in X$*. Zakładamy przy tym, że* $r_j$ *oraz* $s_{kj}$ *są ustalonymi elementami pierścienia* $R$*, natomiast* $x_k$ *jest dowolnym elementem* $R$*-modułu* $X$*.*

**Definicja 25** *Klasę* $\mathscr{E}$ *odwzorowań pomiędzy* $R$*-modułami nazywamy równościowo definiowalną, jeżeli składa się ona z dokładnie tych odwzorowań, które spełniają pewien zestaw warunków typu równości, tzn. takich odwzorowań* $\alpha : X \to Y$*, dla których*

$$\sum_{j} r_{ij} \alpha\big(\sum_{k} s_{ijk} x_k\big) = 0, \quad i \in I,$$

*gdzie* $j$ *przebiega pewien (zależny od* $i$*) zakres indeksów* $\{1, \ldots, n_i\}$ *i analogicznie* $k$ *przebiega* $\{1, \ldots, m_i\}$*.*

Klasa wszystkich odwzorowań pomiędzy $R$-modułami jest równościowo definiowalna dla pustego układu warunków. Klasa odwzorowań stałych jest równościowo definiowalna. Klasa wszystkich $R$-homomorfizmów jest równościowo definiowalna, gdyż jej elementami są wszystkie odwzorowania $\alpha : X \to Y$ spełniające warunki

$$\alpha(x_1 + x_2) - \alpha(x_1) - \alpha(x_2) = 0,$$

$$\alpha(r x_1) - r\alpha(x_1) = 0.$$

Podobnie klasa wszystkich odwzorowań kwadratowych jest równościowo definiowalna.

**Twierdzenie 13** *Niech $\mathscr{E}$ będzie klasą równościowo definiowalną oraz niech*

$$A(X,Y) = \big\{\alpha \in \mathrm{Map}(X,Y)\ ;\ \alpha \in \mathscr{E}\big\}.$$

*Wówczas $A : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ jest funktorem odwzorowań.*

*dowód:* Niech $f_1 : X' \to X,\ f_2 : Y \to Y'$ będą $R$-homomorfizmami oraz niech $\alpha \in A(X,Y)$. Wówczas $\alpha$ spełnia zestaw warunków typu równości wyznaczony przez klasę $\mathscr{E}$, tzn.

$$\sum_j r_{ij}\alpha\big(\sum_k s_{ijk}x_k\big) = 0,$$

gdzie $r_{ij}, s_{ijk} \in R$ są ustalone, $x_k \in X$ są dowolne oraz $i \in I$. Należy pokazać, że $\mathrm{Map}(f_1, f_2)(\alpha) = f_2 \circ \alpha \circ f_1 \in A(X', Y')$. Niech $i \in I$ oraz $x'_k \in X'$. Wówczas

$$\sum_j r_{ij}(f_2 \circ \alpha \circ f_1)\big(\sum_k s_{ijk}x'_k\big) = \sum_j r_{ij} f_2\Big(\alpha\big(f_1\big(\sum_k s_{ijk}x'_k\big)\big)\Big) =$$
$$= \sum_j r_{ij} f_2\Big(\alpha\big(\sum_k s_{ijk} f_1(x'_k)\big)\Big) = f_2\Big(\sum_j r_{ij}\alpha\big(\sum_k s_{ijk} f_1(x'_k)\big)\Big) = f_2(0) = 0,$$

co oznacza, że $f_2 \circ \alpha \circ f_1 \in A(X', Y')$. Wobec tego $A \subset \mathrm{Map}$. □

Funktor $A$ określony w powyższym twierdzeniu nazywamy funktorem równościowo definiowalnym wyznaczonym przez klasę $\mathscr{E}$, lub krótko ED-funktorem.

Funktory Map, $\mathrm{Hom}_R$ oraz funktor $\mathrm{Hom}_R^2$ określony w Przykładzie 2 są przykładami funtorów równościowo definiowalnych.

**Twierdzenie 14** *Każdy* ED-*funktor $A$ jest reprezentowalny. Dokładniej, jeśli $A$ jest funktorem równościowo definiowalnym zadanym przez układ równości*

$$\sum_j r_{ij}\alpha\big(\sum_k s_{ijk}x_k\big) = 0, \quad i \in I,$$

*to $A = A_K$, gdzie*

$$K(X) = R\Big\{\sum_j r_{ij}\big[\sum_k s_{ijk}x_k\big]\ ;\ i \in I, x_k \in X\Big\}.$$

*dowód:* Rozważmy $\alpha \in A(X,Y)$. Wówczas

$$\bar{\alpha}\big(\sum_j r_{ij}\big[\sum_k s_{ijk}x_k\big]\big) = \sum_j r_{ij}\alpha\big(\sum_k s_{ijk}x_k\big) = 0,$$

skąd wynika, że $A \subset A_K$. Niech teraz $\alpha \in A_K(X,Y)$. Wówczas

$$\sum_j r_{ij}\alpha\big(\sum_k s_{ijk}x_k\big) = \sum_j r_{ij}\bar{\alpha}\big([\sum_k s_{ijk}x_k]\big) = \\ = \bar{\alpha}\Big(\sum_j r_{ij}[\sum_k s_{ijk}x_k]\Big) \in \bar{\alpha}\big(K(X)\big) = 0,$$

zatem $\alpha \in A(X,Y)$, skąd $A \supset A_K$ i ostatecznie $A = A_K$. Pokazaliśmy zatem, że dowolny ED-funktor $A$ jest postaci $A_K$, wobec czego $A$ jest reprezentowalny na podstawie Lematu 18. □

## 5.3 Charakteryzacja funktorów równościowo definiowalnych

Celem tego paragafu jest udowodnienie następującego twierdzenia, które jest głównym wynikiem tej pracy:

**Twierdzenie 15** ([4], Twierdzenie 3.1.2) *Niech $A$ będzie funktorem odwzorowań. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *$A$ jest równościowo definiowalny,*
2. *$A$ jest reprezentowany przez funktor zachowujący ciągi Grothendiecka pierwszego rodzaju i granice proste,*
3. *$A = A_K$, gdzie $K$ jest funktorem zachowującym granice proste i epimorfizmy.*

*Jeśli powyższe warunki są spełnione, to $A$ jest wyznaczony jednoznacznie przez wartość funktora $K$ na $R$-module wolnym $R^\infty$ o bazie przeliczalnej.*

*dowód:* ($1 \Rightarrow 2$) Ponieważ każdy funktor równościowo definiowalny jest postaci $A_K$, zatem na mocy Lematu 18 mamy izomorfizm funktorów

$$A(X,Y) = A_K(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\left(\mathcal{F}(X)/K(X), Y\right),$$

a więc $A$ jest reprezentowany przez funktor $\mathcal{F}/K$. Pokażemy, że

(i) funktor $\mathcal{F}/K$ zachowuje ciągi Grothendiecka pierwszego rodzaju,

(ii) funktor $\mathcal{F}/K$ zachowuje granice proste.

(i) Niech ciąg

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

będzie ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju. Należy pokazać, że ciąg

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{F}/K)(X) \arrow[r, shift left, "(\mathcal{F}/K)(f_1)"] \arrow[r, shift right, "(\mathcal{F}/K)(f_2)"'] & (\mathcal{F}/K)(Y) \arrow[r, "(\mathcal{F}/K)(g)"] & (\mathcal{F}/K)(Z) \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

jest również ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju. Niech $y \in (\mathcal{F}/K)(Y)$, $y = \sum_{i=1}^{n} r_i[y_i] + K(Y)$. Z założenia ciąg (5.1) jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju, wobec czego z Twierdzenia 4 wynika, że dla dowolnego $y_i$ istnieje $x_i \in X$ taki, że $y_i = f_1(x_i) = f_2(x_i)$. Zatem

$$y = \sum_{i=1}^{n} r_i[f_1(x_i)] + K(Y) = (\mathcal{F}/K)(f_1)\big(\sum_{i=1}^{n} r_i[x_i] + K(X)\big),$$
$$y = \sum_{i=1}^{n} r_i[f_2(x_i)] + K(Y) = (\mathcal{F}/K)(f_2)\big(\sum_{i=1}^{n} r_i[x_i] + K(X)\big).$$

Ponieważ $g$ jest epimorfizmem, zatem dla dowolnego $z \in Z$ istnieje $y \in Y$ taki, że $z = g(y)$. Analogicznie jak we Wniosku 2 możemy zatem rozważać odwzorowanie $\psi : Z \to N$ określone wzorem $\psi(z) = \varphi(y)$, dla $z = g(y)$, $\varphi \in A(Y, N)$. We Wniosku 2 pokazaliśmy, że takie odwzorowanie jest poprawnie określone i uzupełnia diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & N & \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

do diagramu przemiennego. Ponadto, jeżeli $\varphi$ spełnia równości definiujące $A$, tzn., powiedzmy równości

$$\sum_j r_j \varphi\big(\sum_k s_{jk} y_k\big) = 0, \quad i \in I,$$

dla dowolnych $y_k \in Y$, to $\psi$ spełnia te same warunki co $\varphi$. Istotnie, mamy

$$\sum_j r_j \psi\big(\sum_k s_{jk} z_k\big) = \sum_j r_j \psi\big(\sum_k s_{jk} g(y_k)\big) =$$
$$= \sum_j r_j \psi\Big(g\big(\sum_k s_{jk} y_k\big)\Big) = \sum_j r_j \varphi\big(\sum_k s_{jk} y_k\big) = 0,$$

dla dowolnych $z_k \in Z$ gdzie $z_k = g(y_k)$, $y_k \in Y$, i dla dowolnego $i \in I$. Zatem $\psi \in A(Z, N)$. Wobec tego, na podstawie Lematu 12, ciąg

$$A(Z,N) \xrightarrow{g^*} A(Y,N) \underset{f_2^*}{\overset{f_1^*}{\rightrightarrows}} A(X,N). \tag{5.4}$$

jest ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju. Zatem również

$$\mathrm{Hom}_R\Big(\big(\mathcal{F}/K\big)(Z), N\Big) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R\Big(\big(\mathcal{F}/K\big)(Y), N\Big) \underset{f_2^*}{\overset{f_1^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_R\Big(\big(\mathcal{F}/K\big)(X), N\Big).$$

jest ciągiem Grothendiecka drugiego rodzaju. Biorąc także pod uwagę pierwszą część dowodu, na podstawie Twierdzenia 5 stwierdzamy, że (5.2) jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju. Stąd funktor $\mathcal{F}/K$ zachowuje ciągi Grothendiecka pierwszego rodzaju.

(ii) Pokażemy, że funktor $\mathcal{F}/K$ zachowuje granice proste.
Niech $\{X_\alpha, f_\beta^\alpha\}$ będzie prostym systemem $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$ oraz niech $R$-moduł $X$ będzie granicą tego systemu. Pokażemy, że $\mathcal{F}(X)/K(X)$ wraz z $R$-homomorfizmami $(\mathcal{F}/K)(f^\alpha)$ jest granicą systemu $\big\{\mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha), (\mathcal{F}/K)(f^\alpha)\big\}$. Ponieważ $\mathcal{F}/K$ jest funktorem, zatem dla dowolnego $\alpha \in S$, z przemienności diagramów

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\beta^\alpha"] \arrow[dr, "f^\alpha"'] & X_\beta \arrow[d, "f^\beta"] \\ & X \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

wynika, że diagramy

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha) \arrow[r, "(\mathcal{F}/K)(f_\beta^\alpha)"] \arrow[dr, "(\mathcal{F}/K)(f^\alpha)"'] & \mathcal{F}(X_\beta)/K(X_\beta) \arrow[d, "(\mathcal{F}/K)(f^\beta)"] \\ & \mathcal{F}(X)/K(X) \end{tikzcd}$$

są również przemienne. Niech $Y$ będzie dowolnym $R$-modułem oraz niech dla dowolnego $\alpha \in S$ określone będą $R$-homomorfizmy $g_\alpha : \mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha) \to Y$

takie, że diagramy

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha) \arrow[r, "(\mathcal{F}/K)(f^\alpha_\beta)"] \arrow[dr, "g^\alpha"] & \mathcal{F}(X_\beta)/K(X_\beta) \arrow[d, "g^\beta"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

są przemienne dla wszystkich $\alpha \leq \beta$.

Należy określić $R$-homomorfizm $g : \mathcal{F}(X)/K(X) \to Y$ w taki sposób, aby uzupełniał diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha) \arrow[rr, "(\mathcal{F}/K)(f^\alpha_\beta)"] \arrow[dr, "(\mathcal{F}/K)(f^\alpha)"] \arrow[ddr, bend right, "g^\alpha"'] & & \mathcal{F}(X_\beta)/K(X_\beta) \arrow[dl, "(\mathcal{F}/K)(f^\beta)"'] \arrow[ddl, bend left, "g^\beta"] \\ & \mathcal{F}(X)/K(X) & \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha) \arrow[rr, "(\mathcal{F}/K)(f^\alpha_\beta)"] \arrow[dr, "(\mathcal{F}/K)(f^\alpha)"] \arrow[ddr, bend right, "g^\alpha"'] & & \mathcal{F}(X_\beta)/K(X_\beta) \arrow[dl, "(\mathcal{F}/K)(f^\beta)"'] \arrow[ddl, bend left, "g^\beta"] \\ & \mathcal{F}(X)/K(X) \arrow[d, dashed, "g"] & \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

Zauważmy, że jeżeli $x \in X$, to $x = f^\alpha(x_\alpha)$ dla pewnego $x_\alpha \in X_\alpha$. Rozważmy zatem homomorfizm $g' : \mathcal{F}(X) \to Y$ określony na bazie wzorem

$$g'\big([x]\big) = g^\alpha\big([x_\alpha] + K(X_\alpha)\big).$$

Z określenia wynika, że $g'$ jest wyznaczony jednoznacznie. Analogicznie jak w Twierdzeniu 9 możemy sprawdzić, że homomorfizm $g'$ jest poprawnie określony. Zauważmy ponadto, że jeżeli $x_1 = f^{\alpha_1}(X_{\alpha_1,1}), \ldots, x_n = f^{\alpha_n}(X_{\alpha_n,n})$, to istnieje $\alpha \in S$ takie, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \leq \alpha$, wobec czego $x_i = f^\alpha\big(f^{\alpha_i}_\alpha(x_{\alpha_i,i})\big)$ dla

$i = 1, \ldots, n$. Połóżmy $x_i = f_\alpha^{\alpha_i}(x_{\alpha_i,i})$. Wówczas $\sum\limits_k s_{ijk}x_k = f^\alpha\big(\sum\limits_k s_{ijk}x_{\alpha k}\big)$. Zauważmy teraz, że $g'\big(K(X)\big) = 0$. Istotnie, mamy

$$g'\Big(\big[\sum_k s_{ijk}x_k\big]\Big) = g^\alpha\Big(\big[\sum_k s_{ijk}x_{\alpha k}\big] + K(X_\alpha)\Big) = g^\alpha(0) = 0.$$

Zatem z Twierdzenia 1 wynika, że istnieje dokładnie jeden $R$-homomorfizm $g : \mathcal{F}(X)/K(X) \to Y$ taki, że $g\big(x + K(X)\big) = g'(x)$ dla $x \in \mathcal{F}(X)$. Ponadto $g$ uzupełnia diagram (5.6) do diagramu przemiennego (5.7), co oznacza, że $\mathcal{F}(X)/K(X) = \varinjlim \mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha)$. Zatem $\mathcal{F}/K$ zachowuje granice proste.

(*2* $\Rightarrow$ *3*): Niech $A = A_K$ będzie funktorem odwzorowań reprezentowanym przez funktor $\mathcal{F}/K$ zachowujący ciągi Grothendiecka pierwszego rodzaju oraz granice proste. Pokażemy, że

(i) $K$ zachowuje granice proste,

(ii) $K$ zachowuje epimorfizmy.

(i) Niech $\{X_\alpha, f_\beta^\alpha\}$ będzie prostym systemem $R$-modułów nad zbiorem skierowanym $S$. Niech $R$-moduł $X$ wraz z $R$-homomorfizmami $f^\alpha : X_\alpha \to X$ będzie granicą prostą tego systemu. Ponieważ $K$, $\mathcal{F}$ oraz $\mathcal{F}/K$ są funktorami, zatem $\{K(X_\alpha), K(f_\beta^\alpha)\}$, $\{\mathcal{F}(X_\alpha), \mathcal{F}(f_\beta^\alpha)\}$ oraz $\{\mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha), (\mathcal{F}/K)(f_\beta^\alpha)\}$ są systemami prostymi. Dla każdego $\alpha \in S$ niech $\nu_\alpha : \mathcal{F}(X_\alpha) \to \mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha)$ będą homomorfizmami naturalnymi. Podobnie niech $\nu : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)/K(X)$ będzie homomorfizmem naturalnym. Wobec tego, z definicji $(\mathcal{F}/K)(f^\alpha)$ wynika, że diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X_\alpha) \arrow[r, "\nu_\alpha"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f^\alpha)"] & \mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha) \arrow[d, "(\mathcal{F}/K)(f^\alpha)"] \\
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\nu"] & \mathcal{F}(X)/K(X)
\end{tikzcd} \tag{5.8}$$

jest przemienny dla każdego $\alpha \in S$. Ponieważ funktory $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}/K$ zachowują granice proste z założenia, tzn. $\mathcal{F}(X)$ wraz z $R$-homomorfizmami $\mathcal{F}(f^\alpha)$ jest granicą systemu $\big\{\mathcal{F}(X_\alpha), \mathcal{F}(f^\alpha)\big\}$ oraz $\mathcal{F}(X)/K(X)$ wraz z $R$-homomorfizmami $(\mathcal{F}/K)(f^\alpha)$ jest granicą systemu $\big\{\mathcal{F}(X_\alpha)/K(X_\alpha), (\mathcal{F}/K)(f^\alpha)\big\}$, więc porównując powyższy diagram z diagramem (3.20) ze strony 33 widzimy, że $\nu = \varinjlim \nu_\alpha$.

Ponadto z Twierdzenia 8 wynika, że

$$\ker\big(\varinjlim \nu_\alpha\big) = \bigcup_\alpha \mathcal{F}(f^\alpha)\big(\ker(\nu_\alpha)\big).$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} K(X) = \ker(\nu) = \ker\big(\varinjlim \nu_\alpha\big) &= \bigcup_\alpha \mathcal{F}(f^\alpha)\big(\ker(\nu_\alpha)\big) = \\ = \bigcup_\alpha \mathcal{F}(f^\alpha)\big(K(X_\alpha)\big) &= \bigcup_\alpha K(f^\alpha)\big(K(X_\alpha)\big) = \bigcup_\alpha \operatorname{im}\big(K(f^\alpha)\big). \end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że $K(X) = \bigcup_\alpha \operatorname{im}\big(K(f^\alpha)\big)$ wraz z $R$-homomorfizmami $K(f^\alpha)$ jest granicą prostą systemu $\{K(X_\alpha), K(f^\alpha)\}$. Niech $Y$ będzie dowolnym $R$-modułem. Należy określić $R$-homomorfizm $g : K(X) \to Y$ tak, aby diagram

$$\begin{tikzcd} K(X_\alpha) \arrow[rr, "K(f^\alpha_\beta)"] \arrow[dr, "K(f^\alpha)"] \arrow[ddr, bend right=60, "g^\alpha"'] & & K(X_\beta) \arrow[dl, "K(f^\beta)"'] \arrow[ddl, bend left=60, "g^\beta"] \\ & K(X) \arrow[d, dashed, "g"] & \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{5.9}$$

był przemienny. Zauważmy, że dla dowolnego $z \in K(X)$ istnieje element $u \in K(X_\alpha)$ taki, że $z = K(f^\alpha)(u)$ dla pewnego $\alpha \in S$. Ponieważ $g$ ma uzupełniać powyższy diagram, zatem musi być określone wzorem $g(z) = g^\alpha(u)$. Stąd w szczególności $g$ jest co najwyżej jedno. Odwzorowanie $g$ jest poprawnie określone. Istotnie, niech $z = K(f^\alpha)(u)$ i $z = K(f^\beta)(t)$. Wówczas $z = \mathcal{F}(f^\alpha)(u) = \mathcal{F}(f^\beta)(t)$, gdyż $K$ jest podfunktorem funktora $\mathcal{F}$. Zbiór $S$ jest skierowany, zatem istnieje $\gamma \in S$ takie, że $\alpha, \beta \leq \gamma$. Wobec tego

$$z = \mathcal{F}(f^\gamma)\big(\mathcal{F}(f^\alpha_\gamma)(u)\big) = \mathcal{F}(f^\gamma)\big(\mathcal{F}(f^\beta_\gamma)(t)\big).$$

Zatem $\mathcal{F}(f^\alpha_\gamma)(u) - \mathcal{F}(f^\beta_\gamma)(t) \in \ker\big(\mathcal{F}(f^\gamma)\big)$. Funktor $\mathcal{F}$ zachowuje granice proste, zatem istnieje $\delta \in S$ takie, że $\gamma \leq \delta$ i

$$\mathcal{F}(f^\gamma_\delta)\big(\mathcal{F}(f^\alpha_\gamma)(u) - \mathcal{F}(f^\beta_\gamma)(t)\big) = 0.$$

Stąd $\mathcal{F}(f^\alpha_\delta)(u) = \mathcal{F}(f^\beta_\delta)(t)$ i

$$g^\alpha(u) = g^\delta\big(\mathcal{F}(f^\alpha_\delta)(u)\big) = g^\delta\big(\mathcal{F}(f^\beta_\delta)(t)\big) = g^\beta(t),$$

co oznacza, że $g$ jest poprawnie określone. Zauważmy, że $g$ jest $R$-homomorfizmem, bo jeśli $z_1, z_2 \in K(X)$, $z_1 = K(f^\alpha)(u_1)$, $z_2 = K(f^\beta)(u_2)$, to dla $\gamma \geq \alpha, \beta$ mamy $z_1 = K(f^\gamma)(v_1)$, $z_2 = K(f^\gamma)(v_2)$, skąd $z_1 + z_2 = K(f^\gamma)(v_1 + v_2)$, $rz_1 = = K(f^\gamma)(rv_1)$. Zatem

$$g(z_1 + z_2) = g^\gamma(v_1 + v_2) = g^\gamma(v_1) + g^\gamma(v_2) = g(z_1) + g(z_2)$$

i analogicznie

$$g(rz_1) = g^\gamma(rv_1) = rg^\gamma(v_1) = rg(z_1).$$

Zatem $K(X) = \varinjlim K(X_\alpha)$, a więc funktor $K$ zachowuje granice proste.

(ii) Niech $g : Y \to Z$ będzie epimorfizmem oraz niech $i$ będzie włożeniem $\ker(g)$ w $Y$. Wówczas, na podstawie Lematu 10 ciąg

$$\ker(g) \oplus Y \underset{(0,\mathrm{id}_Y)}{\overset{(i,\mathrm{id}_Y)}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{g} Z \tag{5.10}$$

jest ciągiem Grothendiecka pierwszego rodzaju. Oznaczmy $f_1 = (i, \mathrm{id}_Y)$, $f_2 = = (0, \mathrm{id}_Y)$ oraz $X = \ker(g) \oplus Y$. Ponieważ Map jest ED-funktorem, zatem $\mathcal{F}$ (na podstawie implikacji (1⇒2)) zachowuje ciągi Grothendiecka pierwszego rodzaju, skąd ciąg

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_1) - \mathcal{F}(f_2)} \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(Z) \longrightarrow 0$$

jest dokładny na mocy Twierdzenia 4. Z założenia funktor $\mathcal{F}/K$ zachowuje ciągi Grothendiecka pierwszego rodzaju, zatem również ciąg

$$\mathcal{F}(X)/K(X) \xrightarrow{(\mathcal{F}/K)(f_1) - (\mathcal{F}/K)(f_2)} \mathcal{F}(Y)/K(Y) \xrightarrow{(\mathcal{F}/K)(g)} \mathcal{F}(Z)/K(Z) \longrightarrow 0$$

jest dokładny. Oznaczając $f' = \mathcal{F}(f_1) - \mathcal{F}(f_2)$ oraz $f'' = (\mathcal{F}/K)(f_1) - (\mathcal{F}/K)(f_2)$ otrzymujemy, że diagram o dokładnych wierszach i kolumnach

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & K(Y) \arrow[r, "K(g)"] \arrow[d, "i_Y"] & K(Z) \arrow[d, "i_Z"] & \\
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\nu_X"] & \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\mathcal{F}(g)"] \arrow[d, "\nu_Y"] & \mathcal{F}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\nu_Z"] & 0 \\
\mathcal{F}(X)/K(X) \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & \mathcal{F}(Y)/K(Y) \arrow[r, "(\mathcal{F}/K)(g)"] \arrow[d] & \mathcal{F}(Z)/K(Z) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{5.11}$$

jest przemienny, gdzie $i_Y$, $i_Z$ są włożeniami, natomiast $\nu_X, \nu_Y, \nu_Z$ są homomorfizmami naturalnymi. Pokażemy, że $K(g)$ jest epimorfizmem. Niech $z \in K(Z)$. Ponieważ $\mathcal{F}(g)$ jest epimorfizmem, zatem istnieje $y' \in \mathcal{F}(Y)$ taki, że $\mathcal{F}(g)(y') = i_Z(z)$. Diagram (5.11) jest przemienny, skąd, w szczególności, kwadrat

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\mathcal{F}(g)"] \arrow[d, "\nu_Y"] & \mathcal{F}(Z) \arrow[d, "\nu_Z"] \\
\mathcal{F}(Y)/K(Y) \arrow[r, "(\mathcal{F}/K)(g)"] & \mathcal{F}(Z)/K(Z)
\end{tikzcd}$$

jest przemienny, tzn. $\nu_Z \circ \mathcal{F}(g) = (\mathcal{F}/K)(g) \circ \nu_Y$. Ponadto $\nu_Z\big(i_Z(z)\big) = 0$, wobec czego $0 = \nu_Z\big(\mathcal{F}(g)(y')\big) = (\mathcal{F}/K)(g)\big(\nu_Y(y')\big)$. Z dokładności trzeciego wiersza wynika, że istnieje $\bar{x}' \in \mathcal{F}(X)/K(X)$ taki, że $f''(\bar{x}') = \nu_Y(y')$. Ponieważ $\nu_X$ jest epimorfizmem, zatem $\bar{x}' = \nu_X(x')$ dla pewnego $x' \in \mathcal{F}(X)$. Powyższe zależności ilustruje diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & & z \arrow[d, mapsto] \\
x' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f'(x') \arrow[dr, mapsto] & y' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & i_Z(z) \arrow[d, mapsto] \\
\bar{x}' \arrow[rr, mapsto] & & \nu_Y(y') \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

Z przemienności diagramu

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\nu_X"] & \mathcal{F}(Y) \arrow[d, "\nu_Y"] \\
\mathcal{F}(X)/K(X) \arrow[r, "f''"] & \mathcal{F}(Y)/K(Y)
\end{tikzcd}$$

wynika więc, że $\nu_Y\big(f'(x')\big) = \nu_Y(y')$, skąd $\nu\big(y' - f'(x')\big) = 0$. Zatem istnieje $y \in K(Y)$ taki, że $i_Y(y) = y' - f'(x')$, jak w poniższym diagramie:

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto] & z \arrow[d, mapsto] \\
y' - f'(x') \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & i_Z(z) \\
0 &
\end{tikzcd}$$

Zauważmy, że, jak zaznaczono powyżej, $\mathcal{F}(g)\big(y' - f'(x')\big) = \mathcal{F}(g)(y') = i_Z(z)$, gdyż $f'(x') \in \operatorname{im}(f') = \ker\big(\mathcal{F}(g)\big)$. Pozostaje zauważyć, że $K(g)(y) = z$. Istotnie,

$$i_z\big(K(g)(y)\big) = \mathcal{F}(g)\big(i_Y(y)\big) = \mathcal{F}(g)\big(y' - f'(x')\big) = i_Z(z),$$

skąd $K(g)(y) = z$, gdyż $i_Z$ jest monomorfizmem. Stąd $K(g)$ jest epimorfizmem.

(*3* $\Rightarrow$ *1*): Niech $A = A_K$ oraz niech funktor $K$ zachowuje granice proste i epimorfizmy. Wybierzmy pewien zbiór generatorów podmodułu $K(R^\infty) \subset$
$\subset \mathcal{F}(R^\infty)$, gdzie $R^\infty$ jest $R$-modułem wolnym o przeliczalnej bazie $\{e_1, e_2, \ldots\}$, a więc przyjmijmy, że $K(R^\infty) = R\big\{\sum_j r_{ij}\big[\sum_k s_{ijk}e_k\big]\ ;\ i \in I\big\}$ dla ustalonych $r_{ij}, s_{ijk} \in R$. Dla dowolnego $X \in R$-Mod oraz $x_1, x_2, \ldots \in X$ rozważmy
$R$-moduł $R\big\{x_1, x_2, \ldots\big\}$ oraz epimorfizm $\varphi : R^\infty \to R\big\{x_1, x_2, \ldots\big\}$ zadany na bazie wzorem $\varphi(e_k) = x_k$. Ponieważ funktor $K$ zachowuje epimorfizmy, zatem $K(\varphi) : K(R^\infty) \to K\big(R\{x_1, x_2 \ldots\}\big)$ jest również epimorfizmem, co oznacza, że $K(\varphi)\big(K(R^\infty)\big) = K\big(R\{x_1, x_2, \ldots\}\big)$. Stąd $K\big(R\{x_1, x_2, \ldots\}\big)$ jest generowany przez obrazy generatorów modułu $K(R^\infty)$, czyli elementy

$$\begin{aligned}
K(\varphi)\Big(\sum_j r_{ij}\big[\sum_k s_{ijk}e_k\big]\Big) &= \sum_j r_{ij}K(\varphi)\Big(\big[\sum_k s_{ijk}e_k\big]\Big) = \\
&= \sum_j r_{ij}\big[\sum_k s_{ijk}\varphi(e_k)\big] = \sum_j r_{ij}\big[\sum_k s_{ijk}x_k\big],
\end{aligned}$$

gdzie $i \in I$. Oznacza to, że

$$K\big(R\{x_1, x_2, \ldots\}\big) = R\Big\{\sum_j r_{ij}\,[\sum_k s_{ijk}x_k]\ ;\ i \in I\Big\}. \tag{5.12}$$

W Przykładzie 6 rozważaliśmy system prosty $\{X_\alpha, f^\alpha_\beta\}$ nad zbiorem skierowanym $S$ wszystkich co najwyżej przeliczalnych podzbiorów zbioru $X$. Przypomnijmy, że jeśli $\alpha \in S$ oraz $\alpha = X'$, to przez $X_\alpha$ oznaczamy podmoduł $RX'$. Jeśli $\beta \in S$ oraz $\alpha \leq \beta$, to $X_\alpha \subset X_\beta$ i $R$-homomorfizm $f^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ określamy jako włożenie.

Pokazaliśmy, że $X = \bigcup\limits_\alpha X_\alpha$ wraz z włożeniami $f^\alpha : X_\alpha \to X$ jest granicą prostą tego systemu. Zauważmy, że jeżeli $X_\alpha \subset X$, to $\mathcal{F}(f^\alpha) : \mathcal{F}(X_\alpha) \to \mathcal{F}(X)$, $\mathcal{F}(f^\alpha)\big(\sum\limits_i r_i[x_i]\big) = \sum\limits_i r_i[x_i]$ jest monomorfizmem, można więc uznać, że $\mathcal{F}(X_\alpha) \subset \subset \mathcal{F}(X)$. Podobnie $K(f^\alpha) : K(X_\alpha) \to K(X)$ jest monomorfizmem jako ograniczenie $\mathcal{F}(f^\alpha)$, zatem możemy przyjąć, że $K(X_\alpha) \subset K(X)$. Z założenia mamy więc

$$\begin{aligned} K(X) &= \varinjlim K(X_\alpha) = \bigcup_\alpha K(f^\alpha)\big(K(X_\alpha)\big) = \bigcup_\alpha K(X_\alpha) = \\ &= \bigcup_{x_1, x_2, \ldots \in X} K\big(R\{x_1, x_2, \ldots\}\big) = R\Big\{\sum_j r_{ij}\,[\sum_k s_{ijk}x_k]\ ;\ i \in I, x_k \in X\Big\}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} A(X,Y) = A_K(X,Y) &= \big\{\alpha \in \mathrm{Map}(X,Y)\ ;\ \bar{\alpha}\big(K(X)\big) = 0\big\} = \\ &= \Big\{\alpha \in \mathrm{Map}(X,Y)\ ;\ \mathop{\forall}_{i \in I}\ \mathop{\forall}_{x_k \in X}\ \bar{\alpha}\Big(\sum_j r_{ij}\,[\sum_k s_{ijk}x_k]\Big) = 0\Big\} = \\ &= \Big\{\alpha \in \mathrm{Map}(X,Y)\ ;\ \mathop{\forall}_{i \in I}\ \mathop{\forall}_{x_k \in X}\ \sum_j r_{ij}\alpha\big(\sum_k s_{ijk}x_k\big) = 0\Big\}, \end{aligned}$$

co oznacza, że $A$ jest ED-funktorem. Przy tym, jak widzieliśmy, relacje są wyznaczone jednoznacznie przez generatory nad $K(R^\infty)$, czyli ostatnia część tezy jest też spełniona. □

Można pokazać ([4], Wniosek 3.2.2), że jeśli podfunktor $K$ funktora $\mathcal{F}$ zachowuje epimorfizmy, to zachowuje też granice proste. Wobec tego w powyższym twierdzeniu można opuścić założenia o zachowywaniu granic prostych. Dowód tego faktu wymaga jednak użycia metod, które wykraczają poza granice tej pracy.

# Bibliografia


[1] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969 (istnieje przekład rosyjski: Mir, Moskwa 1972)

[2] S. Balcerzyk, *Algebra homologiczna*, PWN, Warszawa 1972

[3] A. Prószyński, *Forms and mappings. I: Generalities*, Fund. Math. 122 (1984) 219-235

[4] A. Prószyński, *Odwzorowania wyższych stopni*, Wydawnictwo Uczelniane WSP w Bydgoszczy, Bydgoszcz 1987

[5] A. Prószyński, *Equationally definable functors and polynomial mappings*, Journal of Pure and Applied Algebra 56 (1989) 59-84

[6] N. Roby, *Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 80 (1963) 213-348

[7] Z. Semadeni, A. Wiweger, *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, PWN, Warszawa 1978