

Autor omówienia: Maurycy Wojda

Megalopolis

Zadanie

Dane jest ukorzenione nieważone drzewo z n wierzchołkami ($1 \leq n \leq 250\,000$). Dana jest również liczba m wypraw z wierzchołka numer 1 do dowolnego wierzchołka drzewa ($1 \leq m \leq 250\,000$). Dane jest $m+n-1$ zapytań, z których $n-1$ oznacza zamianę istniejącej krawędzi na super-krawędź (każda krawędź zostanie zamieniona na super-krawędź). Pozostałe m zapytań jest o liczbę normalnych krawędzi (nie super-krawędzi) na drodze z wierzchołka numer 1 do dowolnego, niekoniecznie innego wierzchołka.

Rozwiązania

Rozwiązanie wolne 1

Dla każdego wierzchołka trzymamy jego odległość od korzenia. Za każdym razem, gdy droga prowadząca do wierzchołka v jest zmieniana na autostradę (super-krawędź) to każdemu wierzchołkowi znajdującemu się w poddrzewie v zmniejszamy odległość do korzenia o 1. Na zapytania odpowiadamy w czasie stałym, ale łatwo jest się przekonać, na przykład biorąc test będący jedną długą ścieżką, że rozwiązanie jest kwadratowe.

Rozwiązanie wolne 2

Tym razem, duży nakład operacji przy zamianie krawędzi na super-krawędź zastępujemy dodatkowymi operacjami przy odpowiedzi na zapytania o wyprawy, za każdym razem licząc liczbę normalnych krawędzi na drodze z wierzchołka do korzenia. Na tym samym przykładzie co wyżej widzimy, że to rozwiązanie również jest kwadratowe.

Rozwiązanie wzorcowe

Zauważmy (zgodnie z podejściem w pierwszym wolnym rozwiązaniu), że zawsze, gdy zamieniamy jakąś drogę na autostradę, to to wpływa na wszystkie wierzchołki w poddrzewie wierzchołka, w którym autostrada się kończy, i na żadne inne. Mamy więc pewną strukturę w tym zadaniu, że zmieniamy w regularny sposób pewną logicznie spójną część grafu, a potem chcemy odczytywać wartości z poszczególnych wierzchołków. Naturalnie, powinno to się kojarzyć z drzewami przedziałowymi (przedział-punkt), ale mamy problem: jak przetłumaczyć poddrzewa na przedziały?

Z pomocą tutaj przychodzi numerowanie preorder. W skrócie, polega ono na przenieumerowaniu wierzchołków w kolejności, w której są odwiedzane przez puszczanego z korzenia DFSa. Takie numerowanie nie jest jednoznacznie wyznaczone, tzn. może być wiele numerowań preorder. Warto zauważyć, że wierzchołki w teście przykładowym są już podane zgodnie z numerowaniem preorder. W treści jest również podane, że droga z dowolnego wierzchołka do korzenia zawiera jedynie wierzchołki o numerach nie większych od numeru wierzchołka wyjściowego. Nie jest to jednak warunek dostateczny na to, aby to numerowanie było zgodne z numerowaniem preorder, a takie założenie prowadziło do błędnego rozwiązania. Ten szczegół w treści jest podany jedynie ze względu na wygodę implementacyjną (na przykład zawsze wiadomo, który wierzchołek danej krawędzi jest dalej od korzenia).

Numerowanie preorder pozwala nam przetłumaczyć poddrzewa na przedziały. Rozważmy poddrzewo wierzchołka v z numerem preorder p_v . Zauważmy, że v będzie miało najmniejszy numer preorder z całego swojego poddrzewa, ponieważ nie da się dojść do żadnego wierzchołka tego poddrzewa nie przechodząc najpierw przez v . Niech w będzie wierzchołkiem z największym numerem preorder p_w w poddrzewie v . Zauważmy, że natura DFSa, czyli przeszukiwania *w głębi*, polega na tym, że DFS nie wyjdzie z poddrzewa v zanim nie odwiedzi wszystkich wierzchołków w tym poddrzewie. Stąd, wszystkie wierzchołki o numerach w przedziale $[p_v, p_w]$ należą do tego poddrzewa. Dla każdego wierzchołka potrafimy znaleźć więc jego numer preorder oraz największy numer preorder w jego poddrzewie, utożsamiając tym samym każde poddrzewo z jakimś przedziałem numerów preorder, wszystko w czasie liniowym od liczby wierzchołków. Fantastycznie. Oznaczmy więc największy numer preorder w poddrzewie v jako q_v . Wspomnę jeszcze, że q_v możemy łatwo otrzymać biorąc maksimum z p_v oraz q_{v_i} gdzie v_i są bezpośrednimi podwierzchołkami v .

Mamy utożsamienie dowolnego poddrzewa z korzeniem w v z przedziałem liczb $[p_v, q_v]$, nie większych od n . Możemy teraz wrócić do oryginalnego pomysłu z drzewem przedziałowym. Początkowo, jeżeli odległość od korzenia do wierzchołka v wynosi d , to w drzewie przedziałowym ustawiamy wartość d pod indeksem p_v . Potem, jeżeli droga (a, b) zamieniana jest na autostradę, to wiemy, że odległość do całego poddrzewa b zmniejsza się o jeden, a odległość do wszystkich innych wierzchołków pozostaje niezmienną. Wówczas odejmujemy 1 na przedziale $[p_b, q_b]$ w naszym drzewie przedziałowym. Na koniec, jeżeli otrzymujemy zapytanie o liczbę polnych dróg od Bitocji do wioski o numerze a , to czytamy z drzewa przedziałowego wartość w punkcie p_a . Złożoność tego rozwiązania wynosi $\mathcal{O}((n + m) \log(n))$ i jest odpowiednia dla podanych ograniczeń.

Uwagi

Tłumaczenie poddrzew na przedziały można uzyskać nie tylko za pomocą numerowania preorder. Służy do tego również numerowanie postorder które nadaje wierzchołkom numery przy *wyjściu* z nich w trawersie DFSa. Działają też wszelkie inne numerowania, które zachowują ciągłość przedziałów na poddrzewach, na przykład inorder na drzewie binarnym, lub jego uogólnienia.